МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

СИСТЕМА ФУНКЦИЙ УОЛША В ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направления 01.03.02 - Прикладная математика и информатика
код и наименование направления

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Ханбекова Искандара Наимовича
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м.н. ______ Д.С. Лукомский
должность, уч. степень, уч. звание / подпись, дата / инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
д.ф-м.н., профессор ______ В.А. Юрко
должность, уч. степень, уч. звание / подпись, дата / инициалы, фамилия

Саратов 2019

Введение. Система функций Радемахера была введена в 1922 году , а уже через год Дж. Уолш ввел собственную функцию, как упрощенный аналог тригонометрической системы функций. Интерес к этим функциям и широкое их распространение было связано с развитием вычислительной техники. С созданием новых средств вычислительной техники (от микропроцессоров до высокопроизводительных многопроцессорных ЭВМ, устройств оптической обработки информации) многократно увеличивается возможность эффективного использования в науке и технике математических преобразований.

В свою очередь, последовательность функций $\chi_n(x)$, называемых функциями Хаара, была построена в диссертации венгерского математика А.Хаара. В 1909 году он построил полную систему ортонормированных функций, пригодную для спектрального представления интегрируемых функций, определенных на интервале $(0,\ 1)$, разбиваемом на двоично-рациональное число $N = 2^n$, где $n = 1, 2, \ldots$ подинтервалов знакопостоянства.

Изначально область применения функций Хаара и Уолша ограничивались теорией функции и функциональным анализом. В дальнейшем эти функции исследовались во многих работах, большинство этих работ связаны с теорией функции действительного переменного и с теорией ортогональных рядов, а также они находят применение в прикладной математике. Функции Уолша и Хаара используются для построения интерполяционных формул, в теории вероятностей и в теории равномерного распределения.

В связи с развитием средств вычислительной техники и применения их для обработки сигналов широко используются преобразования, содержащие в качестве ортогонального базиса кусочно-постоянные, знакопеременные функции. Эти функции легко реализуются с помощью средств вычислительной техники (аппаратно или программно), и их использование позволяет свести к минимуму время машинной обработки (за счет исключения операции умножения).

Цель бакалаврской работы заключается в исследовании функций Хаара и Уолша, рассмотрении вспомогательных теорем сходимости и базисности для этих функций, испольование быстрых прямых и обратных преобразовний с целью определить наиболее точный для приближении рассматриваемых функций.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, шести разделов, заключения, списка использованных источников и приложения.

Первые три раздела посвящены определению функций Уолша, их свойствам, а также свойствам операций сложения в двойчной системе счисление для этих функций.

Раздел 4 посвящен определению функций Хаара.

В пятом разделе сформулированы основные и вспомогательные определения и теоремы о базисности, абсолютной непрерывности и равномерной сходимостях функций Уолша и Хаара.

Шестой раздел посвящен описанию быстрых дискретных преобразований Фурье и Уолша.

В приложении приведена программа, которая строит графики приближений функиции $sinx$ с помощью быстрых преобразований, а также показывает маскимальную погрешность между исходной функцией и ее приближениями.

Основное содержание работы. В первых трех разделах содержатся определения функций Уолша и их свойства.

Система Уолша – это система функций

$$W = \{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}, \qquad x \in [0,\, 1],$$

в которой $w_0(x) \equiv 1$, а при $n \geq 1$

$$w_n(x) = \prod_{k=0}^{\infty} [r_{k+1}(x)]^{\theta_{-k}(n)} = r_{k(n)+1}(x) \prod_{k=0}^{k(n)-1} [r_{k+1}(x)]^{\theta_{-k}(n)}, \tag{1}$$

где $\theta_{-k(n)}(n) = 1, \qquad k(n) = [\log_2 n],$

а $r_k(x),\ k = 1,\, 2,\, \ldots,$ - функции Радемахера, которые задаются следующим равенством

$$r_n(x) = sign \sin 2^n \pi x, \qquad x \in [0,\, 1],\ \ n = 0,\, 1,\, \ldots\ .$$

Свойства системы Уолша

1. Для $k \geq 0, \quad i = 0,\, 1,\, \ldots,\; 2^k - 1$

$$w_{2^k+i}(x) = r_{k+1}(x)w_i(x) = w_{2k}(x)w_i(x), \qquad x \in [0,\, 1].$$

2. Система функций Уолша является полной ортонормированной системой на интервале $[0,\, 1]$, то есть справедливо соотношение

$$\int \omega_k(x)\omega_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } k = n \\ 0 & \text{при } k \neq n \end{cases}$$

и может служить базисом для спектрального представления сигналов.

3. Функции Уолша, как и функции Радемахера, принимают только два значения: - 1 и 1. Для любого $m = w_m^2(x) = w_0(x) = 1$.
4. Функции Уолша являются периодическими с периодом равным 1.
5. Функции Уолша обладают свойством мультипликативности, перемножение любых двух функции Уолша является функцией Уолша:

$$w_k(x) * w_n(x) = w_{k \oplus n}(x),$$

6. Среднее значение функции Уолша $w_i(x)$ при $i \neq 0$ равно нулю.
7. Система функций Уолша является составной системой и состоит из четных и нечетных функций, обозначаемых соответственно $cal(j,\, x)$ и $sal(j,\, x)$.

Четвертый раздел посвящен описанию функций Хаара.

Введем стандартные обозначения двоичных интервалов, которые будут использоваться в дальнейшем на протяжении всего текста.

Двоичными мы будем называть такие интервалы, которые могут быть получены делением интервала $(0, 1)$ на k равных частей. Для двоичных интервалов введем следующее обозначение:

$\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2}^k, \, i = 1, 2, \ldots, 2k, \; k = 0, 1 \ldots.$

Для $n = 2^k + i, i = 1, 2, \ldots, 2^k, k = 0, 1, \ldots$ введем обозначения:

$$\begin{cases} \Delta_n = \frac{i-1}{2^k}, \overline{\Delta}_n = \frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k} \\ \Delta_1 = \Delta_0^0 = (0,1), \overline{\Delta}_1 = [0,1]. \end{cases}$$

Определение 1. *Система Хаара - это система функций* $\chi = \chi_n(x)_{n=1}^{\infty}, x \in [0,1]$, *в которой* $\chi \equiv 1$, *а функция* $\chi_n(x)$ *с* $2k < n \leq 2^{k+1}, k = 0, 1 \dots,$ *определяется так:*

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 0, x \notin \overline{\Delta}_n, \\ 2^{\frac{k}{2}}, x \in \Delta_n^+, \\ -2^{\frac{k}{2}}, x \in \Delta_n^-. \end{cases}$$

Данная система является полной и ортонормированной. Выражение для частных сумм $S_N(f,x)$ ряда Фурье-Хаара функции $f \in L^1(0,1)$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\chi_(x),$$

где $c_n(f) = c_n(f,x)$ - коэффициенты Фурье-Хаара по определению функций Хаара.

$$\begin{cases} c_1(f) = \int_0^1 f(x)dx, \\ c_n(f) = 2^{\frac{k}{2}} \left[\int_{\Delta_n^+} f(x)dx - \int_{\Delta_n^-} f(x)dx \right], n = 2, 3 \dots \end{cases}$$

В пятом разделе содержатся основные теоремы и следствия.

Теорема 1. *Пусть* $f \in C(0,\, 1)$ *и* $\omega(\delta,\, f) = O(\delta^{\alpha})$, $(\delta \to 0)$ *при некотором* $\alpha > \frac{1}{2}$. *Тогда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(f)| < \infty.$$

Следствие 1. *Если* $f \in C(0,\, 1)$ *и* $w(\delta,\, f) = o(\ln^{-1}\frac{1}{\delta})$ *при* $\delta \to 0$, *то ряд Фурье - Уолша функции* $f(x)$ *сходится к ней равномерно на множестве* $(0,\, 1)\backslash R_2$.

Теорема 2. *Для любой функции* $f \in L^1(0,\ 1)$ *сумма*

$$P(f) = P(f,\ x) := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(f)\chi_n^2(x) \right\}^{1/2}$$

конечна почти всюду на (0, 1), при этом

1) $m\{x \in\ (0,\ 1) : P(f,\ x) > y\} \leq \frac{C}{y}||f||_1, \qquad y > 0,$

2) $\frac{1}{C_p}||f||_p \leq ||P(f)||_p \leq C_p||f||_p$, *Если* $f \in L^p(0,\ 1),\ \ 1 < p < \infty.$

Теорема 3. *Система Уолша – базис в* $L^p(0,\ 1),\ \ 1 < p < \infty.$

Рассмотрим оценки, относящиеся к поведению коэффициентов Фурье по системе Хаара некоторых классов функций.

Теорема 4. *Если функция f(x) - измеримая на интервале (0, 1), то справедливы неравенства:*

$$|c_n(f) \leq (2n)^{-\frac{1}{2}}\omega(\frac{1}{n}, f), n > 1, \tag{2}$$

если $f \in (0, 1)$,

$$|c_n(f) \leq n_p^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\omega_p(\frac{1}{n}, f), n > 1, \tag{3}$$

если $f \in L^p(0, 1), 1 \leq p < 1$, *где* $\omega(\delta, f)$ *и* $\omega_p(\delta, f)$ *- модули непрерывности функции* $f(x)$ *в пространствах* C *и* L^p.

Следующая теорема показывает, что любая непрерывная функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся к $f(x)$ ряд Фурье по данной системе.

Теорема 5. *Для произвольной функции* $f(x) \in C(0, 1)$ *её ряд Фурье-Хаара сходится равномерно к* $f(x)$ *равномерно на* $[0, 1]$. *При этом*

$$p_C(f, N) := \|f - S_N(f)\|_C \leq 3\omega(\frac{1}{N}, f), N \geq 1.$$

Перед формулированием основной теоремы раздела нам потребуется следующее утверждение о пинимальности ортонормиронанной системы:

Утверждение 1. *Всякая О.Н.С.* $\{\varphi(x)\}_{n=0}^{\infty}, x \in (0,1)$, *с* $\varphi_n \in L^p(0,1) \cap L^q(0,1), n = 1,2,\ldots, 1 \le p < \infty, 1/p + 1/q = 1$, *минимальна в* $L^p(0,1)$ *и является своей сопряженной системой.*

Теорема 6. *Система Хаара - базис в пространстве* $L^p(0,1), 1 \le p < \infty$.

При этом

$$p_p(f,N) := /|f - S_N(f)|/_p \le C^p \omega_p\left(\frac{1}{N}, f\right), \tag{4}$$

где $N = 1,2,\ldots, C_p = 4^{1/p}(1+2^p)^{1/p}$.

Шестой раздел посвящен описанию быстрых дискретных преобразований Хаара и Уолша.

Рассмотрим быстрое дискретное преобразование Хаара, которое основано на способе доказательства замкнутости системы в пространстве ступенчатых функций. Это дискретное преобразование строится на преобразовании последовательности $(c^n)_{n=0}^{2^k-1}$ по базису $\chi_n(x)$.

Любая ступенчатая функция может быть представлена как полином по системе Хаара:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{2^{k-1}} c_n \chi_n(x).$$

Перепишем это равенство в виде:

$$f^{(k)}(x) - f^{(k-1)}(x) + r_{k-1}(x) g^{(k-1)}(x),$$

где $g^{(k-1)}(x)$ - двоично-ступенчатая функция, значение которой равно $c(N)$, $N = 2^k + 1$ на Δ_i^{k-1}.

Запишем это равенство на полуинтервале $\Delta_i^{(k-1)} = \Delta_{2i}^{(k)} \cup \Delta_{2i+1}^{(k)}$.

Получаем систему

$$\begin{cases} f_{2i}^{(k)} = f_i^{(k-1)} + g_i^{(k-1)} \\ f_{2i+1}^{(k)} = f_i^{(k-1)} - g_i^{(k-1)} \end{cases}$$

Решая данную систему для $i = 0,1,2,\ldots,2^{k-1}-1$, находим

$$\begin{cases} f_{2i}^{(k-1)} = \frac{1}{2}(f_{2i}^{(k)} + f_i^{(k)}) \\ g_i^{(k-1)} = \frac{1}{2}(f_{2i}^{(k)} - f_{2i+1}^{(k)}) \end{cases}$$

Мы получили новый вектор $(f_i)_{i=0}^{2k-1}$, в котором последние компоненты равны $f_N = c(N)$, а первые компоненты $(f_i)_{i=0}^{2k-1}$ есть значения функции $f^{(k-1)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{2^{k-1}-1} c_n\chi_n(x)$ кусочно-постоянной на интервалах ранга $(k-1)$, причем коэффициенты Фурье - Хаара функции $f^{(k-1)}$ есть первые $2^{(k-1)}$ коэффициентов исходной функции $f^{(k)}$.

Применяя к функции $f^{(k-1)}(x) - \sum\limits_{n=0}^{2^{k-1}-1} c_n\chi_n(x)$, эти же преобразования получим вектор, в котором последние $2^{(k-2)}$ компонент есть компоненты вектора $c(i)$, а первые компоненты $(f_i)_{i=0}^{2^{k-2}}$ есть значения функции $f^{(k-2)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{2^{k-2}-1} c_n\chi_n(x)$ кусочно - постоянной на интервалах ранга $(k-1)$, причем коэффициенты Фурье-Хаара функции $f^{(k-2)}$ есть первые 2^{k-2} коэффициентов исходной функции$f^{(k)}$. Продолжая последовательное применение формул, получим после k-го шага последовательность, которая полностью совпадает с $c(i)$.

Задача **быстрого преобразования Фурье - Уолша** ставится практически аналогично преобразованию Хаара.

Пусть $N \in \mathbb{N}$ фиксировано, $f^{(N)}(x)$ - двоично - постоянна на $[0,1)$ и $f_i = f^{(N)}(\delta_j^{(N)})$. Пусть $\omega_j(x)$ - функция Уолша на $[0,1)$. Тогда

$$f^{(N)}(x) = \sum_{j=0}^{2^N-1} \hat{f}(j)\omega_j(x).$$

Требуется найти коэффициенты $\hat{f}(j)$. Записываем последнее равенство в виде

$$f^{(N)}(x) = \sum_{j=0}^{2^N-1} \hat{f}(j)\omega_j(x) + r_{N-1}(x)\sum_{j=0}^{2^N-1} \hat{f}(2^{N-1}+j)\omega_j(x) =$$
$$f^{(N-1)} + r_{N-1}(x)g^{(N-1)}(x).$$

где $f^{(N-1)}$ и $g^{(N-1)}$ - двоично-ступенчатые на интервалах ранга $N-1$. Записывая пердыдущее равенство в точках полуинтервала $\delta_j^{(N-1)} = \delta_{2j}^{(N)} \cup \delta_{2j+1}^{(N)}$, снова получаем равенства

$$\begin{cases} f_{2j}^{(N)} = f_j^{(N-1)} + g_j^{(N-1)} \\ f_{2j+1}^{(N)} = f_j^{(N-1)} - g_j^{(N-1)} \end{cases}$$

из которых находим

$$\begin{cases} f_{2j}^{(N-1)} = \frac{1}{2} f_{2j}^{(N)} + g_{2j+1}^{(N-1)} \\ f_{2j+1}^{(N-1)} = \frac{1}{2} f_{2j}^{(N)} - f_{2j+1}^{(N)} \end{cases} \tag{5}$$

Если значения функции $f^{(N)}(x)$ обозначим через $u_j (j = 0, \ldots, 2^N - 1)$, то дискретное преобразование для вектора

$$(u_j) = (u_0, u_1, \ldots, u_{2^{N-1}-1}, u_{2^{N-1}}, \ldots, u_{2^N-1}) \tag{6}$$

задается формулами

$$u_j := \frac{1}{2}(u_{2j} + u_{2j+1})$$
$$u^{2^{N-1}+j} := \frac{1}{2}(u_{2j} - u_{2j+1})$$

Это те же преобразования Хаара, и после их применения мы получаем вектор

$$(u_j) = (u_0, u_1, \ldots, u_{2^{N-1}-1}, u_{2^N-1}, \ldots, u_{2^N-1})$$

в котором первые 2^{N-1} компонент есть значения функции $f^{(N-1)}$, а последние 2^{N-1} компонент - значения функции $g^{(N-1)}$. Но в отличие от преобразования Хаара, значения $u_{2^{N-1}}, \ldots, u_{2^N-1}$ не будут коэффициентами Фурье - Уолша функции $g^{(N-1)}$, и поэтому нужно применять преобразование (35) и к левой половине вектора (u_n), и к правой половине. Повторяя эту процедуру N раз, мы получаем последовательность коэффициентов Фурье - Уолша. непосредственный подсчет дает число операций

$$2^{N+1} + 2^{N+1} + \ldots + 2^{N+1} \equiv N2^{N+1}.$$

В последнем разделе была рассмотрена задача построения алгоритмов быстрых преобразовний Фурье и Уолша для функции $f(x) = sinx$.

Разобьем отрезок $[0,1]$ на 2^N частей, где $N = 1, 2, \ldots$.

В предыдущих разделах мы ввели частные суммы ряда по системе Хаара и Уолша. Данные выражения являются системами линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $c_n(f)$ и $u_n(f)$ соответственно. Для систем Хаара и Уолша СЛАУ будем решать с помощью соответствующих быстрых дискретных преобразований. После нахождения коэффициентов, сортируем их в порядке возрастания и наименьшие по модулю - зануляем. Данная задача была решена с помощью программы, написанной на языке Python. Исходный код программы приведен в **приложении**.

Сравним два этих разложения при N = 7. Обнуляем 40 процентов коэффициентов:

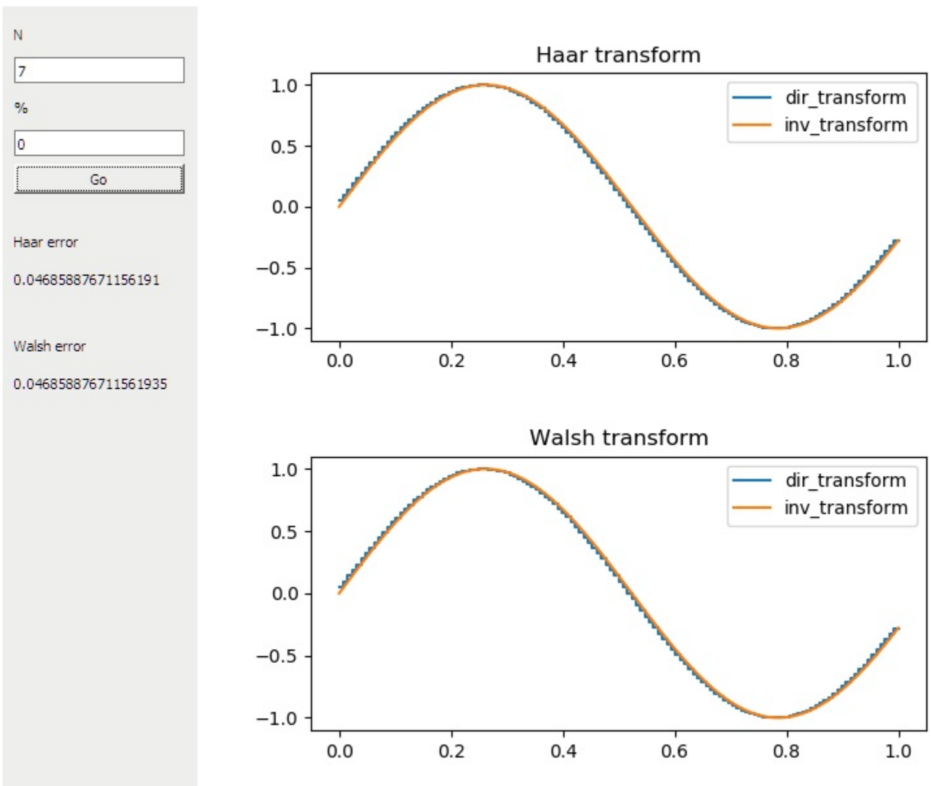

Рис. 1: Сравнение систем при N=7 без обнуления коэффициентов

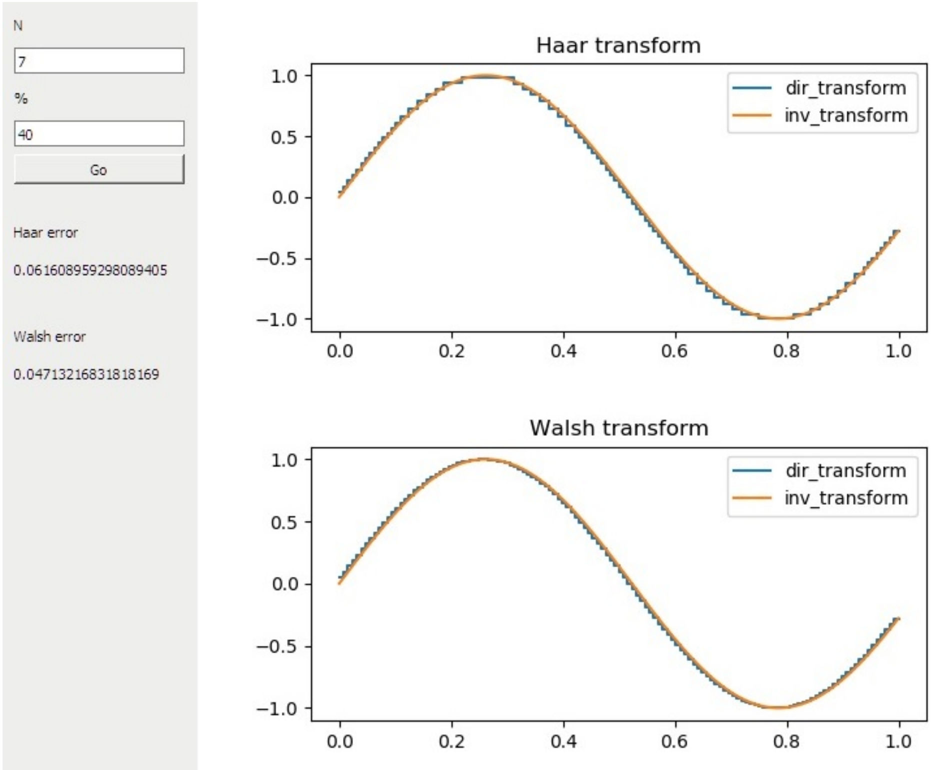

Рис. 2: Сравнение систем при N=7 с обнулением коэффициентов

Получаем максимальные погрешности для приближенных решений по системе Хаара и Уолша соответственно:

1)Без обнуления коффициентов:

Haar error = 0.04685887671156191

Walsh error = 0.04685887671156935

2)С обнулением:

Haar error = 0.061608959298089405

Walsh error = 0.04713216831818169

Сравнивая значения полученных погрешностей, можно сделать вывод о том, что при обнулении коэффициентов график приближенного решения становится хуже. Погрешность увеличивается за счет того, что мы зануляем незначительные коэффициенты преобразования. Максимальная погрешность для приближенного решения в виде полинома по системе Хаара немного выше, чем у того же приближенного решения, но в виде полинома по системе Уолша.

Таким образом, разложение функции $f(x) = sin2\pi x$ по системе Уолша является более точным, чем разложение этой же функции по системе Хаара.

Заключение. В работе были изучены основные понятия относящиеся к функциям Уолша и Хаара, были даны основные определения данных функций и их основные свойства. Доказаны теоремы о базисности данных систем, сходиомсти функций Хаара и Уолша в разных пространствах, описаны алогоритмы быстрых преобразований рассматриваемых функций. Также для данных систем была написана программа на языке Python.