

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

**Задачи с параметрами в курсе основной школы**  
**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студентки 4 курса 461 группы

направления 44.03.01 Педагогическое образование (профиль – математическое образование) механико-математического факультета

Бесединой Светланы Владимировны

Научный руководитель

к. п. н., доцент

\_\_\_\_\_

подпись, дата

Т.А. Капитонова

Зав. кафедрой

к. п. н., доцент

\_\_\_\_\_

подпись, дата

И.К. Кондаурова

Саратов 2019

**Введение.** В соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования «в результате изучения предметной области «Математика и информатика» обучающиеся развивают логическое и математическое мышление».

Задачи с параметрами играют важную роль в формировании логического мышления и математической культуры у школьников. Они позволяют сформировать ключевые компетенции, применимые как в учебной, так и в будущей профессиональной деятельности: использование приобретенных знаний и умений для проведения анализа ситуаций; планирование своей деятельности; осуществление самоконтроля; планирование и выбор более рационального решения; работа с учебной и научной литературой; систематизация знания по теме, решение и составление аналогичных задач и др.

Изучением задач с параметрами, их роли в обучении в разные годы занимались М.И. Башмаков, Г.В. Дорофеев, М.И. Зайкин, Т.А. Иванова, Г.Л. Луканкин, Я.Л. Крейнин, В.К. Марков, А.Г. Мордкович, Н.Х. Розов, Г.И. Саранцев, Р.А. Утеева, Д. Шноль и др. Многие из них подчеркивали важность обучения школьников приемам решения уравнений и неравенств с параметрами прежде всего в связи с необходимостью подготовки учащихся к выполнению работ итоговой аттестации и различного рода конкурсных испытаний. При этом большинство авторов характеризует задачи с параметрами как исследовательские задачи, требующие высокой логической культуры и техники исследования; как наиболее сложные в логическом плане вопросы элементарной математики. В этой связи В.В. Вересова, В.И. Горбачев, Н.С. Денисова, В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович, Г.А. Ястребинецкий и др. справедливо замечают, что для описания процесса решения задач с параметрами необходимо использовать систему понятий, математических утверждений и фактов, определяемую фундаментальными математическими идеями. Однако в многочисленных пособиях и руководствах справочного и методического характера для поступающих в вузы рассматриваются лишь

частные приемы решения конкретных уравнений и неравенств с параметрами, чаще всего в рамках широкого спектра конкурсных заданий.

Уравнениям и неравенствам, содержащим параметр, отводится недостаточное внимание в школьном курсе математики, в основном рассматриваются только их отдельные примеры. Поэтому методы и приемы решения таких задач большинству учащихся не известны. Но поскольку задачи с параметрами регулярно встречаются на основном и едином государственных экзаменах, то от учащихся общеобразовательных школ требуется отработка умения решать задачи с параметрами. Для этого начинать формировать понятие «параметр» надо задолго до итоговых испытаний.

Цель работы – подобрать задачи с параметрами для 5-9 классов и сформулировать методические рекомендации по их использованию на уроках математики в 5-6 классах и на уроках алгебры в 7-9 классах.

Методы исследования: анализ учебно-методической и математической литературы; изучение нормативных документов; разработка методических материалов.

Для достижения поставленной цели были определены следующие задачи:

1. Рассмотреть понятия «параметр», «задача с параметром» и типы задач с параметром;
2. Описать основные методы решения задач с параметрами;
3. Подобрать задачи с параметрами для 5-9 классов и сформулировать методические рекомендации по их использованию на уроках.

Структура работы: титульный лист; введение; две главы («Математическое содержание темы «Задачи с параметрами»; «Задачи с параметрами в курсе основной школы: практические аспекты»); заключение, список использованных источников; приложение.

**Основное содержание работы.** Первая глава «Математическое содержание темы «Задачи с параметрами»» посвящена решению первой и второй задач бакалаврской работы. Проанализировав имеющуюся в нашем распоряжении литературу, рассмотрели понятия «параметр», «задача с

параметром» и типы задач с параметрами, описали основные методы их решения

Под «параметром» в работе мы понимали независимую переменную, значение которой в задаче считается заданным фиксированным или произвольным действительным числом, или числом, принадлежащим заранее оговоренному множеству.

Значение параметра считали допустимым, если найдется хотя бы один набор значений других переменных, входящих в условие данной задачи, при подстановке которого совместно с заданным значением параметра в аналитическое выражение, задающее условие, выражение имеет смысл.

Если в задаче имеется величина, обозначенная буквой, и требуется ответить на вопрос задачи для каждого значения этой буквы, при каждом из которых выполнено условие задачи, то такую задачу называли задачей с параметром.

Определили, что контрольными точками уравнения (неравенства) считают особые значения параметра, для которых или при переходе через которые происходит качественное изменение уравнения (неравенства).

Выяснили, что решить уравнение с параметром – значит найти все его решения при всех значениях параметра (или установить, что их нет).

Ввели 4 типа задач с параметрами:

1. Уравнения (неравенства, их системы и совокупности), которые необходимо решить либо для любого значения параметра (параметров), либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству.

2. Уравнения (неравенства, их системы и совокупности), для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра (параметров).

3. Уравнения (неравенства, их системы и совокупности), для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения (неравенства, их системы и совокупности) имеют заданное число решений (в частности, не имеют или имеют бесконечное множество решений).

4. Уравнения (неравенства, их системы и совокупности), для которых при искомым значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

Описали основные методы решения задач с параметрами: аналитический метод, графический метод, метод относительно параметра и сделали вывод, что задачи с параметрами решаются чаще всего не с помощью одного метода, а комбинацией аналитического и графического методов.

Во второй главе «Задачи с параметрами в курсе основной школы: практические аспекты» было проанализировано содержание школьных учебников на наличие задач с параметрами, рассмотрены задания с параметрами, входящие в материалы ОГЭ, отобраны задачи с параметрами для 5-6 и 7-9 классов и сформулированы методические рекомендации по их использованию на уроках.

Сравнительный анализ школьных учебников проводился по следующим критериям: (1) наличие (+) / отсутствие (-) примеров по теме «Задачи с параметрами»; (2) количество заданий с параметрами к общему количеству задач (%); (3) количество тем, в которые включены задания с параметрами к общему количеству тем (%).

По результатам сравнительного анализа были сделаны выводы:

1) примеры по теме «Задачи с параметрами» почти везде отсутствует, кроме учебников авторского коллектива А.Г. Мерзляка;

2) процентное соотношение заданий с параметрами к общему количеству задач во всех учебниках 7-9 классов примерно одинаковое, но незначительное, кроме учебников А.Г. Мерзляка. В этих учебниках задач с параметрами встречается гораздо больше;

3) во всех учебниках процентное соотношение тем к общему количеству тем, в которые включены задания с параметрами не превышает 25%, кроме учебника А.Г Мерзляка «Алгебра-8».

Поэтому целесообразным стало дополнить задачный материал, подобрав задачи с параметрами для 5-6 и 7-9 классов.

Для 5-6 класса нами было отобрано 18 задач по темам «Правильные и неправильные дроби», «Сравнение десятичных чисел», «Признаки делимости», «Целые числа» и сформулированы методические рекомендации по их использованию на уроках математики. Приведем примеры некоторых задач.

Тема «Правильные и неправильные дроби» (5 класс)

Задача 1. При каких натуральных значениях  $a$  дробь  $\frac{a}{11}$  будет правильной?

Задача 2. При каких натуральных значениях  $a$  дробь  $\frac{11}{a}$  будет неправильной?

*Методические рекомендации.*

1. При формулировке задач целесообразно использовать разные буквы для обозначения параметра.

2. Типичная ошибка, допускаемая пятиклассниками при решении задач 1, 2 состоит в том, что они забывают отнести к неправильной дроби случай, когда числитель равен знаменателю.

Тема «Признаки делимости» (6 класс)

Задача 8. Какую цифру (от 0 до 9) следует поставить вместо  $a$  в записи числа  $83a$ , чтобы получившееся число делилось одновременно на 2 и на 5?

Задача 9. Какую цифру следует поставить вместо  $b$  в записи числа  $74b$ , чтобы получившееся число делилось одновременно на 2 и на 3?

Тема «Целые числа» (6 класс)

Задача 14. При каких  $k > 0$  верно неравенство  $8k < 8$ ?

Задача 15. Существует ли такое число  $n$ , что  $0 \cdot n = 6$ ?

Для 7-9 классов было дополнительно подобрано 62 задачи по темам «Алгебраические выражения», «Уравнение с одной переменной», «Решение задач с помощью уравнений», «Линейные уравнения», «Одночлены. Многочлены», «Системы линейных уравнений», «Рациональные (алгебраические) дроби», «Действия с дробями», «Функция  $y = \frac{k}{x}$  и ее график», «Квадратное уравнение и его корни», «Формула корней квадратного

уравнения», «Теорема Виета», «Графический метод решения уравнений», «Неравенства с одной переменной», «Системы неравенств с одной переменной», «Квадратный трехчлен», «Квадратичная функция и ее график», «Неравенства с одной переменной», «Уравнения с одной переменной», «Система уравнений с двумя переменными» и разработаны методические рекомендации по их использованию на уроках алгебры.

Приведем примеры дополнительно подобранных задач для 7-9 класса.

#### Тема «Алгебраические выражения» (7 класс)

Задача 19. Укажите, при каком значении  $a$  выражение  $\frac{1}{a^2+1}$  принимает наибольшее значение, и найдите это значение.

Решение. Выражение  $a^2 + 1 \geq 1$  при любом  $a \in R$ , причем  $a^2 + 1 = 1$  при  $a = 0$ . Тогда  $\frac{1}{a^2+1} \leq \frac{1}{1} = 1$  – наибольшее значение.

Ответ. При  $a = 0$  выражение  $\frac{1}{a^2+1}$  принимает наибольшее значение, равное 1.

#### *Методические рекомендации.*

1. В задаче 19 и последующих задачах можно сам термин «параметр» не использовать, при этом для обозначения параметра лучше использовать разные буквы.

2. Задаче 19 может предшествовать задача «Укажите, при каком значении  $a$  выражение  $a^2 + 1$  принимает наименьшее значение, и найдите это значение».

#### Тема «Уравнение с одной переменной»

Задача 20. При каких значениях  $m$  уравнение  $0,5(5x - 1) = 4,5 - 2m(x - 2)$  имеет корень? Найдите этот корень.

Решение.  $2,5x - 0,5 = 4,5 - 2mx + 4m$ ;  $x(2,5 + 2m) = 5 + 4m$ ;  $x(2m + 2,5) = 5 + 4m$ ;  $x = \frac{5 + 4m}{2m + 2,5}$ ; если  $2m + 2,5 \neq 0$ , т.е.  $m \neq -1,25$ , то уравнение имеет единственный корень  $x = \frac{2(2m+4,5)}{2m+4,5} = 2$ . Если  $2m + 2,5 = 0$ , т.е.  $m = -1,25$ , то уравнение имеет вид  $x \cdot 2 = 2 \cdot 0$ , т.е.  $0 \cdot x = 0$ . В этом случае корнем уравнения является любое  $x \in R$ .

Ответ. При любом  $m$  уравнение имеет корень, причем при  $m \neq -1,25$  корень  $x = 2$ , при  $m = -1,25$  корнем является любое действительное число.

Задача 21. При каких значениях  $p$  уравнение  $2(p - 2x) = px + 3$  не имеет корней?

Решение.  $2p - 4x = px + 3$ ;  $px + 4x = 2p - 3$ ;  $x(p + 4) = 2p - 3$ ; если  $p + 4 \neq 0$ , т.е.  $p \neq -4$ , то уравнение имеет единственный корень  $x = \frac{2p-3}{p+4}$ . Если  $p = -4$ , то уравнение примет вид  $x \cdot 0 = 11$ , т.е.  $0 = 11$ , что неверно. В этом случае уравнение корней не имеет.

Ответ. При  $p = -4$  уравнение не имеет корней.

*Методические рекомендации.*

1. Задачи 20, 21 решаются на уроке, в случае необходимости учитель организует коллективное обсуждение хода решения уравнений.

2. Если учащиеся испытывают затруднения, то задачам 20, 21 могут предшествовать задачи 22, 23.

3. Задачи 24 и 25 можно предложить в качестве домашнего задания.

Задача 23. При каком значении  $n$  верно равенство  $\frac{5-n}{7-n} = \frac{5}{6}$ ?

Решение.  $(5 - n) \cdot 6 = (7 - n) \cdot 5$ ;  $30 - 6n = 35 - 5n$ ;  $n = -5$ .

Ответ. Равенство верно при  $n = -5$ .

Задача 24. При каких значениях  $p$  уравнение  $px = 2$ :

а) не имеет корней?

б) имеет корень, равный 4?

Решение. а) Если  $p = 0$ , то имеем  $0 \cdot x = 2$ ; – корней нет.

б) Способ 1. Если  $p \neq 0$ , то уравнение имеет корень  $x = \frac{2}{p} = 4$ ;  $4p = 2$ ;  $p = 0,5$ .

Способ 2. Подставляем в уравнение значение  $x = 4$ , получаем:  $p \cdot 4 = 2$ , и находим  $p = 0,5$ .

Ответ. При  $p = 0$  уравнение не имеет корней, при  $p = 0,5$  уравнение имеет корень, равный 4.

### Тема «Квадратное уравнение и его корни» (8 класс)

Задача 48. При каких значениях  $a$  уравнение  $x^2 + 3ax + a - 1 = 0$  является неполным квадратным уравнением? Решите уравнение при полученных значениях  $a$ .

Решение. Уравнение будет неполным, если: 1)  $3a = 0$  или 2)  $a - 1 = 0$ .

1) При  $a = 0$ ,  $x^2 - 1 = 0$ ,  $x = \pm 1$ ;

2) При  $a = 1$ ,  $x^2 + 3x = 0$ ,  $x(x + 3) = 0$ ,  $x = 0$  или  $x + 3 = 0$ ,  $x = -3$ .

Ответ. При  $a = 0$ ,  $x = \pm 1$ , при  $a = 1$ ,  $x = 0$ ; 3.

Задача 49. При каких значениях  $a$  уравнение  $(a + 4)x^2 + ax + a^2 - 16 = 0$  является неполным квадратным уравнением? Решите уравнение при полученных значениях  $a$ .

Решение. Данное уравнение является квадратным при  $a + 4 \neq 0$ , то есть  $a \neq -4$ . Уравнение будет неполным, если: 1)  $a = 0$ ; 2)  $a^2 - 16 = 0$ ,  $a = 4$ . Рассмотрим каждый из случаев отдельно.

1)  $a = 0$ ;  $4x^2 - 16 = 0$ ;  $4x^2 = 16$ ;  $x^2 = 4$ ;  $x = \pm 2$ .

2)  $a = 4$ ;  $8x^2 + 4x + 16 - 16 = 0$ ;  $8x^2 + 4x = 0$ ;  $4x^2 + x = 0$ ;  $x(4x + 1) = 0$ ;  
 $x = 0$  или  $4x + 1 = 0$ ;  $4x = -1$ ;  $x = -\frac{1}{4}$ .

Ответ. При  $a = 0$ ,  $x = \pm 2$ , при  $a = 4$ , то  $x = -\frac{1}{4}$ ; 0.

*Методическая рекомендация.* Задачи №48, 49 можно рассмотреть на одном из уроков по теме «Неполные квадратные уравнения», причем одну из задач №49 разобрать на уроке, а другую (№48) дать на дом.

### Тема «Формула корней квадратного уравнения» (8 класс)

Задача 50. Найдите  $p$  и второй корень уравнения  $x^2 + 7x - p = 0$ , если  $x_1 = -7$ .

Решение.  $x = -7$  — корень данного уравнения, значит, обращает уравнение в верное равенство, подставляем вместо  $x$ .  $(-7)^2 + 7 \cdot (-7) - p = 0$ ,  
 $49 - 49 - p = 0$ ,  $-p = 0$ ,  $p = 0$ ,  $x^2 + 7x = 0$  — неполное квадратное уравнение,  
 $x(x + 7) = 0$ ,  $x_2 = 0$  или  $x_1 = -7$ .

Ответ.  $p = 0$ ,  $x_2 = 0$ .

Задача 51. Найдите  $p$  и второй корень уравнения  $x^2 + px + 32 = 0$ , если  $x_1 = 4$ .

Решение.  $4^2 + p \cdot 4 + 32 = 0, 4p + 48 = 0, 4p = -48, p = -12; x^2 - 12x + 32 = 0, D = 144 - 128 = 16 > 0$  – 2 корня;  $x_1 = \frac{12-4}{2} = \frac{8}{2} = 4, x_2 = \frac{12+4}{2} = \frac{16}{2} = 8$ .

Ответ.  $p = -12; x_2 = 8$ .

*Методическая рекомендация.* Задачу №50 можно разобрать в классе, а №51 включить в самостоятельную работу.

### Тема «Квадратичная функция и ее график» (9 класс)

Задача 70. При каком « $k$ » наибольшее значение функции  $y = -x^2 + 6x - k$  равно 12?

Решение.  $a = -1 < 0$  – ветви параболы направлены вниз, значит наибольшее значение функции – ордината вершины параболы.

$$x_0 = \frac{-6}{-2} = 3; y_0 = -3^2 + 6 \cdot 3 - k = 9 - k; 9 - k = 12; k = -3.$$

Ответ.  $k = -3$ .

Задача 71. При каком значении  $k$  наименьшее значение функции  $y = x^2 - 4x + k$  равно 10?

Решение.  $a = 1 > 0$  – ветви параболы направлены вверх, значит наименьшее значение функции – ордината вершины параболы.

$$x_0 = \frac{4}{2} = 2; y_0 = 2^2 - 8 + k = -4 + k; k - 4 = 10; k = 14.$$

Ответ.  $k = 14$ .

### Тема «Неравенства с одной переменной» (9 класс)

Задача 73. При каких « $k$ » неравенство  $x^2 - 4x + k > 0$  справедливо для всех  $x$ ?

Решение. Графиком функции  $y = x^2 - 4x + k$  является парабола, ветви направлены вверх и она положительна, т.е.  $y > 0$ , значит точек пересечения с осью абсцисс нет.  $D < 0; D = 16 - 4k; 16 - 4k < 0; k > 4$ .

Ответ.  $k > 4$ .

### **Заключение.**

Основные выводы по бакалаврской работе.

1. В ходе анализа учебно-методической литературы рассмотрены понятия «параметр», «задача с параметром», «допустимые значения параметра», «контрольные точки параметра», «решение задач с параметром».

Параметром в задаче называется независимая переменная, значение которой в задаче считается заданным фиксированным или произвольным действительным числом, или числом, принадлежащим заранее оговоренному множеству.

Значение параметра считается допустимым, если найдется хотя бы один набор значений других переменных, входящих в условие данной задачи, при подстановке которого совместно с заданным значением параметра в аналитическое выражение, задающее условие, выражение имеет смысл.

Если в задаче имеется величина, обозначенная буквой, и требуется ответить на вопрос задачи для каждого значения этой буквы, при каждом из которых выполнено условие задачи, то такую задачу называют задачей с параметром.

Контрольными точками уравнения (неравенства) называют особые значения параметра, для которых или при переходе через которые происходит качественное изменения уравнения (неравенства).

Решить уравнение с параметром – значит найти все его решения при всех значениях параметра (или установить, что их нет);

2. Основными методами решения уравнений (неравенств) с параметрами являются: аналитический метод, графический метод, метод относительно параметра. Задачи с параметрами решаются чаще всего не с помощью одного метода, а комбинацией аналитического и графического методов

3. Подобраны задачи с параметрами для 5-9 классов, дополняющие задачный материал школьных учебников, а именно:

– 18 задач для 5-6 классов по темам «Правильные и неправильные дроби», «Сравнение десятичных чисел», «Признаки делимости», «Целые

числа» и сформулированы методические рекомендации по их использованию на уроках математики;

– 62 задачи для 7-9 класса по темам «Алгебраические выражения», «Уравнение с одной переменной», «Решение задач с помощью уравнений», «Линейные уравнения», «Одночлены. Многочлены», «Системы линейных уравнений», «Рациональные (алгебраические) дроби», «Действия с дробями», «Функция  $y = \frac{k}{x}$  и ее график», «Квадратное уравнение и его корни», «Формула корней квадратного уравнения», «Теорема Виета», «Графический метод решения уравнений», «Неравенства с одной переменной», «Системы неравенств с одной переменной», «Квадратный трехчлен», «Квадратичная функция и ее график», «Неравенства с одной переменной», «Уравнения с одной переменной», «Системы уравнений с двумя переменными» и разработаны методические рекомендации для учителей на уроках алгебры.

По результатам бакалаврской работы опубликована статья «Задачи с параметром на уроках алгебры в 7 классе».

Материалы дипломной работы могут быть полезны учителям, работающим в 5-9 классах общеобразовательных школ, гимназий, лицеев.