

МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Переход «когерентность-некогерентность» в ансамблях нелокально
связанных отображений Спротта**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
направления 03.03.03 Радиофизика
физического факультета
Пузанова Алексея Михайловича

Научный руководитель

доцент, кандидат физ.-мат. наук, доцент _____ Г.И. Стрелкова

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор _____ В.С. Анищенко

ВВЕДЕНИЕ

Исследования динамики сложных взаимодействующих нелинейных систем занимает одно из центральных мест в области нелинейной динамики. Данный интерес обусловлен разнообразием структур, которые формируются в результате взаимодействия между осцилляторами ансамблей, а также различными эффектами, которые эти структуры демонстрируют при изменении параметров, такие как синхронизация, пространственная и временная перемежаемость и др.

В последнее десятилетие особое внимание исследователей привлек особый тип пространственно-временных структур, названных *химерными состояниями*, которые были впервые обнаружены и описаны для ансамбля нелокально связанных идентичных фазовых осцилляторов. Под химерным состоянием понимают сосуществование пространственно локализованных областей (кластеров) элементов ансамбля с когерентной (синхронной) и некогерентной (асинхронной) динамикой. Эта структура представляет собой промежуточное состояние в динамике ансамбля при переходе от режима полной хаотической синхронизации (полной когерентности) к режиму пространственно-временного хаоса при уменьшении силы нелокальной связи между элементами. Нелокальная связь означает, что каждый осциллятор ансамбля связан с конечным числом своих ближайших соседей с правой и левой сторон. При этом сам ансамбль рассматривается при задании периодических граничных условий, то есть имеет форму кольца.

Позже появилось достаточно много теоретических, численных и экспериментальных работ, в которых химерные состояния были обнаружены в ансамблях нелокально связанных нелинейных систем с дискретным и непрерывным временем, в лазерных, механических и химических системах. Стоит отметить важный прикладной аспект изучения формирования и эволюции химерных структур. Это особенно важно при исследовании

нейронных ансамблей, динамики головного мозга, функционировании электросетей и др.

1 Исследование динамики ансамбля нелокально связанных двумерных отображений Спротта

1.1 Динамика двумерного отображения Спротта

1.1.1 Модель и карта режимов отображения

Рассматривается двумерное (2D) отображение Спротта:

$$x_{n+1} = 1 - \lambda y_n^2 + b x_n, \quad (1.1)$$

$$y_{n+1} = x_n.$$

Здесь λ и b — управляющие параметры отображений.

Это простейшее по своему виду квадратичное отображение с бифуркацией Неймарка-Сакера, в результате которой из потерявшей устойчивость неподвижной точки (цикла периода 1) рождается квазипериодический режим, которому в фазовом пространстве системы соответствует аттрактор в виде устойчивой инвариантной замкнутой кривой.

Неподвижные точки отображения (2.1) определяются соотношениями:

$$x_0 = y_0 = \frac{-(1+b) \pm \sqrt{(1+b)^2 + 4\lambda}}{2\lambda} \quad (1.2)$$

Матрица Якоби имеет вид:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} b & -2\lambda y_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

На рисунке 2.1 представлена карта динамических режимов на плоскости управляющих параметров (b, λ) отображения (1.1).

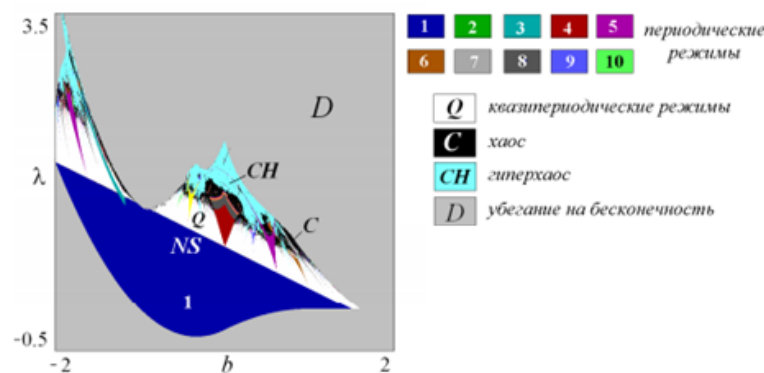


Рисунок 1.1 — Карта динамических режимов для отображения Спротта (1.1) на плоскости (b, λ) . NS — линия бифуркации Неймарка-Сакера

На карте динамических режимов (рисунок 1.1) цветовой палитрой представлены периодические и непериодические режимы.

Бифуркация Неймарка-Сакера является границей между областью устойчивости неподвижной точки и областью непериодических режимов.

Характерная для бифуркации Неймарка-Сакера картина состоит в возникновении области квазипериодических режимов Q с погруженной в нее системой языков Арнольда.

Рост превышения над порогом бифуркации Неймарка-Сакера (рост параметра λ) приводит к расширению языков.

1.1.2 Фазопараметрические диаграммы и фазовые портреты режимов в 2D отображении Спротта

Для отображения Спротта были построены несколько фазопараметрических диаграмм для координаты x при фиксированном параметре b и изменении параметра λ .

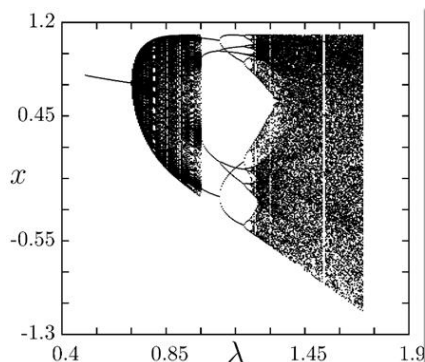


Рисунок 1.2 – Фазопараметрическая диаграмма для отображения Спротта (1.1), значения управляющих параметров $\lambda \in [0.5; 1.7]$, $b = 0.1$ с шагом по параметру λ 0.005

На рисунке 1.2 показана фазопараметрическая диаграмма при $b = 0.1$ и изменении параметра $\lambda \in [0.5; 1.7]$, которая соответствует области синхронизации цикла периода 4 (язык Арнольда).

1.2 Исследование динамики кольца нелокально связанных 2D отображений Спротта

1.2.1 Исследуемая модель

В качестве парциального (индивидуального) элемента выбрано двумерное отображение Спротта (1.1). Исследуемый ансамбль представляет собой кольцо нелокально связанных отображений (1.1) и описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}x_i^{t+1} &= f(x_i^t, y_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f(x_j^t, y_j^t) - f(x_i^t, y_i^t)], \\y_i^{t+1} &= x_i^t.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Здесь x^t, y^t – действительные значения фазовых переменных, t – дискретное время, σ – коэффициент нелокальной связи, P – число соседних элементов ансамбля слева и справа от элемента с номером i , $i=1,2,\dots, N$ – порядковый номер элемента в ансамбле. Функции $f(x_i^t, y_i^t)$ и $f(x_j^t, y_j^t)$ соответствуют правой части первого уравнения отображения (1.1). Ансамбль (1.1) анализировался при периодических граничных условиях: $x_0 = x_N$, $y_0 = y_N$, $x_{N+1} = x_1$, $y_{N+1} = y_1$. Число элементов в ансамбле $N = 1000$. Начальные условия, одинаковые для всех элементов ансамбля, выбирались распределёнными случайным образом в интервале $[0.1; 0.9]$. Времена установления и итерирования выбирались равными 10^4 .

1.2.2 Переход “когерентность-некогерентность” в ансамбле при $P = 320$

Используя результаты построения фазопараметрических диаграмм для отображения (1.1), выберем следующие значения управляющих параметров индивидуальных элементов ансамбля (1.4): $b = 0.1$, $\lambda = 1.6$. Эти значения соответствуют гиперхаотическому режиму (см. рисунки 1.1 и 1.2) 2D отображения Спротта. Будем изменять значение силы связи σ в интервале $[1, 0.05]$ с различным шагом по данному параметру.

Уменьшение параметра связи $\sigma < 0.26$ приводит к появлению химерных состояний различного типа – фазовой и амплитудной химер. Примеры различных пространственно-временных структур, содержащих указанные типы химерных состояний показаны на рисунках 1.3, 1.4.

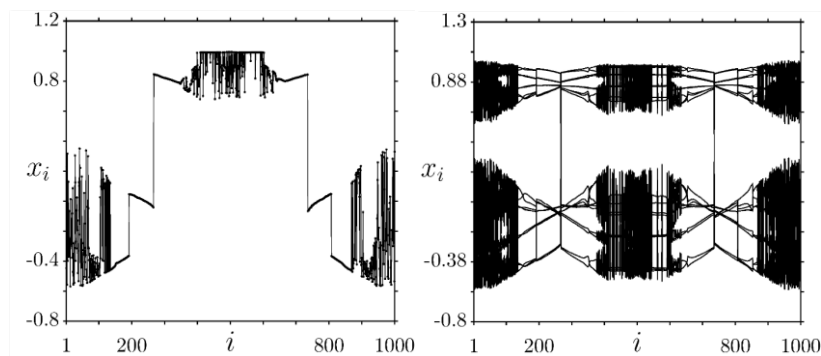


Рисунок 1.3 – Мгновенный (слева) и пространственно-временной (справа) профили для переменной x_i ансамбля (1.4) при $\sigma = 0.2$, $P = 320$, $b = 0.1$, $\lambda = 1.6$

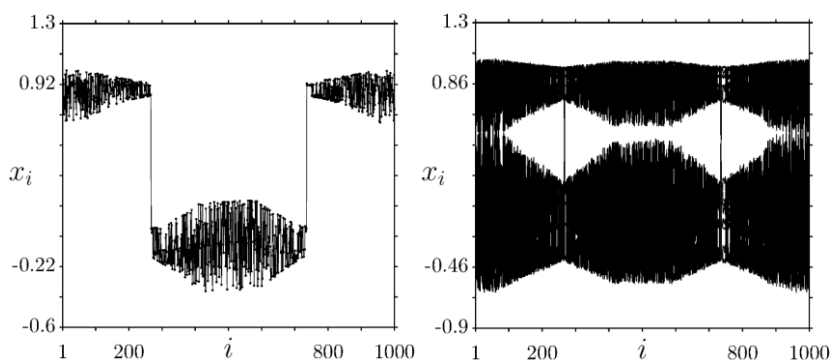


Рисунок 1.4 – Мгновенный (слева) и пространственно-временной (справа) профили для переменной x_i ансамбля (1.4) при $\sigma = 0.15$, $P = 320$, $b = 0.1$, $\lambda = 1.6$

Когда $\sigma < 0.15$, наблюдается переход к пространственно-временному хаосу.

1.2.3 Переход “когерентность-некогерентность” в ансамбле при $P = 160$

Изменим значение радиуса связи $P = 160$. Значения управляющих параметров индивидуального отображения Спротта (2.1) выберем следующими: $b = 0.1$, $\lambda = 1.7$, которые также соответствуют режиму гиперхаоса. Параметр σ (сила связи) будем изменять в интервале $[1;0.1]$ с различным шагом по параметру.

При уменьшении силы связи (значения вблизи 0.35) мгновенный профиль теряет свою гладкость и возникают химерные состояния амплитудного типа. (см. рисунки 1.5 - 1.6)

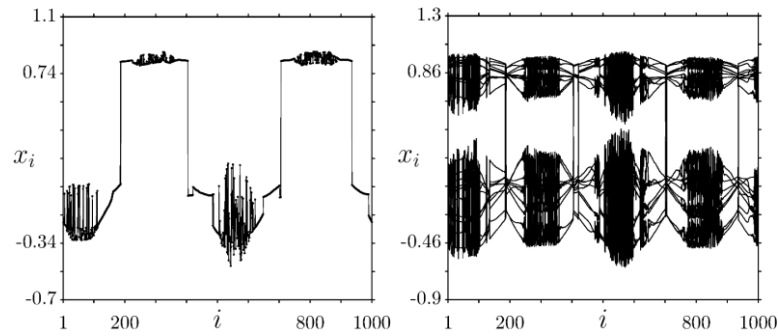


Рисунок 1.5 – Мгновенный (слева) и пространственно-временной (справа) профили для переменной x_i ансамбля (1.4) при $\sigma = 0.25$, $P = 160$, $b = 0.1$, $\lambda =$

1.7

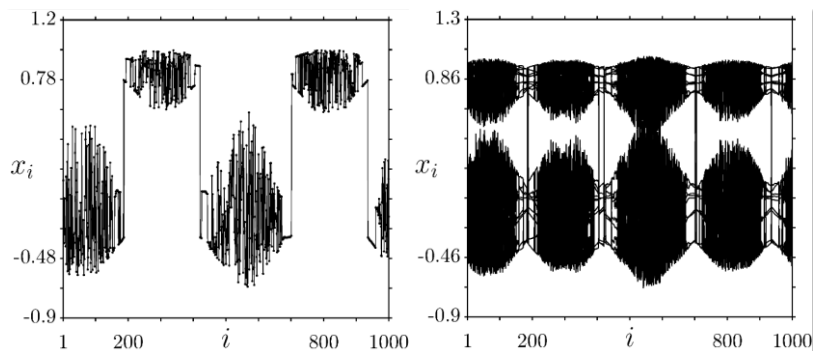


Рисунок 1.6 – Мгновенный (слева) и пространственно-временной (справа) профили для переменной x_i ансамбля (1.4) при $\sigma = 0.2$, $P = 160$, $b = 0.1$, $\lambda = 1.7$

Когда $\sigma < 0.25$, в ансамбле (1.4) наблюдается переход к пространственно-временному хаосу.

В результате проведенных деальных численных исследований динамики ансамбля нелокально связанных двумерных отображений Спротта (1.4) было установлено, что при определенных значениях параметров нелокальной связи переход от режима полной хаотической синхронизации к режиму пространственно-временного хаоса в ансамбле происходит через возникновение амплитудных химерных структур.

2 Исследование перехода «когерентность-некогерентность» в ансамбле нелокально связанных трёхмерных отображений Спротта

2.1 Особенности динамики 3D отображения Спротта

В данной работе рассматривается трёхмерное отображение Спротта в одной из возможных форм представления:

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= 1 + \lambda x_n + b y_n - z_n^2, \\
 y_{n+1} &= x_n, \\
 z_{n+1} &= y_n.
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

На рисунке 3.1 приведена карта динамических режимов отображения Спротта (2.1) на плоскости его управляющих параметров (λ, b) .

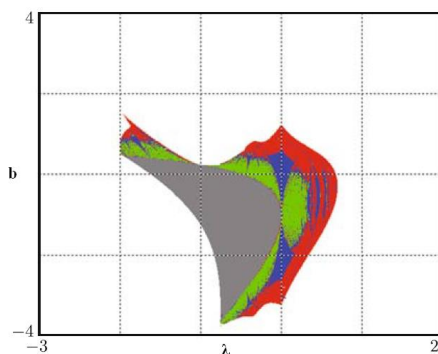


Рисунок 2.1 - Карта динамических режимов для отображения Спротта (2.1)

Рассмотрим рисунок 2.1 более детально. Различными цветами на данной карте отмечены режимы, наблюдаемые в отображении (2.1) при вариации управляющих параметров λ и b . Белая область – уход на бесконечность, серая – цикл периода один, синяя – циклы периодов, отличных от цикла периода 1, и представляют собой области резонансов или синхронизации соответствующих циклов, зелёная – квазипериодические режимы, красная – хаотический режим.

Для отображения (2.1) были построены несколько фазопараметрических диаграмм для координаты x при фиксированном параметре λ и изменении параметра b . Пример одной из диаграмм приведен на рисунке 2.2.

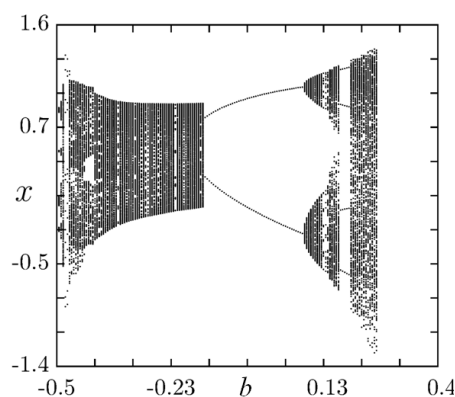


Рисунок 2.2 – Фазопараметрическая диаграмма для отображения Спротта (2.1), значения управляющих параметров $b \in [-0.5; 0.255]$, $\lambda = -0.1$ с шагом по параметру b 0.005

По фазопараметрической диаграмме (рисунок 2.2) можно судить о режимах, наблюдаемых для отображения (2.1) при фиксированном параметре $\lambda = -0.1$ и вариации параметра $b \in [-0.5; 0.255]$. При изменении параметра b можно получить хаотический режим с окнами периодичности, далее - цикл периода 2 или область резонанса (синхронизации), область существования которого по параметру $b \in [-0.15; 0.08]$, переходящий в квазипериодический режим и затем в хаос.

2.2 Исследование перехода «когерентность-некогерентность» в ансамбле нелокально связанных 3D отображений Спротта

2.2.1 Исследуемая модель

Парциальным (индивидуальным) элементом выбрано трёхмерное отображение Спротта (2.1). Исследуемый ансамбль представляет собой, как и в случае двухмерного отображения Спротта (1.1), кольцо нелокально связанных отображений (2.1) и описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= f(x_i^t, y_i^t, z_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f(x_j^t, y_j^t, z_j^t) - f(x_i^t, y_i^t, z_i^t)], \\ y_i^{t+1} &= x_i^t, \\ z_i^{t+1} &= y_i^t. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь x^t, y^t, z^t – действительные динамические переменные, t – дискретное время, σ – коэффициент нелокальной связи, P – число соседних элементов ансамбля слева и справа от элемента с номером $i, i=1, 2, \dots, N$ – порядковый номер элемента в ансамбле. В наших расчётах $N = 1000$. Функции $f(x_i^t, y_i^t, z_i^t)$ и $f(x_j^t, y_j^t, z_j^t)$ соответствуют правой части первого уравнения отображения (2.1). Ансамбль (2.2) анализировался при периодических граничных условиях: $x_0 = x_N, y_0 = y_N, z_0 = z_N, x_{N+1} = x_1, y_{N+1} = y_1, z_{N+1} = z_1$. Начальные условия для всех элементов ансамбля выбирались распределёнными случайным образом в интервале $[0.1; 0.9]$ и были одинаковыми для каждого значения силы связи. Времена установления и итерирования выбирались равными 10^4 .

Используя результаты построения фазопараметрических диаграмм для отображения (2.1), были выбраны различные пары значений управляющих параметров индивидуальных элементов ансамбля (2.2).

2.2.2 Переход «когерентность-некогерентность» в ансамбле при $P = 160$

Выберем следующие значения управляющих параметров индивидуальных элементов ансамбля (2.2): $\lambda = -0.1$, $b = 0.255$. Эти значения соответствуют гиперхаотическому режиму (рисунок 2.2) отображения Спротта (2.1). Зафиксируем радиус связи $P = 160$. Для более детального исследования, был взят интервал $\sigma \in [0.35; 0.105]$ с шагом 0.005 по данному параметру.

Наиболее интересные случаи наблюдались при $\sigma \leq 0.16$ и представлены на рисунках 2.3-2.4.

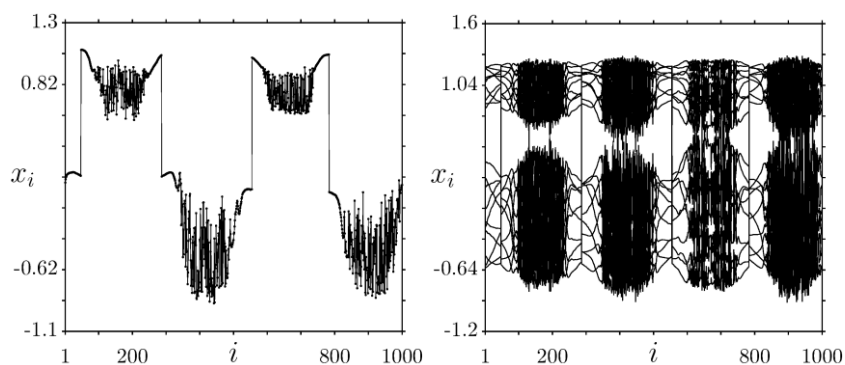


Рисунок 2.3 – Мгновенный (слева) и пространственно-временной (справа) профили для переменной x_i ансамбля (2.2) при $\sigma = 0.13$, $P = 160$, $\lambda = -0.1$, $b = 0.255$

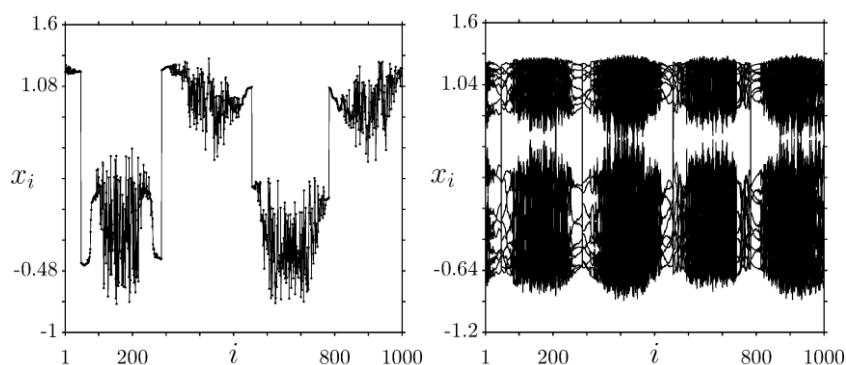


Рисунок 2.4 – Мгновенный (слева) и пространственно-временной (справа) профили для переменной x_i ансамбля (2.2) при $\sigma = 0.115$, $P = 160$, $\lambda = -0.1$, $b = 0.255$

2.2.3 Особенности динамики ансамбля при $P = 320$

Рассмотрим теперь особенности динамики ансамбля (2.2) при изменении значения радиуса связи. Значения управляющих параметров отображения Спротта (2.1) выбраны следующими: $\lambda = 0.2$, $b = 0.355$. Радиус связи увеличим и установим на постоянном значении $P=320$, параметр σ (сила связи) будем изменять в интервале $[0.25;0.1]$ с различным шагом по данному параметру. Начальные условия одинаковы для каждого значения силы связи.

При силе связи, меньше 0.23, наблюдались химерные состояния различного типа – фазовой и амплитудной химер. Примеры различных пространственно-временных структур, содержащих указанные типы химерных состояний, показаны на рисунках 2.5, 2.6.

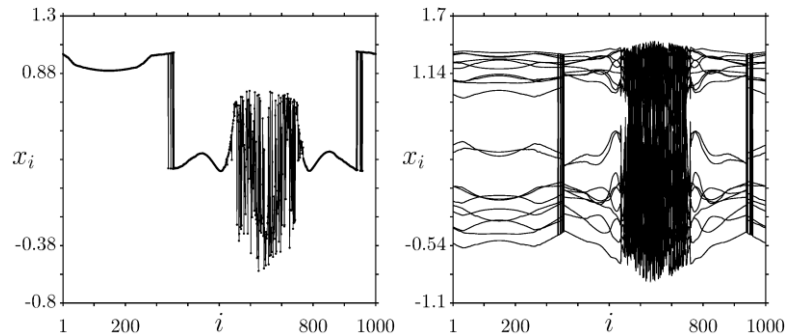


Рисунок 2.5 – Мгновенный (слева) и пространственно-временной (справа) профили для переменной x_i ансамбля (2.2) при $\sigma = 0.22$, $P = 320$, $\lambda = 0.2$, $b = 0.355$

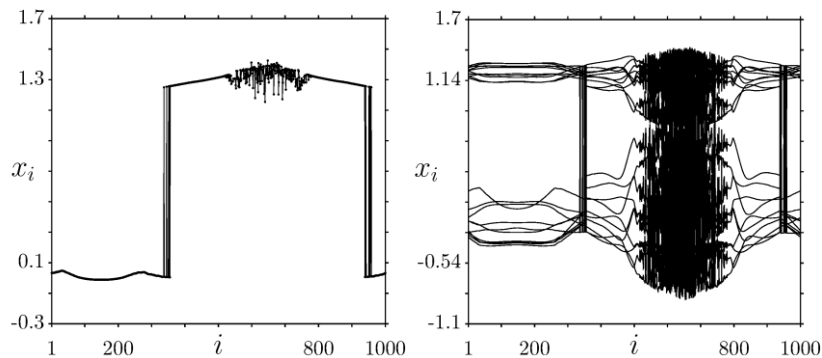


Рисунок 2.6 – Мгновенный (слева) и пространственно-временной (справа) профили для переменной x_i ансамбля (2.2) при $\sigma = 0.215$, $P = 320$, $\lambda = 0.2$, $b = 0.355$

При значении силы связи $\sigma < 0.205$ наблюдался переход к пространственно-временному хаосу.

Результаты численного анализа динамики ансамбля нелокально связанных отображений показали, что при выбранном значении радиуса связи и в определенном диапазоне изменения значения силы нелокальной связи в данном ансамбле могут реализовываться режимы амплитудных и фазовых химерных состояний.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы были проведены численные исследования динамики двумерного (2D) и трехмерного (3D) отображений Спротта, а также ансамблей нелокально связанных отображений. Численные расчеты проводились с использованием «Компьютерной программы для моделирования сетей динамических элементов, описываемых одномерными или двумерными матрицами связи», разработанной аспирантами кафедры радиофизики и нелинейной динамики.

Проведен детальный численный анализ динамики ансамблей нелокально связанных отображений Спротта для двух различных значений радиуса связи и при изменении коэффициента нелокальной связи. Показано, что в случае кольца 2D отображений Спротта при выбранном значении радиуса и в некотором диапазоне изменения силы связи переход от режима полной хаотической синхронизации (полной когерентности) к режиму пространственно-временного хаоса (полной некогерентности) происходит через возникновение амплитудных химерных структур. В ансамбле нелокально связанных 3D отображений Спротта переход «когерентность-некогерентность» сопровождается возникновением амплитудных и фазовых химерных состояний. Кроме того, в исследуемых ансамблях в конечном интервале изменения значений параметра нелокальной связи элементы ансамбля демонстрируют квазипериодическое поведение во времени, что обусловлено особенностью динамики индивидуального отображения Спротта.