МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

МОДЕЛЬ НЕЙМАНА-ГЕЙЛА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета
Клевцовой Марины Александровны

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н. ______________ С. С. Волосивец

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., доцент ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2019

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Математическое моделирование экономической динамики и равновесия имеет многолетнюю историю. Классические модели основаны на функциональных и дифференциальных уравнениях. Некоторые разделы математики, например, теория оптимизации, развивались под воздействием необходимости математического моделирования экономических процессов. В более позднее время появились, в частности, математические модели, связанные с понятием многозначного отображения. Подобные модели применяются не только в экономике, но и, например, в экологии.

Рост экологической напряженности, вызывающей потребность учета экологического фактора, делает современную экономику все более зависящей от экологических норм и ориентаций. По сути, ориентация на международную концепцию устойчивого развития, призванная объединить в себе возможности для экономического роста с сохранением экологически безопасной среды жизнедеятельности, выступает одним из главных условий на пути перехода российской экономики к инновационному типу развития.

Целью бакалаврской работы является моделирование оценки экономического темпа роста предприятий с учетом экологического фактора.

Объектом исследования являются предприятия реального сектора экономики.

Предметом исследования является экономическая модель Неймана-Гейла.

При решении поставленных задач использовались следующие научные направления: экономическая динамика, аппарат теории нечетких множеств, аппарат математической статистики, системный анализ. Инструментальная поддержка заключается в использовании программной среды C#.

Практическая значимость. Предложенный способ учета экологического фактора и дальнейший анализ эколого-экономических связей может быть использован не только при оценке ущербов от загрязнений окружающей среды и их интеграции в денежный отток проектов, но и при выработке рекомендаций по управлению отходами предприятий.

Структура и содержание бакалаврской работы. Работа состоит из введения, 7 разделов, заключения, списка использованных источников и одного приложения. Общий объем работы составляет 56 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введение** обосновывается актуальность темы работы, формулируется цель работы и решаемые задачи, отмечается практическая значимость полученных результатов.

В **первом**, во **втором** и в **третьем** разделах вводятся основные определения, связанные с простой линейной моделью производства и свойства данной модели.

Если в линейной модели производства учавствуют n продуктов $G_1, \ldots, G_n$ и m технологических процессов $P_1, \ldots, P_m$, то эта модель полностью описывается производственной матрицей $A = (a_{ij})$, где a_{ij} - количество продукта G_i, потребленное или произведенное технологическим процессом P_i в зависимости от того, отрицательно a_{ij} или положительно.

Простая линейная модель с матрицей потребления будет называться продуктивной, если существует такой неотрицательный вектор $\overline{x}$, что $\overline{x} > \overline{x}A$. В этом случае мы будем также говорить, что сама матрица является продуктивной.

Множество неотрицательных решений неравенства $xA \leq b$ будем называть пространством затрат модели и обозначать через X.

В **четвертом** разделе рассматривается расширяющаяся модель Неймана.

Рассматриваем случай, когда выпуск продукции в модели изменяется во времени, а также возможность устойчивого расширения такой модели по отношению к ценам продуктов.

Рассмотрим общую модель, охватывающую n продуктов $G_1, \ldots, G_n$ и m технологических процессов $P_1, \ldots, P_m$. Явно разграничим продукты, которые в технологическом процессе затрачиваются, и те, которые в нем выпускаются. Обозначим для этого через α_{ij} количество продукта G_j, затрачиваемого в технологическом процессе P_i, а через β_{ij} - количество продукта G_j, выпускаемого в нем. В соответствии с этим технологический процесс P_i характеризуется парой неотрицательных векторов, вектором затрат $a_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$

и вектором выпуска $b_i = (\beta_{i1}, \ldots, \beta_{in})$. Матрицы $A = (\alpha_{ij})$ и $B = (\beta_{ij})$ будем называть соответственно матрицей затрат и матрицей выпуска. Вектор интенсивности x будет полуположительным вектором размерности m, а векторы затрат и выпуска равны, соответственно, xA и xB. В дальнейшем будем обозначать модель парой (A, B).

Рассматриваемая модель предполагается замкнутой. Это означает, что не существует потоков продуктов, выходящих из модели или входящих в нее. Все продукты, затрачиваемые в ней, должны быть заранее произведены и все выпускаемые за один цикл продукты вводятся обратно в модель уже как затраты на следующем цикле. Такая модель является приближением к макроэкономике, в которой труд производит потребительские продукты и затем эти продукты потребляются потребителями, давая возможноть или побуждая их работать более производительно. В результате получается грубо циклический процесс, описываемый моделью.

Для модели (A, B) задача технологического роста состоит в нахождении полуположительного вектора x и числа α, для которых выполняется условие:

$$\alpha \text{ является максимальным;} \tag{1}$$

при этом должно выполняться неравенство

$$xB \geq \alpha A. \tag{2}$$

Если существует максимальное значение α, то оно называется технологическим темпом роста модели и обозначается через α_0. Соответствующий вектор интенсивности x_0 называется оптимальным.

Для модели (A, B) задача экономического роста состоит в нахождении неотрицательного вектора ρ, имеющего n координат, и числа β, для которых выполняется условие:

$$\beta \text{ минимально} \tag{3}$$

при условии, что

$$B\rho \leq \beta A\rho. \tag{4}$$

Минимальное значение β называется экономическим темпом роста и обозначается β_0. Соответствующий вектор цен ρ_0 называется оптимальным. Заметим, что для любого вектора цен ρ в силу условия 1 для некоторого индекса i должно выполняться равенство $b_i\rho \geq 0$ и, следовательно, $\beta_0 > 0$.

В **пятом** разделе рассказывается о построении модели Неймана-Гейла.

Будем считать, что число продуктов в экономической системе, а также число районов, в которых эти продукты могут находиться, конечно. Время, в котором действует система, дискретно, т. е. временная переменная t может принимать лишь значения $0, 1, 2, \ldots$

Состояние экономической системы в некоторый момент времени описывается количеством всех продуктов, имеющихся в этот момент времени в системе, с указанием, в каком районе соответствующие продукты находятся, т. е. состояние есть вектор с неотрицательными компонентами, размерность которого равна произведению числа продуктов на число районов.

Очевидно, что последующее состояние экономики неоднозначно определяется предыдущим с помощью технологических возможностей. Это означает, что возможности перехода из состояния в состояние в моделях экономической динамики задаются с помощью некоторого точечно-множественного отображения α, а именно, если в некоторый момент времени состояние экономики есть x, то $\alpha(x)$ представляет собой множество состояний, в которые экономика может перейти в следующий момент времени; иными словами, отображение α определяется всеми производственными возможностями экономической системы. Под производственными возможностями мы понимаем не только чисто производственные, но и потребительские, транспортные возможности, а также возможности сферы услуг, воспроизводство трудовых ресурсов и т. п.

Если модель задается точечно-множественным отображением α, то мы будем называть последовательность $(x_t)_{t=0}^{\infty}$ допустимой (или технологически возможной) траекторией, если $x_{t+1} \in \alpha(x) \forall t$.

Условие $\alpha(K) \cap intR^n_+ \neq \oslash$ имеет простой экономический смысл; оно означает, что в нашей экономической системе каждый продукт может быть производен.

Определение. Моделью Неймана - Гейла называется выпуклый замкнутый конус Z, лежащий в прямом произедении $R^n_+ \times R^n_+$ и обладающий теми совйствами, что $(0, y) \notin Z$ при $y \neq 0$ и $Pr_2 Z \cap (int R^n_+) \neq \oslash$.

Также будем говорить, что модель Неймана - Гейла задается или определяется конусом Z. Полагая $Pr_1 Z = K$, получим, что модель Неймана - Гейла можно отождествить с суперлинейным отображением α конуса K в $\Pi(R^n_+)$. Конкретные формы задания модели могут быть различны. Отображение α, графиком которого является конус Z, называется производственным отоборажением модели.

В **шестом** разделе расширяются понятие темпов роста.

Рассмотри модель Неймана - Гейла Z ($Z \subset R^n_+ \times R^n_+$); через a обозначим производственное отображение этой модели.

Говорят, что задано состояние равновесия модели Z, если указаны положительные числа α, процесс $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ и функционал $\bar{p} \in (R^n_+)^*$ такие, что

$$\alpha \bar{x} \leq \bar{y}; \tag{5}$$

$$\bar{p}(y) \leq \alpha \bar{p}(x) \forall (x, y) \in Z; \tag{6}$$

$$\bar{p}(\bar{y}) > 0. \tag{7}$$

Обозначим рассматриваемое состояние равновесия через σ. Таким образом, по определению, $\sigma = (\alpha, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p})$.

Число $\alpha = \alpha(\sigma)$, фигурирующее в определении состояния равновесия, называется темпом роста модели Z (или темпом роста отображения α). Термин „темп роста“ носит экономический характер по существу и непосредственно связан с обычным понятием темпа роста, используемым в экономической литературе. Действительно, $(\bar{x}, \bar{y})$ интерпретируется как набор продуктов, которые имеются в экономике в смежные периоды времени, функционал $\bar{p}$ интерпретируется как цены, следовательно, $\bar{p}(\bar{x})$ и $\bar{p}(\bar{y})$ - это стоимости наборов продуктов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ по ценам $\bar{p}$, их отношение $\frac{\bar{p}(\bar{y})}{\bar{p}(\bar{x})}$, которое, как показано ниже, совпадает с α, и есть темп роста экономике (темп возрастания стоимости продуктов по ценам $\bar{p}$).

В силу (5) $\alpha \bar{p}(\bar{x} \leq \bar{p}(\bar{y}))$, и потому, снова используя формулу (6) при $(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$, имеем $\alpha \bar{p}(\bar{x}) = \bar{p}(\bar{y})$. Учитывая, что $\bar{p}(\bar{x}) > 0$, мы можем выразить теперь темп роста $\alpha(\sigma)$ через остальные параметры, входящие в состояние равновесия σ:

$$\alpha(\sigma) = \frac{\bar{p}(\bar{y})}{\bar{p}(\bar{x})}. \tag{8}$$

Так же говорится о неймановском состоянии равновесия, о конечности числа темпов роста, обобщенных и экономических темпах роста.

Говорят, что число $\alpha > 0$, процесс $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ и функционал $\bar{p} \in (R^n_+)^*$ образуют обобщенное состояние равновесия σ модели Неймана - Гейла Z, если

$$\alpha\bar{x} \leq \bar{y}, \bar{p} > 0, \tag{9}$$

$$\bar{p}(\bar{y}) \leq \alpha\bar{p}(\bar{x}) \forall (x, y) \in Z. \tag{10}$$

Пусть $\alpha^{'} = min_{\nu=1,\ldots,N}\alpha_\nu$ (где α_ν - неймановские темпы моделей Z_ν), $\alpha^{''}$ - неймановский темп роста модели Z. Число α является обобщенным темпом роста модели Z тогда и только тогда, когда $\alpha \in [\alpha^{'}, \alpha^{''}]$.

Неймановский темп роста $\bar{\alpha}$ модели Z часто называют технологическим темпом роста этой модели. Наряду с технологичесим рассматривают и экономический темп роста β. По определению

$$\bar{\beta} = min_{p \geq 0}\frac{p(y)}{p(x)}, (x, y) \in Z.$$

В **седьмом** разделе произведены расчеты экономического темпа роста с учетом вектора загрязнений окружающей среды для трех предприятий:

1. фабрика по производству шерстяной ленты и пряжи;
2. завод по выпуску химического волокна;
3. автомобильная компания.

Система первого предприятия описывается тремя способами производства:

1. тонкогребенная система прядения;
2. грубогребенная;
3. аппаратная.

Согласно информации о производственной деятельности предприятия известно 11 видов загрязнителей водной среды и 10 видов загрязнителей воздушной среды, продуцируемых выпуском продукции.

Введем в рассмотрение матрицы затрат и выпуска:

$$A = \begin{pmatrix} 105 & 97 & 84 \\ 0.80 & 0.52 & 0.59 \\ 32 & 25 & 23 \\ 14 & 11 & 10 \\ 1.6 & 1.5 & 1.3 \\ 4.4 & 3.4 & 3.2 \\ 78 & 60 & 57 \\ 29 & 22 & 21 \\ 40 & 58 & 30 \\ 120 & 93 & 87 \\ 72.0 & 55.8 & 6.7 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 116 & 107 & 87 \\ 0.88 & 0.56 & 0.61 \\ 35 & 25 & 24 \\ 13 & 11 & 10 \\ 1.4 & 1.3 & 1.3 \\ 4.8 & 3.8 & 3.2 \\ 86 & 67 & 61 \\ 30 & 23 & 22 \\ 41 & 58 & 32 \\ 126 & 98 & 81 \\ 76 & 56 & 56 \\ 8.0 & 8.2 & 7.2 \end{pmatrix},$$

a_{1j}, b_{1j} - затраты натуральной шерсти; a_{2j}, b_{2j} - затраты восстановленной шерсти; a_{3j}, b_{3j}- затраты синтетического волокна; a_{4j}, b_{4j}- затраты искусственного волокна; a_{5j}, b_{5j} - затраты прочего сырья; a_{6j}, b_{6j} - полуфабрикаты; a_{7j}, b_{7j} - готовая продукция; a_{8j}, b_{8j} - основные производственные фонды; a_{9j}, b_{9j} - человеческие ресурсы; a_{10j}, b_{10j} - энергетические ресурсы; a_{11j}, b_{11j} - неэнергетические ресурсы; a_{12j}, b_{12j} - обраты производства в очищенном виде, $j = 1, \ldots, m$ - видов технологических процессов, в данном случае $m = 3$.

Вектор интенсивностей $u^T = (1.210.780.07)$, максимизирующий выпуск, при существующих ограничениях запасов S, был найден путем решения оптимизационной задачи с помощью симплекс-медота. На языке С# написана программа, реализующая этот метод.

$$\begin{cases} \bar{p}^T B\bar{u} \to max, \\ A\bar{u} \leq S. \end{cases}.$$

Итак, $\bar{x} = A\bar{u} =$ (209.9 1.50 59.98 25.49 3.15 8.25 146.17 53.97 96.26 224.87 134.92 16.79);

$\bar{y} = B\bar{u} =$ (230.5 1.55 64.12 24.29 2.87 9.05 160.71 56.75 97.64 235.54 139.66 16.65);

$\bar{z} = Py^T =$ (1.39 0.03 0.001 0.02 0.07 0.0003 0.0004 0.0000005 0.0000001 0.000002 0.000005 0.000001 0.002 0.00003 0.00007 0.000001 0.00006 0.055 0.002 0.004 0.04).

Экономический темп роста модели Неймана-Гейла:

$$\bar{\beta} = \frac{235.54 \times 1,39}{224,87} = 1.45.$$

Для второго предприятия имеем:

$$\bar{\beta} = \frac{5189 \times 1.13}{4730} = 1.24,$$

для третьего:

$$\bar{\beta} = \frac{237598 \times 1.03}{158399} = 1.54.$$

В **заключении** представлены основные результаты работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Определены основные понятия, необходимые для построениям экономической модели.
2. Изучены обобщенный, технологический и экономический темпы роста.
3. Произведены расчеты экономического темпа роста с учетом вектора загрязнений окружающей среды для трех предприятий. Написана программа, позволяющая решать оптимизационную задачу, вохникающую при нахождение экономического темпа проста.