

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической теории
упругости и биомеханики

**Асимптотические методы исследования нестационарных продольных волн
в наследственно-упругих оболочках**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 237 группы
направления 01.04.03 – Механика и математическое моделирование
механико-математического факультета
Лунёвой Анастасии Дмитриевны

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент,
доцент кафедры МГУ и БМ

подпись, дата

Н. С. Анофрикова

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор

подпись, дата

Л. Ю. Коссович

Саратов 2019

Введение

Широкий круг задач, связанных с решением проблем машиностроения, авиастроения, биомеханики и других областей науки и техники, использующих композиционные материалы, приводит к необходимости исследования распространения нестационарных волн в вязкоупругих (наследственно-упругих) оболочечных конструкциях.

Сложность уравнений теории наследственной упругости, в частности для оболочек, не позволяет получить точные аналитические решения, и поэтому используются различные приближенные методы, основанные на приближении как исходных уравнений, так и решений.

Существует большое число работ [1 - 13], посвящённых исследованию оболочечных конструкций, изготовленных из наследственно-упругих материалов, в которых в качестве ядра интегрального оператора рассматривается ядро Ржаницына, так как данное ядро хорошо описывает вязкоупругое поведение материала и имеет простую форму, в отличие от ядра Работнова [14].

Оболочечные конструкции из наследственно-упругих материалов с ядром Ржаницына используются при решении различных задач: в задачах о флаттере [1 - 3], в биомеханике [4], при моделировании нелинейных колебаний вязкоупругого трубопровода с жидкостью [5, 6].

Целью магистерской работы является построение и исследование с помощью асимптотических методов математической модели, описывающей распространение нестационарных продольных волн в наследственно-упругих тонкостенных оболочках, подверженных ударному продольному воздействию на торец.

Задачами выполняемой работы являются:

1) постановка трёхмерной задачи о распространении нестационарных волн в тонкостенной наследственно-упругой полубесконечной оболочке общего очертания при ударном продольном воздействии тангенциального типа на её торец;

- 2) вывод уравнений для безмоментной двумерной составляющей;
- 3) решение полученных уравнений для случая осесимметричной нагрузки на торец цилиндрической оболочки с помощью метода интегрального преобразования Лапласа;
- 4) анализ решения, полученного для безмоментной двумерной составляющей;
- 5) вывод уравнений для погранслоя в окрестности квазифронта для наследственно-упругой оболочки;
- 6) решение полученных уравнений для случая осесимметричной нагрузки на торец цилиндрической оболочки с помощью метода интегрального преобразования Лапласа;
- 7) анализ решения уравнений для погранслоя.

Структура и объём работы. Магистерская работа состоит из введения, пяти разделов и заключения и содержит 67 страниц. Список использованных источников включает 32 наименования.

Раздел 1 Постановка задачи о распространении нестационарных волн в наследственно-упругой оболочке.

Раздел 2 Вывод уравнений двумерной безмоментной составляющей.

Раздел 3 Решение задачи для цилиндрической оболочки с помощью преобразования Лапласа.

Раздел 4 Вывод уравнений погранслоя в окрестности квазифронта.

Раздел 5 Решение уравнений погранслоя для цилиндрической оболочки с помощью преобразования Лапласа.

Научная новизна. В работе впервые с помощью асимптотических методов, разработанных для случая упругих тонких оболочек, выведены уравнения безмоментной составляющей и погранслоя в окрестности квазифронта для наследственно-упругих оболочек, а также получены их приближенные аналитические решения. По результатам исследований, проведенных в рамках выполнения выпускной квалификационной работы магистра, был сделан доклад на научной студенческой конференции механико-

математического факультета СГУ и опубликована статья в сборнике научных трудов «Математика. Механика» [15].

Научная значимость работы заключается в возможности применения полученных уравнений и решений для изучения поведения оболочечных конструкций, изготовленных из наследственно-упругих (вязкоупругих) материалов, при ударных воздействиях.

Основное содержание работы

Данная магистерская работа посвящена построению и исследованию математической модели, описывающей распространение нестационарных продольных волн в наследственно-упругой тонкостенной оболочке при ударном воздействии на ее торец, с помощью аналитических асимптотических методов.

Во введении была проанализирована литература, посвящённая исследованию оболочечных конструкций, изготовленных из наследственно-упругих материалов, в которых в качестве ядра интегрального оператора рассматривается ядро Ржаницына.

В первом разделе осуществляется постановка трёхмерной задачи о распространении нестационарных волн в наследственно-упругой оболочке общего очертания, подверженной ударному продольному воздействию на торец.

Уравнения наследственной теории упругости, описывающие поведение оболочки, записаны в триортогональной криволинейной системе координат, связанной со срединной поверхностью оболочки. Уравнения состояния взяты в интегральной форме с ядром интегрального оператора Ржаницына [14], в предположении, что параметр интегрального оператора $\gamma = \frac{1}{2}$.

Предполагается, что к торцу оболочки, заданному уравнением $\alpha_1=0$, приложено ударное воздействие тангенциального типа, моделируемое функцией Хевисайда [16].

Считается также, что оболочка находилась в покое до момента приложения нагрузки.

Предполагается, что лицевые поверхности оболочки свободны от напряжений, следовательно, напряжения на них полагаются равными нулю.

Начально-краевая задача, включающая уравнения движения, уравнения состояния, граничные и начальные условия, в трёхмерной постановке не имеет точного аналитического решения.

В данной работе в качестве метода исследования выбран метод расчленения напряженно-деформированного состояния на составляющие с различными показателями изменчивости.

Выделяются следующие зоны применимости приближенных решений:

- 1) погранслоем в окрестности фронта волны расширения;
- 2) квазиплоская квазисимметричная задача теории вязкоупругости;
- 3) погранслоем в окрестности квазифронта;
- 4) безмоментная составляющая;
- 5) наложение безмоментной составляющей и квазистатического погранслоя типа Сен-Венана.

В данной работе будет исследовано приближенное решение исходной задачи в областях 3 и 4.

Во втором разделе выводятся двумерные уравнения для безмоментной составляющей. Для этого в представленных в первом разделе трёхмерных уравнениях теории наследственной упругости осуществляется переход к безразмерным переменным, безразмерному времени и безразмерным параметрам интегрального оператора, вводятся асимптотики компонент напряженно-деформированного состояния.

В уравнениях, записанных с учётом введённых безразмерных величин и асимптотик, производится разделение на чётные и нечётные части относительно нормальной координаты и отбрасываются асимптотически малые члены уравнений.

Интегрирование полученных уравнений по нормальной координате позволяет установить закон зависимости составляющих напряжённо-деформированного состояния от этой координаты и в дальнейшем перейти к двумерным уравнениям.

Полученные зависимости подставляются в чётные и нечётные части уравнений. В результате были получены разрешающие уравнения для асимптотически главных компонент напряжённо-деформированного состояния в усилиях и перемещениях срединной поверхности оболочки.

В третьем разделе двумерные уравнения для безмоментной составляющей, полученные во втором разделе, решаются для случая цилиндрической оболочки, в предположении, что нагрузка на торце является осесимметричной.

С помощью интегрального преобразования Лапласа по переменной времени [17] и теоремы о свёртке [18] было получено решение в изображениях для нормального продольного усилия.

Для перехода к оригиналу степень экспоненты, входящей в решение для изображения усилия, была разложена в ряд Тейлора по отрицательным степеням параметра интегрального преобразования Лапласа, после чего с помощью почленного обращения изображения было получено решение для нормального продольного усилия.

На основе полученного решения были построены графики зависимости приведённого значения нормального усилия от продольной координаты, позволяющие сделать выводы о влиянии параметров интегрального оператора на решение.

Четвёртый раздел посвящён выводу уравнений погранслоя в окрестности квазифронта. Вывод уравнений осуществляется из уравнений, рассмотренных в первом разделе, для оболочки вращения. В представленных уравнениях производится разложение искомых функций в тригонометрические ряды по окружной координате.

Вывод уравнений осуществляется также с помощью метода асимптотического интегрирования, но с соответствующими характеристическими переменными и асимптотиками. В результате осуществляется переход от трехмерной задачи к двумерным уравнениям, описывающим решение исходной задачи в окрестности квазифронта.

Пятый раздел посвящён решению уравнений погранслоя в окрестности квазифронта, полученных в четвёртом разделе для цилиндрической оболочки, подверженной осесимметричной нагрузке на торце.

Решение задачи осуществляется с помощью интегрального преобразования Лапласа, которое позволило получить решение в изображениях для асимптотически главного члена изображения нормального продольного усилия. Для обращения изображения использовалась формула Меллина.

Результаты численных расчётов приведены в виде графиков зависимости приведённого значения нормального усилия к продольной координате для различных параметров интегрального оператора. Установлено влияние параметров интегрального оператора на поведение решения в указанной области.

Заключение

В магистерской работе для вывода уравнений приближенных теорий и исследования нестационарного волнового НДС наследственно-упругих оболочек используются асимптотические методы. Основные результаты исследований заключаются в следующем:

1. Произведена постановка трёхмерной задачи о распространении нестационарных волн в наследственно-упругой оболочке, подверженной ударному продольному воздействию на торец. Рассмотрен случай, когда наследственно-упругое поведение материала оболочки описывается уравнениями состояния в интегральной форме. В качестве ядра интегрального оператора взято ядро Ржаницына.

2. Путём асимптотического интегрирования трёхмерных динамических уравнений наследственной теории упругости выведены асимптотически

оптимальные уравнения для безмоментной двумерной составляющей и погранслоя в окрестности квазифронта.

3. Рассмотрена модельная задача об определении нормального продольного усилия в случае в цилиндрической оболочки, подверженной ударному продольному воздействию тангенциального типа на торце. Получены приближенные аналитические решения задачи для безмоментной составляющей и погранслоя в окрестности квазифронта с помощью метода интегрального преобразования Лапласа по переменной времени. Результаты численных расчётов приведены в виде графиков.

4. Проведён анализ полученных результатов. Проанализировано влияние параметров ядра интегрального оператора на поведение решений.

Список использованных источников

- 1 Худаяров, Б. А. Алгоритмизация задачи о флаттере вязкоупругих трехслойных оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа / Б. А. Худаяров // Вычислительные технологии. - 2005. - Т. 10, № 4. - С. 111 -117.
- 2 Худаяров, Б. А. Флаттер вязкоупругих цилиндрических оболочек с учетом пограничного слоя в потоке газа / Б. А. Худаяров // Механика. - 2010. -Т. 63, № 3. С. 76 – 82.
- 3 Бадалов, Ф. Б. Численное исследование влияния реологических параметров на характер колебаний наследственно-деформируемых систем / Ф. Б. Бадалов, А. Абдукаримов, Б. А. Худаяров // Вычислительные технологии. - 2007. - Т. 12, № 4. - С. 17 – 26.
- 4 Михасев, Г. И. Моделирование свободных колебаний звукопроводящей системы реконструированного среднего уха / Г. И. Михасев, М. А. Фирсов, В. П. Ситников // Российский журнал биомеханики. - 2005. - Т. 9, № 1. - С. 52 – 62.
- 5 Худаяров, Б. А. Численное моделирование нелинейных колебаний вязкоупругого трубопровода с жидкостью / Б. А. Худаяров, Ф. Ж. Тураев // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. - 2016, № 5(43). - С. 90–98.

- 6 Худаяров, Б. А. Математическое моделирование динамики вязкоупругих трубопроводов с протекающей жидкостью /Б. А. Худаяров, Ф. Ж. Тураев // Молодой ученый. - 2015. -№ 8. - С. 19-24.
- 7 Худаяров Б. А. Задачи о флаттере вязкоупругих цилиндрических оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа /А. Худаяров //Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. - 2004. - Т. 57, № 2. - С. 54-57.
- 8 Эшматов, Б. Х. Динамическая устойчивость вязкоупругих пластин при возрастающих сжимающих нагрузках/ Б. Х. Эшматов //Прикладная механика и техническая физика. - 2006. - Т. 47, № 2. - С. 165-175.
- 9 Эшматов, Х. и др. Компьютерное моделирование задачи о нелинейном флаттере вязкоупругой пластины из композиционного материала с сосредоточенными массами/ Б. Х. Эшматов [и др.]//Электронное моделирование. - 2010. - Т. 32, № 5. - С. 3-10.
- 10 Мирсаидов, М. М. Удар по поверхности осесимметричной конструкции из вязкоупругого материала твёрдым телом / М. М. Мирсаидов, Т. З. Султанов //Computational Civil and Structural Engineering. - 2012. - Т. 8, № 3. - С. 107-115.
- 11 Абдикаримов, Р. А. Компьютерное моделирование задач динамики вязкоупругих тонкостенных элементов конструкций переменной толщины / Р. А. Абдикаримов, Д. А. Ходжаев //Инженерно-строительный журнал. – 2014, № 5. - С. 83-94.
- 12 Кириллова, И. В. Эллиптический погранслои в оболочках вращения при ударных поверхностных воздействиях нормального типа / И.В Кириллова, Л. Ю Коссович // Вестник Санкт-Петербургского университета, 2016. Т. 3.: Сер. Математика. Механика. Астрономия, вып. 1. - С. 139–146.
- 13 Тюнеева, И. М. Релаксационные характеристики стеклопластиков / И. М. Тюнеева //Механика полимеров. - 1970. №. 3. С. 560-562.
- 14 Адамов, А.А. Методы прикладной вязкоупругости /А. А. Адамов, В. П. Матвеев, Н.А. Труфанов, И.Н. Шардаков. - Екатеринбург: УрО АН, 2003. - 411 с.

- 15 Лунёва, А. Д. Асимптотический метод определения двумерной безмоментной составляющей в наследственно-упругой оболочке при ударном продольном воздействии на её торец / А. Д. Лунёва, Н. С. Анофрикова //Математика. Механика. – 2018, № 20. – С. 106-108.
- 16 Функция Хевисайда [Электронный ресурс] : Википедия – свободная энциклопедия. / текст доступен по лицензии Creative Commons Attribution – ShareAlike; Wikimedia foundation, Inc, некоммерческой организации. Электрон. дан. (1475212 статей). Wikipedia®, 2001- . URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Функция_Хевисайда (дата обращения: 05.04.2018). Загл. с экрана. Последнее изменение страницы: 01:54, 20 марта 2017. Яз. рус.
- 17 Преобразование Лапласа [Электронный ресурс]: Википедия – свободная энциклопедия. Электрон. дан. / текст доступен по лицензии Creative Commons Attribution – ShareAlike; Wikimedia foundation, Inc, некоммерческой организации. Электрон. дан. (1475212 статей). Wikipedia®, 2001- . URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Преобразование_Лапласа (дата обращения: 7.04.2019). Загл. с экрана. Последнее изменение страницы: 07:39, 2 апреля 2018. Яз. рус.
- 18 Краснов, М. Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию / М. Л. Краснов. М.: Наука, 1975. - 302 с.