

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем  
наименование кафедры

**Фрактальные объекты в динамике неоднозначных отображений**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 431 группы

направления 09.03.02 «Информационные системы и технологии»  
код и наименование направления (специальности)

Факультета нелинейных процессов

наименование факультета, института, колледжа

Елистратова Андрея Алексеевича

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

доцент кафедры ФОС, к.ф.-м.н.

должность, уч. степень, уч. звание

Д.В. Савин

подпись, дата

инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

должность, уч. степень, уч. звание

А.А. Короновский

подпись, дата

инициалы, фамилия

Саратов, 2018 год

**Введение.** Численные методы решения нелинейных уравнений широко используются в науке и технике, поэтому их исследование представляет интерес. Одним из наиболее простых и широко распространённых методов является метод Ньютона, который можно применять как для решения одномерных, так и многомерных нелинейных уравнений. Как известно, метод Ньютона довольно быстро сходится, однако задача определения областей его глобальной сходимости является в большинстве случаев довольно нетривиальной. Так, в применении к решению уравнений на комплексной плоскости области глобальной сходимости при решении квадратных уравнений определяются довольно просто, в то время как уже для уравнения 3-ей степени существует т.н. проблема Кэли [1], впервые сформулированная Артуром Кэли ещё в XIX веке [2] – проблема описания границ областей на комплексной плоскости при старте из которых метод Ньютона сходится к различным корням уравнения. Если рассматривать итеративный процесс метода Ньютона как дискретное отображение, проблему Кэли можно рассматривать как задачу о поиске границ бассейнов притяжения сосуществующих в этом отображении устойчивых точек — корней решаемого уравнения. Известно, что для кубического уравнения эта граница является фрактальной, и представляет собой т. н. «фрактал Ньютона», являющийся одним из эталонных примеров фракталов, возникающих в теории динамических систем, и вошедший в многочисленные учебники и книги по теории фракталов [1, 3 и др.].

В то же время известно, что, наряду с обычным методом Ньютона при решении уравнений в ряде случаев уместно применять т. н. «ослабленный» метод Ньютона — модификацию исходного метода, состоящую в добавлении отличного от 1 постоянного множителя в слагаемое, определяющее расстояние между  $n$ -м и  $(n+1)$ -м приближениями к корню. С другой стороны, введение такого множителя позволяет рассматривать метод Ньютона как итеративный процесс

метода Эйлера для некоего дифференциального уравнения. Если же, как говорилось ранее, подходить к этой задаче с позиций теории динамических систем, такую модификацию метода Ньютона (или Эйлера) можно рассматривать как параметризацию исходного отображения неким дополнительным параметром. Очевидно, при непрерывном его изменении устройство фазового пространства, и, в частности, структура границ бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов такой системы будет также претерпевать какие-либо плавные изменения либо бифуркации. При этом очевидно, что полезным инструментом для количественной оценки изменений, происходящих в структуре фазового пространства, может являться расчет фрактальной размерности границ бассейнов притяжения.

В настоящее время существует довольно большое количество работ, имеющих дело с изучением глобальной сходимости итеративных методов решения уравнений, в частности, полиномиальных, с позиций и в рамках подходов теории динамических систем. Не претендуя на полноту обзора, приведем здесь некоторые примеры, относящиеся к изучению сходимости модификаций метода Ньютона, как для одномерных [4, 5], так и для комплексных уравнений [6 – 9], не говоря уже про многочисленные более сложные итеративные методы [10 – 12]. Однако, как это ни удивительно, систематическому исследованию зависимости фрактальной размерности границ бассейнов притяжения корней от параметров метода не уделяется должного внимания — авторы, как правило (если вести речь о работах, связанных с численным исследованием динамики системы), фокусируются на построении структуры фазовой плоскости (и, в ряде работ, расчетах фрактальной размерности границ) в каких-либо определённых частных случаях, либо на изучении зависимости аттракторов отображения от параметра метода (например, в [5] для одномерного метода Ньютона и в [9] - для комплексного, причем при комплексификации параметра метода). В то же время,

как подчеркивалось выше, проведение такого исследования представляется довольно интересным.

Таким образом, целью настоящей работы является изучение трансформаций фрактальных объектов, возникающих на фазовой плоскости нелинейных динамических систем – в частности, границ бассейнов притяжения корней кубического уравнения в комплексных переменных при решении его модифицированным («ослабленным») методов Ньютона – а также исследование поведения их фрактальной размерности в зависимости от изменения параметров.

Работа содержит 3 главы:

- Теория – приведены основные сведения о теории. Приведены общие сведения о множестве Жюлиа, фрактале Ньютона, а также основные выкладки, использующиеся далее в ходе работы.
- Полученные объекты – приведены изображения полученных репеллеров и аттракторов, обсуждается их структура.
- Подсчет фрактальной размерности Минковского для полученных объектов – приведены графики зависимости фрактальной размерности от параметра ослабленного метода Ньютона.

**Основное содержание работы.** В данной работе мы будем исследовать простой известный случай возникновения фрактальных границ бассейнов притяжения – границы областей притяжения корней кубического уравнения вида (1):

$$z^3 + c = 0 \quad (1)$$

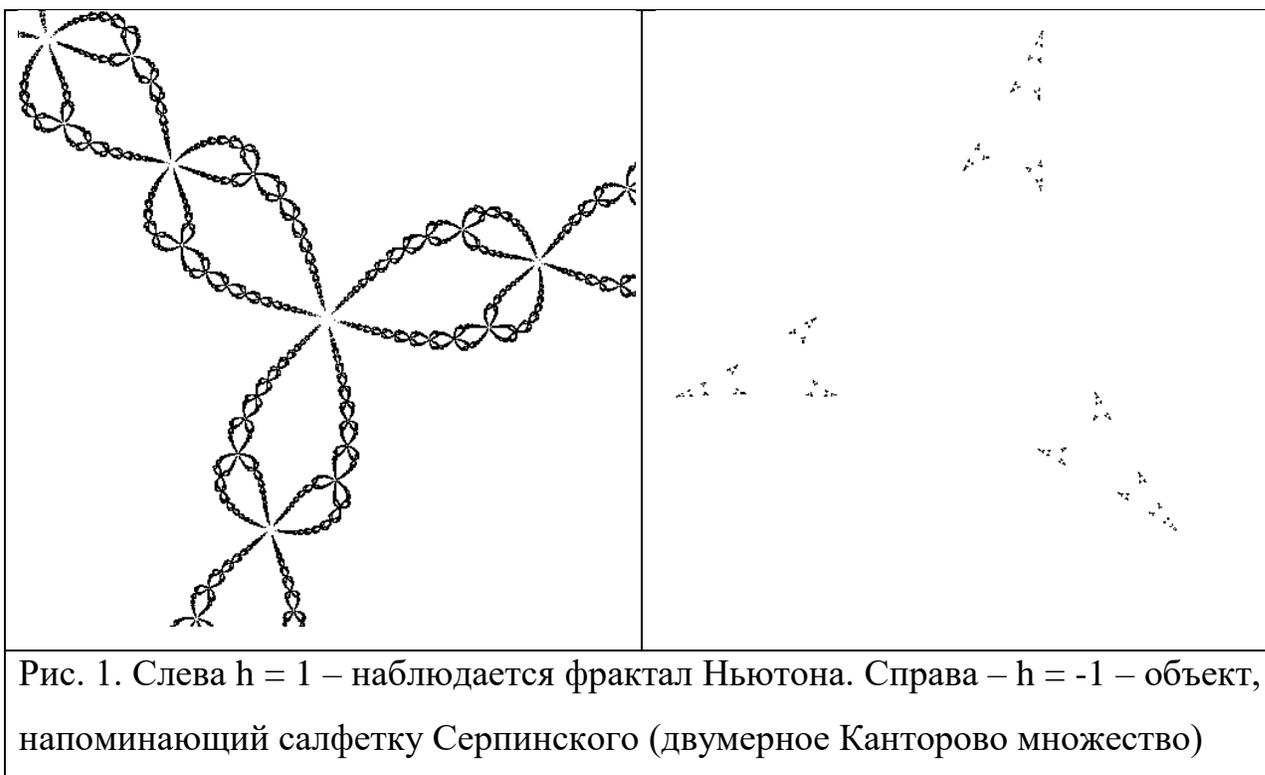
Для численного поиска корней этого уравнения можно применить метод Ньютона. Аттрактором итеративного процесса метода будут являться 3 точки на комплексной плоскости, а репеллером – искомые нами границы областей притяжения. Следовательно, обратив итерационный процесс метода Ньютона,

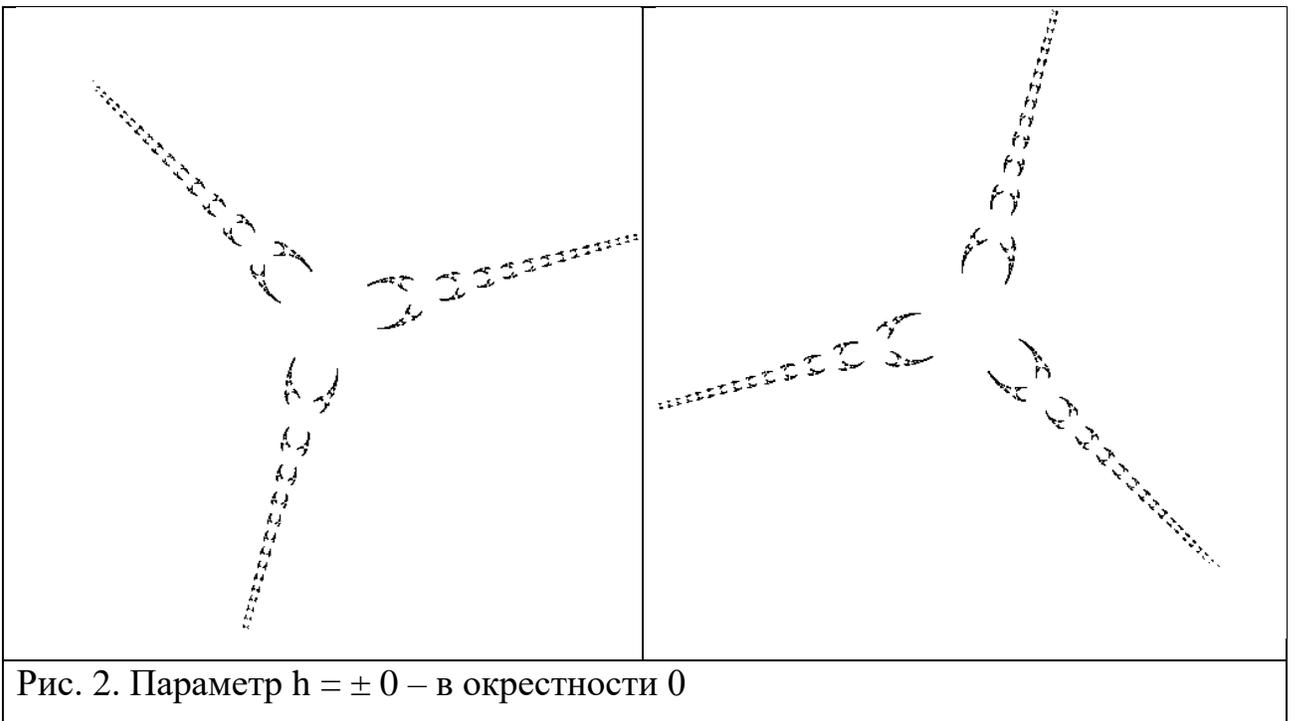
мы приходим к множеству точек, являющемуся репеллером. Для построения объектов будет использоваться уравнение (2), полученное путем применения ослабленного метода Ньютона к уравнению (1):

$$(3-h)z_n^3 - 3z_n^2 z_{n+1} - ch = 0 \quad (2)$$

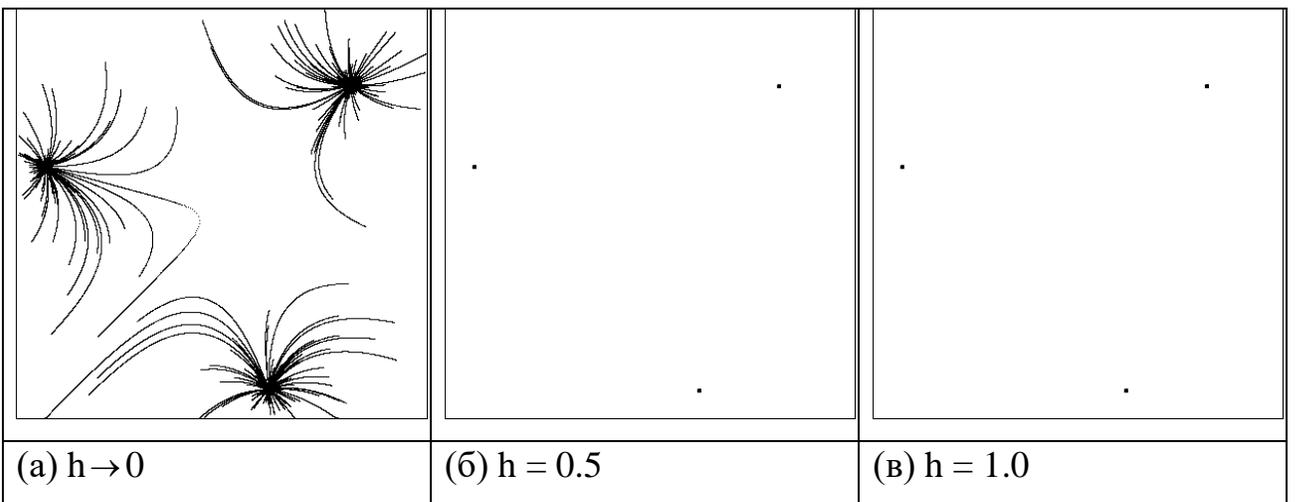
Здесь  $h$  – это параметр ослабленного метода Ньютона. Изменяя его, будем исследовать динамику изменения структуры получаемых границ областей притяжения корней уравнения (1).

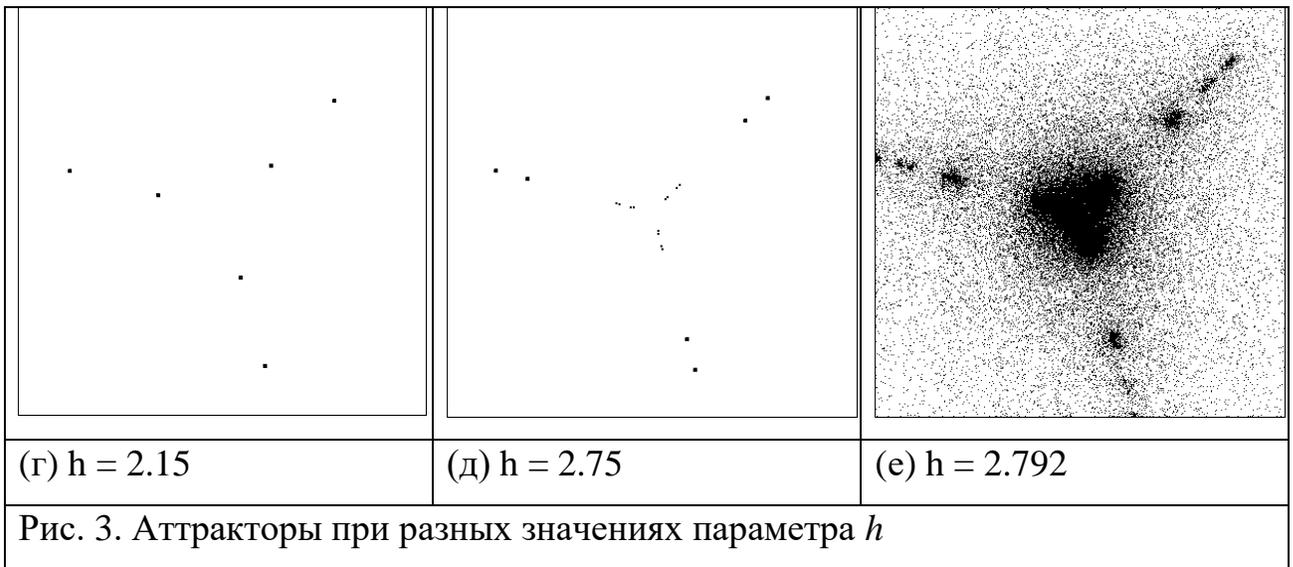
Попытаемся построить репеллеры полученной нами системы (2) при значениях  $h$  в промежутке  $[-1, 10]$ .





Теперь построим аттракторы системы. Для этого будем решать уравнение (2) относительно  $z_{n+1}$ , а не  $z_n$ . Аттракторами в данном случае являются корни уравнения. В окрестности точки 0, из-за малости параметра  $h$  наблюдаются, при тех же временах переходного процесса, участки траекторий, сходящиеся к устойчивым узлам, что говорит о замедлении процесса сходимости.





Также, для отображения вида:

$$z_{n+1} = \frac{(3-h)z_n^3 - ch}{3z_n^2} \quad (3)$$

построим бифуркационное дерево для исследования периодичности. По оси абсцисс отложены значения параметра  $h$ , по оси ординат – значения действительной части  $z$ . На построенном дереве (рис.4) отчетливо видны циклы различной периодичности, хаос, а также островки периодичности внутри хаотических областей.

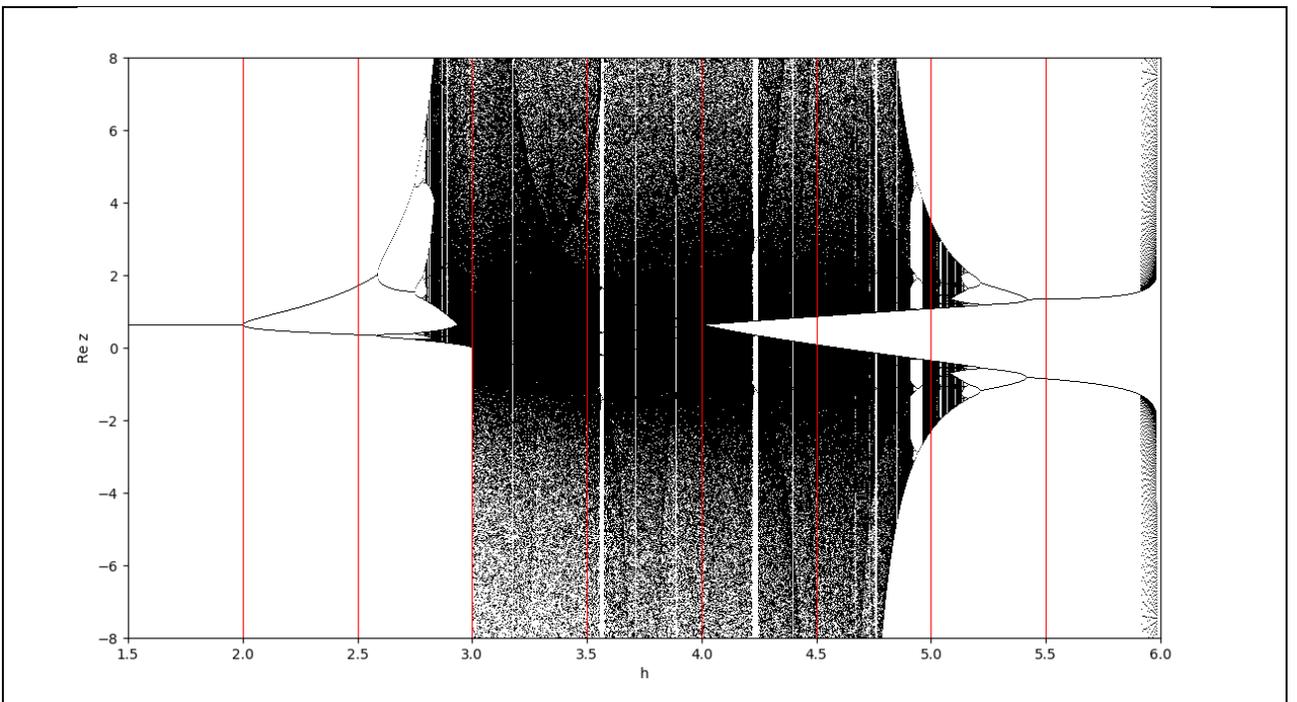


Рис. 4. Бифуркационное дерево для параметра  $h$  в пределах [1.5; 6]

Для получения некоей численной меры изменения структуры объекта рассчитаем зависимость фрактальной размерности от параметра  $h$ .

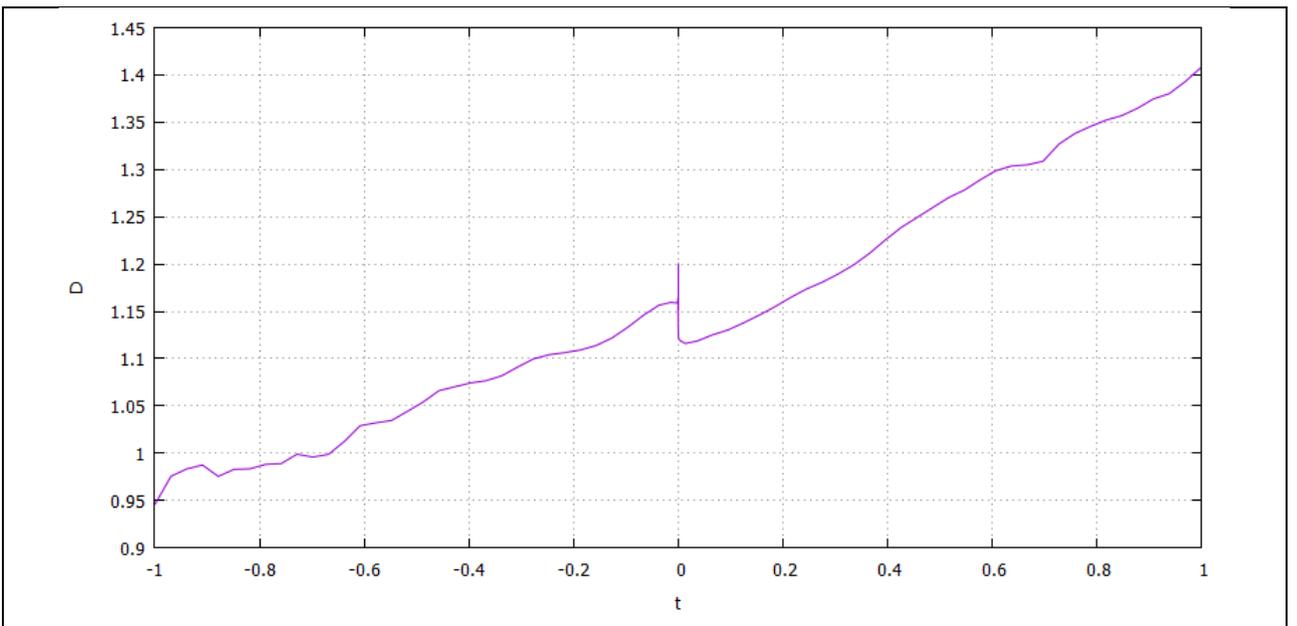


Рис. 5. Аппроксимированный график размерности [-1, 1]

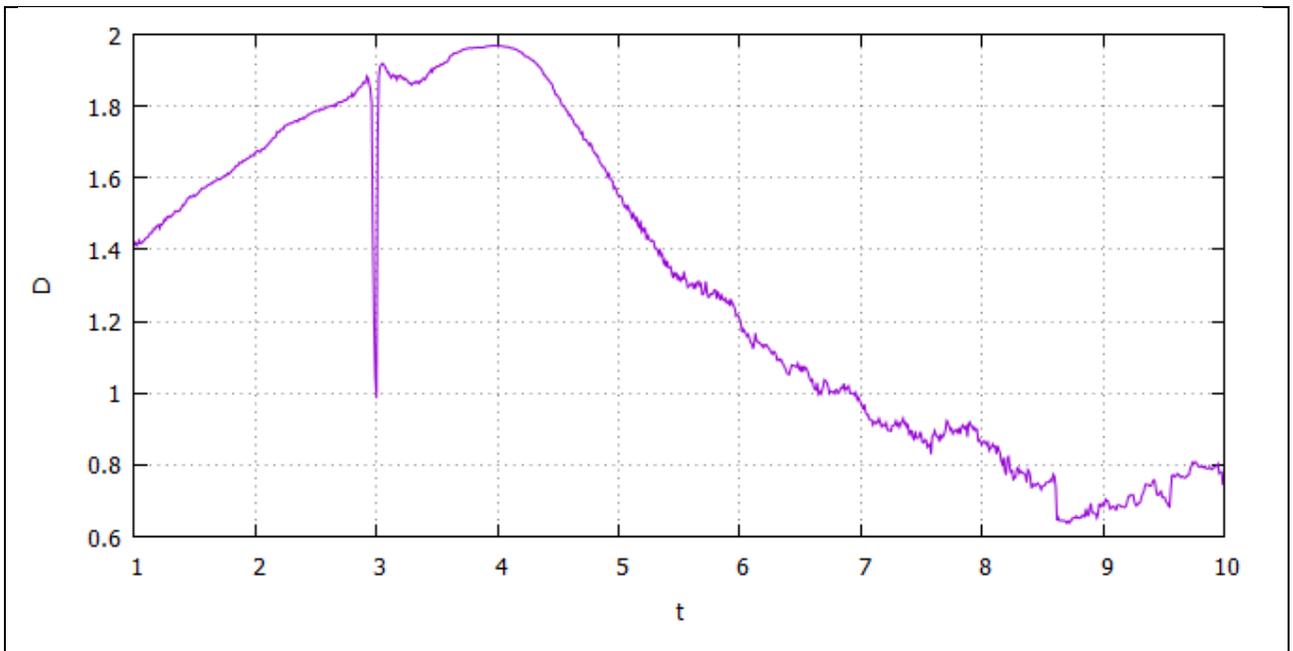


Рис. 6. Неаппроксимированный график размерности [1, 10]

Из построенных графиков можно сделать некоторые выводы.

- В окрестности  $h = 0$  (рис. 5) явно виден скачок значения фрактальной размерности, что говорит о фазовом переходе, возникающем в данной точке.
- В окрестности значения  $h = 3$  наблюдается (рис. 6) стремление значения размерности к единице, что является известным значением фрактальной размерности для кривой (в нашем случае, окружности).
- Значение фрактальной размерности почти достигает величины 2 в окрестности  $h = 4$  (рис. 6), что соответствует области хаоса, как это можно видеть на бифуркационном дереве (рис. 4).
- При  $h > 7$  значение фрактальной размерности падает ниже единицы, что вполне соответствует тому, что объект вырождается в пыль при больших значениях  $h$ .

**Заключение.** Была подробно рассмотрена проблема Кэли для обобщенного («ослабленного») метода Ньютона в контексте кубического уравнения в комплексных числах. Был произведен переход к системе итерируемых функций

и построение бассейнов притяжения корней. Было подробно рассмотрено поведение бассейнов притяжения при различных значениях параметра метода  $h$ , в частности, была изучена трансформация объекта при переходе значения через точку 0. Также была подсчитана фрактальная размерность полученных объектов. Было показано, что значение фрактальной размерности совершает скачок при фазовом переходе, возникающем при переходе значения параметра  $h$  через точку 0.

#### **Список источников:**

1. Красота фракталов: Образы комплекс. динам. систем / Х.-О. Пайтген, П. Х. Рихтер / ISBN 5-03-001296-6;
2. The Newton-Fourier Imaginary Problem / Cayley A. / 1879, Amer. J. Math II: 97.
3. Фракталы и мультифракталы / Божокин С. В., Паршин Д. А. / Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 128 с.;
4. Convergence of a Relaxed Newton's Method for Cubic Equations / J. B. Mclaughlin / Computers Chem. Engng, Vol. 17, No. 10, pp. 97-983, 1993;
5. Real Dynamics for Damped Newton's Method Applied to Cubic Polynomials / Ángel Alberto Magreñán, José Manuel Gutiérrez / Journal of Computational and Applied Mathematics 275, 527-538 (2015);
6. On the Iteration of a Rational Function: Computer Experiments with Newton's Method. / James H. Curry, Lucy Garnett, and Dennis Sullivan / Commun. Math. Phys. 91, 267-277 (1983);
7. Fractal Basins of Attraction Associated with a Damped Newton's Method / Bogdan I. Epureanu, Henry S. Greenside / SIAM Review Vol. 40, No. 1 (Mar., 1998), pp. 102-109;

8. Attracting Cycles for the Relaxed Newton's Method / Sergio Plaza, Natalia Romero / Journal of Computational and Applied Mathematics 235 (2011) 3238–3244;
9. Measures of the Basins of Attracting n-Cycles for the Relaxed Newton's Method / J.M. Gutiérrez, L.J. Hernández, Á.A. Magreñán, and M.T. Rivas. / S. Amat, S. Busquier (eds.), Advances in Iterative Methods for Nonlinear Equations, SEMA SIMAI Springer Series 10 (2016);
10. Generalization of Newton's Methods / William J. Gilbert. / Fractals, v. 9, No. 3, 2001, pp. 251-262;
11. Julia Sets of Generalized Newton's Method / Xingyuan Wang, Tingting Wang / Fractals, Vol. 15, No. 4 (2007) 323–336;
12. Numerical Properties of Different Root-Finding Algorithms Obtained for Approximating Continuous Newton's Method / José M. Gutiérrez / Algorithms 2015, 8, 1210-1218;