Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Алгебраические кривые третьего порядка

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления ***02.03.01 – Математика и компьютерные науки***

профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук

механико-математического факультета

МЕНЬЩИКОВА СЕРГЕЯ АЛЕКСАНДРОВИЧА

Научный руководитель
доцент, к. физ-мат. н., доцент ____________________ Л.Н. Ромакина
подпись, дата

Зав. кафедрой,
доктор физ-мат. наук, профессор ____________________ В.В. Розен
подпись, дата

Саратов 2018

Введение

1. Актуальность темы. История изучения алгебраических кривых исчисляется не одним столетием. Первые наиболее простые линии, известные древним математикам, — прямые и окружности, более сложные — линии второго порядка, называемые коническими сечениями и исследованные Аполлонием в его трактате [1]. В связи с развитием в XVI —XVII вв. аналитического метода исследования геометрических объектов Декартом у математиков появилась возможность изучать линии более высоких порядков. С этого периода начинается активное развитие теории алгебраических кривых [7]. Многие исследованные объекты находят свое применение в физике и технике. Целый класс алгебраических кривых возникает в связи с решением одной из трех классических задач древности — трисекции угла [3,4,5]. Так, например, появляются трисектрисы [3, с. 206] Каталана [3, с. 208], Крамера [3, с. 213], Лоншана [3, с. 72, 171, 212], Маклорена [3, с. 201, 206, 212, 213].

В настоящее время, как и прежде, алгебраические кривые находят применение в физике, технике и архитектуре (см., например, [2,3,6]). Кроме того, особого вида алгебраические кривые третьего порядка, называемые эллиптическими, активно применяются в криптографии. В связи с этим тема работы представляется актуальной.

2. Цели и задачи работы. Основная цель работы — изучить геометрические свойства кривых третьего порядка. Для достижения поставленной цели были сформулированы и решены следующие задачи.

1. Познакомиться с историей развития теории алгебраических кривых.

2. Изучить основные геометрические объекты, характеризующие алгебраические кривые.

3. Познакомиться с различными подходами к классификации кривых третьего порядка.

4. Подробно изучить декартов лист и строфоиду евклидовой плоскости.

3. Содержание работы. Работа состоит из трех разделов. В первом разделе представлен исторический обзор темы исследования и подробно описаны способы образования алгебраических кривых. Во втором разделе рассмотрены различные подходы к классификации кривых, детально представлены классификации Ньютона, Адамова и Плюккера. В третьем разделе описаны две замечательные кривые третьего порядка на евклидовой плоскости, декартов лист и строфоида. Рассмотрены особенности построения декартова листа и его свойства, приведена краткая историческая справка этой линии. При исследовании строфоиды рассмотрены особенности ее формы и геометрические характеристики. Выделены свойства строфоиды как геометрического места точек, обладающих заданным метрическим свойством.

4. Метод исследования. Основной метод исследования работы — метод координат.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

1 Исторический обзор исследования кривых. Основные понятия

1.1 Историческая обзор

Исторический обзор темы исследования подготовлен на основе книг [2, 3].

Понятие линии определилось в сознании человека в доисторические времена. Траектория брошенного камня, струя воды, лучи света, очертания цветов и листьев растений, извилистая линия берега реки и моря и другие явления природы привлекали внимание наших предков и, наблюдаемые многократно, послужили основой для постепенного установления понятия линии. Однако потребовался большой исторический период, прежде чем люди стали сравнивать между собой формы кривых линий и отличать одну кривую от другой. Первые рисунки на стенах пещерного жилища, примитивные орнаменты, украшавшие домашнюю утварь, свидетельствуют о том, что люди научились уже не только отличать прямую от кривой, но и различать формы отдельных кривых и в их сочетаниях находить удовлетворение зарождающихся эстетических потребностей. Все это, однако, было еще далеко от того абстрактного понимания линии, которым располагает математика, и от сознательного исследования ее свойств.

Правда, исторические памятники глубокой древности показывают, что у всех народов на известной ступени их развития имелось понятие окружности, не говоря уже о прямой линии. Употреблялись примитивные инструменты для построения этих линий, и были попытки измерять площади, ограничиваемые прямыми и окружностью. Как видно, например, из древнейшего памятника математической культуры — "папируса Ринда египтяне за 17–20 веков до начала нашей эры занимались квадратурой круга и получили довольно хорошее приближение для числа π, равное $(\frac{16}{9})^2$, или $3,1604$. Но лишь с возникновением математики как науки стало развиваться и учение о линиях, достигшее в трудах греческих математиков высокого совершенства.

1.2 Способы образования кривых

Исследование особенностей формы кривой и ее свойств средствами дифференциальной геометрии возможно лишь, если кривая выражена в аналитической форме, т.е. уравнением.

1. *Кривая определяется как линия пересечения данной поверхности плоскостью, положение которой определено.*

2. *Кривая определяется как геометрическое место точек, обладающих данным свойством.*

3. *Кривая определяется как траектория точки, характер движения которой обусловлен тем или иным образом.*

4. *Образование линий по способу сопряжения проективно соответствующих элементов.*

5. *Кривая определяется заданием её дифференциальных свойств.*

6. *Кривая определяется как линия, получаемая в результате того или иного геометрического преобразования уже известной кривой.*

7. *Кривая задаётся сразу же в аналитической форме и представляет собой график той или иной функции.*

1.3 Основные понятия

1.Формулы Плюккера.

Плюккер установил следующие соотношения для невырождающихся кривых:

$$\begin{cases} k = n(n-1) - 2d - 3r, \\ 3(k-n) = \omega - r, \\ \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r = \frac{(k-1)(k-2)}{2} - t - \omega, \\ \omega = 3n(n-2) - 6d - 8r, \end{cases}$$

где n — порядок кривой, k — её класс, r — число точек возврата, d — число других двойных точек, ω — число точек перегиба, t — число двойных касательных, p — дефицит кривой.

2. Кратные точки.

3. Касательные, асимптоты и нормали.

2 Различные классификации кривых

2.1 Классификация Ньютона

При помощи элементарных преобразований Ньютон (1704 г.) приводит общее уравнение кривой 3-го порядка

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 3Ex^2 + 6Fxy + 3Gy^2 + Hx + Iy + K = 0$$

к одной из четырёх канонических форм:

$$A.\ xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$
$$B.\ xy = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$
$$C.\ y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$
$$D.\ y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Затем по коэффициентам канонического уравнения он составляет вспомогательное уравнение 4-й или 3-й степени:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}e^2 = 0$$

или

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

которое можно назвать *характеристическим.* Далее, в зависимости от различных соотношений между корнями характеристического уравнения Ньютон делит все кривые 3-го порядка на 7 классов, 14 родов, 72 типа.

Класс I. Гиперболическая гипербола

Класс II. Дефективная гипербола

Класс III. Параболическая гипербола

Класс IV. Гиперболизмы конических сечений

Класс V. Трезубец

Класс VI. Расходящаяся парабола

Класс VII. Кубическая парабола

2.2 Классификация Адамова

Если быть точными, то рассуждения Адамова назвать классификацией кубических кривых нельзя, но они дают новые представления о строении этих объектов.

Адамов путём аффинных преобразований приводит уравнение

$$Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3 + 3Ex^2 + 6Fxy + 3Gy^2 + 3Hx + 3Ky + L = 0 \quad (2.1)$$

к простейшему виду. В результате получается уравнение с коэффициентами, зависящими от трёх параметров. Затем параметрам придаются определённые численные значения и вычерчивается соответствующая значениям кривая. Рассматривая различные комбинации численных значений параметров, Адамов получил 1133 типа кривых 3-го порядка.

2.3 Классификация Плюккера

Плюккер (1835 г.) классифицирует кривые 3-го порядка в зависимости от положения асимптот и прямой s, соединяющей точки пересечения кривой с асимптотами. Обозначения которыми мы будем пользоваться: p — действительная прямолинейная асимптота, q — параболическая прямолинейная асимптота. Под "ветвь кривой"подразумевается бесконечная ветвь.

Плюккер делит все кривые 3-го порядка на шесть основных классов:

Первый класс содержит гиперболические и дефективные гиперболы. Кривые этого класса имеют три прямолинейные асимптоты.

Второй класс содержит параболические гиперболы, имеющие одну прямолинейную и одну параболическую асимптоту.

Третий класс содержит гиперболизмы конических сечений. Из трёх прямолинейных асимптот кривых данного класса две паралельны между собой.

Четвёртый класс содержит расходящиеся параболы, имеющие асимптотой также расходящуюся параболу.

Пятый класс содержит трезубцы, имеющие одну прямолинейную и одну параболическую асимптоту.

Шестой класс содержит кубические параболы, не имеющие асимптот.

3 Некоторые замечательные кривые 3-го порядка

3.1 Декартов лист

3.1.1 Особенности формы

Декартовым листом называется кривая 3-го порядка, уравнение которой в некоторой прямоугольной системе координат может быть записано в виде

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

3.1.2 Свойства

Согласно теореме Маклорена, если в трёх точках алгебраической кривой 3-го порядка, лежащих на одной прямой, провести касательные к этой кривой, то точки их пересечения с кривой будут лежать также на прямой линии. По отношению к декартову листу эта теорема доказывается просто. Выведем предварительно условие пребывания трёх точек декартова листа, соответствующих значениям t_1, t_2 и t_3 параметра, на одной прямой. Если уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$, то значения параметра, соответствующие точкам пересечения этой прямой с кривой, должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} y = kx + b, \\ x = \frac{3at}{1+t^3}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

3.1.3 Историческая справка

Впервые в истории математики кривая, названная впоследствии декартовым листом, определяется в письме Декарта к Ферма в 1638 г. как кривая, для которой сумма объемов кубов, построенных на абсциссе и ординате каждой точки, равняется объему параллелепипеда, построенного на абсциссе, ординате и некоторой константе. Форма кривой устанавливается впервые Робервалем, который находит узловую точку кривой, однако в его представлении кривая состоит лишь из петли. Повторяя эту петлю в четырех квадрантах, он получает фигуру, напоминающую ему цветок с четырьмя лепестками. Поэтическое название кривой "лепесток жасмина" , однако, не прижилось. Полная форма кривой с наличием асимптоты была определена позднее (1692) Гюйгенсом и И. Бернулли. Название "декартов лист"прочно установилось только с начала 18 века.

3.2 Строфоида

Алгебраическая кривая в Евклидовой плоскости называется *циркулярной*, если она проходит через абсолютные циклические точки. Циркулярная кривая 3-го порядка называется *строфоидой*, если она имеет двойную узловую точку с ортогональными касательными в этой точке. Неприводимая строфоида с осью симметрии называется *прямой* (Рисунок 1), без оси симметрии — *наклонной* или *косой* (Рисунок 2).

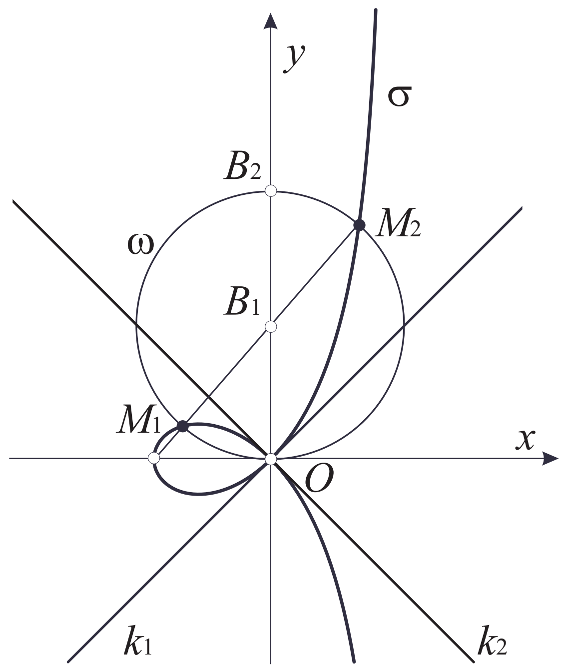

Рис. 1: Прямая строфоида.

Чтобы показать в дальнейшем одно из замечательных свойств строфоиды, приведем вспомогательные определения.

Подерой кривой σ относительно точки T называют множество перпендикуляров ко всем касательным кривой σ, проведенных из точки T. Если кривая ς является подерой кривой σ, то кривую σ называют *негативной подерой* (или *обратной подерой*) кривой ς. В англоязычной литературе для подеры используется термин *pedalcurve*. Поэтому точку T называют иногда *педальной* точкой подеры.

Лемма 3.1. *Каждая неприводимая строфоида S является негативной подерой равносторонней гиперболы H относительно любой окружности с центром в узле O строфоиды S. Строфоида S является подерой параболы P, директриса которой проходит через O, и фокус F_P которой является отражением O от фокуса F строфоиды S.*

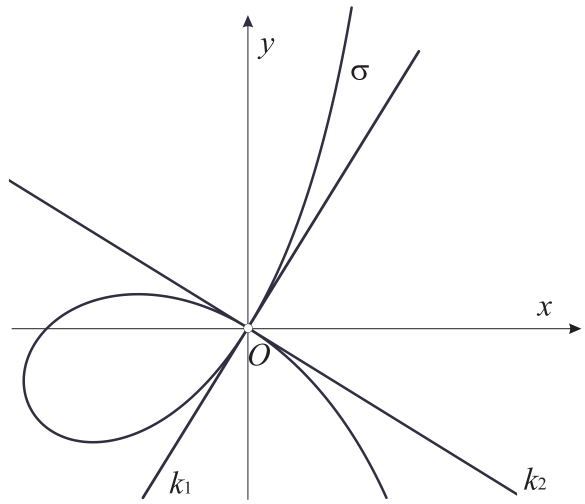

Рис. 2: Косая строфоида.

3.2.1 Связанные точки

Пусть S — строфоида евклидовой плоскости. Две вещественные или комплексно сопряженные точки Q и Q' строфоиды S, отличные от узла O, называются *связанными* относительно S если и только если прямые (QO) и $(Q'O)$ гармонически разделяют две касательные k_1 и k_2 в узловой точке O. В случае двух вещественных точек (Q, Q') касательные k_1 и k_2 служат биссектрисами угла QOQ'.

Лемма 3.2. *Если две различные вещественные или комплексно сопряженные точки Q и Q' строфоиды S являются связанными относительно S, то прямая (QQ') является касательной к параболе P, которая является негативной подерой строфоиды S относительно ее узла O. И обратно, для каждой касательной k параболы P точки пересечения t с S, за исключением педальной точки на t, являются связанными относительно S.*

Лемма 3.3. *Строфоида однозначно определяется узлом O и парой (Q, Q') связанных точек, при условии, что эти три точки не являются коллинеарными.*

3.2.2 Строфоиды как геометрические места точек

Строфоиды могут быть рассмотрены как различные множества точек в евклидовой плоскости с заданными геометрическими свойствами. Здесь мы приведем одно из основных свойств строфоиды (см. [17, 18]).

Теорема 3.1. *Для заданных неколлинеарных точек A, A' и N множество точек X таких, что прямая XO делит пополам угол между прямыми XA и XA'*

является строфоидой S *с узлом* O *и со связанными точками* A, A'. *Строфоида* S *имеет это свойство относительно любой пары* (A, A') *связанных точек, и это свойство выполняется также, когда* A *бесконечно удаленная точка плоскости. Биссектрисы второго угла между прямыми* XA *и* XA' *касаются касательной к параболе* P, *которая является негативной подерой строфоиды* S *относительно узла* O. *Строфоида* S *распадается тогда и только тогда, когда* $\bar{NA} = \bar{NA'}$. *В этом случае указанное множество точек* X *состоит из окружности* $AA'N$ *и прямой ее диаметра, ортогонального к* (AA').

Следствие 3.1. *Фокусы всех коник в пучке, которые определяются двумя заданными элементами прямых* (T_1, t_1) *и* (T_2, t_2) *в допустимом положении расположены на строфоиде* S *с узлом* $K := t_1 \cap t_2$ *и с* (T_1, T_2) *в виде пары связанных точек. Для каждого вписанного эллипса или гиперболы два действительных фокуса, а также два комплексно сопряженных фокуса, являются связанными точками фокуса на строфоиде* S. *Фокальная кривая строфоиды* S *остается неизменной, когда* T_1 *и* T_2 *заменяются любыми другими парами связанных точек на* S, *в то время как* P *фиксирована.*

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Розендфельд, Б.А. Апполоний Пергский/ Б.А. Розендфельд. М. : МЦНМО, 2004, 176 с.

2 Аньези, М. Верзьера Аньези [Электронный ресурс]/ М. Аньези// Электронная библиотека [Электронный ресурс] URL: https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/1009267 (Дата обращения: 24.05.2018). Загл. с экрана. Яз.рус.

3 Смогоржевский, А.С. Справочник по теории плоских кривых третьего порядка/ А.С. Смогоржевский, Е.С. Столова. М.: ФИЗМАЛТИТ, 1961, 271 с.

4 Cayley, A. Memorie sur les courbes du 3 orde/ A. Cayley// Journ. des math. pur. et appl., 9, 1844, С. 285-293.

5 August, F. Ein Steinerscher Satz üer Krümmungskreise/ F. August// Journ. für reine u. ang. Math., 68, 1868, С. 235-261.

6 Савелов, А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения/ А.А. Савелов. М.: ФИЗМАЛТИТ, 1960, 296 с.

7 Шапуков, Б.Н. Дифференциальная геометрия и основы тензоного анализа/ Б.Н. Шапуков. Казанский Государственный университет С. 7-41.

8 Clebsch, A. Über die Singularitäten algebraischer Kurven/ A. Clebsch Ibid., 64, 1865, С. 98-100.

9 Андреев, К.А. О геометрических соответствиях в приминении к вопросу о постороении кривых линий/ К.А. Андреев. Москва, 1879.

10 Ball, W. W. Rouse, On Newton's classification of cubic curves/ W. W. Rouse Ball. Proc. of Lond. Math. Soc., 22, 1891, С. 104-143.

11 Hayashi, T. Notes on algebraical plane curves/ T. Hayashi// Toh. Math. Journ., 2, 1912, С. 100-107.

12 Durège, H. Die ebene Kurven 3 Ordnung/ H. Dugère. Leipzig, 1871.

13 Salmon, G. Traitè de gèomètrie analytique Courbes planes/ G. Salmon. Paris, 1884.

14 Steiner, J. Aufgaben und Sätze bezüglich auf die vorstehende Abhandlung/ J. Steiner. Ibid., 47, 1854, C. 106-108.

15 Sporer, B. Über die besondere Transformation algebraischer Kurven und damit in Verbindeng stehende Sätze J. Steiners/ J. Steiner. Ibid., 36, 1891, C. 339-348.

16 Fouret, G. Démonstration et applications d'un theoreme de Liouville sur l'emination/ G. Fouret. Nouv. ann. Math., 9, 1890, C. 258-288.

17 Stachel, H. Strophoids are auto-isogonal cubics/ H. Stachel Slovak// Journal for Geometry and Graphics, 12/24, 2015, C.45-59.

18 Stachel, H. Strophoids, a family of cubic curves with remarkable properties/ H. Stachel// Journal of Industrial Design and Engineering Graphics, 10, 2015, C.65-72.

19 Андреев, К.А. О геометрическом преобразовании плоских кривых/ К.А. Андреев. Харьков, 1875.

20 Вельмин, В.П. О кривых линиях третьего порядка/ В.П. Вельмин. Киев, 1906.