МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и вычислительной математики

Представление конечных детерминированных автоматов конечными рядами Фурье – Уолша.

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента(ки) 4 курса 411 группы

направления 01.03.02 – Прикладная математика и информатика
код и наименование направления
механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа
Баланова Ивана Андреевича

Научный руководитель
старший преподаватель ____________ С.И.Поликарпов
должность, уч. степень, уч. звание — дата, подпись — инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
д.ф-м.н., профессор ____________ В.А. Юрко
должность, уч. степень, уч. звание — дата, подпись — инициалы, фамилия

Саратов, 2019 год

Введение. Автоматное отображение относится к классу функций, областями определения и значений которых являются последовательности элементов из конечных множеств. Разработаны различные формы представления автоматных отображений: дискретными детерминированными автоматами с конечными или счетно-бесконечными множествами состояний, конструкциями языка регулярных выражений, структурно-функциональными схемами композиции автоматов и др.

Автоматное отображение это бинарное отношение вида $\phi : X^* \times Y^*$, где X^* и Y^* — множества конечных последовательностей элементов конечных множеств X и Y, удовлетворяющее условиям:

1) бинарное отношение ϕ является отображением;
2) для любой последовательности $p \in Pr1\phi$ выполняется равенство $|p| = |\phi(p)|$, то есть прообраз и образ по отображению ϕ имеют одинаковую длину;
3) для любой последовательности $p \in Pr1\phi$ любой ее префикс p' принадлежит области определения отображения ϕ, т.е. $p' \in Pr1\phi$;
4) если $p \in Pr1\phi$, то для любого префикса p' последовательности p выполняется равенство
$|p'| = \phi(p')|$.

Автоматные отображения обладают важными для практики и теории свойствами.

1. В классе всех автоматных отображений содержится собственный подкласс отображений, реализуемых конечными детерминированными автоматами, которые используются как математические модели для дискретных технических, биологических, информационных и других систем.
2. Преобразования, определяемые машинами Тьюринга, представимы в форме автоматных отображений. На основании гипотезы о связи машин Тьюринга

с алгоритмами это означает, что любой алгоритм может быть представлен как автоматное отображение, реализуемое дискретным детерминированным автоматом со счетно-бесконечным множеством состояний.

3. Любому автоматному отображению вида $\phi : X^* \rightarrow Y^*$ соответствует дискретный детерминированный автомат вида $A = (S, X, Y, \delta, \lambda, s0)$, где S — множество состояний автомата, X и Y — конечные множества входных и выходных сигналов, $s0 \in S$, $\delta : S \times X \rightarrow S$ и $\lambda : S \times X \rightarrow Y$ — функции переходов и выходов, в котором входные и выходные последовательности сигналов связаны уравнениями динамики.

Цель бакалаврской работы заключается в представлении конечного детерминированного автомата в виде композиции простейших автоматов путём разложения геометрического образа исходного автомата в конечный ряд Фурье – Уолша по системе функций Уолша и сопоставление каждой из этих функций автомата геометрический образ которого совпадает с данной функцией, а затем построение композиции полученных простейших автоматов и сравнением её с исходным автоматом. Выпускная квалификационная работа состоит из содержания, введения, трёх глав, заключения и списка использованных источников. В первой главе рассматриваются функции, автоматы, автоматные отображения, геометрические образы автоматных отображений. Во второй главе рассматриваются функции Уолша, система Уолша – Пэли, свойства функций Уолша, ряды Фурье. В третьей главе сравнивается исходный конечный детерминированный автомат с автоматом после разложения в ряд Фурье – Уолша и объединением его обратно в конечный детерминированный автомат.

Основное содержание работы. Функции, автоматные отображения, автоматы. Конкретная функция от n переменных, $n \in N^+$, – это структура вида

$$F_f\,(O_1^f, O_2^f, \{z_1, z_2, ..., z_n\}, z, f\,), \qquad (1)$$

где O_1^f и O_2^f - множества, на которых функция определена (O_1^f) и принимает значение (O_2^f), $\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ - множество независимых переменных, z - зависимая переменная и

$$f : O_1^f \to O_2^f \qquad (2)$$

график функции. Будем использовать стандартное обозначение функции $y = f(z_1, z_2, ..., z_n)$. При рассмотрении класса или классов функций указанные конкретные обозначения областей определения и значения функции, обозначения переменных и знак функции будут предполагаться и как метаобозначения.

Автоматные функции являются специальным видом функций, для которых: O_1^f = X^* (где X^* - множество всех, включая пустую (ε), конечных последовательностей элементов некоторого конечного множества X); O_2^f = Y^* (где Y – некоторое конечное множество и

$$f : X^* \to Y^* \,(f : X^* \to Y) \qquad (3)$$

отображение, удовлетворяющее дополнительным условиям автоматности. Условия автоматности имеют следующий вид:

Условие 1 . f - отображение.

Условие 2 . $\mathrm{Pr}_1 f = O_1^f = X^*$.

Условие 3 . Для любого $p \in X^*$ $|f(p)| = |p|$.

Условие 4 . Для любых $p \in X^*$ и префикса p' последовательности p если $f(p) = q$, то $f(p') = q'$, где q' - префикс q длины $|p'|$.

Автоматное отображение f соответствует законам функционирования инициального автомата, т.е. функционированию автомата с зафиксированным начальным состоянием. В общем виде автомат определяется, например, как система пяти объектов $\boldsymbol{A = (S, X, Y, \delta, \lambda)}$, где S, X и Y – множества состояний, входных и выходных сигналов, $\delta: S \times X \to S$, $\lambda: S \times X \to Y$ – функции переходов и выходов автомата. Автомат функционирует в абстрактном, целочисленном, неотрицательном времени. В традиционном задании автомата функционирование определено по тактам функциями переходов δ и выходов λ. Как динамическая система автомат представлен уравнениями динамики:

s(t+1)=δ(s(t), x(t)) (4)

y(t)=λ(s(t), x(t)) (5)

Используя эти уравнения потактное задание функционирования преобразуется в процесс функционирования на основе расширения функций δ и λ до функций вида δ^*:S×X*→S , λ^*:S×X*→Y* и λ^{**}:S×X*→Y по правилам:

$\delta^*(s, xp) = \delta^*(\delta(s, x), p)$ (6)

$\lambda^*(s, xp) = \lambda(s, x)\lambda^*(\delta(s, x), p)$ (7)

$\lambda^{**}(s, px) = \lambda(\delta^*(s, p), x)$ (8)

для любых $s \in S, x \in X, p \in X^*$.

Использование равенств (6) и (7) позволяет строить геометрический образ автоматного отображения в системе координат с бесконечными осями, на которых размещены множества X^* и Y^*, а использование равенств (6) и (8) сокращает ось ординат до конечного множества точек Y . Автоматное отображение $f^A_{s_0}$ является множеством пар вида (p, q), где $p \in X^*$, $q \in Y^*$ и соответствует инициальному автомату $A_{s_0} = (S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$, где $s_0 \in S$ - зафиксированное начальное состояние автомата:

$$f^A_{s_0} = \bigcup_{p \in X}\{(p, \lambda^*(s_0, p))\} \qquad (9)$$

Ось ординат сокращается до конечного множества точек в случае, когда автоматное отображение определяется в виде $\rho^A_{s_0}$:

$$\rho^A_{s_0} = \bigcup_{p \in X}\{(p, \lambda^{**}(s_0, p))\} \qquad (10)$$

В автоматном отображении $\rho^A_{s_0}$, эквивалентном отображению $f^A_{s_0}$, пары имеют вид (p, y), где $p \in X^*$, $y \in Y$ и $\lambda^*(s_0, p)$ оказывается определенным всеми префиксами последовательности p по отображению λ^{**}.

Множество состояний S инициального автомата $A_{s_0} = (S,\ X,\ Y,\ \delta,\ \lambda,\ s_0)$ удобно представлять в следующей форме: $s_0 = s_\varepsilon$ и для любого $p \in X^*$ $\delta^*(s_\varepsilon, p) = s_p$. Для любых p_i , $p_j \in X^*$ выполняется равенство:

$$\delta^*\left(s_{p_i}, p_j\right) = s_{p_i p_j} \qquad (11)$$

В дальнейшем автоматное отображение будет представляться в форме

$$\rho_{S_0}^{A} = \bigcup_{px \in X^* X} \{(px,\ \lambda(s_p,\ x))\} \qquad (12)$$

где функция λ понимается как функция λ^{**} . Автоматное отображение является бинарным отношением, для которого выполняются *условия 1 - 4* .

Представление автоматного отображения $\rho_{s_0}^{A}$ в форме (12) имеет существенные технические преимущества, одним из которых является возможность представления графика автоматного отображения в виде ленты (см.рис.1).

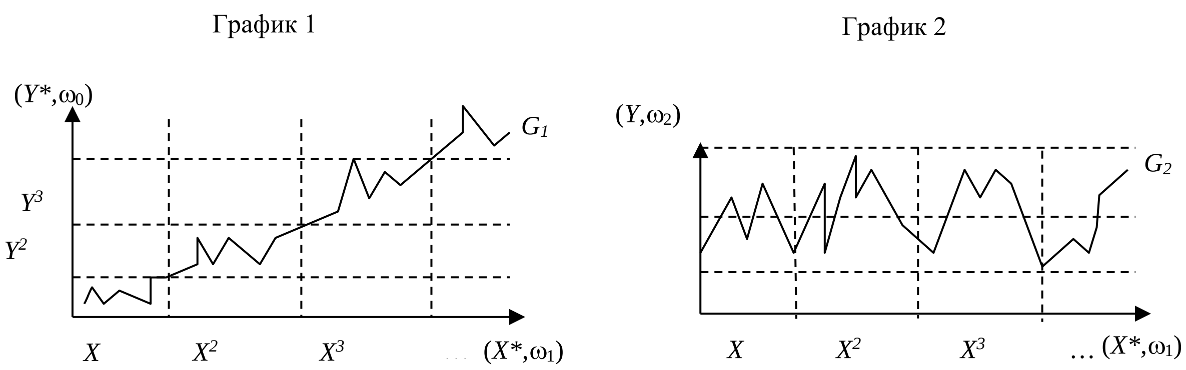

Рис.1. Графики линейно упорядоченных автоматных отображений $f_{s_0}^{A}$ и $\rho_{s_0}^{A}$.

На рис. 1 геометрическая кривая G_1 при ее построении может неограниченно расти вдоль обеих осей, а геометрическая кривая G_2 растет только вдоль оси абсцисс. При этом если автоматное отображение представлено дискретными точками на графике 1 , то оно может быть представлено эквивалентным образом на графике 2.

Определение 1. Пусть $\sigma \subset X^* \times Y^*$ - бинарное отношение, для которого выполняется условие: для любой пары $(p,q) \in \sigma$ $|p| = |q|$. Если $p = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$ и $q = y_{j_1} y_{j_2} \dots y_{j_k}$ ($k \in N^+$), то множество пар $(x_{i_1}, y_{j_1}), (x_{i_1}, y_{j_1}, y_{j_2}), \dots, (p, y_{j_k})\}$ будем называть префиксным разложением пары (p,q) и обозначать $H(p, q)$.

Следующая теорема, приводимая без доказательства, дает критерий, позволяющий определять когда бинарное отношение $\varphi \subset X^* \times Y^*$ является автоматным отображением.

Теорема 1. Пусть $\varphi \subset X^* \times Y^*$ - бинарное отношение, для любой пары $(p,q) \in \varphi$ которого выполняется условие $|p| = |q|$. Бинарное отношение φ является автоматным отображением тогда и только тогда, когда бинарное отношение

$$\varphi' = \bigcup_{(p,q)\in\varphi} H(p,q) \qquad (13)$$

является отображением.

Критерии, на основании которых определяются структуры, позволяющие строить графики автоматных отображений, представлены в теоремах 2 и 3.

Теорема 2. Пусть $A=(S, X, Y, \delta, \lambda, s_0)$ - инициальный дискретный детерминированный автомат с конечным или счетно-бесконечным множеством состояний S, ω_1 - линейный порядок на X^* и $(\alpha_0, \alpha_l]$ - полуинтервал на оси ординат, где $l = |Y|$. Тогда для любых

-взаимно-однозначного отображения "в" $\varphi: N^+ \to R$, где для любых $n, n' \in N^+$ из $n < n'$ следует $\varphi(n) < \varphi(n')$;

- разбиения полуинтервала $(\alpha_0, \alpha_l]$ на l полуинтервалов $(\alpha_0, \alpha_1]$, $(\alpha_1, \alpha_2]$, ... ,$(\alpha_{l-1}, \alpha_l]$ и взаимно-однозначного отображения $\nu : Y \to (\alpha_{i-1}, \alpha_i]$, $1 \le i \le l$,

пара чисел (j, β), где $j \in Pr_2\, \varphi$ и $\beta \in (\alpha_0, \alpha_l]$, однозначно определяет пару (p, y_i), для которой j - номер $p \in X^*$ по порядку ω_1 и $\beta \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i]$.

Доказательство следующей теоремы 3, также как и предыдущей теоремы 2, сводится к достаточно очевидному совмещению вводимых отображений как между собой, так и с используемыми в отображениях множествами. Доказательства опускаются.

Теорема 3. Любые:

- геометрическая кривая $y = f(x)$;

- последовательность h точек

$\left(x_{i_1}, f\left(x_{i_1}\right)\right), \left(x_{i_2}, f\left(x_{i_2}\right)\right), \ldots, \left(x_{i_j}, f\left(x_{i_j}\right)\right), \ldots,$

где $x_{i_1} < x_{i_2} < \ldots < x_{i_j} < \ldots$;

- число $m \in N^+$ и разбиение последовательности h на подпоследовательности из m элементов каждая;

- полуинтервал $\Delta=(\alpha, \beta]$ на оси ординат, где

$\min_{x\in\Delta} f(x) < \alpha < \beta \leq \max_{x\in\Delta} f(x)$;

- разбиение полуинтервала Δ на конечное множество полуинтервалов вида $(\alpha_0, \alpha_1]$, $(\alpha_1, \alpha_2]$, ... ,$(\alpha_{l-1}, \alpha_l]$, где $l \in N^+$,

однозначно определяют геометрический образ законов функционирования дискретного детерминированного автомата с конечным или счетно-бесконечным множеством состояний, с m входными и l выходными сигналами.

Функции Уолша. Система Уолша – Пэли.

Определение 2. Функция Уолша есть произведение функций Радемахера. Множество функций Уолша есть множество всевозможных произведений функций Радемахера.

В этом определении уместно говорить о различных функциях Радемахера, так как квадрат любой функции Радемахера равен начальной функции Уолша $w_0(x)\equiv 1$, которая и служит единственным исключением из этого замечания к определению 2.

Замечание 1. Если бы мы остановились на определении функций Радемахера формулой $r_n(x) = sgn(sin(2^{n+1}\pi x))$, то это групповое свойство не выполнялось бы. Система Уолша есть множество функций Уолша, занумерованных целыми неотрицательными числами, то есть элементами множества N_0.

Основной нумерацией системы Уолша является нумерация, предложенная Пэли в 1932 г. Если говорят о системе Уолша, то подразумевают нумерацию Пэли. Систему Уолша — Пэли будем обозначать $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Разложим номер n в двоичной системе счисления:

$n = n_1 2^0 + n_2 2^1 + \ldots + n_m 2^{m-1}$, (14)

где $n_i \in \{0, 1\}$, $n_m = 1$. Число m, равное числу разрядов в двоичной записи числа n, находится из условия $2^{m-1} \leq n < 2$^m. Для разложения (14) часто используется форма записи в виде $n = \sum_{k=1}^{\infty} n_k \cdot 2^{k-1}$, где полагаем $n_k = 0$ при $k > m$, что позволяет представить и число 0 в аналогичном виде.

Определение 3. Полагаем $w_0(x) \equiv 1$. Для $n \in N_0$ вида (14) определим

$w_n(x) = \prod_{k=0}^{m-1} \left(r_k(x)\right)^{n_{k+1}} = r_0^{n_1}(x) \cdot r_1^{n_2}(x) \cdot \ldots \cdot r_{m-1}^{n_m}(x)$ (15)

Все натуральные числа в соответствии с двоичным представлением (14) группируются по пачкам, где m-й пачкой (которую обозначаем m) называем множество чисел от 2^m до $2^{m+1} - 1$ включительно.

Если в разложении (14) числа n ∈m − 1 оставим только ненулевые слагаемые, то получим разложение

$n = 2^{\varepsilon_1} + 2^{\varepsilon_2} + \ldots + 2^{\varepsilon_\nu}$, (16)

где $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \ldots < \varepsilon_\nu = m - 1$. Тогда функции Уолша— Пэли при $n \neq 0$ определяют как произведение различных функций Радемахера:

$w_n(x) = r_{\varepsilon_1}(x) \cdot r_{\varepsilon_2}(x) \cdot \ldots \cdot r_{\varepsilon_\nu}(x)$.

Утверждение 3. Для любого n ∈ N верно

$\int_{\Delta_m^k} w_n(x)dx = 0$, где $n \in m$ и $k = 0,1,2 \ldots, 2^m - 1$

и, следовательно, $\int_0^1 w_n(x)dx = 0$.

Доказательство. В формуле (15) множитель $r_{m-1}(x)$ соответствует функции Радемахера с наибольшим номером. Все предыдущие сомножители $r_s(x)$ в формуле (15) постоянны на Δ_m^k.В итоге получаем $\int_{\Delta_m^k} w_n(x)dx = 0$.

Заключение. В выпускной квалификационной работе было изучено представление конечного детерминированного автомата в виде композиции простейших автоматов путём разложения геометрического образа исходного автомата в конечный ряд Фурье – Уолша по системе функций Уолша и сопоставление каждой из этих функций автомата геометрического образа, который совпадает с данной функцией, а затем построение композиции полученных простейших автоматов и сравнением её с исходным автоматом. При этом было установлено совпадение конечного детерминированного автомата после всех преобразований с исходным автоматом.