МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Математической физики и вычислительной математики

Обратная задача для интегро-дифференциальных операторов свертки высших порядков

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 Группы
направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Мельникова Никиты Алексеевича

Научный руководитель

к.ф.-м.н., доцент ______ С.А. Бутерин

Заведующий кафедрой

д.ф.-м.н., профессор ______ В.А. Юрко

Саратов 2019

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе изучаются обратные задачи спектрального анализа для интегро-дифференциальных операторов. Обратные спектральные задачи заключаются в восстановлении операторов по некоторым их спектральным характеристам.Наиболее полные результаты в теории обратных спектральных задач получены для дифференциального оператора Штурма-Лиувилля $-y'' + q(x)y$. Обратные задачи для оператора Штурма-Лиувилля исследовались в работах В.А. Амбарцумяна, Г. Борга, М.Г. Гасымова, И.М. Гельфанда, М.Г. Крейна, Н. Левинсона, Б.М. Левитана, В.А. Марченко, Ф.С. Рофе-Бекетова, А.Н. Тихонова, Л.Д. Фаддеева и других авторов. Первый результат в этом направлении принадлежит В.А. Амбарцумяну. Он показал, что, если собственные значения краевой задачи $-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0$ суть $\lambda_k = k^2, k \geq 0$, то $q(x) = 0$. Теория обратных задач спектрального анализа является интенсивно развивающейся на протяжении последних десятилетий областью математики, поскольку интерес к таким задачам постоянно растёт.

Исследование обратных спектральных задач обычно связано с тремя основными этапами:

1) выяснение того, какие спектральные данные однозначно определяют оператор, и доказательство соответствующих теорем единственности;

2) конструктивное решение обратной задачи: разработка метода решения и построение алгоритма восстановления оператора по рассматриваемым спектральным данным;

3) нахождение характеристических свойств рассматриваемых спектральных данных, получение необходимых и достаточных условий разрешимости обратной задачи.

В данной работе исследуется обратная задача спектрального анализа для интегро-дифференциального оператора вида $\ell_n y := i^n y^{(n)} + \int_0^x M(x-t)y^{(n-1)}(t)\,dt = \lambda y, \quad 0 < x < \pi$, с краевыми условиями $y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-2)}(0) = y(\pi) = 0$. Обратная задача заключается в восстановлении функции $M(x)$ по спектру $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ рассматриваемой краевой задачи. Цель работы состоит в том, чтобы изучить обратную задачу для интегро-дифференциального оператора свертки второго порядка,провести исследование обратной задачи для интегро-дифференциального оператора порядка $n \geq 3$, получить необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи, построить алгоритм решения обратной задачи для $n \geq 3$. Данная работа состоит из введения, трёх глав, заключения, списка использованных источников, включающего двадцать наименований, и двух приложений. Во введении дана краткая характеристика темы бакалаврской работы, приведены цели и задачи. Первая глава посвящена решению обратной задачи для $n = 2$. Вторая глава посвящена исследованию случая $n \geq 3$. В третьей главе исследуется устойчивость решения обратной задачи, а ткаже был приведен алгоритм численного решения обратной задачи.

Основная часть состоит из трёх глав. В первой главе вводятся вспомогательные утверждения и теоремы, связанные с обратными задачами для $n = 2$.

1. Случай n=2. Дается постановка краевой задачи для интегро-дифференциального оператора. Рассмотрим краевую задачу $L = L(M)$:

$$\ell y := -y'' + \int_0^x M(x-t)y'(t)\,dt = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \tag{0.0.1}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0, \tag{0.0.2}$$

где $(\pi - x)M(x) \in L_2(0, \pi)$.

Теорема 1. Собственные значения $\lambda_k,\ k \geq 1$, из L имеют вид

$$\lambda_k = (k + \kappa_k)^2, \quad \{\kappa_k\} \in l_2. \tag{0.0.3}$$

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Обратная задача. При заданных $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$, найти $M(x)$.

Теорема 2.(1) Для произвольных комплексных чисел $\lambda_k,\ k \geq 1$, вида (0.0.3) существует единственная (с точностью до значений на множестве меры нуль) функция $M(x)$, $(\pi - x)M(x) \in L_2(0, \pi)$, такая что $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ являются спектром соответствующей краевой задачи $L(M)$.

(2) Функция $M(x)$ удовлетворяет дополнительному условию гладкости: $M(x) \in W_2^1[0,T]$ для любого $T \in (0,\pi)$, $(\pi - x)M'(x) \in L_2(0,\pi)$ тогда и только тогда, когда

$$\lambda_k = \left(k + \frac{A}{k} + \frac{\kappa_{k,1}}{k}\right)^2, \quad \{\kappa_{k,1}\} \in l_2, \quad A - const. \tag{0.0.4}$$

Кроме того, $M(0) = 2A$.

Основное нелинейное интегральное уравнение . Рассмотрим функцию $H(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$M(x) = 2iH(x) + \int_0^x dt \int_0^t H(t-\tau)H(\tau)\,d\tau, \quad 0 < x < \pi, \tag{0.0.5}$$

и следовательно $(\pi - x)H(x) \in L_2(0,\pi)$.

В процессе решения обратной задачи, удобно восстановить сначала $H(x)$, а затем можно построить $M(x)$. Пусть $y = S(x,\lambda)$ решение (0.0.1) удовлетворяющее начальным условиям $S(0,\lambda) = 0$, $S'(0,\lambda) = 1$. Собственные значения L совпадают с нулями его характеристической функции $\Delta(\lambda) := S(\pi,\lambda)$. Функция $\Delta(\lambda)$ является целой по λ и имеет счётное множество нулей. Таким образом, краевая задача L имеет счётное множество собственных значений $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$.

Лемма 1. Пусть $\rho^2 = \lambda$. Тогда имеет место следующее представление:

$$S(x,\lambda) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x P(x,t)\frac{\sin \rho(x-t)}{\rho}\,dt, \tag{0.0.6}$$

где

$$P(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} i^\nu \frac{(x-t)^\nu}{\nu!} H^{*\nu}(t), \tag{0.0.7}$$

$$H^{*1}(x) = H(x), \quad H^{*(\nu+1)}(x) = H * H^{*\nu}(x) = \int_0^x H(x-t)H^{*\nu}(t)\,dt.$$

В соответствии с леммой 1 имеем

$$\Delta(\lambda) = \frac{\sin \rho\pi}{\rho} + \int_0^\pi w(x)\frac{\sin \rho x}{\rho}\,dx, \quad \rho^2 = \lambda, \quad w(x) \in L_2(0,\pi). \tag{0.0.8}$$

Здесь

$$w(\pi - x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} i^{\nu} \frac{(\pi - x)^{\nu}}{\nu!} H^{*\nu}(x), \quad 0 < x < \pi. \tag{0.0.9}$$

Соотношение (0.0.9) можно рассматривать как нелинейное уравнение относительн $H(x)$, которое называется основным нелинейным интегральным уравнением обратной задачи.

Теорема 3. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$y(x) = \xi(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \Big(\psi_{\nu}(x) y^{*\nu}(x) + \int_0^x \Psi_{\nu}(x,t) y^{*\nu}(t)\, dt \Big), \quad 0 < x < T, \tag{0.0.10}$$

где функции $\psi_{\nu}(x)$, $\Psi_{\nu}(x,t)$ являются квадратично интегрируемыми и $\psi_1(x) = 0$.

Пусть существуют квадратично интегрируемые функции $u(x)$, $U(x,t)$ не зависящие от ν, такие, что $|\psi_{\nu}(x)| < u(x)$, $|\Psi_{\nu}(x,t)| < U(x,t)$, $0 < t < x < T$.

Тогда для любой функции $\xi(x) \in L_2(0,T)$ нелинейное уравнение (0.0.9) имеет единственное решение $y(x) \in L_2(0,T)$.

Теорема 4. (1) Для любой функции $w(x) \in L_2(0,\pi)$ уравнение (0.0.9) имеет единственное решение $H(x) \in W_0$.

(2) Функция $H(x)$ принадлежит W_1 тогда и только тогда, когда $w(x) \in W_2^1[0,\pi]$, $w(0) = 0$. Кроме того,в этом случае $w(\pi) = i\pi H(0)$.

Решение обратной задачи

Лемма 2. Функция $\Delta(\lambda)$ однозначно определяется ее нулями. Кроме того

$$\Delta(\lambda) = \pi \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{k^2}. \tag{0.0.11}$$

Таким образом, мы приходим к следующему алгоритму решения обратной задачи.

Алгоритм 1. Пусть задан спектр $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ некоторой краевой задачи L вида (0.0.1), (0.0.2).

(1) Построим функцию $\Delta(\lambda)$ по формуле (0.0.11);

(2) вычислим $w(x)$ из (0.0.8) , используя обратное преобразование Фурье;

(3) найдём $H(x)$, решая основное уравнение (0.0.9);
(4) построим $M(x)$ по формуле (0.0.5).

Любая функция $\Delta(\lambda)$ вида (0.0.6) имеет счётное множество нулей λ_k, $k \geq 1$, удовлетворяющих (0.0.3), и имеет вид (0.0.11).

Лемма 3.(1) Пусть заданы произвольные комплексные числа $\lambda_k,\ k \geq 1$, вида (0.0.3). Тогда функция $\Delta(\lambda)$ определяемая формулой (0.0.11) имеет вид (0.0.6).

(2) Функция $w(x)$ в (0.0.9) удовлетворяет условиям $w(x) \in W_2^1[0,\pi]$, $w(0) = 0$ тогда и только тогда, когда числа λ_k имеют вид (0.0.4). Кроме того, $w(\pi) = \pi A$.

2. Случай n $\geq$ 3. Пусть $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ являются спектром краевой задачи $L = L(M)$ вида

$$L_n y := i^n y^{(n)} + \int_0^x M(x-t) y^{(n-1)}(t)\, dt = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \tag{0.0.12}$$

$$y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-2)}(0) = y(\pi) = 0. \tag{0.0.13}$$

Рассмотрим следующую обратную задачу.

Обратная задача. По заданному спектру $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$, найти $M(x)$.

Основное нелинейное интегральное уравнение. Рассмотрим функцию $H(x)$ удовлетворяющую уравнению

$$M(x) = n i^{n-1} H(x) + \sum_{j=2}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} i^{n-j} \int_0^x \frac{(x-t)^{j-2}}{(j-2)!} H^{*j}(t)\, dt, \quad 0 < x < \pi, \tag{0.0.14}$$

и следовательно $(\pi - x)H(x) \in L_2(0,\pi)$.

Пусть $y = S_n(x,\lambda)$ решение (0.0.12) удовлетворяющее начальным условиям $S_n^{(0)}(0,\lambda) = \ldots = S_n^{(n-2)}(0,\lambda) = 0$, $S_n^{(n-1)}(0,\lambda) = 1$. Нули характеристической функции $\Delta(\lambda) := S_n(\pi,\lambda)$ совпадаютсовпадают с собственными значениями краевой задачи $L(M)$ с учетом кратностей. Функция $\Delta(\lambda)$ является целой по λ и имеет счётное множество нулей. Таким образом, краевая задача $L(M)$ имеет счётное множество собственных значений $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$.

Лемма 4. Пусть $\rho^n = \lambda$. Тогда выполняется следующее представление:

$$S_n(x,\lambda) = S_{n,0}(x,\lambda) + \int_0^x P(x,t) S_{n,0}(x-t,\lambda)dt, \tag{0.0.15}$$

где

$$S_{n,0}(x,\lambda) = \frac{1}{n(i\rho)^{n-1}} \sum_{j=1}^{n} w_j \exp(-iw_j\rho x), \quad w_j = \exp\Big(\frac{2\pi i(j-1)}{n}\Big) \tag{0.0.16}$$

$$P(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} i^{\nu} \frac{(x-t)^{\nu}}{\nu!} H^{*\nu}(t),$$

$$H^{*1}(x) = H(x), \quad H^{*(\nu+1)}(x) = H * H^{*\nu}(x) = \int_0^x H(x-t)H^{*\nu}(t)\,dt.$$

В соответствии с леммой имеем представление

$$\Delta(\lambda) = S_{n,0}(\pi,\lambda) + \int_0^{\pi} w(x) S_{n,0}(x,\lambda)dx \tag{0.0.17}$$

Лемма 5. Задание спектра однозначно определяет характеристическую функцию $\Delta(\lambda)$ по формуле

$$\Delta(\lambda) = C\lambda^s \prod_{\lambda_n \neq 0} \Big(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\Big). \tag{0.0.18}$$

где s - это кратность нулевого собственного значения, а C определяется формулой:

$$C = \Big(n \lim_{\tau\to\infty} \tau^{n-1} e^{\tau\pi} (-i\tau)^{ns} \prod_{\lambda_n\neq 0}\Big(1 - \frac{(-i\tau)^n}{\lambda_n}\Big)\Big)^{-1} \tag{0.0.19}$$

Для получения алгоритма решения обратной задачи необходимо уметь находить функцию $w(x)$ из представления (0.0.17). Для этих целей можно использовать ортогонализацию.Прежде всего заметим, что имеет место представление

$$S_{n,0}(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{n,k}(x)\lambda^k,$$

где

$$\gamma_{n,k}(x) = (-1)^{(k+1)n-1} i^{kn-1} \frac{x^{(k+1)n-1}}{((k+1)n-1)!}$$

Действительно, согласно (0.0.16) имеем

$$S_{n,0}(x,\lambda) = \frac{1}{n(i\rho)^{n-1}} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-i\rho x)^{k-1} w_\nu^k}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{kn-1} \frac{(i)^{(k-1)n} x^{kn-1}}{(kn-1)!} \lambda^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{n,k} \lambda^k$$

Система функций $\{\gamma_{n,k}\}_{k\geq 0}$ полна в пространстве в $L_2(0,\pi)$, и поскольку она линейно независима, к ней можно применить процесс ортогонализации. Обозначим

$$a_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} (\Delta(\lambda) - S_{n,0}(\pi,\lambda)) \Big|_{\lambda=0}, \quad k \geq 0 \tag{0.0.20}$$

Тогда согласно (0.0.17)

$$a_k = \int_0^\pi w(x) \gamma_{n,k}(x) dx, \quad k \geq 0 \tag{0.0.21}$$

Пусть $||\cdot||$ - норма в $L_2(0,\pi)$. Рассмотрим следующую систему рекуррентных соотношений. Находим

$$\beta_0 = ||\gamma_{n,0}||, \quad \alpha_0 = \beta_0^{-1}, \quad \chi_0(x) = \alpha_0 \gamma_{n,0}(x). \tag{0.0.22}$$

Пусть $\{\alpha_{ij}\}_{0\leq j\leq i\leq k}, \quad \{\beta_{ij}\}_{0\leq j\leq i\leq k}, \quad \{\chi_i\}_{0\leq i\leq k}$, уже известны, тогда вычисляем

$$\beta_{kj} = \int_0^\pi \gamma_{n,k}(x) \overline{\chi_j(x)} dx, \quad j = \overline{0,k}, \quad \beta_{kk} = ||\Theta_k||,$$

где

$$\Theta_k = \gamma_{n,k}(x) - \sum_{j=0}^{k} \beta_{kj} \chi_j(x).$$

Далее, находим $\alpha_{kj}, \quad j = \overline{0,k}$, по формуле

$$\alpha_k = e_k B_k^{-1} \tag{0.0.23}$$

где $\alpha_k = (\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, ..., \alpha_{kk})$ $\quad e_k = (0, 0, ..., 0, 1), \quad B_k = (b_{ij})_{i,j=0}^k$,

$$b_{ij} = \begin{cases} \beta_{ij}, & j \le i, \\ 0, & j > i \end{cases}$$

И, наконец, положим

$$\chi_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{kj} \gamma_{n,j}(x). \tag{0.0.24}$$

Формулы (0.0.22) -(0.0.24) порождают процесс ортогонализации, при котором система функций $\{\gamma_{n,k}(x)\}_{k\ge0}$ переходит в ортогональный нормированный базис $\{\chi_k(x)\}_{k\ge0}$ пространства $L_2(0,\pi)$. При этом соотношение (0.0.21) преобразуется к виду

$$\varepsilon_k = \int_0^\pi w(x)\chi_k(x)dx,$$

где

$$\varepsilon_k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{kj} a_j. \tag{0.0.25}$$

Пусть задан спектр $\{\lambda_k\}_{k\ge1}$ оператора L. Тогда функцию $w(x)$ можно построить с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм 2. 1) Строим функцию $\Delta(\lambda)$ по формуле $\Delta(\lambda) = C\lambda^s \prod_{\lambda_n \ne 0} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right)$;
2) Находим числа $a_k, \quad k \ge 0$, по формуле (0.0.20);
3) Построим систему коэффицентов $\{\alpha_{ij}\}_{0\le j\le i}$ и последовательность функций $\{\chi_k(x)\}_{k\ge0}$ с помощью рекуррентных соотношений (0.0.22) -(0.0.24);
4) Вычисляем функцию $w(x)$ по формуле

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \overline{\chi_k(x)},$$

где коэффиценты ε_k определяются согласно (0.0.25).

Решение обратной задачи.

Теорема 5. Если для всех $k \geq 1 \quad \lambda_k = \tilde{\lambda}_k$, то $M(x) \equiv \tilde{M}(x)$. То есть задание спектра $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ краевой задачи $L(M)$ определяет оператор однозначно.

Теорема 6. Пусть задана некоторая последовательность комплексных чисел $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$, такая что бесконечное произведение в (0.0.18) абсолютно сходится для каждого комплексного λ. Тогда для того, чтобы существовала функция $M(x), (\pi - x)M(x) \in L_2(0,\pi)$, такая что $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ является спектром соответствующей краевой задачи $L(M)$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\Delta(\lambda)$, построенная по формулам (0.0.18), (0.0.19) имела вид (0.0.17), где $w(x) \in L_2(0,\pi)$. При этом функция $M(x)$ может быть найдена с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм 3. 1) Вычисляем функцию $w(x)$ используя алгоритм 2;
2) Найдём функцию $H(x)$ решая основное нелинейное интегральное уравнение (0.0.9)
3) Строим $M(x)$ по формуле (0.0.14)

3. Численное решение обратной задачи. В третьей главе исследуется устойчивость обратной задачи и приводится численный метод.

Устойчивость Пусть задан спектр $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ некоторой краевой задачи $L = L(M)$ вида (0.0.1), (0.0.2). Тогда функцию $M(x)$ можно построить по алгоритму 1.

Алгоритм 4. 1) Вычислим функцию $w(x)$ по формуле

$$w(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} k\Delta(k^2)\sin kx, \tag{0.0.26}$$

где

$$\Delta(\lambda) = \pi\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k - \lambda}{k^2}; \tag{0.0.27}$$

2) Найдём функцию $H(x)$ решая главное нелинейное интегральное уравнение

$$w(\pi - x) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\pi - x)^{\nu}}{\nu!}H^{*\nu}(x), \tag{0.0.28}$$

где

$$H^{*1}(x) = H(x), \quad H^{*(\nu+1)}(x) = H * H^{*\nu}(x) = \int_0^x H(x-t)H^{*\nu}(t)\,dt;$$

3) Построим функцию $M(x)$ по формуле

$$M(x) = 2H(x) - \int_0^x dt \int_0^t H(t-\tau)H(\tau)\,d\tau, \quad 0 < x < \pi. \tag{0.0.29}$$

Для любой последовательности комлексных чисел вида (0.0.3) функция $\Delta(\lambda)$ построенная по формуле (0.0.27) имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \frac{\sin\rho\pi}{\rho} + \int_0^\pi w(x)\frac{\sin\rho x}{\rho}\,dx \tag{0.0.30}$$

Теорема . Пусть $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ - спектр краевой задачи $L = L(M)$ с некоторой фиксированной функцией $M(x)$. Тогда существуе $\delta > 0$ такое, что если спектр $\{\tilde{\lambda}_k\}_{k\geq 1}$ -спектр другой задачи $L(\tilde{M})$ удовлетворяет условию

$$\Lambda := \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda_k - \tilde{\lambda}_k|^2}{k^2}} < \delta, \tag{0.0.31}$$

тогда

$$\|(\pi - x)(M(x) - \tilde{M}(x))\| \leq C\Lambda, \tag{0.0.32}$$

где C зависит только от функции $M(x)$, а $\|\cdot\|$ обозначает норму в $L_2(0,\pi)$.

Предложение 1. Зафиксируем произвольную последовательность $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ вида (0.0.3) и построим функцию $w(x) \in L_2(0,\pi)$ по формулам (0.0.26)-(0.0.27). Тогда существует $\delta > 0$ такое, что для любой последовательности $\{\tilde{\lambda}_k\}_{k\geq 1}$ удовлетворяющей (0.0.31), справедлива следующая оценка:

$$\|w - \tilde{w}\| \leq C\Lambda, \tag{0.0.33}$$

где $\tilde{w}(x)$ определяется по формуле

$$\Delta(\lambda) := \pi \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}_k - \lambda}{k^2} = \frac{\sin \rho\pi}{\rho} + \int_0^{\pi} \tilde{w}(x) \frac{\sin \rho x}{\rho}\, dx \tag{0.0.34}$$

и C не зависит от $\{\tilde{\lambda}_k\}_{k\geq 1}$.

Предложение 2. Для любого $R > 0$ существует $C > 0$ такое, что $\|H - \tilde{H}\|_1 \leq C\|w - \tilde{w}\|$ при $\|w\| \leq R$ и $\|\tilde{w}\| \leq R$, где $H(x)$ является решением уравнения (0.0.28), а $\tilde{H}(x)$ является решением уравнения (0.0.28) с $\tilde{w}(x)$ вместо $w(x)$.

Предложение 3. Для любого $R > 0$ существует $C > 0$ такое, что

$$\|M - \tilde{M}\|_1 \leq C\|H - \tilde{H}\|_1, \tag{0.0.35}$$

при $\|H\|_1 \leq R$ и $\|\tilde{H}\|_1 \leq R$, где функция $M(x)$ определяется $H(x)$ по формуле (0.0.29), а $\tilde{M}(x)$ определяется $\tilde{H}(x)$ по аналогичной формуле

$$\tilde{M}(x) := 2\tilde{H}(x) - \int_0^x dt \int_0^t \tilde{H}(t-\tau)\tilde{H}(\tau)\, d\tau. \tag{0.0.36}$$

Численный метод. Численный метод приводится для случая $n = 2$. Пусть дана некоторая последовательность $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ вида (0.0.3). Для численного решения обратной задачи,то есть для нахождения приближения к функции $M(x)$, можно фактически использовать только конечное число λ_k -ых, скажем,

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n. \tag{0.0.37}$$

Для построения численного алгоритма будем применять алгоритм 4 к последовательности

$$\{\lambda_k^{(n)}\}_{k\geq 1}, \quad \lambda_k^{(n)} = \begin{cases} \lambda_k,\ k = \overline{1,n}, \\ k^2,\ k > n. \end{cases} \tag{0.0.38}$$

Численный подход основан на следующих двух предложениях.

Предложение 4. Если нули функции $\Delta(\lambda)$ определяемые по формуле (0.0.30) имеют вид (0.0.38) для некоторого $n \in \mathbb{N}$, тогда функция $w(x)$ в

(0.0.30) является целой. Кроме того, имеет место представление

$$w(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \tag{0.0.39}$$

где

$$a_k = (-1)^k \frac{k^2 - \lambda_k}{k} \prod_{\substack{j \neq k \\ j=1}}^{n} \frac{\lambda_j - k^2}{j^2 - k^2}, \quad k = \overline{1, n}. \tag{0.0.40}$$

Предложение 5. Если $w(x)-$ целая функция экспоненнциального типа и $w(0) = 0$, то решение $H(x)$ основного уравнения (0.0.28) также является целой функцией экспоненциального типа. Следующая лемма дает представление уравнения (0.0.28) в множестве последовательностей, состоящих из коэффициентов степенных рядов. Далее покажем, что коэффициенты b_k общего члена степенного ряда

$$w(\pi - x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{x^k}{k!} \tag{0.0.41}$$

уравнения (0.0.28) однозначно определяют коэффициенты γ_n степенного ряда его решения

$$H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \frac{x^k}{k!}. \tag{0.0.42}$$

В обоих рядах суммирование начинается с $k = 1$, потому что согласно (0.0.39) вместе с (0.0.28), имеем $w(\pi) = H(0) = 0$.

Следующая лемма дает представление уравнения (0.0.28) в множестве последовательностей, состоящих из коэффициентов степенных рядов.

Лемма 6. Уравнение (0.0.28) в классе целых функций эквивалентно следующей системе отношений:

$$b_k = \sum_{\nu=1}^{[\frac{k+1}{2}]} \sum_{j=0}^{\min\{k-2\nu+1, \nu\}} \binom{k}{j} p_j^{(\nu)} \gamma_{k-j}^{(\nu)}, \quad k \geq 1, \tag{0.0.43}$$

где $[x]$— это целая часть x, $\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$ и

$$p_j^{(\nu)} = (-1)^j \frac{\pi^{\nu-j}}{(\nu-j)!}, \quad j = \overline{0, \nu}, \tag{0.0.44}$$

$$\gamma_j^{(\nu)} = \sum_{l=1}^{j-2\nu+2} \gamma_l \gamma_{j-l-1}^{(\nu-1)}, \quad j \geq 2\nu - 1, \quad \nu \geq 2, \quad \gamma_j^{(1)} = \gamma_j, \quad j \geq 1. \tag{0.0.45}$$

Здесь b_k и γ_k при $k \geq 1$ коэффициенты степенных рядов в (0.0.41) и (0.0.42), соответственно.

Алгоритм 5. Пусть заданы коэффиценты b_k, $k \geq 1$, в разложении (0.0.41). Тогда коэффициенты γ_k, $k \geq 1$, решения (0.0.42) уравнения (0.0.28) можно найти с помощью следующих шагов:

1) – 2) Вычисляем γ_1, γ_2 и $\gamma_3^{(2)}$ по формуле

$$\gamma_1 = \frac{b_1}{\pi}, \quad \gamma_2 = \frac{b_2 + 2\gamma_1}{\pi}, \quad \gamma_3^{(2)} = \gamma_1^2;$$

Затем последовательно для $k = 3, 4, \ldots$ выполняем следующие шаги:

k) Пусть коэффициенты γ_j для $j = \overline{1, k-1}$, а также $\gamma_j^{(\nu)}$ для $(\nu, j) \in \Omega_k$, где

$$\Omega_k = \Big\{(\nu, j) : \nu = \overline{2, [(k+1)/2]},\, j = \overline{\max\{2\nu - 1, k - \nu\}, k}\Big\},$$

заранее известны. Затем посчитаем коэффициенты γ_k по формуле

$$\gamma_k = \frac{1}{\pi}\Big(b_k + k\gamma_{k-1} - \sum_{\nu=2}^{[\frac{k+1}{2}]} \sum_{j=0}^{\min\{k-2\nu+1, \nu\}} \binom{k}{j} p_j^{(\nu)} \gamma_{k-j}^{(\nu)}\Big)$$

и числа $\gamma_j^{(\nu)}$ для $(\nu, j) \in \Omega_{k+1} \setminus \Omega_k$ по формуле (0.0.45).

Для получения окончательного алгоритма понадобятся еще два вспомогательных утверждения. Следующая лемма вместе с (0.0.40) даёт формулы для вычисления коэффициентов b_k, $k \geq 1$, в разложении (0.0.41) через собственные значения $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$.

Лемма 7.Функция $w(x)$ определенная в (0.0.39) имеет вид (0.0.41), где

$$b_{2k}=0, \quad b_{2k-1}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}j^{2k-1}a_j, \quad k\in\mathbb{N}, \tag{0.0.46}$$

вместе с a_j, $j=\overline{1,n}$, определенными в (0.0.40).

Следующая лемма дает формулы для коэффициентов степенного ряда

$$M_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}m_k\frac{x^k}{k!}, \tag{0.0.47}$$

через коэффициенты в (0.0.42) функции $H(x)$, когда $M_n(x)$ определяется по формуле

$$M_n(x)=2H(x)-\int_0^x dt\int_0^t H(t-\tau)H(\tau)\,d\tau, \quad 0<x<\pi. \tag{0.0.48}$$

Лемма 8. Имеют место следующие отношения

$$m_k=2\gamma_k, \;\; k=\overline{1,3}, \quad m_k=2\gamma_k-\gamma_{k-1}^{(2)}, \;\; k\geq 4, \tag{0.0.49}$$

где $\gamma_k^{(2)}$, $k\geq 2$, определяются по формуле (0.0.45) для $\nu=2$.

Алгоритм 6. Пусть задано конечное множество собственных значений (0.0.37). Тогда приближенное решение $M_n(x)$ обратной задачи можно построить, выполнив следующие шаги:

1) Вычислим a_k, $k=\overline{1,n}$, по формуле (0.0.40);

2) Вычислим b_k, $k\geq 1$, по формуле (0.0.46);

3) Вычислим γ_k, $k\geq 1$, используя алгоритм 5;

4) Вычислим m_k, $k\geq 1$, по формуле (0.0.49);

5) Наконец, построим функцию $M_n(x)$ по формуле (0.0.47).

Приложение А В приложении А приведена программа на языке C++ реализации чсиленного метода.

Приложение Б В приложении Б приведены результаты вычислительного эксперемента.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой главе рассматривалась краевая задача вида (0.0.1)–(0.0.2) при $n = 2$. Далее был разработан метод решения обратной спектральной задачи. И был построен алгоритм восстановления оператора по рассматриваемым спектральным данным, т.е. было построено конструктивное решение обратной задачи спектрального анализа для интегро-дифференциальных операторов второго порядка.

Во второй главе был рассмотрен случай $n \geq 3$. В этом случае доказана теорема единственности решения обратной задачи и получены необходимые и достаточные условияя её разрешимости. Последние получены в терминах характеристической функции.

В тертьей главе исслеводаваль устойчивость решения обратной задачи и был приведен численный метод.