МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической теории упругости и биомеханики

Задачи изгиба конструкции из тонкой пластины и цилиндрической оболочки с учетом силовой нагрузки и температурного поля

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 237 группы

направления 01.04.03 – Механика и математическое моделирование

Механико-математического факультета

Ву Хай Ань

Научный руководитель
доцент каф. МТУиБМ, к. ф.-м. н. ______________________ Р. А. Сафонов
подпись, дата

Заведующий кафедрой
профессор, д. ф.-м. н. ____________________ Л.Ю. Коссович
дата, подпись

Саратов 2019

Введение. Большинство инженерных разработок (самолёты, субмарины, резервуары и т. д.) строятся на основе так называемых тонкостенных оболочечных конструкций. Современная эксплуатация подобных систем включает в себя температурные и силовые нагрузки. Решение термоупругой задачи тонкостенных оболочечных конструкций является актуальной в связи с их достоинствами: пространственная жесткость и высокая несущая способность конструкции достигаются при существенной экономии материала. Также за счёт тонких стенок моделей достигается значительное уменьшение массы в сравнении с покрытиями из плоских элементов.

Количественное описание поведения оболочечных конструкций под действием механических и тепловых явлениях требуют выбора особых теоретических моделей механики сплошной среды.

Целью данной работы является решение задачи термоупругости для композиции, состоящей из оболочки вращения и пластины, гладко сопряженных между собой, вариационным методом.

Исходя из цели работы, были сформулированы следующие **задачи**:

1. Аналитическое исследование статических и динамических задач несвязной термоупругости пологих оболочек и геометрически нерегулярных пластин под действием локальных быстровозрастающих силовых и температурных нагрузок на границах и основных поверхностях методом суперпозиции тригонометрических рядов с переменными коэффициентами, многочленов и других функций.
2. Построение строгой континуальной математической модели композиций из оболочки вращения и пластины, гладко сопряженных между собой.
3. Численное решение краевых задач для композиций из оболочки вращения и пластины, гладко сопряженных между собой с учетом полученных аналитических зависимостей, и анализ полученных результатов.

Научная актуальность. При решении подобного рода задач наиболее эффективным и более простым с математической точки зрения является метод, который позволяет исходить из известных уравнений теории поверхностей. Эти уравнения могут быть применены к изучаемым моделям, если они будут представлены в виде двумерной геометрии, выраженной срединной поверхностью. Использование данного метода предполагает переход от трёхмерной постановки задачи к двумерной с определением параметров Ламе и главных кривизн срединной поверхности.

Научная новизна. На основании метода тригонометрических рядов с переменными коэффициентами, многочленов и других функций получены новые аналитические решения для статических задач несвязной термоупругости пологих оболочек и геометрически нерегулярных пластин под действием локальных и быстровозрастающих силовых и температурных воздействий на краях и основных поверхностях.

Структура и объем работы. Магистерская работа состоит из введения, трех разделов, заключения и списка используемых источников.

Раздел 1. Основные понятия и гипотезы теории оболочек и пластин. Термодинамика. Вариационные принципы

Раздел 2. Построение математической модели

Раздел 3. Численное решение и результаты исходных уравнений

Основное содержание работы. Введение магистерской выпускной квалификационной работы содержит информацию о состоянии разработок по изучаемой теме, а именно методы изучения и решения задач термоупругости; также обоснована актуальность темы, связь данной работы с другими исследовательскими работами; цель работы и задачи.

Первый раздел представленной работы посвящен теоретическим основам, используемым при построении теории термоупругости тонкостенных оболочечных конструкций, а также вариационным методам решения данного типа задач.

Основная часть второго раздела включает в себя построение математической модели изучаемой конструкции. Было построено аналитическое представление срединной поверхности изучаемых систем (цилиндр-пластина, цилиндр-пластина-цилиндр). Ниже приведены основные выкладки, которые используются для построения основной системы разрешающих уравнений.

Была рассмотрена композиция цилиндр-пластина. Предполагается, что элемент сложной композиции на участке [0, a] является пологой цилиндрической оболочкой, которая на линии $x = x_1$ сопрягается с прямоугольной пластиной, расположенной параллельно координатной плоскости и отстоящей на от неё на расстояние g*.

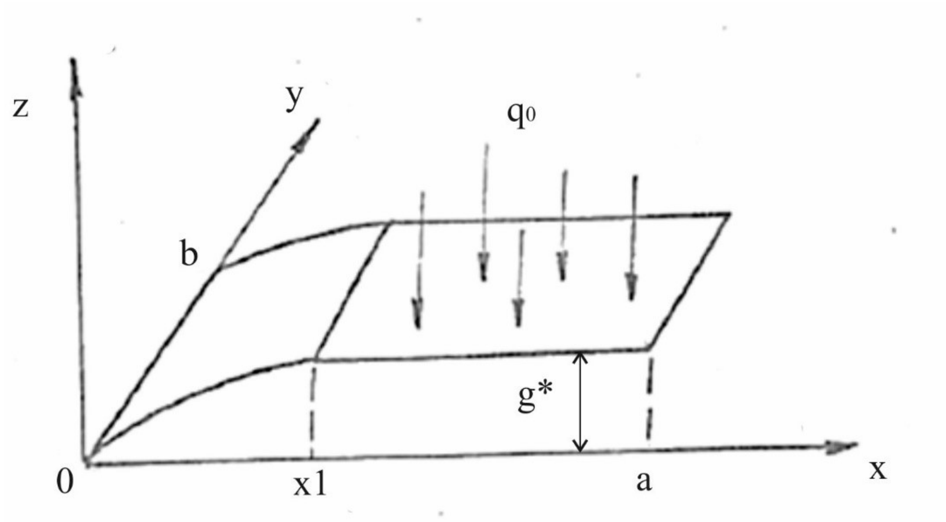

Рисунок 1 - Структурная композиция из пластины и цилиндра с распределенной силовой нагрузкой

Для исследуемой конструкции записывалась обобщенная функция, описывающая положения срединой поверхности [1]:

$$z(x) = \frac{2g*}{x_1}x - \frac{g*}{{x_1}^2}x^2 + \left[g* - \frac{2g*}{x_1}x + \frac{g*}{x_1}x^2\right]H(x - x_1) \qquad (1)$$

Главные кривизны k_1 и k_2 поверхности $z(x)$ равны:

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{d^2z}{dx^2} = -\dfrac{2g*}{{x_1}^2} + \dfrac{2g*}{{x_1}^2}H(x - x_1) \\ k_2 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

В данной работе была рассмотрена более усложненная модель, представленная на рисунке 2.

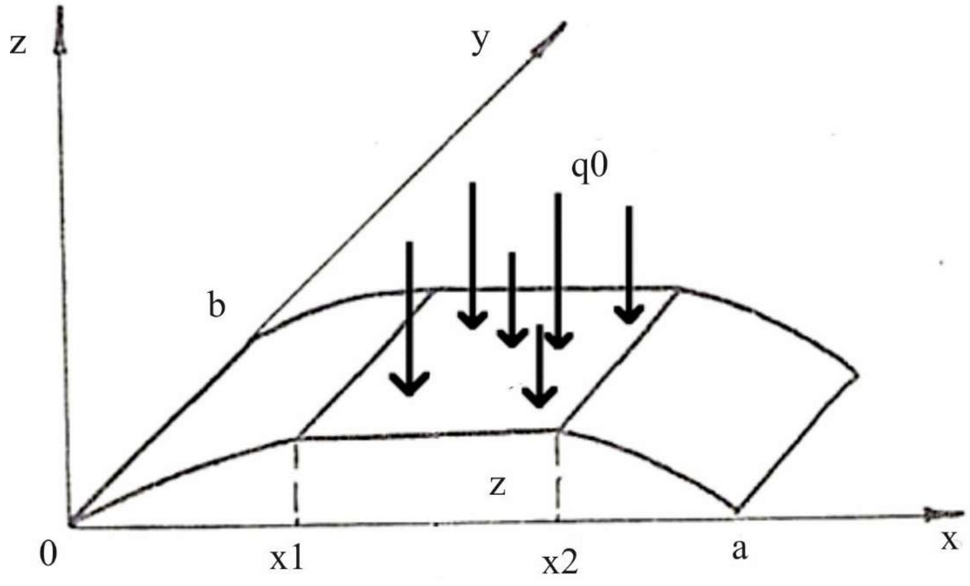

Рисунок 2 - Структурная композиция из цилиндра-пластины-цилиндра с распределенной силовой нагрузкой на пластине

Для модели, представленной на рисунке 2, функция, описывающая срединную поверхность, будет иметь следующий вид [1]:

$$z(x) = \frac{2g*}{x_1}x - \frac{g*}{{x_1}^2}x^2 + \left[g* - \frac{2g*}{x_1}x + \frac{g*}{x_1}x^2\right]H(x - x_1) + \tag{3}$$

$$+\left[\frac{g^*}{(a - x_2)^2}(a^2 - 2x_2a + 2x_2x - x^2) - g^*\right]H(x - x_2).$$

Главные кривизны k_1 и k_2 поверхности $z(x)$ равны:

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{d^2z}{dx^2} = -\dfrac{2g*}{{x_1}^2} + \dfrac{2g*}{{x_1}^2}H(x - x_1) - \dfrac{2g^*}{(a - x_2)^2}H(x - x_2) \\ k_2 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

На основании полученных равенств (2) и (4) строилась система разрешающих уравнений термоупругой системы [2].

Для двухэлементной структуры система выглядит следующим образом:

$$\sum_{k,m}\left\langle -\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 u_{km} - \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 u_{km} - \frac{1+\nu}{2}\frac{mk\pi^2}{ab}v_{km} - \right.$$

$$\left. -\frac{2g*}{{x_1}^2}H(x - x_1)\frac{k\pi}{a}w_{km} + \frac{2g*}{{x_1}^2}\frac{k\pi}{a}w_{km}\right\rangle \cos\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b} -$$

$$-\frac{2g*}{{x_1}^2}\sum_{k,m} w_{km}\delta\,(x - x_1)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b} = 0;$$

$$\sum_{k,m}\left\langle-\frac{1+\nu}{2}\frac{mk\pi^2}{ab}u_{km}-\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 v_{km}-\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 v_{km}+\frac{2\nu g*}{{x_1}^2}w_{km}-\right.$$

$$\left.-\frac{2\nu g*}{{x_1}^2}H(x-x_1)\frac{m\pi}{b}w_{km}\right\rangle\sin\frac{k\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}=0; \qquad (5)$$

$$\sum_{k,m}\left\langle\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^4+2\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^4+\frac{12}{h^2}\left(\frac{4g*^2}{{x_1}^2}-\frac{4g*^2}{{x_1}^2}H(x-x_1)\right)\right]w_{km}-\right.$$

$$-\frac{12}{h^2}\left(\frac{2g*}{{x_1}^2}H(x-x_1)-\frac{2g*}{{x_1}^2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+$$

$$\left.+\frac{\alpha}{h}(1+\nu)\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right]\frac{16}{km\pi^2}\left[\frac{\frac{6\varkappa}{\lambda h}(T^+-T^-)}{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{6\varkappa}{\lambda h}+\frac{12}{h^2}\right)}\right]\right\rangle\times$$

$$\times\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}=\frac{12q(1-\nu^2)}{Eh^3}.$$

Для трёхэлементной композиции система разрушающих уравнений имеет вид:

$$\sum_{k,m}\left\langle-\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 u_{km}-\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 u_{km}-\frac{1+\nu}{2}\frac{mk\pi^2}{ab}v_{km}+\right.$$

$$\left.+w_{km}\frac{k\pi}{a}\left(\frac{2g*}{{x_1}^2}-\frac{2g*}{{x_1}^2}H(x-x_1)+\frac{2g*}{(x_2-a)^2}H(x-x_2)\right)\right\rangle\cos\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}+$$

$$+\sum_{k,m}\left[\frac{2g*}{{x_1}^2}\delta(x-x_1)-\frac{2g*}{(x_2-a)^2}\delta(x-x_2)\right]w_{km}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}=0;$$

$$\sum_{k,m}\left\langle-\frac{1+\nu}{2}\frac{mk\pi^2}{ab}u_{km}-\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 v_{km}-\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 v_{km}+\nu\frac{m\pi}{b}w_{km}\left[\frac{2g*}{{x_1}^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2g*}{{x_1}^2}H(x-x_1)+\frac{2g*}{(x_2-a)^2}H(x-x_2)\right]\right\rangle\sin\frac{k\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}=0; \quad (6)$$

$$\sum_{k,m}\left\langle\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^4+2\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^4+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{12}{h^2}\left(\frac{4g*^2}{{x_1}^4}+\left(\frac{4g*^2}{(x_2-a)^2}+\frac{4g*^2}{{x_1}^2(x_2-a)^2}\right)H(x-x_2)\right)\right]w_{km}+$$

$$+\frac{12}{h^2}\left(\frac{2g*}{{x_1}^2}-\frac{2g*}{{x_1}^2}H(x-x_1)+\frac{2g*}{(x_2-a)^2}H(x-x_2)\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+$$

$$\left.+\frac{\alpha}{h}(1+\nu)\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right]\frac{16}{km\pi^2}\left[\frac{\frac{6\varkappa}{\lambda h}(T^+-T^-)}{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{6\varkappa}{\lambda h}+\frac{12}{h^2}\right)}\right]\right\rangle\times$$

$$\times \sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b} = \frac{12q(1-\nu^2)}{Eh^3}.$$

Проведя преобразования по методу Галёркина для систем (5), (6), избавились от тригонометрического ряда и перешли к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно u_{km}, v_{km}, w_{km}.

В третьей главе проведено численное решение СЛАУ и получены следующие результаты для модели с параметрами a=2, b=1, x_1=1, T2=200:

$$\begin{gathered} u_{11} = 1.052 * 10^\wedge - 6; \\ v_{11} = 1.01 * 10^\wedge - 6; \\ w_{11} = 2.559 * 10^\wedge - 5. \end{gathered} \tag{7}$$

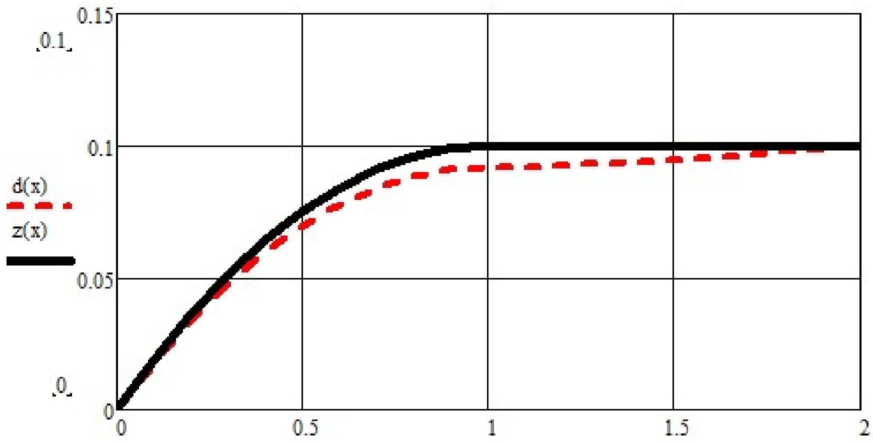

Рисунок 3 - Схематичный профиль срединной поверхности исследуемой модели: до и после нагружения (a=2, b=1, x1=1, T2=200)

На рисунке 3 и на следующих графиках пунктирной сплошной черной линией будет показан профиль недеформированной срединной поверхности; пунктирной красной линией – профиль под действием силовых и температурных напряжений.

Для данной модели были также посчитаны значения прогиба без учета температурных напряжений. Значение прогиба при одном только силовом воздействии составило $w_{11} = 2.359 * 10^\wedge - 5$ м.

Для модели, состоящей из трёх элементов (a=3, b=1, x_1=1, x_2=2, T2=200) были получены следующие максимальные значения деформаций:

$$\begin{gathered} u_{11} = 1.749 * 10^\wedge - 5; \\ v_{11} = -1.043 * 10^\wedge - 5; \\ w_{11} = 1.489 * 10^\wedge - 4; \end{gathered} \tag{8}$$

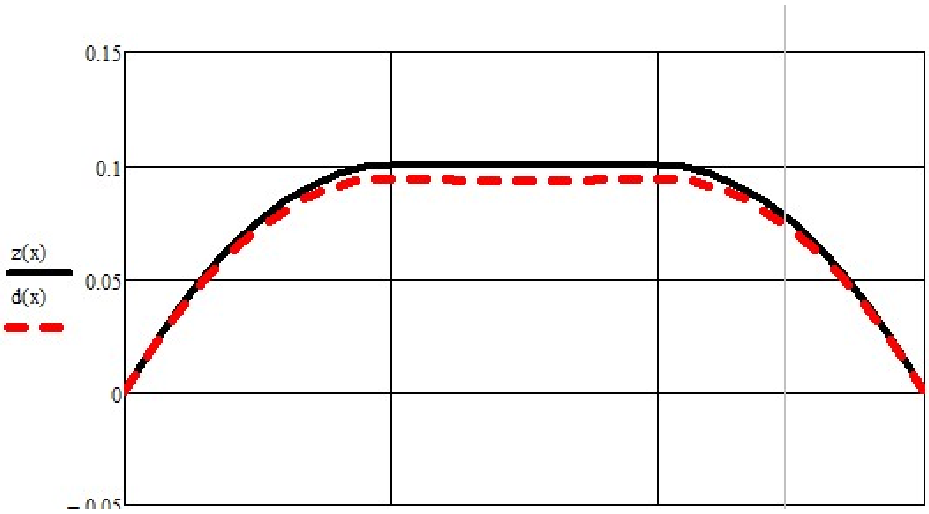

Рисунок 4 - Схематичный профиль срединной поверхности исследуемой модели (a=3, b=1, x_1=1, x_2=2, T2=200)

Для данной модели были также посчитаны значения прогиба без учета температурных напряжений. Максимальное значение прогиба при одном только силовом воздействии составило $w_{11} = 1.372 * 10^{-4}$м.

По полученным данным был проведен анализ, который показал, что функция прогиба с увеличением разности температуры на поверхности и окружающей среды представляет собой нелинейно монотонно возрастающую функцию с выпуклостью вниз. Кривизна графика для композиции цилиндр-пластина-цилиндр выражена больше чем для композиции цилиндр-пластина.

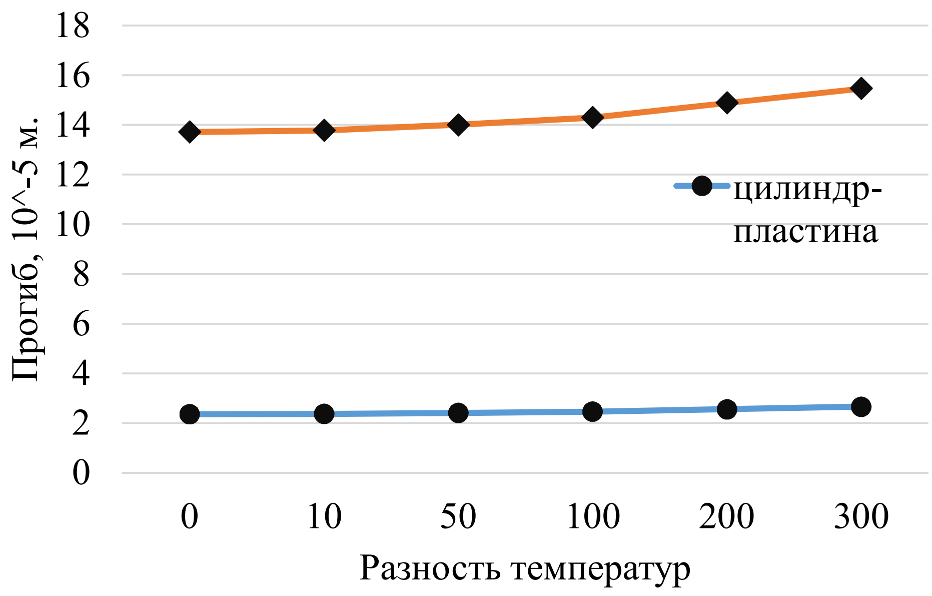

Рисунок 6 – График зависимости функции прогиба от температуры

На рисунке 7 наблюдается следующая картина. С увеличением ширины все оболочечной конструкции в двух модулях наблюдается монотонно убывающий характер функции прогиба.

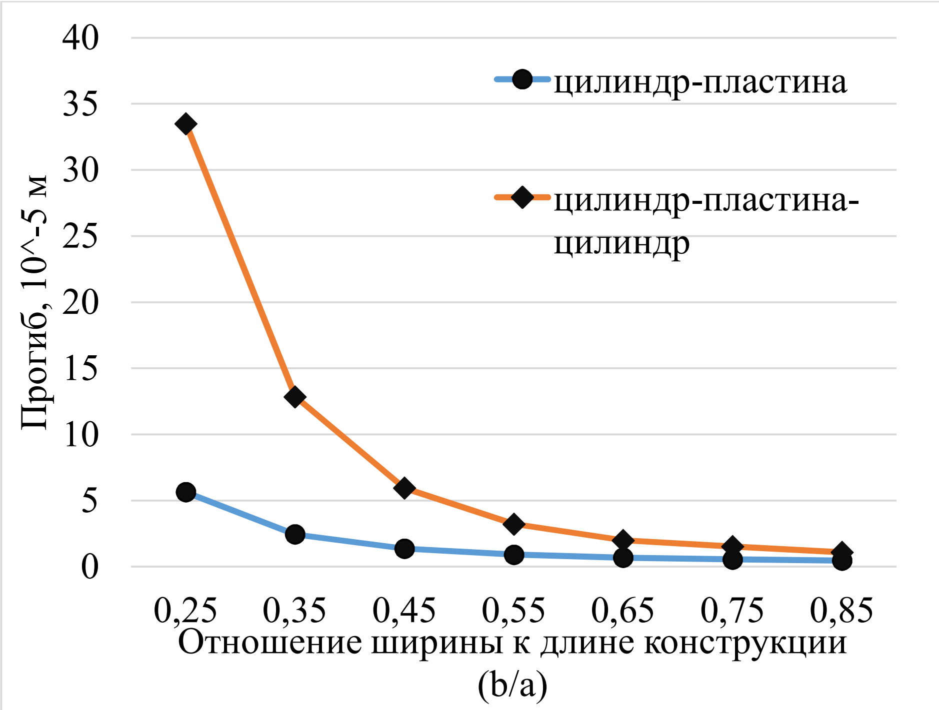

Рисунок 7 – График зависимости прогиба конструкции от изменения геометрических размеров

Как и в случае с изменением температуры - двухэлементная конструкция является более жесткой.

Заключение. В ходе проделанной работы на основании метода тригонометрических рядов с переменными коэффициентами, многочленов и других функций получены новые аналитические решения для статических задач несвязной термоупругости пологих оболочек и геометрически нерегулярных пластин под действием локальных и быстровозрастающих силовых и температурных воздействий на краях и основных поверхностях.

Для исследуемых моделей по геометрическим свойствам оболочек вращения, гладко сопряженных между собой, были построены строгие континуальные модели. В рассмотренных случаях показано, что сингулярные параметры Ламе и главные кривизны композиции удовлетворяют условиям Кодацци-Гаусса, что позволяет при решении данного рода задач исходить из различных по степеням точности уравнений теории тонких оболочек в триортогональных криволинейных координатах.

Вариационным путем и методом Галёркина получены уравнения термоупругости из оболочек вращения с термочувствительной толщиной в компонентах поля перемещения. Для композиции из двух элементов (цилиндр-пластина) определены сингулярные коэффициенты в уравнениях теплопроводности и термоупругости.

Решены задачи несвязной термоупругости для пологой оболочки постоянного кручения (пластины) и цилиндрической оболочки подверженных резкому перепаду температур со стороны окружающей среды. Решение сводилось к интегрированию системы дифференциальных уравнений четвертого порядка в частных производных относительно пространственных переменных. В первом приближении были получены численные значения деформаций, исследуемых систем. На основании полученных результатов проводился сравнительный анализ влияния температурных и геометрических параметров на величины прогибов термоупругих систем.

Список использованных источников:

1 Белосточный Г. Н. Оболочки и геометрически нерегулярные пластинки с термочувствительной толщиной. // Г. Н. Белосточный, Е. А. Русина // Доклады Российской академии естественных наук. Поволжское межрегиональное отделение 1999. №1. С. 28-37.

2 Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. / С. А. Амбарцумян. -2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1987. - 360 с.

3 Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек / С. А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1974. - 448 с.

4 Гольденвейзер А. Л. Методы обоснования и уточнения теории оболочек. / А. Л. Гольденвейзер. – ПММ.: 1968 – Т. 32 №4.

5 Белосточный Г. Н. Уравнения термоупругости композиций из оболочек вращения. / Г. Н. Белосточный, О. А. Мыльцина. – Вестник Саратовского

государственного технического университета - Саратов: Издательство СГТУ. Т.4, №1 2011 г. С 56-64.

6 Белосточный Г. Н. К вопросу статической устойчивости композиции из различных, по геометрическим свойствам, оболочек вращения. / Г. Н. Белосточный, О. А. Мыльцина. // Доклады академии военных наук. Т. 54, №5, ОАО «КБ ЭЛЕКТРОПРИБОР». - Саратов, 2012. С 21-25.

7 Абовский Н. П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочки. / Н. П. Абовский, Н. П. Андреев, А. П. Деруга. – М.: Наука, 1978. - 288 с.

8 Новожилов В. В. Теория тонких оболочек / В. В. Новожилов. – Л.: Судпромгиз, 1962, 431 с.

9 Канторович Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы. 1962. – 708 с.

10 Новожилов В. В. Линейная теория оболочек / В. В. Новожилов, К. Ф. Черных, Е. И. Михайловский. – Ленинград: «Политехника», 1991. – 656 с.

11 Мыльцина О. А. Термоупругость геометрически нерегулярных пластин и оболочек под действием быстропеременных температурных и силовых воздействий: дис. … канд. ф.м. наук: 01.02.04: защищена 14.06.2017 / О. А. Мыльцина; науч. рук. Г. Н. Белосточный; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г, Чернышевского. – Саратов, 2017. - 198 с.

12 Волков И. К. Интегральные преобразования и операционное исчисление/ И. К. Волков, А. Н. Канатников; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. — 228 с.

13 Гольденвейзер А. Л. Теория тонких упругих оболочек. / А. Л. Гольденвейзер. -2-е изд., перераб. и доп. - М.: Наука, 1976. 512 с.

14 Власов В. З. Общая теория упругих оболочек и её приложение в технике. / В. З. Власов. - М.: Гостехиздат, 1949. 784 с.

15 Подстригач Я. С. Термоупругость тонких оболочек. / Я. С. Подстригач, Р. Н. Швец. - К.: «Наук. думка», 1978, 344 с.

16 Fu Geo Lin. Generalized variational principles in thermoelasticity. – Scientia Sinica. 1964, 13, №9, pp. 1507-1509.

17 Био М. А. Термоупругость и термодинамика необратимых процессов. / М. А. Био. Сборник пер. «Механика», 1957, №3, с. 68-92.

18 Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. / В. Новацикий. - М., «Мир», 1970, 344 с.

19 Белосточный Г. Н. Нестационарное уравнение теплопроводности подкрепленных оболочек и некоторое решение задачи термоупругости ребристых пластин и оболочек с учетом связности полей температуры и деформаций. / Г. Н. Белосточный, В. М. Рассудов. // Саратовский политехнический институт. – Саратов, 1984. С. 49.

20 Антосик П. Теория обобщенных функций. / П. Антосик, Я. Микунский, Р. Сикорский. - М.: Изд-во «Мир», 1976. 311 с.