

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математической теории
упругости и биомеханики

**ПРИМЕНЕНИЕ ПОРОУПРУГОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ
ЭКСПЕРИМЕНТА НА СЖАТИЕ ЭЛЕМЕНТА МИОКАРДА**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 431 группы

направления 01.03.03 «Механика и математическое моделирование»

механико-математического факультета

Кучеренко Дениса Валерьевича

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м. н.

подпись, дата

М.В. Вильде

Зав. кафедрой
д.ф.-м. н., профессор

подпись, дата

Л.Ю. Коссович

Саратов 2019

Введение

Настоящая бакалаврская работа посвящена применению пороупругой математической модели к описанию эксперимента на сжатие элемента миокарда человека.

Данная задача представляет особый интерес, поскольку все используемые в работе рассуждения основаны на теории гетерогенных сред, когда в настоящее время для описания механического поведения биологических объектов используют, как правило, однородные модели.

Теория пороупругих материалов рассматривает две фазы представительного объёма – твёрдый каркас и заполняющая пространство жидкость. В случае миокарда твёрдой фазой являются мышечные волокна, а жидкой фазой – кровь.

Актуальность темы заключается в оценке вклада комплексной части модуля упругости при низкочастотных колебаниях в общее напряжённо-деформированное состояние пороупругой среды. Такой подход позволяет ответить на вопрос о необходимости учёта комплексной части, отвечающей за диссипативные процессы, при создании заменителей биологических тканей, используемых в ходе реконструктивно-восстановительных оперативных вмешательствах на сердце.

Научная значимость состоит в установлении возможности описания петли гистерезиса при сжатии элемента миокарда простейшей моделью пороупругого тела без учёта вязкости фаз.

Целью бакалаврской работы является описание механического поведения миокарда на основе теории пороупругих сред с последующей верификацией с данными эксперимента.

Задачами выполняемой работы являются:

- 1) Провести натурный эксперимент методом одноосного сжатия образцов тканей сердца;
- 2) Построить математическую пороупругую модель в переменных перемещения каркаса u и давления в жидкости p ;

3) Поставить одномерную задачу о деформировании элемента миокарда и получить её аналитическое решение;

4) Проанализировать возможность применения пороупругой модели для аппроксимации петли гистерезиса

5) Оценить влияние параметров пороупругой модели на кривую циклического деформирования;

б) Провести сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

Материалами исследования являются уравнения теории пороупругости, предложенной бельгийско-американским учёным Морисом Энтони Био, а также образцы сердечной мышцы взрослых людей в возрасте от 40 до 65 лет.

Структура и объём работы. Бакалаврская работа состоит из введения, 3 разделов, заключения и списка используемых источников, включающего 29 наименований. Работа изложена на 52 листах машинописного текста, содержит 10 рисунков.

Основное содержание работы. Во введении описывается актуальность поставленной задачи, исторический обзор возникновения и применения теории пороупругих сред, формулируется цель исследования и ставятся задачи.

Первый раздел состоит из трёх подразделов. Он посвящён описанию эксперимента на сжатие элементов миокарда, выделенных из различных частей сердца человека [1]. Также в главе приводятся исследования, касающиеся биологических и синтетических материалов, необходимых для операций по восстановлению нормальной геометрии сердца.

В [2] показано, что механические свойства биологических тканей в течение первых суток после смерти меняются незначительно. Эксперименты проводились в день забора материала не позднее 6 часов после аутопсии и не позднее суток после констатации смерти. Для каждого образца (51 шт.) были измерены площадь поперечного сечения и его высота в закреплённом между

зажимами состояния.

Машина работала в два этапа. Первый – подготовка, в которой производилось циклическое приложение нагрузки и разгрузки. Такой низкочастотный колебательный процесс производился в интервале от 0 до 0.1 для значений деформации со средней скоростью 0.15 мм/сек.

Были построены графики зависимости напряжения от деформации при сжатии, что позволило визуализировать процесс работы машины и вычислить предельное напряжение, максимальную нагрузку и максимальную деформацию.

При подготовке наблюдалось возникновение гистерезиса, что обусловлено потерей энергии в пределах одного цикла [3]. При значениях деформации 0.1 был посчитан модуль упругости для каждого из образцов.

В последнем подразделе описываются материалы, используемые для имплантации в сердце. Для продолжительного функционирования имплантатов в организме человека необходимо использовать такие материалы, которые обладают эластическими свойствами, вызывают наименьшую реакцию окружающих тканей, т.е. обладают высокой химической и механической совместимостью с тканями организма, являются пористыми структурами, имеют заданное распределение пор в зависимости от вида ткани и хорошо смачиваются влажными средами организма, что позволит физиологической жидкости и эритроцитам проникнуть в поры, деформируются согласно закономерностям эластичного поведения тканей организма [4]. Описываются ксеноперикард быка, дакрон, пористые полимеры и сплав никелида титана.

Второй раздел посвящена построению математической пороупругой модели, состоит из четырёх подразделов.

В *первом подразделе* вводятся основные характеристики двухфазной среды – элементарный представительный объем двухфазного неоднородного материала, пористость, полная эффективная плотность и радиус-вектор центра масс [5, 6].

Теория пороупругости с двумя и более фазами рассматривает условные (приведенные) плотности каждой фазы в точках эффективной среды как массы соответствующих фаз, отнесенные ко всему объему рассматриваемого представительного элемента [7-9].

Во *втором подразделе* рассматриваются кинематические и силовые переменные пороупругой среды.

Кинематические параметры двухфазной среды представляют собой перемещения и скорости точек твердой и жидкой фаз, осредненные по соответствующим объемам.

Вводятся эффективные барицентрические перемещения, которые определяют движение твердой и жидкой фаз в центре масс представительного объема гетерогенной среды. Также определяются условные перемещения фаз, усредненный вектор перемещения жидкости в порах относительно твердого каркаса и приращение содержания поровой жидкости.

Тензор малых деформаций выражается как сумма эффективных тензоров деформаций твердой и жидкой фаз с соответствующими коэффициентами, представляющими объемное содержание жидкости.

К силовым переменным пороупругой среды относят полный тензор напряжений, полную интенсивность распределённых сил на поверхности представительного элемента, а также полную интенсивность объёмных сил. В данной теории «полные» тензоры, то есть те, которые характеризуют эффективные свойства, получаются путём сложения условных тензоров, относящихся к соответствующим фазам.

В *третьем подразделе* выводятся определяющие соотношения пористого упругого материала.

Рассматривается анизотропная линейная модель двухфазной среды, в которую входят феноменологические коэффициенты – тензор второго ранга коэффициентов взаимности, которые определяют влияние деформаций одной фазы на ответные напряжения в другой фазе [10].

Путём преобразований на основе полученных ранее соотношений, получается определяющая система из двух уравнений для полного тензора напряжений эффективной пороупругой среды и приращения содержания жидкости в порах.

Уравнения движения в **u**-р переменных получены в общем случае с учётом инерционных и диссипативных характеристик пороупругого материала на основе уравнений движения элемента гетерогенной среды в *четвёртом подразделе*.

В *третьем разделе* рассматриваются задачи пороупругости в одномерной постановке без учёта инерции фаз. Также в данной главе аппроксимируются полученные в результате эксперимента гистерезисы с помощью теоретических кривых.

Постановка задачи на основе определяющих соотношений рассматривается в *первом подразделе*. Выводится модифицированный закон Гука для пористого тела, в котором эффективные напряжения выражаются через разность модуля упругости в дренированном состоянии, умноженного на деформации, и давления жидкости в порах, умноженного на коэффициент, зависящий от характеристик среды.

С учётом модифицированного закона Гука переписываются определяющие уравнения в одномерной постановке.

Постановка граничных условий для определяющей системы представляет из себя нетривиальную задачу [10], рассматривается во *втором подразделе*. Во-первых, можно ставить условия на вектора перемещений и поверхностных сил, а также на значения давления и нормальной составляющей вектора потока жидкости через поверхность тела. Во-вторых, поверхности рассматриваемого пороупругого тела могут быть как свободны от внешних сил, так и нагружены ими; как проницаемы для жидкости, так и изолированы. В зависимости от решаемой физической задачи формулируются те или иные варианты граничных условий, далее будут рассмотрены основные из них.

С помощью закона линейной фильтрации Дарси записывается первое граничное условие для образца, в котором отсутствуют потоки жидкости на верхней и нижней границах, то есть образец до и после деформирования сохранит тот объём крови, который в нём и находился. Для такого случая производная по направлению оси, вдоль которой производится деформирование, от давления жидкости должна быть равна нулю.

Вторые граничные условия не налагают ограничений на поток жидкости через нижнюю и верхнюю границы. В таком случае оказывается равным нулю значение давления жидкости на этих границах.

Статическая деформация рассматривается в *третьем подразделе*. В данном случае все производные по времени равны нулю, а для граничных условий, для которых жидкость может просачиваться через верхнюю и нижнюю границы, выражение для эффективных напряжений вырождается в классический закон Гука.

В *четвёртом подразделе* рассматриваются установившиеся колебания.

Здесь перемещение твёрдой фазы и давление жидкости в порах представляется в виде гармонических колебаний. После такого представления определяющая система переписывается для амплитуд колебаний.

Далее рассматриваются два вида граничных условий для определения неизвестных констант интегрирования.

При установившихся колебаниях не наблюдается мнимой части в эффективных напряжениях, а это означает, что при таких условиях нельзя описать петлю гистерезиса. Также напряжения здесь не зависят от координаты.

Для более детального и полного описания эксперимента рассматривается нестационарное деформирование в *пятом подразделе* настоящей бакалаврской работы.

Так как перемещения траверсы испытательной машины качественно похожи на «зубья», то для них подобрана соответствующая функция [11].

Система решается с помощью преобразования Лапласа. После интегрирования необходимо определить неизвестные константы, которые находятся из граничных условий для изображений функций перемещения твёрдого скелета и давления в жидкости.

Записывается формула обращения для эффективных напряжений гетерогенного материала. Далее используется замена переменных, чтобы повернуть ось интегрирования.

Полученный интеграл для оригинала эффективных напряжений в дальнейшем вычисляется с помощью системы автоматизированного проектирования Mathcad.

Результаты расчетов и сравнение с экспериментальными данными приведены в *шестом подразделе*.

Для качественной оценки вводятся различные типы гистерезисов при деформировании миокарда. *Первый* тип гистерезиса характерен тем, что после 1-го цикла петли начинают совпадать, то есть выходят на предельный уровень. *Второй* тип гистерезиса обусловлен совпадением петель после 2-го цикла: в таком случае явно выделяются первый и второй циклы. *Третий* тип гистерезиса введём таким образом, что все петли различимы между собой, и их наложение друг на друга начнётся только после дополнительных циклов в предподготовке.

Оценку произведена при изменении какой-либо характеристики образца при условии, что все остальные его характеристики (высота в закреплённом между зажимами испытательной машины состоянии, площадь поперечного сечения, модуль Юнга) неизменны.

Зафиксировав модуль упругости и площадь поперечного сечения и меняя при этом высоту образца, получим эффект перехода гистерезиса второго типа в первый при уменьшении высоты.

На рисунке 1 представлены петли гистерезиса для верхней трети передней стенки ПЖ и нижней трети задней стенки ЛЖ, для которых высота отличается в два раза (4 мм и 8 мм соответственно). Также рядом нарисованы

гистерезисы, полученные в ходе решения нестационарной задачи. Поскольку площадь петли гистерезиса, рассчитанная теоретически, получилась в 2-3 раза меньше экспериментальной, для наглядности сравнения вида кривых циклического деформирования вместо напряжения на оси ординат отложена разность $(\sigma - 0.9E_{eff} \cdot \varepsilon)$, где E_{eff} – секущий модуль Юнга при первом цикле нагружения.

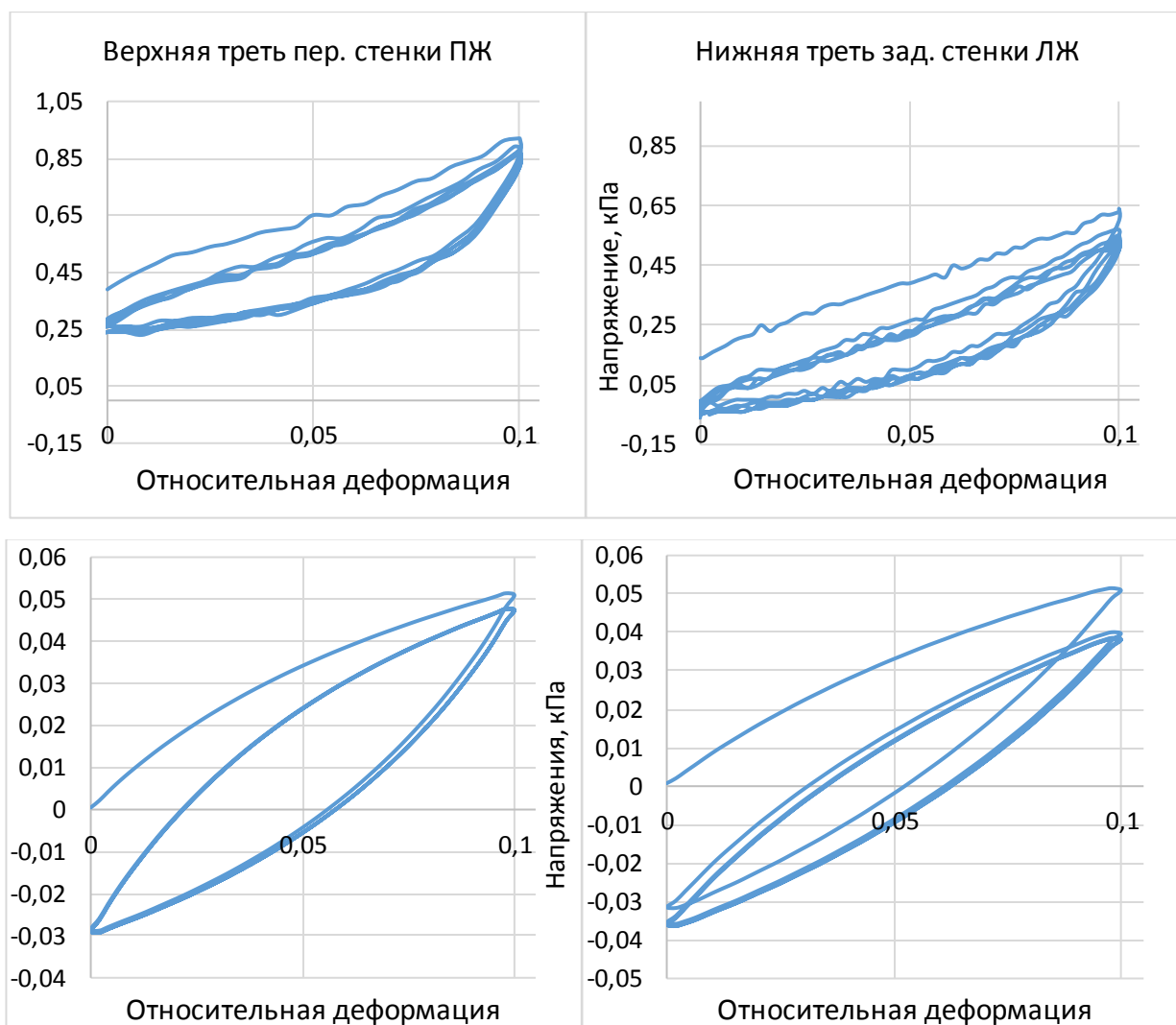


Рисунок 1 – Сравнение петель гистерезиса для двух значений высоты

По формуле, полученной в ходе решения гармонической задачи, были найдены комплексные модули упругости. При вычислениях были приняты следующие значения параметров: $A = 0.989$, $R = 7.63$ МПа, $E_{dr} = 0.0046$ МПа, $\nu_{dr} = 0.23$, $K = 4 \cdot 10^{-10}$ м²/Па·с [10]. Действительная часть модуля упругости мало зависит от высоты образца, однако мнимая часть значительно изменяется с изменением высоты. Это можно объяснить изменением

частоты, поскольку в эксперименте поддерживалась постоянная скорость деформирования. Также отметим, что значения отношения мнимой части к действительной в 2-3 раза меньше, чем экспериментальные значения.

Также были проанализированы образцы, геометрические характеристики которых (высота и площадь поперечного сечения) одинаковы, но значительно (на порядок) отличаются модули упругости. В качестве примера используются образцы средней и нижней трети МЖП, модули упругости которых равны $7.30 \cdot 10^3$ Па и $2.08 \cdot 10^4$ Па соответственно.

С увеличением модуля упругости первый тип переходит в третий. Данный эффект не удалось описать пороупругой моделью при изменении модуля Юнга и сохранении всех остальных параметров.

Выявлена зависимость типа гистерезиса от площади поперечного сечения образца при фиксированном модуле упругости и высоте. В качестве образцов для сравнения подходят средняя треть передней стенки ПЖ и верхняя треть задней стенки ПЖ, площади поперечного сечения которых составляют 165 мм^2 и 408 мм^2 соответственно. В результате анализа кривых можно прийти к выводу, что площадь поперечного сечения мало влияет на тип гистерезиса.

Заключение. В ходе бакалаврской работы был проведён натурный эксперимент методом одноосного сжатия образцов тканей сердца. Были получены модули упругости для различных областей сердца человека, выявлены наиболее и наименее упругие зоны. Результаты эксперимента подтверждают уже проведённые исследования на миокарде, а также не противоречат физиологическим законам.

В ходе исследования была изучена теория пороупругости, которая затем применялась к описанию эксперимента на сжатие элемента миокарда. Были выведены определяющие соотношения для представительного объёма пористого тела.

Была рассмотрена одномерная задача деформирования сердечной мышцы, для которой были сформулированы два типа граничных условий: 1)

ГУ без возможности жидкости покинуть объём, 2) ГУ с возможностью свободно проникать в окружающую среду. Для каждого из граничных условий были аналитически выведены выражения для компоненты перемещения твёрдой фазы u и давления крови в порах p .

Были рассмотрены задачи об установившихся колебаниях и о действии нестационарной нагрузки. Также была решена статическая задача деформирования.

Произведено сравнение отношения мнимой части комплексного модуля Юнга к действительной, найденных с использованием пороупругой модели и на основе эксперимента.

Решение задачи о нестационарном деформировании с заданным на поверхности перемещением, моделирующим закон движения траверсы, позволило приблизительно описать вид кривой циклического деформирования. Расхождение между теорией и экспериментом в площади петли гистерезиса и её форме можно объяснить использованием линейной модели, а также пренебрежением оттоком жидкости через боковую поверхность.

Автор выражает благодарность Вильде Марии Владимировне за научное руководство и Челноковой Наталье Олеговне за помощь в проведении экспериментов и обсуждение результатов.

Список использованных источников

1. Смолюк, А.Т. Неоднородность вязкоупругих свойств миокарда. Модель и эксперимент. Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 2017.
2. Ирвинг П. Герман Физика организма человека. Пер. с англ. под редакцией А.М. Мелькумянца и С.В. Ревенко
3. Иоффе, И.Л. Вопросы изучения механических свойств некоторых мягких тканей и органов тела человека / И.Л. Иоффе, А.Н. Черномашенцев, В.А. Ярцев // Биомеханика. Рига, 1975. С. 174-176.
4. Ходоренко, В.Н Биосовместимые пористые проницаемые материалы /

- В.Н. Ходоренко, Ю.Ф. Ясенчук, В.Э. Гюнтер // Биосовместимые материалы и имплантаты с памятью формы – 2000 -№2 –С.9-24.
5. Маслов, Л.Б. Исследование резонансных свойств биологических объектов в нормальных физиологических условиях / Л.Б. Маслов, И.А. Белов, А.А. Лебедева // Вестник ИГЭУ. – 2009. –№ 3. –С. 32–34.
 6. Маслов, Л.Б. Пороупругая модель колебаний твердых биологических тканей при гармоническом воздействии / Л.Б. Маслов // «Вестник ИГЭУ» Вып. 3 – 2009 – С. 1-4.
 7. Biot, M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, part I: low frequency range / M.A. Biot // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – Vol. 28. – № 2. – P. 168–178.
 8. Biot, M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, part II: higher frequency range / M.A. Biot // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – Vol. 28. – № 2. – P. 179–191.
 9. Biot, M.A. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media / M.A. Biot // J. Acoust. Soc. Am. – 1962. – Vol. 34. – № 5. – P. 1254–1264.
 10. Маслов, Л.Б. Конечно-элементные пороупругие модели в биомеханике / Л.Б. Маслов / СПб.: Лань, 2013. 236 с.
 11. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат / – 4-е изд.– М.: Наука, 1972.