МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математического анализа

Интерполяция двоичными базисными сплайнами

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 219 группы
направления 01.04.02 Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Медведевой Лады Вячеславовны

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., профессор С.Ф. Лукомский

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор Д.В. Прохоров

Саратов 2019

Введение. В магистерской работе рассмотрен новый метод построения интерполяционных сплайнов, основанный на двоичных базисных сплайнах. Основоположником теории сплайнов можно считать Л. Эйлера, который ещё в 18-м веке разработал ≪метод ломаных≫ для интегрирования дифференциальных уравнений. В методе ломаных решение дифференциального уравнения представляется с помощью ломаной линии, которая является простейшим сплайном первой степени. Современная теория сплайнов была создана во второй половине 20-го века Дж. Алберrom, Э. Нильсоном, Дж. Уолшем, И. Шенберrom, Н. П. Корнейчуком, С. Б. Стечкиным, Ю. Н. Субботиным, Ю. С. Завьяловым и другими математиками.

Потребность в наличии аппроксимирующих функций, которые сочетали бы в себе локальную простоту многочлена невысокой степени и глобальную на всём отрезке $[a, b]$ гладкость, привела к появлению в 1946 г. сплайн-функций или сплайнов — специальным образом построенных гладких кусочно-многочленных функций. Именно в этом году И. Шёнберг впервые употребил этот термин в качестве обозначения класса полиномиальных сплайнов. После 1946 г. Шёнберг и некоторые его ученики продолжили изучение сплайнов. До 1960 годов сплайны были в основном инструментом теоретических исследований, они часто появлялись в качестве решений различных экстремальных и вариационных задач. После 1960 года с развитием вычислительной техники началось использование сплайнов в компьютерной графике и моделировании. К настоящему времени сплайны стали важной составной частью самых различных вычислительных методов и нашли широчайшее применение в решении разнообразных научно-технических и инженерных задач.

Основное содержание работы. Работа состоит из двух глав:

1. Сплайны, общая теория,
2. Базисные сплайны,

причём каждая глава содержит несколько разделов. В первой главе описаны задача интерполяции и задача интерполяции сплайнами.

Интерполяция — в вычислительной математике способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.

При решении задач с научными и инженерными расчётами, часто приходится оперировать наборами значений, полученных экспериментальным путём или методом случайной выборки. На основании этих наборов требуется построить функцию, на которую могли бы с высокой точностью попадать другие получаемые значения. Такая задача называется аппроксимацией кривой. Интерполяцией называют такую разновидность аппроксимации, при которой кривая построенной функции проходит точно через имеющиеся точки данных.

Необходимость интерполяции функций в основном связана с тем, что:

1. функция имеет сложное аналитическое описание, вызывающее определенные трудности при его использовании;
2. аналитическое описание функции неизвестно, т. е. она задана таблично. При этом необходимо иметь аналитическое описание, приближенно представляющее данную функцию.

Задача интерполяции сплайнами.

Определение 1. Пусть отрезок $[a, b]$ разбит точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ на n частичных отрезков $\triangle_i = [x_{i-1}, x_i],\ i = \overline{1, n}$. Совокупность точек $x_i, i = \overline{0, n}$ называется сеткой $\triangle$ на $[a, b]$, при этом x_i - узлы сетки. Сплайном степени m называется функция $S_m(x)$, обладающая следующими свойствами:

1. функция $S_m(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ вместе со всеми своими производными $S_m^{(1)}(x), S_m^{(2)}(x), \ldots, S_m^{(p)}(x)$ до некоторого порядка p.
2. на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция $S_m(x)$ совпадает с некоторым алгебраическим многочленом $P_{m,i}(x)$ степени m.

Определение 2. Разность $m - p$ между степенью сплайна и наивысшим порядком непрерывной на отрезке $[a, b]$ производной называется дефектом сплайна.

На каждом частичном отрезке $\triangle_i$ функция $f(x)$ аппроксимируется некоторым интерполяционным многочленом $P_i(x)$ степени n относительно выбранной системы узлов интерполирования $x_{i,l}, l = \overline{1, m}$ с условием

$$x_{i-1} \leq x_{i1} < x_{i2} < \ldots < x_{im} \leq x_i,\ m \leq n + 1.$$

Задаются условия интерполирования: $P_i(x_{il}) = f(x_{il})$ и условия непрерывности во внутренних узлах сетки $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$:

$$P_i^k(x_i) = P_{i+1}^k(x_i),\ k = \overline{0, q},\ i = \overline{1, n-1}.$$

Для граничных узлов $a = x_0$ и $x_n = b$ задаются краевые условия:

$$P_1^k(a) = \gamma_a^k,\ k = \overline{0, q_0};\ P_n^k(b) = \gamma_b^k,\ k = \overline{0, q_n}.$$

Определение 3. Функцию $S(x)$, определенную на отрезке $[a, b]$ и совпадающую на каждом частичном отрезке $\triangle_i$ с многочленом $P_i(x)$, при выполнении всех указанных условий называют интерполяционным сплайном относительно сетки $\triangle$. Узлы сетки называются узлами сплайна, число n - степенью сплайна.

Также в этом разделе даны определения линейного, параболического и кубического сплайнов.

Следующий раздел посвящён классификации сплайнов. В этом разделе приведены различные критерии классификации. Представим некоторые из них:

1. по назначению (интерполяционные, с глаживающие и корреляционные сплайны);
2. по виду их фрагментов (экспоненциальные или напряжённые сплайны, тригонометрические сплайны и т. д.);
3. по заданию краевых условий;
4. по форме представления;
5. глобальные и локальные.

Следующий раздел посвящён интерполяционным параболическим сплайнам. В этом разделе рассматриваются сплайны чётной степени, узлы которых находятся между точками интерполяции.

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы непрерывная периодическая функция $f(x)$ с периодом $b - a$ и сетка:

$$\triangle : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b. \tag{1}$$

Определение 4. Периодическим сплайном второй степени с периодом $b-a$, интерполирующим функцию $f(x)$ на сетке $\triangle$, называют функцию $S_2(x)$, если:

1) $S_2(x+b-a) \equiv S_2(x)$, $-\infty < x < \infty$;
2) $S_2(x)$ имеет непрерывную первую производную и $S_2''(x) = S_k''(x)$ при $\dfrac{(x_{k-1}+x_k)}{2} \leq x \leq \dfrac{(x_k+x_{k+1})}{2}$, где $S_k''(x)$ — константы, $k = 1, 2, \ldots, n$, $x_{n+1} = b - a + x_1 - x_0$;
3) $S_2(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Лемма 1.

Если сплайн $S_2(x)$ второй степени интерполирует в узлах сетки (1) непрерывную периодическую функцию $f(x)$ с периодом $b-a$, то

$$\gamma \leq 16 \max_{1\leq k\leq n} \frac{\omega(h_k, f)}{h_k},$$

$$\max_k |S_k''| \leq 16 \max_{1\leq k\leq n} \frac{h_{k-1}^{-1}\omega(h_{k-1}, f) + h_k^{-1}\omega(h_k, f)}{h_{k-1}+h_k}.$$

Кроме того, если $f(x)$ имеет непрерывную первую производную, то

$$\gamma \leq 16\, \omega(\delta, f').$$

Лемма 2.

Если периодическая функция $f(x)$ с периодом $b-a$ имеет непрерывную вторую производную $f''(x)$ и сплайн $S_2(x)$ второй степени интерполирует эту функцию в узлах сетки (1), то

$$\|S_k'' - S_{k-1}''\| = \max_k |S_k'' - S_{k-1}''| \leq 8\, \omega(\delta, f'').$$

Теорема 1.

Если периодический сплайн $S_2(x)$ второй степени интерполирует в узлах сетки (1) непрерывную периодическую функцию $f(x)$ с периодом $b-a$ и $\delta = \max\limits_k h_k$, то

$$\|f(x) - S_2(x)\| = \max_{a\leq x\leq b} |f(x) - S_2(x)| \leq \omega(\delta, f) + \delta L,$$

где $L = 8 \max\limits_{0 \le k \le n-1} h_k^{-1} \omega(h_k, f)$.

Теорема 2.
Если функция $f(x)$ с периодом $b-a$ имеет непрерывную первую производную, то

$$\|f^{(i)}(x) - S_2^{(i)}(x)\| \le K_i \delta^{1-i} \omega(\delta, f'),$$

где $i = 0, 1$; $K_0 = 8,5$; $K_1 = 17$.

Другой раздел посвящён кубическим сплайнам, где описан алгоритм построения таких сплайнов.
Дан отрезок $[a, b]$ и сетка узлов

$$\triangle : a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n = b.$$

Заданы соответствующие ординаты $Y : y_0, y_1, \ldots, y_n$. Нужно найти функцию $S_\triangle(Y; x)$, которую обозначим как $S_\triangle(x)$.
Определение 5. Функцию $S_\triangle(x)$ называют кубическим сплайном относительно сетки $\triangle$ или кубическим сплайном на $\triangle$, интерполирующим значения y_j в узлах сетки, если:

1. $S_\triangle(x)$ дважды непрерывно-дифференцируема на $[a, b]$,
2. $S_\triangle(x)$ совпадает на каждом отрезке $x_{j-1} \le x \le x_j$, $j = 1, \ldots, n$ с кубическим полиномом,
3. $S_\triangle(x)$ удовлетворяет условиям интерполяции $S_\triangle(x_j) = y_j$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Следующий раздел посвящён кривым Безье.

Определение 6. Кривая Безье — это параметрическая кривая, которая задаётся выражением:

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i b_{i,n}(t), \ 0 < t < 1,$$

где P_i — функция компонент векторов опорных вершин, а $b_{i,n}(t)$ — базисные функции кривой Безье, которые также называются полиномами Бернштейна.

$b_{i,n}(t) = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} t^i(1-t)^{n-i}$, где $\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$, где n — степень полинома, i — порядковый номер опорной вершины.

Также в этом разделе представлены виды кривых Безье (линейные, квадратичные и кубические) и свойства.

Кривые Безье широко применяются в компьютерной графике для моделирования гладких линий. В настоящее время кривые Безье применяются во всех современных программах, которые работают с векторной графикой.

Во второй главе описаны B-сплайны и их свойства. Данные сплайны сосредоточены на конечном носителе. B-сплайны являются полиномиальными функциями, а сплайны являются линейной комбинацией B-сплайнов.

B-сплайн m-го порядка:

$$N_m(x) := (N_{m-1} * N_1)(x) = \int\limits_0^1 N_{m-1}(x-t)dt,$$

$m \geq 2$, где N_1 — характеристическая функция интервала $[0,1)$.

Определение 7. Пусть $M_1 := N_1$ — характеристическая функция $[0,1)$, где $N_1(t)$ — B-сплайн первого порядка:

$$N_1(t) := \begin{cases} 1 & \text{для } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{в других точках,} \end{cases}$$

и пусть для $m \geq 2$, $M_m(x) = \dfrac{1}{(m-1)!} \triangle^m x_+^{m-1}$, где

$$\begin{cases} x_+ := \max(0,x), \\ x_+^{m-1} := (x_+)^{m-1}, m \geq 2, \end{cases}$$

M_m — линейная комбинация базисных функций $\{(x-k)_+^{m-1} : k \in Z\}$, т.е.

$$M_m(x) = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} (x-k)_+^{m-1}.$$

Так как $M_m(x)$ обращается в 0 при $x < 0$, то $\text{supp} M_m = [0, m]$.

Свойства B-сплайн m-го порядка:

1) Для любой $f \in C$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) N_m(x) dx = \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(x_1 + \ldots + x_m) dx_1 \ldots dx_m.$$

2) Для любой $g \in C^m$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g^m(x) N_m(x) dx = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} g(k).$$

3) $N_m(x) = M_m(x)$ для всех x.

4) $\text{supp} N_m = [0, m]$.

5) $N_m(x) > 0$ для всех $0 < x < m$.

6) $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} N_m(x-k) = 1$ для всех x.

7) $N'_m(x) = (\triangle N_{m-1})(x) = N_{m-1}(x) - N_{m-1}(x-1)$.

8) B-сплайны N_m и N_{m-1} связаны тождеством:

$$N_m(x) = \frac{x}{m-1} N_{m-1}(x) + \frac{m-x}{m-1} N_{m-1}(x-1).$$

9) B-сплайн N_m симметричен относительно центра своего носителя, т.е.: $N_m\left(\frac{m}{2} + x\right) = N_m\left(\frac{m}{2} - x\right), x \in R$.

Следующий раздел посвящён двоичным базисным сплайнам, где представлена интерполяция в точках, совпадающих с точками склейки и интерполяция в точках, лежащих между точками склейки.

$If(x) = \int\limits_0^x f(t) dt$, $x \in [0, 1]$ – оператор интегрирования, $W_{2^n-1}(x) = \prod\limits_{k=0}^{n-1} r_k(x)$ – функции Уолша, $r_n(t) = sign(sin(2^{(n+1)} \pi t))$ — функции Радемахера.

Функция $\psi(x)=(4I)^2 W_3(x)$, $x\in[0,1]$ — двоичный базисный сплайн 2-й степени, где

$$W_3(x)=\begin{cases}1, x\in\left[0,\frac{1}{4}\right]\\ -1, x\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]\\ 1, x\in\left[\frac{3}{4},1\right].\end{cases}$$

$\psi(x)$ — кусочно-монотонная функция, совпадающая с многочленом 2-й степени на каждом отрезке $\left[\frac{k}{4},\frac{k+1}{4}\right]$, $k=0,1,2,3$.

Теорема 3.

При всех $x\in R$ справедливы равенства

$$\sum_{n\in Z}\psi\left(x+\frac{n}{4}\right)=2;\ \sum_{n\in Z}\psi\left(x+\frac{n}{2}\right)=1.$$

Теорема 4.

Совокупность функций $\psi\left(x-\frac{n}{4}\right)$, $(n\geq -3, n\neq 1)$ образуют базис в пространстве $Q_2(0,+\infty)$– совокупность кусочно-многочленных функций 2-й степени, имеющих непрерывные производные на $[0,+\infty)$, и на каждом отрезке $\left[\frac{k}{4},\frac{k+1}{4}\right]$ совпадают с некоторым многочленом 2-й степени.

Также в работе представлен алгоритм построения интерполяционного сплайна 2-й степени при интерполяции в точках, лежащих между точками склейки.

При фиксированном $n\in N$, $n\geq 4$, $\varphi=\psi\left(\frac{n}{4}x\right)$. Для этой функции $supp\ \varphi=\left[0,\frac{4}{n}\right]$ и $\varphi(x)$ есть многочлен 2-й степени на каждом отрезке $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$, $\varphi'(0)=\varphi'\left(\frac{2}{n}\right)=\varphi'\left(\frac{4}{n}\right)=0$, $\varphi'\left(\frac{1}{2n}\right)=\varphi'\left(\frac{3}{2n}\right)=\frac{n}{2}$, $\varphi'\left(\frac{1}{n}\right)=n$, $\varphi'\left(\frac{5}{2n}\right)=\varphi'\left(\frac{7}{2n}\right)=-\frac{n}{2}$, $\varphi'\left(\frac{3}{n}\right)=-n$.

Пусть $f(x)$ непрерывна на [0, 1], $x_k=\frac{k}{n}$ — точки интерполяции или узлы между точками склейки $\xi_k=\frac{2k-1}{2n}$, $k=\overline{0,n}$ – равномерная сетка на [0,1]. Через $S(x)$ обозначим интерполяционный сплайн 2-й степени, совпадающий с $f(x)$ в узлах x_k, который построим следующим образом:

-1-й шаг. Рассмотрим функцию $\varphi\left(x+\frac{3}{2n}\right)$ и $\varphi\left(x+\frac{1}{2n}\right)$. Строим сплайн $S_{-1}(x)$ как сумму

$$S_{-1}(x) = C_{-3}\varphi\left(x+\frac{3}{2n}\right) + C_{-1}\varphi\left(x+\frac{1}{2n}\right).$$

Коэффициенты C_{-3} и C_{-1} находим из условий $f(0) = S(0)$ и $f'(0) = S'(0)$. Следовательно, решаем систему

$$\begin{cases} f(0) = C_{-3}\varphi\left(0+\frac{3}{2n}\right) + C_{-1}\varphi\left(0+\frac{1}{2n}\right), \\ f'(0) = C_{-3}\varphi'\left(\frac{3}{2n}\right) + C_{-1}\varphi'\left(\frac{1}{2n}\right) \end{cases}$$

и получаем $C_{-3} = \frac{8f(0)}{6} - \frac{f'(0)}{3n}$ и $C_{-1} = \frac{7f'(0)}{3n} - \frac{8f(0)}{6}$.

0-й шаг. Рассмотрим функцию $\varphi\left(x-\frac{1}{2n}\right)$. Определим $S_0(x)$ равенством

$$S_0(x) = S_{-1}(x) + \varphi\left(x-\frac{1}{2n}\right)C_0.$$

Подберем C_0 так, чтобы $S_0\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)$, т. е.

$$S_{-1}\left(\frac{1}{n}\right) + \varphi\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)C_0 = f\left(\frac{1}{n}\right).$$

В результате получаем

$$C_0 = \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - S_{-1}\left(\frac{1}{n}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)},$$

$$S_0(x) = S_{-1}(x) + \varphi\left(x-\frac{1}{2n}\right)\frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - S_{-1}\left(\frac{1}{n}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2n}\right)}.$$

k - 1-й шаг. Рассмотрим функцию $\varphi\left(x - \frac{2k-1}{2n}\right)$, $2 \leq k \leq n$.

$$S_{k-1}(x) = S_{k-2}(x) + \varphi\left(x - \frac{2k-1}{2n}\right)C_{k-1},$$

где

$$C_{k-1} = \frac{f\left(\frac{k}{n}\right) - S_{k-2}\left(\frac{k}{n}\right)}{\varphi\left(\frac{k}{n} - \frac{2k-1}{2n}\right)}$$

подобраны так, чтобы $S_{k-1}\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right)$. В результате сплайн задается следующим образом:

$$S_{k-1}(x) = S_{k-2}(x) + \varphi\left(x - \frac{2k-1}{2n}\right)\frac{f\left(\frac{k}{n}\right) - S_{k-2}\left(\frac{k}{n}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2n}\right)}.$$

После k - 1-го шага получаем сплайн $S(x) = S_{k-1}(x)$, такой, что выполняется следующее условие: $S\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right)$. В работе также представлена реализация данного алгоритма на языке программирования C++.

В результате построения интерполяционного сплайна, оказалось, что на - 1-м шаге вместо $f'(0)$ нужно взять конкретное значение, так как значения сплайна в точках склейки сильно возрастают с каждым шагом. Отметим тот факт, что $f'(0)$ и значение сплайна в последней точке склейки связаны линейным соотношением. Значение находится из уравнения прямой, проходящей через две различные точки на плоскости:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow x = \frac{(y - y_1)(x_2 - x_1)}{y_2 - y_1} + x_1.$$

Выберем два начальных условия: $S'(0) := z_1$ и $S'(0) := z_2$. Далее по этим начальным условиям найдём значения сплайна в последней точке склейки и обозначим эти значения через S_{z_1} и S_{z_2}. Причём точки z_1 и z_2 подобраны так, чтобы выполнялось следующее условие:

$$S(z_1) \leq f(\xi_k) \leq S(z_2),$$

где $f(\xi_k)$ — значение функции в последней точке склейки. Эти точки лежат на некоторой прямой L. Выберем переменную точу (z, S_z) на этой прямой и уравнение прямой L будет иметь следующий вид:

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{f(\xi_k) - S_{z_1}}{S_{z_2} - S_{z_1}}$$

В этом уравнении полагаем $S_z = f(\xi_k)$ и находим

$$z = \frac{(S_z - S_{z_1})(z_2 - z_1)}{S_{z_2} - S_{z_1}} + z_1.$$

Это и есть искомое значение или начальное условие, при котором значение сплайна и функции в последней точке склейки совпадут.

Заключение. В магистерской работе рассмотрен новый тип базисных сплайнов, которые были предложены участниками семинара ≪Ортогональные ряды≫ и названы двоичными базисными сплайнами. Указан метод построения интерполяционных сплайнов 2-й степени, который является рекурсивным и не требует решения системы линейных уравнений. При традиционном построении интерполяционных сплайнов требуется выполнения краевых условий. В работе предложено для достижения нужной точности подбирать необходимое значение первой производной сплайна в начальной точке. Указан способ нахождения нужного значения этой производной.