МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

Восстановление дифференциальных операторов по спектральным характеристикам

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 411 группы

направления 01.03.02 Прикладная математика и информатика

код и наименование направления (специальности)

механико-математического факультета

наименования факультета, института, колледжа

Иванова Дениса Анатольевича

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

зав. каф., д.ф.м.н., профессор		В.А. Юрко
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой

д.ф.м.н., профессор		В.А. Юрко
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2019

Введение. В данной работе изучается обратная задача спектрального анализа для дифференциального оператора Штурма-Лиувилля. Обратные спектральные задачи состоят в восстановлении операторов по их спектральным характеристикам. Стоит отметить, что обратные задачи являются достаточно трудными для изучения, что связано прежде всего с их нелинейностью. К тому же трудность изучения обратных задач заключается в том, что они относятся к классу некорректно поставленных, поскольку из трех условий корректно поставленной задачи (существование решения, единственность решения и его устойчивость) в обратных задачах часто нарушается последнее. Наиболее полные результаты в спектральной теории дифференциальных операторов, и в частности обратных задач, получены для дифференциального оператора Штурма-Лиувилля $y'' + q(x)y$. Первый результат в теории обратных спектральных задач был получен В.А. Амбарцумяном для уравнения Штурма-Лиувилля $y'' + q(x)y = \lambda y$. Амбарцумян показал, что если краевая задача для уравнения данного уравнения с граничными условиями $y'(0) = y'(\pi) = 0$ имеет собственные значения $\lambda_n = n^2$, $n \geq 0$, то $q(x) = 0$ почти всюду на $(0, \pi)$. Рассмотрим краевую задачу для уравнения Штурма-Лиувилля на интервале $(0, \pi)$ с граничными условиями $y'(0) - hy(0) = 0,\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$. Пусть $\varphi(x, \lambda)$ - решение , удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(0, \lambda) = 1, \varphi'(0, \lambda) = h$. В качестве спектральных данных введем величины $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$, где λ_n — собственные значения краевой задачи, а α_n — так называемые весовые числа, определяемые следующим соотношением $\alpha_n := \int\limits_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n)dx$. Обратная задача заключается в отыскании потенциала $q(x)$ и коэффициентов граничных условий h и H по известным спектральных характеристикам $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$. В настоящей работе изложена основная теория об обратных задачах восстановления дифференциальных операторов по спектральным характеристикам. Цель работы состоит в постановке и решении обратной задачи восстановления потенциала дифференциального оператора и коэффициентов граничных условий краевой задачи по спектральным данным с помощью метода Гельфанда-Левитана. Данная работа состоит из введения, двух разделов, заключения, списка использованных источников, включающего двадцать три наименования, и приложения.

Во введении дана краткая характеристика темы бакалаврской работы, приведены цели и задачи. Первый раздел посвящен изложению теоретического материала о восстановлении дифференциального оператора по спектральным данным. Во втором разделе дан алгоритм численного решения и описание программы, реализующей данный алгоритм, а также приведен тестовый пример решения обратной задачи по каждому из алгоритмов. В заключении указаны основные результаты и выводы о проделанной работе. В приложений представлен программный код, реализующий численный алгоритм решение обратной задачи по методу Гульфанда-Левитана.

Основное содержание работы. Основная часть состоит из двух разделов. В **первом** разделе вводятся вспомогательные утверждения и теоремы, связанные с обратными задачами. Основными теоремами в разделе являются: теорема единственности восстановления дифференциального оператора по спектральным данным, теорема о сведении обратной задачи к интегральному уравнению Гельфанда-Левитана и теорема о необходимых и достаточных условиях разрешимости обратной задачи. Так же дается постановка задачи восстановления дифференциального оператора по спектральным данным. Рассмотрим краевую задачу $L = L(q(x), h, H)$:

$$l(y) := -y'' + q(x)y = \lambda y,\ 0 < x < \pi, \tag{1}$$

$$U(y) := y' - hy(0) = 0,\ V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{2}$$

где λ - спектральный параметр, $q(x), h, H$ - вещественны; $q(x) \in L_2(0, \pi)$ Оператор l называется оператором Штурма-Лиувилля, функция $q(x)$ называется потенциалом. Значения параметра λ, для которых L имеет нетривиальные решения называются собственными значениями, а соответствующие нетривиальные решения - собственными функциями. Множество собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ составляет спектр L. Пусть $C(x, \lambda), S(x, \lambda), \varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda)$ являются решениями уравнения (1) при начальных условиях:

$$\begin{aligned} &C(0, \lambda) = 1,\ \ C'(0, \lambda) = 0,\ \ S(0, \lambda) = 0, S'(0, \lambda) = 1, \\ &\varphi(0, \lambda) = 1,\ \ \varphi'(0, \lambda) = h,\ \ \psi(\pi, \lambda) = 1, \psi'(\pi, \lambda) = -H. \end{aligned}$$

Функции $\varphi(x,\lambda_n)$ и $\psi(x,\lambda_n)$ являются собственными функциями, и существует последовательность $\{\beta_n\}$ такая, что $\psi(x,\lambda_n) = \beta_n\varphi(x,\lambda_n), \beta_n \neq 0$.Числа $\alpha_n := \int\limits_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)dx$ называются весовыми числами, а числа $\{\lambda_n, \alpha_n\}$ - спектральными данными краевой задачи L.

Теорема 1. В общем случае найти собственные функции заданной краевой задачи в явном виде не представляется возможным. В силу этого для них были получены асимптотические равенства. Здесь и далее $\lambda = \rho^2, \tau = Im(\rho), x \in [0.\pi]$. При $|\rho| \longrightarrow \infty$ верны следующие асимптотические формулы:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x,\lambda) &= \cos(\rho x) + O\left(\frac{1}{|\rho|}e^{|\tau|x}\right) = O(e^{|\tau|x}), \\ \varphi'(x,\lambda) &= -\rho\sin(\rho x) + O(e^{|\tau|x}) = O(|\rho|e^{|\tau|x}), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi(x,\lambda) &= \cos(\rho(\pi - x)) + O\left(\frac{1}{|\rho|}e^{|\tau|(\pi-x)}\right) = O(e^{|\tau|(\pi-x)}), \\ \psi'(x,\lambda) &= \rho\sin(\rho(\pi - x)) + O(e^{|\tau|(\pi-x)}) = O(|\rho|e^{|\tau|(\pi-x)}). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Теорема 2. В общем случае краевая задача L имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$. При этом

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{k_n}{n}, \{k_n\} \in l_2, \tag{5}$$

$$\varphi(x,\lambda_n) = \cos(nx) + \frac{\xi_n(x)}{n}, |\xi_n(x)| \leq C, \tag{6}$$

где

$$\omega = h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt,$$

C - положительная константа, не зависящая от x, λ и n, а символ $\{\kappa_n\}$ означает различные последовательности из l_2.

Теорема 3. Для функции $C(x,\lambda)$ справедливо следующее представление:

$$C(x,\lambda) = \cos\rho x + \int\limits_0^x K(x,t)\cos\rho t dt,\ \lambda = \rho^2, \tag{7}$$

где $K(x,t)$ - вещественная непрерывная функция, не зависящая от λ, причем

$$K(x,x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)dt. \tag{8}$$

Оператор T, определяемый формулой

$$Tf(x)=f(x)+\int\limits_0^x K(x,t)f(t)dt,$$

отображает функциюcos ρx, которая является решением уравнения $-y''=\lambda y$ с нулевым потенциалом, в функцию $C(x,\lambda)$, которая является решение уравнения (1) с некоторым потенциалом $q(x)$ (т.е. $C(x,\lambda)=T(\cos\rho x)$). Оператор T называется оператором преобразования для $C(x,\lambda)$.

Теорема 4. Для функций $S(x,\lambda)$ и $\varphi(x,\lambda)$ имеют место следующие представления:

$$S(x,\lambda)=\frac{\sin\rho x}{\rho}+\int\limits_0^x P(x,t)\frac{\sin\rho t}{\rho}dt, \tag{9}$$

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\rho x+\int\limits_0^x G(x,t)\cos\rho t dt. \tag{10}$$

Функции $P(x,t),G(x,t)$ являются вещественными непрерывными функциями и обладают той же гладкостью, что и функция $\int\limits_0^x q(t)dt$, причем

$$G(x,x)=h+\frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)dt. \tag{11}$$

$$P(x,x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x q(t)dt. \tag{12}$$

Теорема 5. Справедливы следующие утверждения:

1) Система собственных функций $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n=0}^{\infty}$ краевой задачи L полна в $L_2(0,\pi)$.

2) Пусть $f(x), x \in [0,\pi]$ - абсолютно непрерывная функция. Тогда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(x,\lambda_n), a_n = \frac{1}{\alpha_n}\int_0^{\pi} f(t)\varphi(x,\lambda_n)dt, \tag{13}$$

причем ряд сходится равномерно на $[0,\pi]$.

3) Для $f(x) \in L_2(0,\pi)$ ряд (13) сходится в $L_2(0,\pi)$, и имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha |a_n|^2. \tag{14}$$

Теорема единственности. Наряду с L будем рассматривать краевую задачу

$\tilde{L} = L(\tilde{q}(x), \tilde{h}, \tilde{H})$ того же вида (1)-(2), но с другими коэффициентами. Если $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$, $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n$, $n \geq 0$, то $L = \tilde{\alpha}$, т.е. $q(x) = \tilde{q}(x)$ почти всюду на $(0,\pi)$, $h = \tilde{h}$ и $H = \tilde{H}$. Таким образом, задание спектральных данных $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ однозначно определяет потенциал и коэффициенты краевых условий.

Рассмотрим краевую задачу $L = L(q(x), h, H)$. Пусть $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ - спектральные данные L, $\rho_n = \sqrt{\lambda_n}$. Задача состоит в решении обратной задачи восстановления L по заданным спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$. В теореме () было показано, что спектральные данные обладают следующими свойствами:

$$\rho_n = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\kappa_n}{n}, \alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\kappa_{n1}}{n}, \{\kappa_n\}, \{\kappa_{n1}\} \in l_2, \tag{15}$$

$$\alpha_n > 0, \lambda_n \neq \lambda_m (n \neq m) \tag{16}$$

Рассмотрим функцию

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cos \rho_n x \cos \rho_n t}{\alpha_n} - \frac{\cos nx \cos nt}{\alpha_n^0} \right), \tag{17}$$

где

$$\alpha_n^0 = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, n > 0, \\ \pi, n = 0. \end{cases}$$

Уравнение Гельфанда-Левитана. При каждом фиксированном $x \in (0, \pi]$ ядро $G(x,t)$ из представления (10) удовлетворяет линейному интегральному уравнению:

$$G(x,t) + F(x,t) + \int\limits_0^x G(x,s)F(s,t)ds = 0,\ 0 < t < x. \tag{18}$$

Это уравнение называется уравнением Гельфанда-Левитана.
Таким образом, данная теорема позволяет свести обратную задачу к решению интегрального уравнения (18), причем данное уравнение является интегральным уравнением Фредгольма с параметром x. Так же данная теорема дает необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи и алгоритм ее решения.
Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи. Для того, чтобы вещественные числа $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ были спектральными данными для некоторой краевой задачи $L(q(x), h, H)$ вида (1)-(2) с $q(x) \in L_2(0, \pi)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$\rho_n = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\kappa_n}{n}, \alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\kappa_{n1}}{n}, \{\kappa_n\}, \{\kappa_{n1}\} \in l_2, \tag{19}$$

$$\alpha_n > 0, \lambda_n \neq \lambda_m (n \neq m). \tag{20}$$

Алгоритм нахождения аналитического решения.

1) По заданным спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ строим функцию $F(x,t)$ по формуле (17).

2) Находим функцию $G(x,t)$ из уравнения (18).

3) Вычисляем $q(x), h$ и H по формулам

$$q(x) = 2\frac{d}{dx}G(x,x),\ h = G(0,0), \tag{21}$$

$$H = \omega - h - \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(t)dt. \qquad (22)$$

Во втором разделе приводится алгоритм отыскания численного решения, описание программы, реализующей данный алгоритм, примеры аналитического и численного решений обратной задачи, а так же сравниваются полученные результаты.

Постановка задачи. Показать, что заданные числа являются спектральными данными для некоторой краевой задачи и по ним восстановить ее, то есть построить оператор Штурма-Лиувилля $ly := -y'' + q(x)y = \lambda y$ и соответствующие граничные условия $U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$. Пусть $\lambda_n = n^2$ $(n \geq 0)$, $\alpha_n = \frac{\pi}{2}$ $(n \geq 1)$ и пусть $\alpha_0 > 0$ - произвольное положительное число.

Покажем, что выбранные числа являются спектральными данными для некоторой краевой задачи.

Действительно,

$$\sqrt{\lambda_n} = \rho_n = n + \frac{0}{\pi n} + \frac{0}{n},$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{0}{n}.$$

Отсюда следует, что последовательности κ_n и κ_{n1} состоят из нулей, очевидно, что они принадлежат l_2. Таким образом условие (19) выполняется. Поскольку было доопределено, что $\alpha_0 > 0$, и, очевидно, $\forall n \neq m$ $\lambda_n \neq \lambda_m$, то делаем вывод, что условие (20) также выполняется, и, следовательно, по выбранным числам можно построить краевую задачу, то есть обратная задача разрешима.

Алгоритм нахождения численного решения. Рассмотрим область $D = \{(x,t) : 0 < x < \pi, 0 < t < \pi\}$. Построим равномерные сетки $\omega_x = \{x_k\}_{k=1}^{N-1}$ и $\omega_t = \{t_j\}_{j=1}^{N-1}$ по осям x и t соответственно. Шаг каждой сетки равен h, $N = \frac{\pi}{h}$ - число узлов. Расширенные сетки (включающие граничные узлы) обозначим через $\overline{\omega}_x = \{x_k\}_{k=0}^{N}$ и $\overline{\omega}_t = \{t_j\}_{j=0}^{N}$ соответственно.

Таким образом можем получить двумерную сетку $\overline{\omega}_{xt} = \overline{\omega}_x \times \overline{\omega}_t$, каждый узел которой характеризуется координатами по соответствующим осям. Так

же будем рассматривать треугольные области
$D_\Delta = \{(x,t) : 0 < x \le \pi, 0 < t < x\}$ и $\overline{D}_\Delta = \{(x,t) : 0 \le x \le \pi, 0 \le t \le x\}$, и соответствующую $\overline{D}_\Delta$ расширенную сетку $\overline{\omega}_\Delta = \overline{\omega}_x \times \tilde{\omega}_t = \{(x_k, t_j)\}_{k=0,j=0}^{N,k}$, где $\tilde{\omega}_t = \{t_j\}_{j=0}^{k}$ Значение произвольной функции $f(x,t)$ в узле (x_k, t_j) обозначим через $f_{k,j}$.

1) Рассмотрим функцию $F(x,t)$ на сетке $\overline{\omega}_{xt}$.

$$F_{k,j} = \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} \left(\frac{\cos \rho_n x_k \cos \rho_n t_j}{\alpha_n} - \frac{\cos n x_k \cos n t_j}{\alpha_n^0} \right), \tag{23}$$

где N_ε такое, что

$$\forall n \le N_\varepsilon \left| \frac{\cos \rho_n x_k \cos \rho_n t_j}{\alpha_n} - \frac{\cos n x_k \cos n t_j}{\alpha_n^0} \right| \ge \varepsilon, \ \varepsilon > 0.$$

То есть при вычислении F_{kj} члены ряда меньшие ε не учитываем.

2) Интегральное уравнение (16) будем решать при каждом фиксированном $x_k \in \overline{\omega}_x$:

$$G(x_k, t) + F(x_k, t) + \int_0^{x_k} G(x_k, s) F(s, t) ds = 0, t \in \tilde{\omega}_t. \tag{24}$$

а) При $x_k = 0$ (24) даст $G_{0,0} = -F_{0,0}$.

б) При $x_k > 0$ для отыскания решения воспользуемся методом трапеций. Для удобства вычислений, считаем $s_i = t_i, 0 \le i \le k$.

$$\int_0^{x_k} G(x_k, s) F(s, t_j) ds \approx \sum_{i=0}^{k-1} \frac{G_{k,i} F_{i,j} + G_{k,i+1} F_{i+1,j}}{2} \cdot h. \tag{25}$$

Подставляя (24) в (25) при каждом фиксированном $0 < k \leq N$ получим следующую систему уравнений относительно неизвестных $G_{k,j}, 0 \leq j \leq k$:

$$\begin{cases} G_{k,0}\big(1+\dfrac{F_{0,0}}{2}h\big)+G_{k,1}F_{1,0}h+\ldots+G_{k,k-1}F_{k-1,0}h+G_{k,k}\dfrac{F_{k,0}}{2}h=-F_{k,0}, \\ G_{k,0}\dfrac{F_{0,1}}{2}h+G_{k,1}(1+F_{1,1}h)+\ldots+G_{k,k-1}F_{k-1,1}h+G_{k,k}\dfrac{F_{k,1}}{2}h=-F_{k,1}, \\ \ldots \\ G_{k,0}\dfrac{F_{0,m}}{2}h+G_{k,1}F_{1,m}h+\ldots+G_{k,m}(1+F_{m,m}h)+\ldots+G_{k,k}\dfrac{F_{k,m}}{2}h=-F_{k,m}, \\ \ldots \\ G_{k,0}\dfrac{F_{0,k}}{2}h+G_{k,1}F_{1,k}h+\ldots+G_{k,k-1}F_{k-1,k}h+G_{k,k}(1+\dfrac{F_{k,k}}{2}h)=-F_{k,k}. \end{cases} \tag{26}$$

Решая эту систему, и, учитывая, что $G_{0,0} = -F_{0,0}$, находим значения функции $G(x,t)$ на сетке $\overline{\omega}_\Delta$. Поскольку $G(x,t) = 0$ при $x < t$, то полученные значения удобно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} G_{0,0} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ G_{0,1} & G_{1,1} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ G_{0,N-1} & G_{1,N-1} & \ldots & G_{N-1,N-1} & 0 \\ G_{0,N} & G_{1,N} & \ldots & G_{N-1,N} & G_{N,N} \end{pmatrix} \tag{27}$$

3) Согласно (21) $q(x) = 2\dfrac{d}{dx}G(x,x)$, $h = G_{0,0}$. Рассмотрим дифференциальный оператор $TG = \dfrac{d}{dx}G(x,x)$. Построим его разностную аппроксимацию на равномерной сетке $\overline{\omega}_x$ с шагом h. В произвольной внутренней точке $x_k \in \overline{\omega}_x$ разностные операторы, аппроксимирующие T, можно построить следующими способами:

$$T_h^+ G_{k,k} = \frac{G(x_k+h, x_k+h) - G(x_k, x_k)}{h},$$

$$T_h^- G_{k,k} = \frac{G(x_k, x_k) - G(x_k-h, x_k-h)}{h},$$

$$T_h^o G_{k,k} = \frac{G(x_k+h, x_k+h) - G(x_k-h, x_k-h)}{2h}.$$

Таким образом $q_0 = T_h^+ G_{0,0}$, $q_N = T_h^- G_{N,N}$, а при $k = \overline{1, N-1}$ $q_k = T_h^o G_{k,k}$.

Для вычисления интеграла в (22) можно также воспользоваться методом трапеций.

Заключение. В данной работе была поставлена задача восстановления дифференциального оператора по спектральным данным, которые включают в себя собственные значения краевой задачи и весовые числа. Задача состоит в нахождении потенциала и коэффициентов краевых условия. Подобные задачи относятся к типу обратных. Из теоретических положений, лежащих в основе обратных задач, следует, что задание спектральных данных однозначно определяет потенциал и коэффициенты краевых условий. Был изучен метод Гельфанда-Левитана решения обратных задач. Суть метода состоит в сведении обратной задачи к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно ядра оператора преобразования. Данный метод позволяет получить алгоритм решения обратной задачи и необходимые и достаточные условия ее разрешимости. В первом разделе приведены теоретические основы обратных задач, а именно теорема единственности восстановления дифференциального оператора по спектральным данным, теорема о сведении обратной задачи к интегральному уравнению, а также необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи; поставлена задача восстановления дифференциального оператора по спектральным данным.Второй раздел был посвящен численному решению обратных задач. В нем был приведен численный алгоритм решения обратной задачи, а так же описание программы, реализующей данный алгоритм. Проверка работы программы была произведена на тестовом примере для которого было получено аналитическое решение. В конце второго раздела представлены выводы по сравнению аналитического решения и результатов численного эксперимента. В приложении указан метод последовательных приближений решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода и приведена программа на языке **Python**, вычисляющая значения коэффициентов краевых условий и потенциала на заданной сетке.