

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

*Кафедра компьютерной физики и метаматериалов  
на базе Саратовского филиала  
Института радиотехники и электроники  
им. В. А. Котельникова РАН*

**ПРИМЕНЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ГАУССА  
В ХАОТИЧЕСКОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ**

Автореферат  
выпускной квалификационной бакалаврской работы  
по направлению 03.03.02 «Физика»  
студента 4 курса 432 группы  
физического факультета  
**Ларина Андрея Николаевича**

Научный руководитель –  
д. ф.-м. н., профессор В. М. Аникин

Заведующий кафедрой –  
д. ф.-м. н., профессор В. М. Аникин

Саратов 2018

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуализация работы.** Основу научного видения мира составляет космология. В процессе развития представлений о строении и эволюции Вселенной произошли две (а в настоящее время происходит третья) научные революции:

1) переход от геоцентрической системы мира к гелиоцентрической (Николай Коперник, XVI век);

2) зарождение релятивистской космологии (А. Эйнштейн); переход от модели стационарной Вселенной к модели нестационарной, расширяющейся Вселенной (А. А. Фридман, Ж. Леметр), прошедшей горячую стадию Большого взрыва (Г. А. Гамов)); становление стандартной модели эволюции Вселенной (XX век);

3) открытие *ускоренного* расширения Вселенной и осознание того факта, что барионное вещество составляет лишь 4% от полной плотности материи во Вселенной (предполагаемое существование темной материи и темной энергии); теория Мультимира (XXI век).

Достижения современной космологии отражены в [1–6]. Современный теоретический фундамент космологии составляют основные физические теории (теория тяготения, теория электромагнитного поля, квантовая теория, теория элементарных частиц и др.), а ее предметом является физико-геометрический аспект Вселенной как *целого*. Но, как заметил один из ведущих специалистов-космологов А.Д. Линде, современные физические теории прежде всего проходят тест на их "космологическую полноценность"; более того, *"никакое подлинное объединение всех видов взаимодействий, включающее гравитационные взаимодействия, невозможно без анализа наиболее важного проявления этого объединения, которым служит существование Вселенной"* [7]. В этой связи можно, по-видимому, в известном смысле говорить о *фундаментальном характере приоритета космологии* перед частными естественными науками.

Считается, что основные положения стандартной модели эволюционирующей Вселенной хорошо обоснованы астрономическими данными, полученными инструментальными средствами. К ним относятся [8]:

1) однородность химического состава и важных физических параметров Метагалактики (наблюдаемой части Вселенной);

2) существование красного смещения в спектрах далеких галактик (расширяющаяся Вселенная);

3) наличие в Метагалактике изотропного фонового (реликтового) излучения в миллиметровом и сантиметровом диапазонах (иначе говоря – фотонного газа с плотностью  $5 \cdot 10^8$  фотонов в одном кубическом метре), что соответствует излучению абсолютно черного тела при температуре 2,7 градуса Кельвина;

4) наличие в Метагалактике барионной материи (ядерных частиц) с плотностью, по крайней мере, 0,3 бариона на каждый кубический метр;

5) оценка возраста метеоритов и экстраполяция результатов на возраст Метагалактики (14 миллиардов лет).

Стандартная модель эволюции Вселенной как нестационарной, эволюционирующей, расширяющейся Вселенной, прошедшей горячую стадию Большого взрыва, утвердилась после предсказанного Г. А. Гамовым трехградусного реликтового излучения.

Наступление космической эры предопределило качественное изменение информативности и надежности астрономических наблюдений; благодаря вынесению средств наблюдения за пределы земной атмосферы астрономия, по выражению И. С. Шкловского и В. Л. Гинзбурга, приобрела всеволновой характер. Космические средства позволили вести наблюдения в очень широком диапазоне длин волн – в гамма-диапазоне, рентгеновском, ультрафиолетовом, оптическом, инфракрасном и длинноволновом радиодиапазонах – с возможностью приема из космоса электромагнитного излучения от  $10^{-8}$  см (гамма-диапазон) до  $10^8$  см (длинноволновое излучение). Все это позволило обеспечить надежность астрономических наблюдений, несмотря на огромную удаленность наблюдаемых объектов.



Космический телескоп «РадиоАстрон» (Россия)

На основании наблюдаемого темпа расширения Вселенной было сделано заключение, что ее возраст составляет 14 млрд лет. Как отмечается в [5], «если отступить от начального, по-видимому, сингулярного состояния Вселенной на несколько минут, то дальнейший ход ее эволюции можно детально исследовать на основе твердо установленных физических законов». А какой же была Вселенная в самом начале своей эволюции? Описание самых ранних стадий существования Вселенной (вблизи точки Большого взрыва) не позволяет применять физические законы и ведется в рамках теорий, которые оперируют колоссальными плотностями (планковская плотность порядка  $10^{93}$  г/см<sup>3</sup>), экстремально малыми промежутками времени (порядка  $10^{-43}$  сек), ничтожными пространственными расстояниями (порядка  $10^{-33}$  см). К таким теориям принадлежит теория инфляции, в основе которой лежит гипотеза о космологическом расширении, вызванном антитяготением первичного космического вакуума. В свою очередь инфляционной стадии, как считают теоретики, предшествовал период квантового существования Вселенной и «кипения вакуума», когда характеристики пространства-времени менялись причудливейшим образом, в том числе менялась размерность пространства и его топология.

В работах В.А. Белинского, Е.М. Лифшица и И.М. Халатникова (см. [9]) показано, что вблизи особой точки в рамках анизотропной модели Расширения Вселенной возможно существование хаотического режима изменения метрики пространства-времени, происходящего под «управлением» дискретной динамической системы, носящей имя Гаусса, первой динамической системы теории чисел, демонстрирующей хаотическое поведение.

**Целью** данной выпускной квалификационной работы является получение вероятностных законов для величин, которые определяют эволюционные свойства отображения Гаусса.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В главе 1 устанавливается место моделирующей системы (отображения Гаусса) в модели эволюции Вселенной непосредственно вблизи Большого взрыва в общем контексте эволюции Вселенной. В главе 2 аналитически рас-

считываются многомерные вероятностные распределения, характеризующие параметры пространственно-временной метрики Вселенной вблизи особой точки.

### **Этапы возникновения и эволюции Вселенной**

В настоящее время дополняющими друг друга космологическими теориями являются стандартная теория нестационарной (расширяющейся) горячей Вселенной и ее расширения на малые интервалы времени, прошедшие после Большого взрыва, например, включающая несколько последовательных сценариев теория инфляционной (вздувающейся) Вселенной.

Первая нестационарная модель полностью однородного и изотропного мира была построена, как известно, А.А. Фридманом. Одновременно изотропная модель характеризуется наличием особой точки пространственно-временной метрики по отношению ко времени, характеризуемой, в частности, обращением в бесконечность плотности материи. Сжатие пространства при приближении к особой точке во фридмановской модели происходит «изотропно» – линейные расстояния по всем направлениям убывают с одинаковой степенью времени. Эту точку в стандартной космологической модели соотносят с понятием Большого взрыва. Говоря об *особенностях* в космологическом аспекте, имеют в виду, что особая точка достигается *всем* пространством, а не какой-то ограниченной частью – так понятие *однородности* Вселенной распространяется и на состояние "особая точка". Особым энтузиастом гипотезы Большого взрыва был Г.А. Гамов.

Космическая эволюция, в первом приближении [8], прошла следующие этапы.

*Большой взрыв – образование элементарных частиц – формирование атомов и молекул – возникновение галактик, звезд и планет – ...*

Длительность первых этапов, завершившихся синтезом ядер, оценивается временным интервалом в 3 часа. Длительность следующих эпох, в течение которых проходило пространственно-временное структурирование Вселенной, составляет миллиарды лет.

Графически этапы эволюции Вселенной представлены на рисунках 1 и 2 [5]. Более подробно рассмотрим некоторые фрагменты этой схемы.

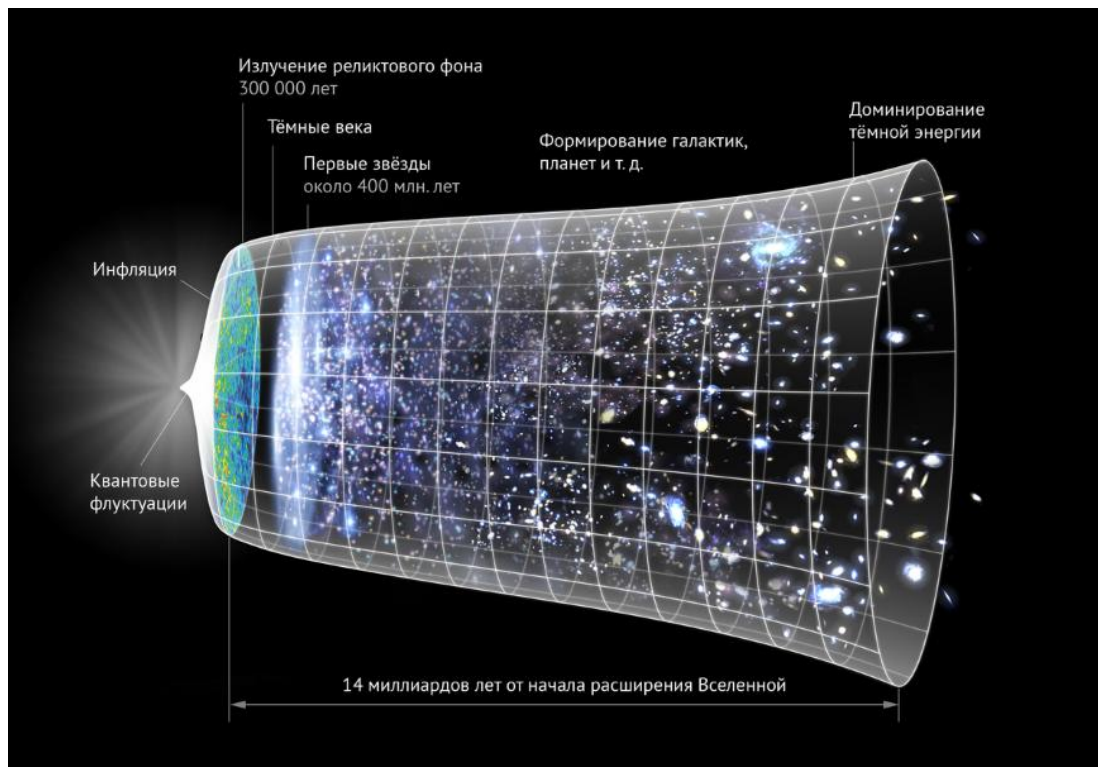


Рисунок 1. Этапы эволюции Вселенной с момента Большого взрыва: общая схема

**Что было раньше до формирования классического пространства времени и инфляционной стадии?** По современным представлениям, инфляционной стадии предшествовал период ее квантового существования. Промежутки времени более короткие  $10^{-43}$  с и расстояния более короткие, чем  $10^{-33}$  см. При чудовищно большой плотности энергии скалярного поля (**вакуумоподобной материи**) пространство-время распадалось на отдельные кванты, и все это находилось в состоянии «кипения вакуума», т.е. характеристики пространства-времени менялись причудливейшим образом, в том числе менялась размерность пространства, а также его топология. Изучать такие процессы трудно, поскольку не создана теория квантовой гравитации. Объединение общей теории относительности (ОТО) с квантовой физикой осуществляется в рамках теории струн и М-теории (теория «бран», объединение фундаментальных взаимодействий).

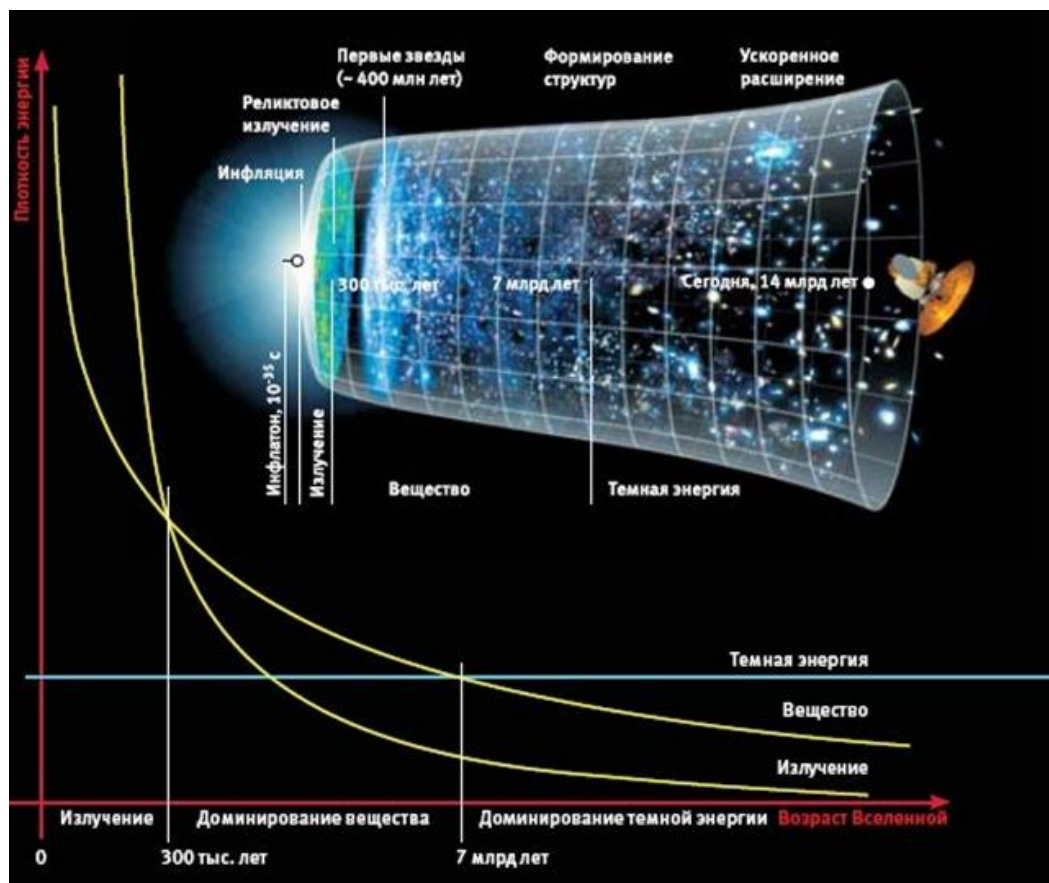


Рисунок 2. Этапы эволюции Вселенной: периоды доминирования видов материи

Компьютерное моделирование показало [5], что вследствие квантовых флуктуаций **случайным образом** происходит превращение кипения вакуума в отдельные пузыри (раздувающиеся вселенные). Каждая из рожденных вселенных подобна нашей, но вселенные могут иметь разные физические свойства и в них могут действовать разные физические законы при других физических константах (по сравнению с таковыми в нашей Вселенной). Некоторые «пузыри», рожденные из кипящего вакуума, будут развиваться неограниченного долго, а некоторые испытывать коллапс и переход в квантовое состояние (рисунок 3).

Этот сценарий описывает сценарий бесконечной инфляции и предсказывает разных причинно несвязанных вселенных. Один из создателей современной теории расширяющейся Вселенной Андрей Дмитриевич Линде, научный сотрудник Физического института РАН (Москва), профессор Стэнфордского университета (США).

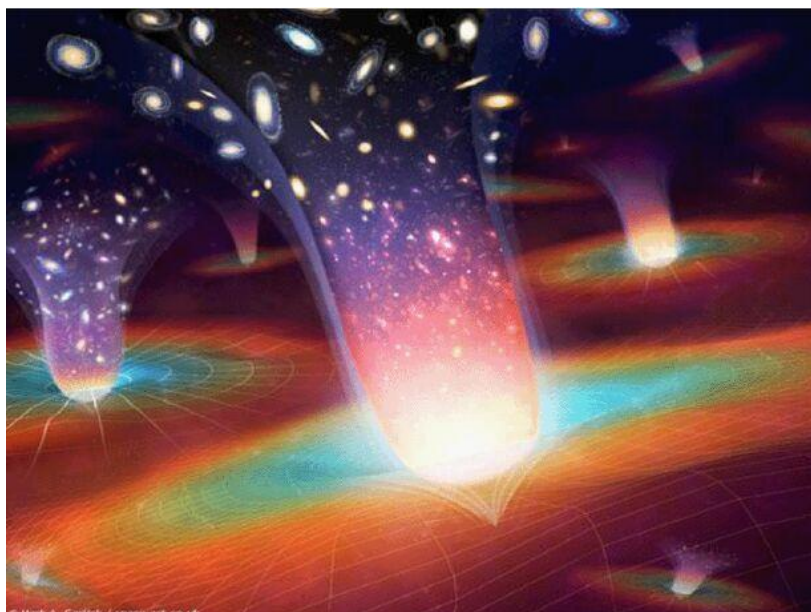


Рисунок 3. «Кипящий вакуум»  
и квантовое рождение вселенных в мультивмире [5]

В последней прижизненной статье С. Хокинга излагаются математические обоснования теории мультивселенной. Экспериментальные доказательства существования мультивселенной опять же должны быть связаны с исследованиями фонового излучения, относящегося к началу Вселенной.

**Под темной материей (ТМ)** традиционно понимается среда, воспринимаемая лишь по ее гравитационному взаимодействию на «видимые» объекты, хотя нельзя исключить ее слабого излучения в гамма-диапазоне при аннигиляции части ТМ, которые пытаются обнаружить. Темная материя образует невидимые темные гало<sup>1</sup> крупных галактик. Имеется по крайней мере 10 независимых свидетельств существования темной материи во Вселенной. Среди них:

1. Движение галактик в скоплениях (со скоростью  $v \geq 1000$  км/сек).
2. Вращение галактик (плоские кривые вращения).
3. Горячий ( $T > 10^8$  К) газ в скоплениях галактик (скорости протонов со скоростью  $v_p \geq 1000$  км/сек).
4. Гравитационное линзирование света далеких галактик в гравитационном поле в более близких скоплениях галактик.
5. Движение тройных и кратных галактик. и т.д.

---

<sup>1</sup> Гало темной материи — гипотетический компонент галактик, окружающий галактический диск и простирающийся далеко за пределы видимой части галактики. Масса гало при этом является главным компонентом общей массы галактики.



Для каждого из 10 независимых свидетельств существования темной материи следует вывод о том, что масса темной материи в 5-10 раз больше массы видимого вещества. Альтернативный подход учета гравитационного взаимодействия – вводить для каждой галактики свою модификацию закона тяготения, что представляется неудовлетворительным.

**Темная энергия.** В 1998-1999 гг. две группы астрономов сделано открытие **всемирного антитяготения**. Этот вывод следовал из обнаружения разбегания галактик **с ускорением**. Это свидетельствует о существовании во Вселенной некоторой материи нового типа (наз. темной энергией), которая обладает не тяготением, а антигравитационным отталкиванием. С теоретической точки зрения учет темной энергии требует введения в уравнения ОТО так называемого лямбда-члена, что Эйнштейн и предугадывал! Плотность темной энергии не зависит от времени, от красного смещения. Давление темной энергии отрицательно, что обуславливает антигравитационное действие.

Существует три независимых свидетельства существования темной энергии:

1. Эволюция смещений галактик в рентгеновском и радиодиапазонах со спутников. Темная энергия вносит 70% от полной плотности материи Вселенной.
2. Возраст самых старых звездных скоплений 12-13 млрд. лет находится из решений с учетом лямбда-члена (без этого решения дают меньший возраст).
3. Точные измерения анизотропии реликтового фона.

Распределение материи Вселенной по ее видам представлено на рисунке 4.

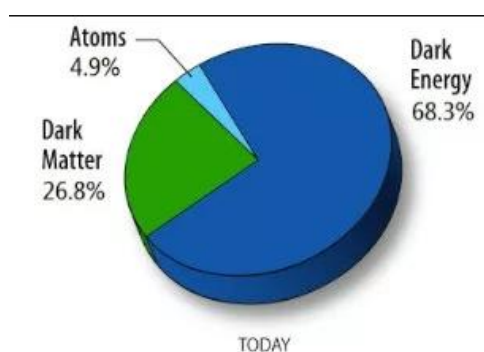


Рисунок 4. Состав материи Вселенной: барионы – 4,9%, темная материя – 26,8%, темная энергия – 68,3 %

## Анизотропная модель эволюции Вселенной

Есть ряд важных вопросов, на которые стандартная теория – теория Большого взрыва не может дать ответа, в том числе это касается описания начального этапа эволюции Вселенной, в пределах так называемого планковского интервала времени  $t_p \approx 10^{-43} c$ , характеризуемого огромными плотностями материи – энергии и температуры и вообще означающего границу применимости существующей (неквантовой) общей теории относительности. На решение этих проблем направлены современные космологические теории. Но следует заметить, что экспериментальная проверка их положений требует создания недостижимых в наши дни физических условий, отвечающих состоянию Вселенной вблизи сингулярности, т.е. говоря на философском «диалекте», в структуре современного научного познания фундаментальных свойств мира возникает ситуация, когда критерии истины должны формулироваться в терминах, предусматривающих замещение инструментального экспериментирования. В этой связи можно вспомнить, что все перечисленные выше свойства Вселенной были обнаружены *уже после* создания и общей теории относительности – *самой красивой*, по выражению Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица, *из существующих физических теорий*, и стационарной космологической модели самого Эйнштейна, и нестационарной модели Фридмана.

Попытки решения проблемы сингулярности, а также других проблем фридмановской космологии (например, существования светового горизонта) предпринимались неоднократно. В этой связи можно назвать модели однородных (с одинаковыми метрическими свойствами во всех точках) пространств, не предусматривающих одновременно наличие изотропности – одинаковой пространственно-временной зависимости метрики во всех координатных направлениях.

Классификация однородных пространств сводится к определению набора так называемых структурных констант, возникающих из условия неизменности метрики пространства при координатных преобразованиях [9, §117]. Однородные пространства были классифицированы Бианки еще в 1918 г., и, как выяснилось значительно позднее, с типом IX однородного про-

странства может быть соотнесена модель ранней эволюции Вселенной, демонстрирующая свойства хаотической динамической системы.

Существование особой точки присуще и более общим решениям уравнений Эйнштейна [9]. К тому же рассмотрение особенностей решения уравнений Эйнштейна вблизи особой точки считается корректным проводить в рамках *анизотропных* моделей, приводящих к несимметричному изменению линейных расстояний. В частности, метрике Э. Казнера свойственны неустойчивые никаким преобразованием системы отсчета пропорциональные времени увеличение линейных расстояний вдоль двух координатных осей и уменьшение расстояния вдоль третьей оси [9].

В работах В. А. Белинского, Е. М. Лифшица и И. М. Халатникова [10–13] показано, что релятивистские космологические модели вблизи особой точки с однородным пространством типа IX (по Бианки) имеют сугубо хаотические особенности. Хаотические колебания гравитационного поля в этих моделях были обнаружены в конце 60–начале 70-х гг. прошлого столетия. При этом со сложной исходной системой уравнений Эйнштейна было соотнесено именно отображение Гаусса, которое, таким образом, и определяет хаотическую динамику данных космологических моделей.

Изменение масштабов длин в различных направлениях в пространстве описывается тремя масштабными функциями времени  $t$ , изменение которых определяется функциями времени  $t^{p_l}, t^{p_m}, t^{p_n}$ . Показатели  $p_l, p_m, p_n$  (один из них всегда отрицателен) для всех моментов времени удовлетворяют отношению:  $p_l + p_m + p_n = p_l^2 + p_m^2 + p_n^2 = 1$ .

Изменение во времени (при  $t \rightarrow 0!$ ) пространственно–временной метрики данной модели происходит в соответствии со следующим сценарием [9–13]. Процесс эволюции к особой точке состоит из последовательных периодов, называемых эрами. В течение отдельной эры масштаб пространственного расстояния вдоль *одной* из осей монотонно убывает, а изменение двух других масштабных функций происходит в колебательном режиме. Эры хаотически сменяют друг друга, причем признаком перехода от одной эры к другой является «перебрасывание» направления с монотонным убыванием расстояний на *другую* ось; при переходе от одной эры к следующей пара колеблющихся функций заменяется другой. Внутри же каждой эры идет череда «казнеровских эпох», смена которых обуславливается определенным зако-

ном изменения показателей  $p_l, p_m, p_n$ , а именно, при смене эпох происходит «перебрасывание» отрицательного показателя с одной оси на другую.

Изменение масштабов расстояний по трем независимым переменным имеет место при различном задании матрицы коэффициентов, определяющих метрику. При диагональной матрице эти направления в каждой точке задаются ортогональными реперами. В более общем случае недиагональной матрицы коэффициентов метрики эти направления определяются так называемыми «казнеровскими осями», характерными для каждой эпохи и (в присутствии материи) поворачивающимися при смене эпох [9].

Ч. Мизнер (С. Misner) [14–16] назвал замкнутую модель типа IX "Mixmaster Universe" – "перемешанным миром". В асимптотике хаотический характер эволюции Вселенной в моделях Mixmaster Universe определяется хаотическими отображениями, одним из которых является отображение Гаусса [9].

Модель Mixmaster Universe Казнера-Мизнера, подобно замкнутой вселенной Фридмана, возникает из нулевого объема, расширяется до определенного максимума и вновь стягивается под действием собственного тяготения. Но эта эволюция не гладкая, как у Фридмана, а **абсолютно хаотическая** и по сему совершенно непредсказуемая в деталях. В молодости эта вселенная интенсивно осциллирует, расширяясь по двум направлениям и сокращаясь по третьему. Однако ориентации расширений и сжатий не постоянны — они хаотически меняются местами. Более того, частота осцилляций зависит от времени и по приближении к начальному мгновению стремится к бесконечности. **Такая вселенная претерпевает хаотические деформации.** *Эти деформации опять-таки можно интерпретировать как проявление движущихся в различных направлениях гравитационных волн, гораздо более буйных, чем в модели Казнера.*

Длина эры, выраженная в числе содержащихся в ней «казнеровских эпох», задается неполными частными  $A_k$ , возникающими при разложении иррационального числа в непрерывную дробь, инструментом чего служит отображение Гаусса.

Хаотическая модель расширения Вселенной предполагает следующее. В «молодости» вселенная интенсивно осциллировала, **расширяясь по двум направлениям и сокращаясь по третьему.** Однако ориентации расширений

и сжатий не постоянны — они хаотически меняются местами. Более того, частота осцилляций зависит от времени и по приближении к начальному мгновению стремится к бесконечности. **Такая вселенная претерпевает хаотические деформации.** Эти деформации опять-таки можно интерпретировать как проявление движущихся в различных направлениях гравитационных волн.

Для описания хаотических колебаний вводят эры и эпохи. Длина эры, выраженная в числе содержащихся в ней «эпох», задается неполными частными  $A_k$ , возникающими при разложении иррационального числа в непрерывную дробь, инструментом чего служит отображение Гаусса.

В результате расчетов получено, что длины эр **являются одинаково распределенными, зависимыми** случайными величинами; **любая** последовательная совокупность длин казнеровских эр (определенной длины) описывается **одним и тем же** многомерным распределением:

а) для нечетного числа элементов  $m$  справедливо следующее выражение для совместного распределения системы зависимых величин  $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ :

$$P(A_1 = n_1, A_2 = n_2, \dots, A_m = n_m) = \log_2 \frac{// n_1, n_2, \dots, n_m //}{// n_1, n_2, \dots, n_m + 1 //},$$

б) для четного числа элементов  $m$  справедливо следующее выражение для совместного распределения системы зависимых величин  $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ :

$$P(A_1 = n_1, A_2 = n_2, \dots, A_m = n_m) = \log_2 \frac{// n_1, n_2, \dots, n_m + 1 //}{// n_1, n_2, \dots, n_m //}.$$

ти формулы применимы для любого последовательного набора коэффициентов цепной дроби, т.е. возможен сдвиг вдоль последовательности коэффициентов в том смысле, что

$$P(A_{s+1} = n_1, A_{s+2} = n_2, \dots, A_{s+m} = n_m) = \log_2 \frac{// n_1, n_2, \dots, n_m //}{// n_1, n_2, \dots, n_m + 1 //},$$

(для нечетного числа элементов) или

$$P(A_{s+1} = n_1, A_{s+2} = n_2, \dots, A_{s+m} = n_m) = \log_2 \frac{// n_1, n_2, \dots, n_m + 1 //}{// n_1, n_2, \dots, n_m //}$$

(для четного числа элементов).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Если предполагать наличие анизотропных свойств вселенных в мультимире, то при рассмотрении динамики пространства-времени вблизи точки Большого взрыва можно изучать возможность построения моделей эволюции на базе дискретной динамической системы Гаусса.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Горбунов Д. С., Рубаков В. А. Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горячего Большого взрыва. Изд. 3, перераб. и значит. доп. М. : URSS, 2016. 616 с.
2. Лукаш В. Н., Михеева Е. В. Физическая космология. М. : Физматлит, 2010. 404 с.
3. Бисноватый-Коган Г. С. Релятивистская астрофизика и физическая космология. М. : Красанд, 2011. 365 с.
4. Чернин А. Д. Темная энергия и всемирное антитяготение // УФН. 2008. Т. 178, № 3. С. 267 – 300.
5. Черепащук А. М. История истории Вселенной // УФН. 2013. Т. 183, № 5. С. 535 – 556.
6. Засов А. В., Сабурова А. С., Хоперсков А. В., Хоперсков С. А. Тёмная материя в галактиках // УФН. 1917. т. 187, № 1. С. 3 – 44.
7. Линде А. Д. Физика элементарных частиц и инфляционная космология. М. : Наука, 1990. 280 с.
8. Эбелинг В., Энгель А., Файстель Р. Физика процессов эволюции. М. : Эдиториал УРСС, 2001. 326 с.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. 6–е изд. М.: Наука, 1973. Гл. 14. Релятивистская космология.
10. Белинский В.А., Лифшиц Е.М., Халатников И.М. Колебательный режим приближения к особой точке в релятивистской космологии // УФН. 1970. Т. 102, вып. 3. С. 463–500.
11. Лифшиц Е.М., Лифшиц И.М., Халатников И.М. Асимптотический анализ колебательного режима приближения к особой точке в однородных космологических моделях // ЖЭТФ. 1970. Т. 59, вып. 7. С. 32–335.
12. Белинский В.А., Лифшиц Е.М., Халатников И.М. Колебательный режим приближения к особой точке в однородных космологических моделях с вращением осей // ЖЭТФ. 1971. Т.60, вып. 6. С. 1971–1979.
13. Лифшиц Е.М., Халатников И.М., Синай Я.Г. и др. О стохастических свойствах релятивистских космологических моделей вблизи особой точки // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 38, вып.2. С. 79–83.
14. Misner C.W. Mixmaster Universe // Phys. Rev. Lett. 1969. V. 22. P. 1071–1074.
15. Misner C.W. The absolute zero of time // Phys. Rev. 1970. V. 186, No 5. P. 1328.
16. Misner C.W. Quantum cosmology // Phys. Rev. 1970. V. 186, No 5. P.1319.
17. Аникин В. М., Голубенцев А. Ф. Аналитические модели детерминированного хаоса. М. : Физматлит, 2007. Гл. 3.
18. Аникин В. М. Эволюционные и вероятностные свойства отображения Гаусса. Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 2007. 80 с.
19. Хинчин А. Я. Цепные дроби. М Наука, 1972. 112 с.