

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра электроники, колебаний и волн

**Особенности устройства и трансформации окон периодичности в  
связанных отображениях**

АВТОРЕФРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 225 группы

направления 03.04.03 «Радиофизика»

факультета нелинейных процессов

Дасаева Романа Геннадьевича

Научный руководитель  
доцент КФОС, к.ф.-м.н

\_\_\_\_\_

Савин Д. В.

Заведующий кафедрой электроники,  
колебаний и волн, член-корр. РАН,  
д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_

Трубецков Д. И.

Саратов 2019 г.

## 1. Введение

Нелинейные динамические системы могут демонстрировать множество различных динамических режимов, таких как неподвижные точки, периодические и квазипериодические орбиты, а также хаотическое движение, в зависимости от выбора параметров системы. Сценарии перехода между этими динамическими режимами на данный момент достаточно хорошо изучены. Это переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода, квазипериодичность и перемежаемость [1].

Во многих случаях хаотическая область на плоскости параметров содержит области периодической динамики с различными периодами, которые называют окнами периодичности. В частности, окна периодичности обязательно присутствуют в области существования хаотического аттрактора, образовавшегося в результате каскада бифуркаций удвоения периода [1]. Известно, однако, что в связанных системах при изменении уровня диссипации может происходить слияние окна периодичности с основной периодической областью, что приводит к разрыву линии перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода (линии Фейгенбаума) [2].

Системы с динамикой, в которой присутствуют такие окна периодичности, имеют место в разных областях науки, например, в лазерной физике ( $\text{CO}_2$ -лазер с обратной связью, одномодовый полупроводниковый лазер), химии (химический осциллятор с периодическим воздействием), физике атмосферы (модель циркуляции атмосферы Лоренц-84) и т. д. [3].

Для описания структуры окон периодичности, представленных выше можно выделить три типичных типа расположений линий и точек бифуркаций на плоскости управляющих параметров. Такими структурами являются *spring area*, *saddle area* и *crossroad area*. Они могут возникать на базе циклов всевозможных периодов. При изменении параметров связанных систем (в случае, когда их больше двух) может осуществляться переход между данными структурами в связи с трансформацией линий и точек бифуркаций на плоскости параметров [4-6].

Целью данной работы является детальный анализ процесса трансформации бифуркационных структур на границе перехода к хаосу в связанных системах. Задачами работы являются детальное исследование критического поведения на границе перехода к хаосу и анализ бифуркационных структур разных типов окон периодичности консервативно связанных отображений Эно. Система с линейной связью также изучена в

работе [2]. Новизна работы состоит в исследовании эволюции бифуркационных структур связанных отображений при изменении уровня диссипации для различных значений параметра связи, включая поведение критической линии Фейгенбаума и детальное описание бифуркационных структур разных типов окон периодичности. Также система с квадратичной связью здесь исследуется впервые. Методами исследования являются компьютерное моделирование системы и бифуркационный анализ при помощи специализированного программного обеспечения; визуализация результатов на бифуркационных диаграммах и картах динамических режимов.

Раздел 2 представляет собой обзор работ К. Мира в соавторстве с другими исследователями [4-6] на тему бифуркационных структур и переходов между ними. В разделе 3 представлено исследование плоскости параметров модельной системы линейно связанных отображений Эно, включая поведение критической линии Фейгенбаума на границе хаоса при вариации уровня диссипации для различных значений параметра связи, детальное описание бифуркационных структур разных типов окон периодичности и их эволюцию при изменении параметров системы. В разделе 4 представлена структура плоскости параметров для квадратично связанных отображений Эно, описывается изменение бифуркационной структуры, а также исследуется критическое поведение на границе хаоса.

## 2. Плоскость параметров линейно связанных отображений Эно

Для изучения динамики связанных нелинейных отображений в качестве исследуемой системы рассматриваются два консервативно связанных отображения Эно:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \lambda_1 - x_n^2 - by_n + \varepsilon(x_n - u_n), & y_{n+1} = x_n, \\ u_{n+1} = \lambda_2 - u_n^2 - bv_n + \varepsilon(u_n - x_n), & v_{n+1} = u_n, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  – параметры нелинейности отображений;  $b$  – параметр затухания системы, характеризующий уровень диссипации;  $\varepsilon$  – коэффициент связи двух отображений системы;  $x, y, u, v$  – динамические переменные.

Система линейно связанных отображений Эно (1) также рассматривается в работе [2]. Связь отображений здесь является консервативной, так как она не вносит дополнительных потерь в систему [2]. Поэтому уровень диссипации системы регулируется только параметром  $b$ . Это можно показать, рассчитав якобиан системы (1), который равен  $J = b^2$ . Система консервативна при  $b = 1$ , а при  $b = 0$  затухание бесконечно и уравнение (1) превращается в хорошо изученную [9 - 11] систему связанных одномерных квадратичных (логистических) отображений, являющуюся необратимой. Таким образом, параметр  $b$  можно непрерывно менять в интервале  $[0, 1]$ , изменяя тип рассматриваемой системы.

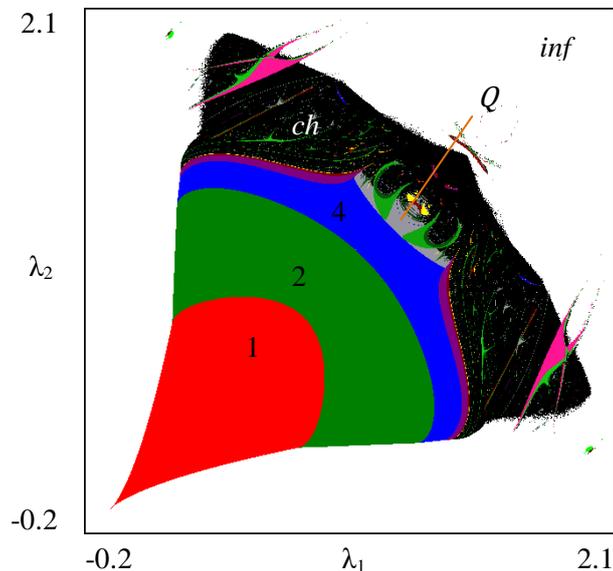


Рис. 1. Карта динамических режимов на плоскости управляющих параметров  $(\lambda_1, \lambda_2)$  для системы (1) при  $\varepsilon = 0.4$  и  $b = 0$ .

Карта динамических режимов для системы (1) на плоскости параметров нелинейности  $(\lambda_1, \lambda_2)$  изображена на рис. 1. Здесь области разных цветов соответствуют периодической динамике разных периодов, черный

цвет соответствует хаотическому аттрактору (ch), белый цвет – разбеганию динамических переменных на бесконечность (inf), а серый цвет – квазипериодичности (Q). Следует отметить, что области существования квазипериодического аттрактора на рис. 1 идентифицируются при помощи расчета старшего ляпуновского показателя.

## 2.1. Эволюция линии Фейгенбаума при изменении параметров системы

Как было показано ранее, на плоскости параметров системы консервативно связанных отображений Эно (1) линия Фейгенбаума перехода к хаосу при уменьшении уровня диссипации претерпевает разрывы [2]. В данном разделе рассматривается поведение линии Фейгенбаума при изменении уровня диссипации для различных значений параметра связи отображений.

В случае небольших значений параметров связи и диссипации линия Фейгенбаума на плоскости параметров непрерывна (рис. 2). При этом линии удвоения периода заканчиваются точками бифуркации типа *fold-flip* (FF), в которых два мультипликатора равны +1 и -1 [2]. Известно, что пределом последовательности критических точек типа *fold-flip* (если он существует) является критическая точка типа C [12].

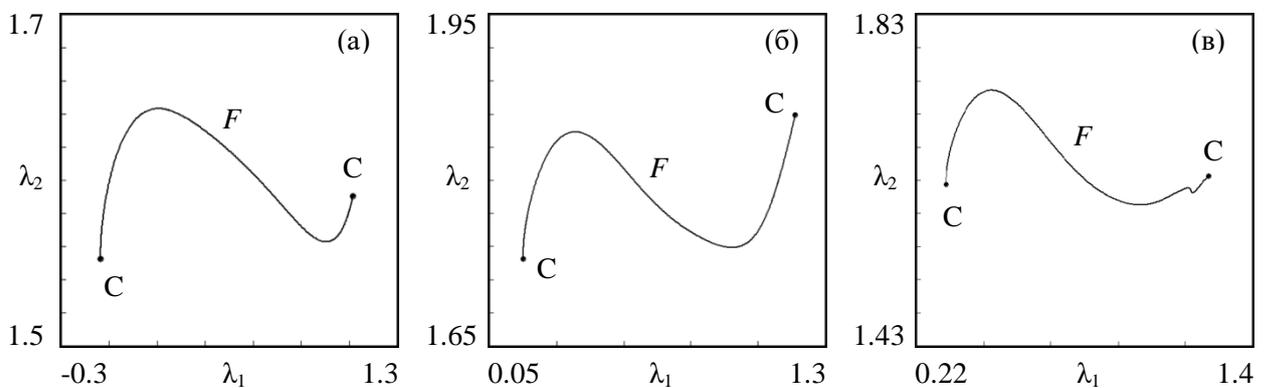


Рис. 2. Структура линии Фейгенбаума (F) на плоскости параметров для системы (1) при параметре диссипации  $b = 0.1$  и значениях коэффициента связи: а)  $\varepsilon = 0.3$ , б)  $\varepsilon = 0.4$  и в)  $\varepsilon = 0.5$ .

При увеличении параметра диссипации, как видно на рис. 3, линия Фейгенбаума претерпевает первый разрыв (линия F делится на фрагменты  $F_1$  и  $F_2$ ). Также одновременно со слиянием окна в той же окрестности на плоскости параметров могут появляться области квазипериодичности. Линии удвоения периода на краях образовавшегося разрыва заканчиваются точкой бифуркации типа резонанс 1:2 (R2). В данной точке два мультипликатора равны -1 [7]. Последовательность точек бифуркации типа резонанс 1:2,

лежащих на концах линий каскада бифуркаций удвоения периода, в пределе образуют точку типа Н [12].

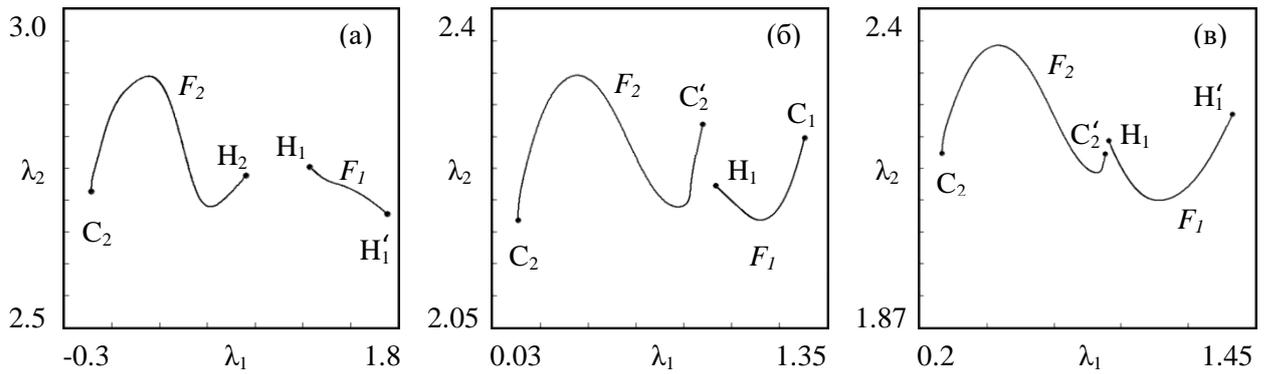


Рис. 3. Структура линии Фейгенбаума (F) на плоскости параметров для системы (1) в момент, когда образован первый разрыв. Значения параметров: а)  $\varepsilon = 0.3$ ,  $b = 0.6$ , б)  $\varepsilon = 0.4$ ,  $b = 0.4$  и в)  $\varepsilon = 0.5$ ,  $b = 0.4$ .

При сильной связи отображений ( $\varepsilon > 0.5$ ) на плоскости параметров можно наблюдать разрыв линии Фейгенбаума уже при  $b = 0$  (рис. 4).

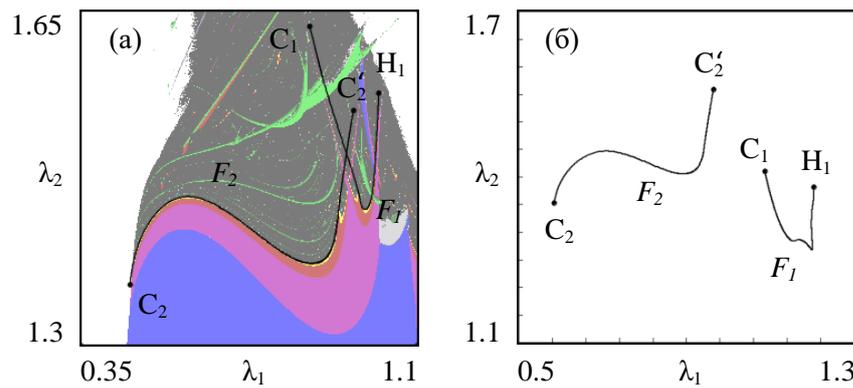


Рис. 4. Структура линии Фейгенбаума (F) на плоскости параметров для системы (1) при параметре диссипации  $b = 0$  и значениях коэффициента связи: а)  $\varepsilon = 0.6$  и б)  $\varepsilon = 0.7$ .

Уменьшая далее уровень диссипации системы, можно видеть, что линия Фейгенбаума претерпевает второй разрыв в связи с появлением области квазипериодичности. Так как каскад бифуркаций удвоения периода в данном случае прерывается областью квазипериодической динамики, то на концах фрагментов линии Фейгенбаума  $F_2$  и  $F_3$  здесь лежат терминальные точки  $H_2$  и  $H_3$  соответственно.

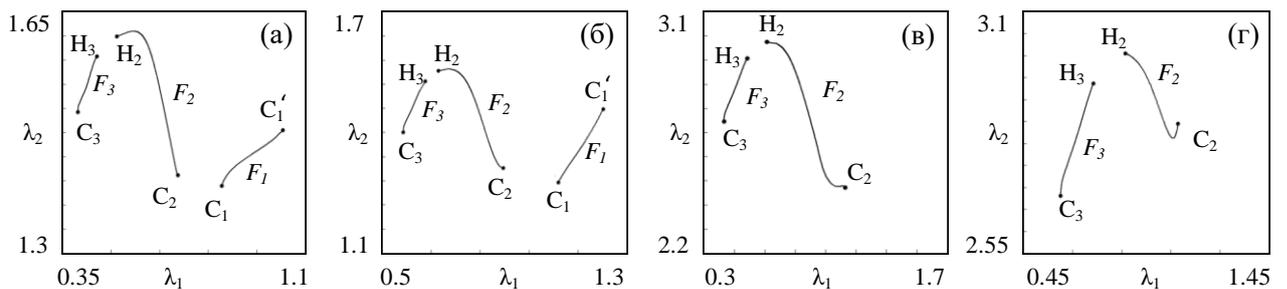


Рис. 5. Структура линии Фейгенбаума (F) на плоскости параметров для системы (1). Значения параметров: а)  $\varepsilon = 0.4$ ,  $b = 0.7$ , б)  $\varepsilon = 0.5$ ,  $b = 0.6$ , в)  $\varepsilon = 0.6$ ,  $b = 0.6$  и г)  $\varepsilon = 0.7$ ,  $b = 0.6$ .

Для малых значений параметра связи можно теперь наблюдать три фрагмента линии  $F$  (рис. 5а и 5б). Однако для больших значений этого параметра вместе с образованием второго разрыва исчезает фрагмент  $F_1$  вследствие исчезновения области с каскадом удвоения периода (рис. 5в и 5г).

## 2.2. Изменение структуры окон периодичности связанных отображений

Окна периодичности системы (1) могут описываться хорошо известной структурой линий бифуркаций вида *spring area* ( $\varepsilon = 0.4$ ), и тогда механизм разрыва линии Фейгенбаума будет сопровождаться переходом *spring area* – *crossroad area*. Если  $\varepsilon = 0.2$ , в области хаоса можно наблюдать кольцевидные окна периодичности (*ring-shaped periodic windows*): они при увеличении параметра затухания также сливаются с основной областью периодичностью, но процесс разрыва линий удвоения периода в данном случае протекает иначе.

### 2.2.1. Переход *Spring Area* – *Crossroad Area*

На плоскости параметров системы (1) в области хаотической динамики, где переход к хаосу осуществляется по сценарию Фейгенбаума, можно наблюдать существование окон периодичности на базе структур *spring area* и *crossroad area*.

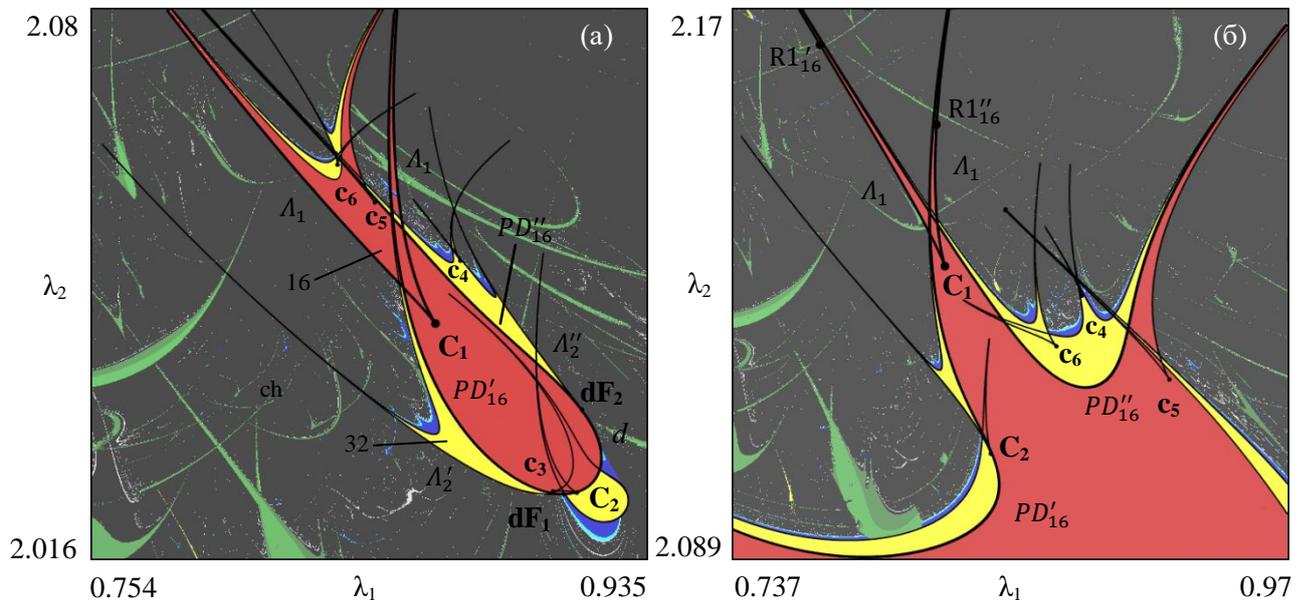


Рис. 6. Увеличенные фрагменты карт динамических режимов и структуры линий бифуркаций для системы (1) при связи  $\varepsilon = 0.4$  и диссипации а)  $b = 0.32$  и б)  $b = 0.36$ .

$C, c$  – точки сборки,  $dF$  – точки бифуркации вырожденный *flip*,  $PD$  – линии удвоения периода,  $\Lambda$  – линии касательной бифуркации.

На рис. 6а изображена структура линий бифуркаций в окрестности отдельно существующего окна периодичности. Линия касательной бифуркации  $\Lambda_1$  делится на два сегмента в точке сборки  $C_1$ . Вокруг этой же точки линия *flip* бифуркации образует петлю. Она состоит из двух линий бифуркаций удвоения периода  $PD'_{16}$  и  $PD''_{16}$ , начинающихся из точек бифуркации типа вырожденный *flip* (для периода 16)  $dF_1$  и  $dF_2$  соответственно, а также ограниченной этими же точками линии  $d$  бифуркации жесткого перехода через мультипликатор  $\mu = -1$ . Из точек  $dF_1$  и  $dF_2$  также исходят линии складок  $\Lambda'_2$  и  $\Lambda''_2$  для периода 32. Данное расположение линий и точек бифуркаций на плоскости параметров представляет собой структуру *spring area* [4]. На рис. 6б изображено расположение линий бифуркаций после слияния окна периодичности с основной областью. Как и в предыдущем случае, фрагменты линии складки  $\Lambda_1$  сходятся в точке сборки  $C_1$ . Однако теперь линия *flip* бифуркации разделена на два фрагмента  $PD'_{16}$  и  $PD''_{16}$ . Также здесь исчезают линия субкритической бифуркации удвоения периода  $d$  и точки бифуркации типа вырожденный *flip*  $dF_1$  и  $dF_2$ . Такое расположение линий и точек бифуркаций описывается структурой типа *crossroad area* [4]. Таким образом, слияние окна периодичности с основной периодической областью в данном случае сопровождается переходом *spring area* – *crossroad area* для периода 16 [4].

### 2.2.3. Трансформация кольцевидных окон периодичности

Изменив значение параметра связи системы линейно связанных отображений Эно, на плоскости параметров можно наблюдать участвующие в образовании первого разрыва кольцевидные окна периодичности.

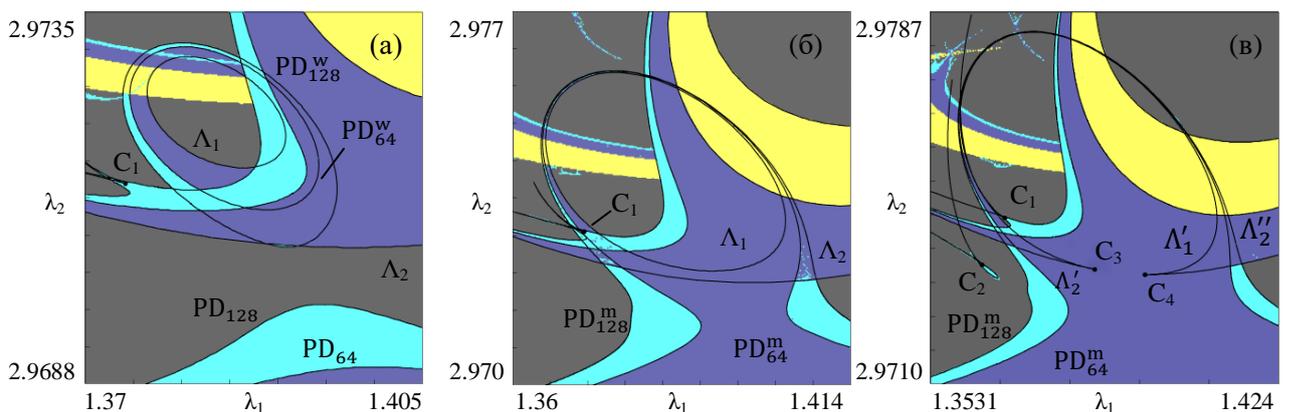


Рис. 7. Фрагменты карт динамических режимов со структурой линий бифуркаций для системы (1) при значениях параметров связи  $\varepsilon = 0.2$  и диссипации: а)  $b = 0.657$ , б)  $b = 0.6575$ , в)  $b = 0.658$ ,

Эволюция плоскости параметров в данной области при увеличении параметра диссипации изображена на рис. 7. Здесь  $\Lambda_1$  – линия складки для кольцевидного окна,  $\Lambda_2$  – линия касательной бифуркации для сдвоенной

структуры *crossroad area* с точкой сборки  $C_1$  и кольцевидного окна на базе 32-цикла, PD – линии бифуркации удвоения периода ( $PD_{64}$  и  $PD_{128}$  принадлежат основной периодической области;  $PD_{64}^W$  и  $PD_{128}^W$  являются линиями удвоения периода для кольцевидного окна периодичности).

При увеличении параметра диссипации системы, окно смещается к основной периодической области. Далее в момент слияния периодических областей этих двух структур, линии бифуркации удвоения периода поочередно сливаются в одну линию (рис. 7б). Следует также отметить, что вместе с этим кольцевидная структура становится «тоньше», т. е. происходит смещение линии  $\Lambda_1$  к линиям удвоения периода.

При дальнейшем увеличении параметра  $b$  системы (1) линия  $\Lambda_1$  смещается к складке  $\Lambda_2$ , и впоследствии эти кривые сливаются (рис. 7в). При этом образуются разрывы в линиях  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  между точками  $C_3$  и  $C_4$ . Линия  $\Lambda_2$  делится на  $\Lambda_2'$  и  $\Lambda_2''$ , которые соединяются в данных точках с линией складки  $\Lambda_1'$ .  $C_3$  и  $C_4$  здесь представляют собой точки бифуркации коразмерности 2 и являются точками сборки (рис. 7в). Таким образом, в данной области можно наблюдать структуры *crossroad area* для периода 64 вокруг точек сборки  $C_3$  и  $C_4$ . Эти структуры имеют единую линию удвоения периода  $PD_{32}$ , а также общую складку  $\Lambda_1'$  с линиями  $PD_{64}^m$  и  $PD_{128}^{m''}$ .

### 3. Плоскость параметров квадратично связанных отображений Эно

Интерес представляет исследование критического поведения на границе хаоса, если изменить тип связи отображений (1). В данном разделе рассматривается система отображений Эно с квадратичной связью, имеющая следующий вид:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \lambda_1 - x_n^2 - by_n + \varepsilon (x_n^2 - u_n^2), & y_{n+1} = x_n, \\ u_{n+1} = \lambda_2 - u_n^2 - bv_n + \varepsilon (u_n^2 - x_n^2), & v_{n+1} = u_n. \end{cases} \quad (2)$$

Якобиан этой системы, как и в случае с (1), равен  $J = b^2$ , поэтому связь остается консервативной и критерий диссипативности здесь такой же, как и для системы с линейной связью.

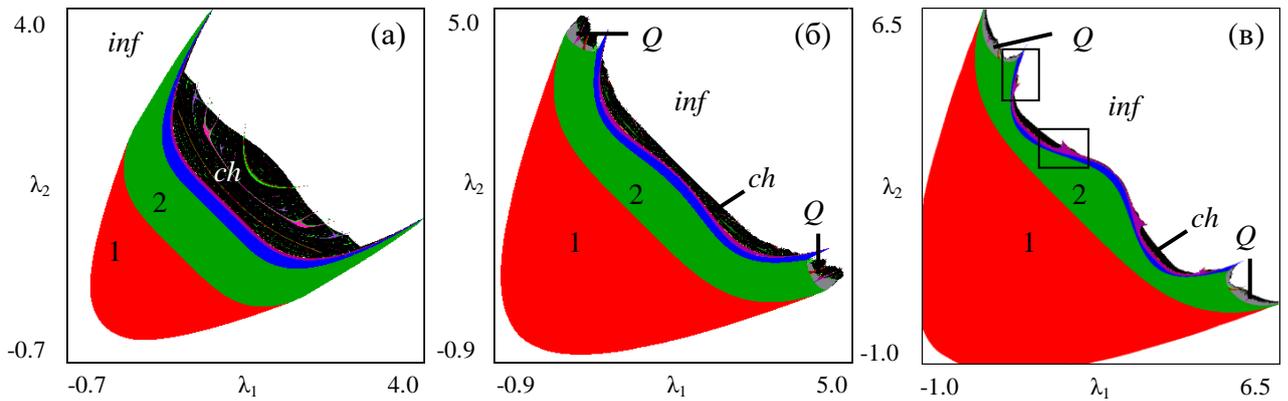


Рис. 8. Структура плоскости параметров для системы (2) при  $\varepsilon = 0.4$  и а)  $b = 0$ , б)  $b = 0.4$ , в)  $b = 0.7$ .

На рис. 8 показана структура плоскости параметров для системы (2) при  $\varepsilon = 0.4$ . Когда параметр диссипации  $b = 0$  (рис. 8а), можно наблюдать переход к хаосу только по сценарию Фейгенбаума. В случае, когда  $b = 0.4$ , на карте динамических режимов видны области квазипериодической динамики (Q), и теперь здесь, помимо сценария Фейгенбаума, существует переход к хаосу через квазипериодичность (рис. 8б). При дальнейшем увеличении параметра диссипации происходит изменение структуры линий удвоения периода. На рис. 8в показана карта динамических режимов при  $b = 0.7$ . Увеличенные фрагменты плоскости параметров в областях, обозначенных рамками на рис. 8в, со структурой линий бифуркации показаны на рис. 9а и 9б.

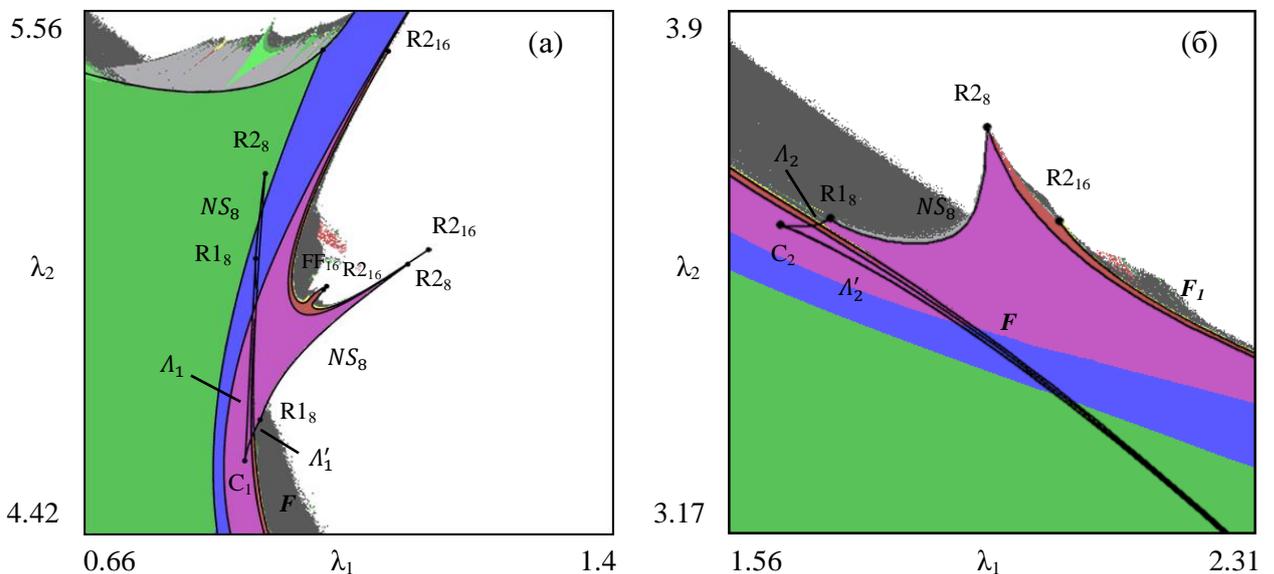


Рис. 9. Карта динамических режимов (а) для системы (2) при  $\varepsilon = 0.4$ ,  $b = 0.7$  и ее увеличенные фрагменты (б, в) со структурой линий бифуркаций.

На плоскости параметров для системы с квадратичной связью в данной окрестности образуются складки. Линии касательной бифуркации  $\Lambda_1$  и  $\Lambda'_1$ , начинающиеся в точке сборки  $C_1$ , соединяются с линиями Неймарка-Сакера ( $NS_8$ ) в точках бифуркации коразмерности 2 типа резонанс 1:1 ( $R1_8$ ).

Из точки сборки  $C_2$  исходят две линии складки  $\Lambda_2$  и  $\Lambda'_2$ . Первая линия также заканчивается точкой  $R1_8$ , а складка  $\Lambda'_2$  в свою очередь соединяет точку  $C_2$  с симметричной точкой сборки во второй полуплоскости.

На рис. 9б можно наблюдать два каскада бифуркаций удвоения периода  $F$  и  $F_1$ , лежащие на разных листах мультистабильности.

Далее можно исследовать поведение критической линии Фейгенбаума при изменении уровня диссипации. На рис. 10 изображена динамика структуры линии Фейгенбаума на плоскости параметров для системы (2) при изменении параметра диссипации.

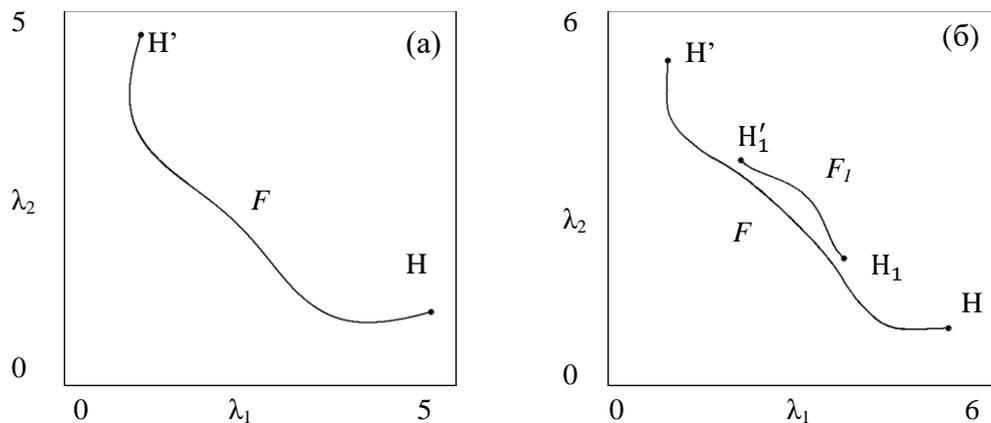


Рис. 10. Структура линии Фейгенбаума для системы (2) при  $\varepsilon = 0.4$  и а)  $b = 0.4$ , б)  $b = 0.7$ .

Когда параметр  $b$  достаточно мал, на плоскости параметров можно наблюдать линию Фейгенбаума  $F$ , которая оканчивается критическими точками  $N$  и  $N'$  (рис. 41а). После образования структур, показанных на рис. 9 в каждой полуплоскости можно наблюдать два фрагмента  $F$  и  $F_1$ , заканчивающиеся критическими точками типа  $N$  (рис. 10б).

#### 4. Заключение

В данной работе проводилось исследование критического поведения консервативно связанных отображений Эно на границе перехода к хаотическому режиму при вариации уровня диссипации для различных значений параметра связи.

В случае системы с линейной связью, в области, где параметры нелинейности подсистем достаточно сильно отличаются друг от друга, переход к хаосу осуществляется через каскад бифуркаций удвоения периода. В данной области на плоскости параметров линии удвоения периода накапливаются к линии Фейгенбаума, за которой следует хаотическая область. При увеличении параметра диссипации системы, данная линия может претерпевать разрывы. Первый разрыв происходит из-за того, что окно периодичности, которое изначально отдельно существует в области хаоса, с изменением параметра затухания смещается на плоскости параметров, приближаясь к основной периодической области, а затем сливается с ней. При этом варьируя параметр затухания системы можно наблюдать изменение типов критических точек фрагментов линии Фейгенбаума у первого разрыва. Второй разрыв линия Фейгенбаума претерпевает в связи с появлением области квазипериодичности на границе периодической области при дальнейшем изменении диссипации. У второго разрыва фрагменты линии Фейгенбаума заканчиваются критическими точками типа Н.

Также следует отметить, что для более сильной связи отображений первый разрыв линии Фейгенбаума можно наблюдать уже при  $b = 0$ , то есть для случая необратимой системы связанных одномерных логистических отображений. При увеличении параметра диссипации в данном случае вместе с образованием второго разрыва линий удвоения периода фрагмент линии Фейгенбаума, лежащий вблизи биссектрисы на плоскости параметров вырождается в связи с исчезновением периодической области в данной окрестности.

При различных значениях параметра связи линейно связанных отображений Эно на плоскости параметров могут наблюдаться окна периодичности, имеющие разную структуру. При этом процесс разрыва линии Фейгенбаума будет протекать по-разному. Когда параметр связи равен  $\varepsilon = 0.4$ , окно, которое сливается с основной периодической областью, имеет структуру линий бифуркации вида *spring area*, и тогда, при уменьшении уровня диссипации, разрыв сопровождается трансформацией структуры

*spring area – crossroad area*. При дальнейшем увеличении параметра диссипации в окрестности структуры *crossroad area* можно наблюдать область квазипериодической динамики. Линия бифуркации Неймарка-Сакера может изменять свою структуру в зависимости от значения параметра диссипации. Также при изменении уровня затухания области квазипериодичности трансформируются, при этом они могут, как исчезать, так и появляться на плоскости параметров.

В случае, когда параметр связи  $\epsilon$  системы (1) задан в окрестности 0.2, на плоскости параметров в области хаоса можно наблюдать кольцевидные окна периодичности, ограниченные изнутри линией касательной бифуркацией, а снаружи каскадом бифуркаций удвоения периода. Процесс слияния такой структуры сопровождается объединением линий удвоения периода окна и основной области, при этом линия складки может взаимодействовать со складками других сосуществующих структур. Следует также отметить, что с кольцевидной структурой могут объединяться окна периодичности со структурой *spring area*, что сопровождается описанным ранее переходом *spring area – crossroad area*.

Система квадратично связанных отображений Эно демонстрирует другую динамику. Увеличивая параметр диссипации данной системы на плоскости параметров можно наблюдать появление областей квазипериодичности в случае, когда параметры нелинейности подсистем достаточно различимы. При дальнейшем изменении значения параметра затухания на границе периодической области появляются два фрагмента линии Фейгенбаума, лежащие на разных листах мультистабильности. Эти фрагменты заканчиваются критическими точками типа Н.

## Библиографический список

- 1 Кузнецов, С. П. Динамический хаос / С. П. Кузнецов, М.: Физматлит, 2006.
- 2 Savin, D. V. Different types of critical behavior in conservatively coupled Henon maps / D. V. Savin, A. P. Kuznetsov, A. V. Savin, and U. Feudel // *Physical Review E* – 2015 – Vol. 91 – P. 062905.
- 3 Bonatto, C. Accumulation boundaries: codimension-two accumulation of accumulations in phase diagrams of semiconductor lasers, electric circuits, atmospheric and chemical oscillators / C. Bonatto and J. A. C. Gallas // *Phil. Trans. R. Soc. A* – 2008 – Vol. 366 – P. 505.
- 4 Mira, C. On the “crossroad area – saddle area” and “crossroad area – spring area” transitions / C. Mira and J. P. Carcasses // *Int. J. Bifurcation Chaos, Appl. Sci. Eng.* – 1991 – Vol. 1 – P. 641.
- 5 Mira, C. “Crossroad area – spring area” transition. I: Parameter plane representation / C. Mira, J. P. Carcasses, J. C. Tatjer // *Int. J. Bifurcation Chaos, Appl. Sci. Eng.* – 1991 – Vol. 1 – №1 – P. 183-196.
- 6 Mira, C. “Crossroad area – spring area” transition. I: Foliated parametric representation / C. Mira and J. P. Carcasses // *Int. J. Bifurcation Chaos, Appl. Sci. Eng.* – 1991 – Vol. 1 – №2 – P. 339-348.
- 7 Кузнецов, А. П. Бифуркации отображений / А.П. Кузнецов, А.В. Савин, Ю.В. Седова, Л.В. Тюрюкина // Издательский центр «Наука», 2012.
- 8 Kuznetsov Yu. A. Elements of applied bifurcation theory // Springer–Verlag – 1998 – 593 p.
- 9 Yuan, J.-M. Instability and irregular behavior of coupled logistic equations / J.-M. Yuan, M. Tung, D. H. Feng, and L. M. Narducci // *Phys. Rev. A* – 1983 – Vol. 28 – P. 1662.
- 10 Satoh, K. Self-Similar Structures in the Phase Diagram of a Coupled-Logistic Map / K. Satoh, and T. Aihara // *J. Phys. Soc. Jpn.* – 1990 – Vol. 59 – P. 1184.
- 11 Kuznetsov, A. P. Dynamics of coupled non-identical systems with period-doubling cascade / A. P. Kuznetsov, I. R. Sataev, and J. V. Sedova // *Reg. Chaot. Dynamics* – 2008 – Vol. 13 – P. 9.
- 12 Kuznetsov, A. P. Multiparameter Critical Situations, Universality and Scaling in Two-Dimensional Period-Doubling Maps / A. P. Kuznetsov, S. P. Kuznetsov, I. R. Sataev // *J. Stat. Phys.* – 2005 – vol. 121 – p. 697.
- 13 Kuznetsov, Yu. A. CONTENT: A Multiplatform Environment for Analyzing Dynamical Systems / Y. A. Kuznetsov and V. V. Levitin // *Dynamical Systems Laboratory, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1997; available from <http://www.math.uu.nl/people/kuznet/CONTENT/>*