МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математической физики и вычислительной математики

«Неклассические решения интегрируемых уравнений математической физики»

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 217 группы
направления 01.04.02 – Прикладная математика и информатика
код и наименование направления(специальности)

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Кирьяновой Татьяны Александровны
фамилия, имя, отчество

Преподаватель
к. ф.-м. н., доцент М. Ю. Игнатьев
должность, уч.степень, уч.звание дата, подпись инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор В. А. Юрко
должность, уч.степень, уч.звание дата, подпись инициалы, фамилия

Саратов 2019

Введение. За последние два десятилетия множество работ были посвящены задаче Коши для нелинейного волнового уравнения Камасса – Холма, которое имеет вид

$$u_t - u_{xxt} = 2u_x u_{xx} - 3uu_x + uu_{xxx} \; u(x,t_0) = u_0; \tag{1}$$

Одним из важных свойств уравнения Камасса-Холма интегрируемость в том смысле, что существует связанная пара Лакса. При использовании метода обратной задачи рассеяния существенна интегрируемость (1). В первом разделе рассматриваем подход, обеспечивающий алгоритм обратной задачи рассеяния. Существуют решения уравнения Камасса-Холма, которые имеют разрыв, т.е. возникают особенности за конечное время, но норма в H^1 конечна. В этом случае возникают сложности продолжения решения после разрыва волны. Мы рассмотрим так называемые "мультипиконовые решения. Это решения вида

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} p_n(t) e^{-|x-q_n(t)|}, \tag{2}$$

где функции в правой части удовлетворяют следующей нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{q_n} = \sum_{k=1}^{N} p_k e^{-|q_n-q_k|}, \quad \dot{p_n} = \sum_{k=1}^{N} p_n p_k \, sgn(q_n - q_k) e^{-|q_n-q_k|}. \tag{3}$$

Целью магистерской работы является построение решений уравнения Камасса-Холма. Для этого были решены следующие задачи:

1. рассмотрен метод обратной задачи для уравнения (1);
2. рассмотрены глобальные консервативные мультипиконовые решения;
3. построено двупиконовое решение для уравнения (1)

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка используемых источников и приложения.

Основная часть. **Первая глава** является теоретической и состоит из пяти разделов. **В первом разделе** рассматривается метод обратной задачи для (1.) Перепишем (1) в виде

$$m_t + 2u_x + um_x + 2mu_x = 0, t > 0, x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

где $m = u - u_{xx}$ - переменная импульса. В (4), $u(t, x)$ представляет горизонтальную составляющую скорости потока , или, эквивалентно, свободную поверхность воды. Изоспектральная задача для (4)в $L^2(\mathbb{R})$ выглядит следующим образом:

$$\psi_{xx} = \frac{1}{4}\psi + \lambda(m + 1)\psi \tag{5}$$

с непрерывным сектором $\left(\infty, -\frac{1}{4}\right]$ и конечным числом собственных значений на интервале $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$. Верно

$$\psi(t, x, k) = \begin{cases} e^{ikx} + \mathfrak{R}(t, k)e^{ikx}, & x \to \infty; \\ \mathfrak{F}(t, k)e^{ikx}, & x \to -\infty, \end{cases} \tag{6}$$

где $\mathfrak{F}$ –коэффициент прохождения, $\mathfrak{R}$ – коэффициент отражения.

$$\mathfrak{F}(t, k) = \mathfrak{F}(0, k),$$

$$\mathfrak{R}(t, k) = \mathfrak{R}(0, k) \exp\left(\frac{ik}{\lambda}t\right), t \geq 0-$$

эволюция $\mathfrak{F}(t, k)$ и $\mathfrak{F}(t, k)$. Данными рассеяния являются коэффициенты $\{\mathfrak{R} : k \geq 0\}$, дискретный спектр и нормализующие константы $c_n(t), n =$

$1 \ldots, N$, связанные с дискретным спектром (набором собственных значений) $\{\lambda_1, ..., \lambda_N\}$. Связанные состояния являются константами движения. (5) перепишем в виде

$$-\frac{d^2\phi}{dy^2} + Q\phi = \mu\phi. \tag{7}$$

Где

$$Q(y) = \frac{1}{4q(y)} + \frac{q_{yy}(y)}{4q(y)} - \frac{3q_y^2(y)}{16q^2(y)} - \frac{1}{4} \tag{8}$$

с

$$q(y) = m(x) +$$

и спектральным параметром $\mu = -\frac{1}{4} - \lambda$. В любой момент $t \geq 0$ мы можем определить данные рассеяния для $Q(t, y)$ из $Q_0(y) = Q(0, y)$..Условия на m_0 гарантируют, что $Q_0 \in S(\mathbb{R})$ и что применим подход Марченко, и нахождение $Q(t, y)$ равносильно решению линейного интегрального уравнения, определяемого данными рассеяния для $Q_0(y)$ из знания $m_0(x)$. Единственным сложным моментом этого подхода является восстановление $m(t, x)$ из $Q(t, y)$. Учитывая Q это требует от нас решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка (8) для нахождения q, а затем выполнения преобразования координат $y \mapsto x$. Уравнение (8) является уравнением Пинни [14], но решение для q, данное Q, полученное в [14], не удобно для наших целей (этот подход использовался в [3] и приводит к ненужным осложнениям).

Ниже рассмотрим альтернативный подход, который дает более прямое и менее сложное решение. Для удобства в формулировке опускаем зависимость от времени.

Теорема 0.1. *Пусть $f(y)$ - функция Йоста при $y = \infty$ для уравнения на собственные значения*

$$\phi_{yy} = (Q + \frac{1}{4})\phi, \tag{9}$$

т. е. f-единственное решение (9) с асимптотикой

$$f(y) = e^{-y/2} + o(1) \text{ и}; f'(y) = -\frac{1}{2}e^{-y/2} + o(1) \text{ при } y \to \infty.$$

Если $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - это биекция, заданная $H(t) = \int\limits_{-\infty}^{y} \frac{d\xi}{f^2(\xi)}$, тогда

$$m(x) + 1 = e^{2x} f^4(H^{-1}(e^x)), x \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Результат теоремы сводит восстановление $m(x)$ по $Q(y)$ к решению линейного интегрального уравнения

$$f(y) = e^{-y/2} + \int\limits_{y}^{\infty} \left(e^{(\xi-y)/2} - e^{(y-\xi)/2} \right) Q(\xi) f(\xi) d\xi, y \in \mathbb{R}$$

и вычисление обратной функции $H(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} \frac{d\xi}{f^2(\xi)}$. **Во втором разделе** рассмотрим глобальные консервативные мультипиконовые решения.

Определение 0.1. *Глобальное консервативное решение (u, μ) уравнения Камасса-Холма является мультипиконовым решением, если для некоторых $t_0 \in \mathbb{R}$ мера $\mu(\cdot, t_0)$ абсолютно непрерывна и верно*

$$u(x, t_0) = \sum_{n=1}^{N} p_n(t_0) e^{-|x - q_n(t_0)|}, x \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

для некоторых $N \in \mathbb{N}$ и $p_n(t_0), q_n(t_0) \in \mathbb{R}$ для $n = 1, \ldots, N$.

Лемма 0.1. *Предположим, что характеристики не совпадают в момент времени $t \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \\ \vdots \\ p_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(t) & b_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ b_1(t) & a_2(t) & b_2(t) & \dots & 0 \\ 0 & b_2(t) & a_3(t) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_N(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(q_1(t),t) \\ u(q_2(t),t) \\ u(q_3(t),t) \\ \vdots \\ u(q_N(t),t) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $a_n(t) = \frac{1}{2}\frac{sh(q_{n+1}(t) - q_{n-1}(t))}{sh(q_{n+1}(t) - q_n(t))sh(q_n(t) - q_{n-1}(t))}$, $n = 1, \dots, N$,
$b_n = \frac{1}{2}\frac{-1}{sh(q_{n+1}(t) - q_n(t))}$, $n = 1, \dots, N-1$. *Для простоты считаем* $q_0(t) = -\infty$ *и* $q_{N+1}(t) = +\infty$.

Лемма 0.2. *Функция (29) будет слабым решением уравнения Каммса-Холма, если p_n и q_n удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнения (3).*

Лемма 0.3. *Предположим, что* $q_n(t^\times) = q_{n+1}(t^\times)$ *для некоторых* $n = 1, \dots, N-1$. *Тогда*

$$p_n(t^\times) + p_{n+1}(t^\times) = \lim_{t \to t^\times} p_n(t) + p_{n+1}(t) \tag{13}$$

и масса $\mu(\cdot, t^\times)$ *в точке столкновения задается*

$$\mu(\{q_n(t^\times)\}, t^\times) = \lim_{t \to t^\times} 4p_n(t)p_{n+1}(t)(q_n(t) - q_{n+1}(t)). \tag{14}$$

Утверждение Пусть мультипиконновые начальные данные $\widetilde{u}$ задаются $\widetilde{u} = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i e^{-|x-\xi_i|}$ и $\widetilde{y}_i = \xi_i, \widetilde{u}_i = \widetilde{u}(\xi_i), \widetilde{H}_i = \int\limits_{-\infty}^{\xi_i} \widetilde{u}^2 + \widetilde{u}_x^2)dx \ \forall \ i = 1, \dots, n$. Тогда существует глобальное решение (y_i, u_i, H_i) задачи

$$\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dt} = u_i, \\ \dfrac{du_i}{dt} = Q_i \\ \dfrac{dH_i}{dt} = u_i^3 - 2P_i u_i. \end{cases}$$

$$P_i = \sum_{j=0}^{n} P_{ij},$$

где

$$P_ij = \begin{cases} e^{(y_1 = y_i)} \dfrac{u_1^2}{4}, & \text{для} j = 0; \\ \dfrac{e^{-\kappa_{ij} y_i} e^{\kappa_{ij} \widetilde{y}_j}}{8 \cosh(\delta y_j)} [2\delta H_j \cosh^2(\delta y_j) + \\ +8\kappa_{ij} \widetilde{u}_j \delta u_j \sinh^2(\delta y_j) + 4\widetilde{u}_j^2 \tanh^2(\delta y_j)] & \text{для} j = 1, \ldots, n-1, \\ e^{(y_i - y_n)} \dfrac{u_n^2}{4}, & \text{для} j = n; \end{cases}$$

и $Q_i = -\sum\limits_{j=0}^{n} \kappa_{ij} P_{ij}$, где

$$\kappa_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если} j \geq i, \\ 1, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

с начальными данными $(\widetilde{y}_i, \widetilde{u}_i, \widetilde{H}$. Для каждого времени t определяем $u(t, x)$ как решение задачи Дирака $u - u_{xx} = 0$ с граничными условиями $u(t, y_i(t)) = u_i(t, y_{i-1}(t)) = u_{i+1}(t)$ для интервала $[y_i(t), y_{i+1}(t)]$. Тогдаu - мультипиконновое решение уравнения Камасса-Холма.

В третьем разделе рассматривается обобщенная спектральная задача. Для определенности будем считать, что $supp(|\omega| + v) = \{x_1, \ldots, x_N\}$, $|\omega_n| + v_n > 0$ для $n = 1, \ldots, N$. В этом разделе будем рассматривать спектральную задачу

$$- f''(x) + \frac{1}{4} f(x) = z\omega(x)f(x) + z^2 v(x)f(x), \ x \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

с комплексным спектральным параметром $z \in \mathbb{C}$. Поскольку ω и v - это меры, то данное уравнение следует понимать в смысле обобщенных функций (если f непрерывна, то в правой части будет стоять мера).

Предположение 0.1. *Каждое собственное значение λ спектральной задачи (15) вещественно. При этом*

$$- \dot{W}(\lambda) = c_\lambda \gamma_\lambda^2 \neq 0, \tag{16}$$

где точка означает дифференцирование по спектральному параметру.

Предположение 0.2. *Первые две формулы следов спектральной задачи (15) задают*

$$\sum_{\lambda \in \sigma} \frac{1}{\lambda} = \int_{\mathbb{R}} d\omega \quad \sum_{\lambda \in \sigma} = \frac{1}{\lambda^2} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-s|} d\omega(s) d\omega(x) + 2 \int_{\mathbb{R}} dv. \tag{17}$$

В четвертом разделе рассматривается обобщенная спектральная задача. Вводится рациональная функция Вейля–Титчмарша Mна $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, связанную со спектральной задачей (15), через

$$M(z)W(z) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \phi_-(z, x) - e^{\frac{x}{2}} \phi'_-(z, x), \ \ z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{18}$$

для $x \to +\infty$(обратим внимание, что вронскиан справа является константой).

Лемма 0.4. *Функция Вейля-Тичмарша допускает следующее разложение на простые дроби(следующее разложение в ряд)*

$$\frac{M(z)}{z} = \sum_{\lambda\in\sigma} \frac{\gamma_\lambda^2}{\lambda(\lambda - z)},\ z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \tag{19}$$

Лемма 0.5. *Функция Вейля-Титчмарша M допускает следующее конечное разложение на простые дроби:*

$$M(z) = 1 + \cfrac{1}{-l_n + \cfrac{1}{m_N(z) + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{-l_1 + \cfrac{1}{m_1(z) - \cfrac{1}{l_0}}}}}}\quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{20}$$

Теперь мы можем решить обратную спектральную задачу следующим образом[33, §3.4].

Теорема 0.2. *Пусть задано σ -конечное подмножество $\mathbb{R}$, и для каждого $\lambda \in \sigma$ пусть $\gamma_\lambda^2 \in \mathbb{R}$, такая что $\lambda\gamma_l a^2 > 0$. Тогда существуют единственные меры ω и υ вида (**??**), такие что заданы спектр σ и нормирующие постоянные γ_λ^2 для $\lambda \in \sigma$.*

Следствие 0.1. *Пусть ω и υ – меры, которые определены в (**??**), σ – ассоциированный спектр и для каждого $\lambda \in \sigma\gamma_\lambda^2$ - соответствующие нормирующие постоянные.*

i) *$v=0$ тогда и только тогда, когда главные миноры $\Delta_{1,k}, k=1,\dots,|\sigma|$, матрица моментов*

$$\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_{|\sigma|} \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{|\sigma|+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ s_{|\sigma|} & s_{\sigma|+1} & \dots & s_{2|\sigma|-1} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \;\; s_k = \sum_{\lambda\in\sigma} \frac{\lambda^k}{\lambda\gamma_\lambda^2},\; k\in\mathbb{N}, \tag{21}$$

не равны нулю, и где $\sigma|$ - число собственных значений.

ii) *Если η_+ - количество ненулевых элементов в $v_1,\dots,v_N$ и κ_0 - количество нулевых элементов в $\Delta_{1,1},\dots,\Delta_{1,|\sigma|}$, тогда верны соотношение*

$$|\sigma| - N - \eta_+ = \kappa_0. \tag{22}$$

iii) *В случае $v=0$, мера ω неотрицательна(неположительна) тогда и только тогда, когда все миноры $\Delta_{1,k}$ положительны(знаки чередуются, начиная с отрицательного, т.е. $s_1<0$.*

В пятом разделе показывается, что наша обобщенная спектральная задача действительно является изоспектральной задачей для консервативного уравнения Камасса–Холма в случае мультипикона.

Теорема 0.3. *Пара u,ν является глобальным консервативном мультипиконновом решением уравнения Камасса-Холма тогда и только тогда, когда задачи*

$$-f''(x)+\frac{1}{4}f(x) = z\omega(x,t)f(x)+z^2v(x,t)f(x), x\in\mathbb{R}, \tag{23}$$

изоспектральны с

$$\gamma_\lambda^2(t) = e^{-\frac{t-t_0}{2\lambda}}\gamma_\lambda^2(t_0), t\in\mathbb{R}, \lambda\in\sigma(t_0), \tag{24}$$

Эволюция во времени спектральных величин в теореме дает нам сохранение величины для глобальных консервативных мультипиконновых решений.

Следствие 0.2. *Если пара (u, ν) является глобальным консервативным многопиконновым решением уравнения Камасса-Холма, то интегралы*

$$\mathcal{I}_1 = \int_{\mathbb{R}} d\omega(x,t) \;\; \mathcal{I}_2 = \int_{\mathbb{R}} u(x,t) d\omega(x,t) + \int (\mathbb{R} dv(x,t) \tag{25}$$

не зависят от времени $t \in \mathbb{R}$.

Вторая глава является практической и состоит из двух разделов. Во втором разделе построено данное решение. **В первом разделе** описаны глобальные двупиконновые решения уравнения Камасса-Холма, заданы явные формулы для построения решения. Можно записать записать глобальное консервативное решение из двух пиконов (u, ν) уравнения Камасса–Холма с начальными данными, заданными (**??**). Поэтому рассмотрим следующие два различных случая:

(i). *Пиконо-пиконновый случай.* Из представления (**??**) Вронского следует, что $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ тогда и только тогда, когда $\omega_1(t_0)\omega_2(t_0) > 0$. В этом случае слабое решение является единственным ($x_2(t) > x_1(t)$ для всех t, начиная с $s_1(t) \neq 0$) и, следовательно, консервативное решение совпадает с классическим и задается

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{2} \omega_n(t) e^{-|x - x_n(t)|}, x, t \in \mathbb{R}, \tag{26}$$

(ii). Пиконо-антипиконновый случай. Теперь пусть $\omega_1(t_0)$ и $\omega_2(t_0)$ будут различного знака, то есть $\omega_1(t_0)\omega_2(t_0) < 0$. В этом случае существует ровно один момент времени $s_1(t^\times) = 0$, который задается следующим образом

$$t^\times = t_0 + \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \log\left(-\frac{\gamma_1^2(t_0)}{\gamma_2^2(t_0)} \right). \tag{27}$$

С учетом вышеизложенных рассуждение глобальное консервативное решение задается

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{2}\omega_n(t)e^{-|x-x_n(t)|}, & t \neq t^{\times}, \\ \frac{1}{2}\omega_1(t)e^{-|x-x_1(t)|} & t = t^{\times}. \end{cases} \tag{28}$$

Во втором разделе практической главы построены пиконо-пиконовый случай (рисунок 1) и пиконо-антипиконовый случай (рисунок 2) в различные моменты времени.

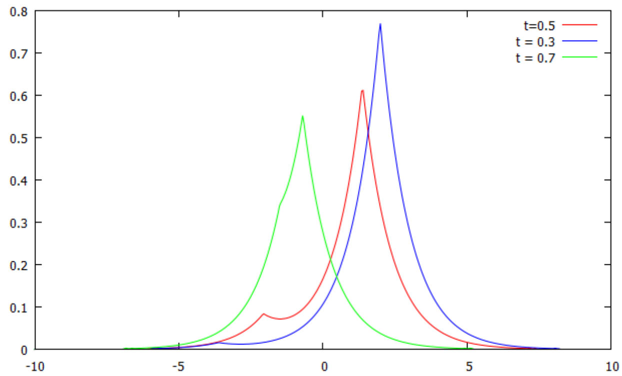

Рис. 1: Пиконо-пиконновый случай.

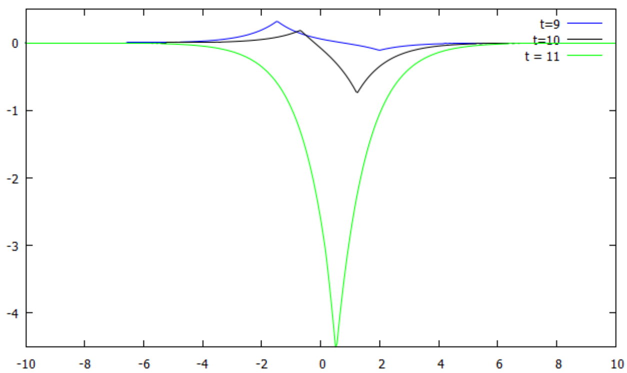

Рис. 2: Пиконо–антипиконовый случай.

Заключение. В данной работе исследовались решения уравнения Камасса - Холма. Был рассмотрен метод обратной задачи для данного уравнения. Также были рассмотрены мультипиконовые решения вида

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} p_n(t) e^{-|x-q_n(t)|}, \tag{29}$$

В практической части был исследован частный случай - двупиконовое решение. Реализован код для построения данного решения. Также были построены графики, позволяющие отследить взаимодействие пиконов в различные моменты времени.