МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Н.И. ЛОБАЧЕВСКИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ В РОССИИ

**Материалы Международного форума
по математическому образованию,
посвященного 225-летию Н.И. Лобачевского**

IFME – 2017

Казань, 18–22 октября 2017 г.

Том 2

**КАЗАНЬ
2017**

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
Н11

Н11 **Н.И. Лобачевский и математическое образование в России:** материалы Международного форума по математическому образованию, 18–22 октября 2017 г. (XXXVI Международный научный семинар преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов на тему «Н.И. Лобачевский и математическое образование в России», VII Международная научно-практическая конференция «Математическое образование в школе и вузе: теория и практика (MATHEDU – 2017)». / отв. ред. Л.Р. Шакирова. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017. – Т. 2. – 278 с.

ISBN 978-5-00019-871-1(Т2)
978-5-00019-869-8

В сборнике представлены материалы Международного форума по математическому образованию, посвященного 225-летию Н.И. Лобачевского, включающего следующие научные мероприятия: XXXVI Международный научный семинар преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов на тему «Н.И. Лобачевский и математическое образование в России», VII Международная научно-практическая конференция «Математическое образование в школе и вузе: теория и практика (MATHEDU – 2017)». Форум посвящен обсуждению достижений и результатов исследований в области математического образования в высших учебных заведениях, школах и техникумах, колледжах, училищах, институтах повышения квалификации работников образования, региональных методических центрах и межшкольных методических центрах.

Сборник состоит из двух томов: первый том содержит материалы тезисов пленарных докладов и секций: «Исторические предпосылки, тенденции и особенности развития математического образования в России», «Научное и педагогическое наследие Н.И. Лобачевского», «Анализ и обобщение теоретических и практических, традиционных и инновационных подходов к модернизации математического образования», «Научно-методическое обеспечение качества подготовки современного учителя математики в соответствии с требованиями новых образовательных стандартов»; второй том – секций: «Обмен технологиями, материалами, опытом работы по обучению математике в общеобразовательных учреждениях, университетах, педагогических вузах», «Практика математического образования за рубежом», «Современные информационные технологии в преподавании математики».

Сборник предназначен для преподавателей, научных работников, учителей, аспирантов, соискателей, магистров, студентов, всех, кто занимается исследованиями в системе математического образования.

Материалы сборника публикуются в авторской редакции.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-00019-871-1(Т2)
978-5-00019-869-8

СОДЕРЖАНИЕ

УВАЖАЕМЫЕ КОЛЛЕГИ!

В современном мире неуклонно повышается роль математики и математического образования. В Концепции развития российского математического образования отмечается, что «математика может стать национальной идеей России XXI века и математическое образование должно явиться предметом государственной программы». Математика лежит в основе всех современных технологий и научных достижений, она является одним из основных компонентов экономики. Математической деятельностью является создание современных информационных и коммуникационных технологий. Математика – это основное средство развития логического и пространственного мышления учащихся, моделирования объектов реальной действительности. В настоящее время математическая грамотность является обязательным элементом культуры, социальной, личной и профессиональной компетентности. Математическое образование – это задача государственной важности.

В России всегда была традиционно сильная система математического образования. В последние годы в ней наблюдаются некоторые изменения, обусловленные рядом объективных и субъективных причин. В ее дальнейшем развитии заинтересована вся математическая общественность России: от ученых-теоретиков до учителей-практиков. Организованный Институтом математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского федерального университета Международный форум по математическому образованию имеет своей целью объединение творческих сил учителей, преподавателей вузов, методистов-математиков для обсуждения проблем и дальнейших перспектив развития математического образования.

Форум объединяет на одной площадке сразу три значимых мероприятия: XXXVI Международный научный семинар преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов; VII Международную научно-практическую конференцию «Математическое образование в школе и вузе: теория и практика» (MATHEDU-2017); VII Республиканский семинар учителей математики. Форум посвящен 225-летию со дня рождения выдающегося ученого-геометра, создателя неевклидовой геометрии, в прошлом (1827-1846) ректора Казанского университета Н.И.Лобачевского. В связи с юбилеем 2017 год объявлен в Казанском федеральном университете Годом Лобачевского.

2017 год является юбилейным и для постоянно действующего Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов (научный руководитель – А.Г. Мордкович), который ежегодно проходит в разных городах России уже 30 лет. Казанский семинар посвящен теме «Н.И. Лобачевский и математическое образование в России».

В настоящий сборник вошли статьи и тезисы ученых и преподавателей высших учебных заведений, учителей школ, гимназий, лицеев, колледжей, аспирантов и студентов по актуальным проблемам математического образования.

Надеюсь на успешную работу Форума.

Александр Григорьевич Мордкович,
доктор педагогических наук, профессор,
Заслуженный деятель науки РФ,
Лауреат премии Президента РФ в области образования

СЕКЦИЯ 5

ОБМЕН ТЕХНОЛОГИЯМИ, МАТЕРИАЛАМИ, ОПЫТОМ РАБОТЫ ПО ОБУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКЕ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЯХ, УНИВЕРСИТЕТАХ, ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ВУЗАХ

УДК 372.851

ОБРАЩЕНИЕ ЗАДАЧ КАК ПРОДУКТИВНЫЙ СПОСОБ ОБОБЩЕНИЯ ЗНАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

Абрамова О.М., кандидат педагогических наук, доцент кафедры физико-математического образования физико-математического факультета,
Арзамасский филиал Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, г. Арзамас
olesia144@mail.ru

Аннотация. В статье представлена одна из задачных конструкций, зарекомендовавших себя в практике математического образования – обращённые задачи, предназначенные для лучшего усвоения школьниками взаимосвязей величин, характеризующих задачную ситуацию, а также раскрывается образовательная ценность обращения задач как одного из приёмов дополнительной работы над задачей, способствующей развитию креативности обучаемых, вовлечению их в творческую математическую деятельность, как на уроке, так и внеурочное время.

Ключевые слова: математические задачи, гибкость мышления, обращение задачи, обращённые и обратные задачи, современные технологии обучения, процедура обращения.

ADDRESS OF TASKS AS PRODUCTIVE WAY OF GENERALIZATION OF KNOWLEDGE ON MATHEMATICS

O.M. Abramova, candidate of pedagogical sciences, associate professor of physical and mathematical formation of physical and mathematical faculty,
Arzamas branch of National research N.I. Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Arzamas
olesia144@mail.ru

Abstract. One of the zadachnykh of the designs which have proved in practice of mathematical education – the turned tasks intended for the best assimilation by school students of interrelations of the sizes characterizing a zadachny situation is presented in article and also the educational value of the address of tasks as one of methods of additional work on the task contributing to the development of creativity of trainees, their involvement in creative mathematical activity as at a lesson, and after hours reveals.

Keywords: the mathematical tasks, flexibility of thinking, the address of a task turned and the return problems, modern technologies of training, the procedure of the address.

В процессе подготовки к занятиям учителю приходится постоянно решать вопрос по подбору задач, которые наилучшим образом отвечают поставленным образовательным целям. Не случайно, А.М. Гольдман и Л.И. Звавич обращают внимание на то, что «одна задача, сама по себе мало чего стоит»[4] и для достижения какой-либо образовательной цели необходима их совокупность. От успешного решения этого вопроса, полагают они, в большей степени зависит качество и каждого урока математики, и всего математического образования школьников. В связи с этим сегодня важно говорить не об отдельных развивающих задачах, которые эпизодически используются учителем на уроках математики, а уже о специальных задачных конструкциях, таких как окрестности, циклы, совокупности, системы, серии и др., которые способствуют математическому развитию обучающихся.

В настоящее время в школьном математическом образовании наблюдается тенденция роста изменений, которые касаются практически всех его аспектов. Психологи, учителя, методисты, ученые-математики ведут дискуссии по проблемам содержания и методов обучения, а также количества часов, отводимых на изучение математики, необходимости и важности активного внедрения в практику работы школ специализированных и профильных классов, положительных и отрицательных аспектов введения ЕГЭ в систему среднего школьного образования и т.п. Неоспорим тот факт, что многие из проблем, обсуждающихся в этой сфере, действительно заслуживают серьёзного внимания, конкретных действий по претворению их в жизнь. Не анализируя весь комплекс обсуждаемых вопросов, остановимся на одном из них.

Какая бы реформа математического образования не осуществлялась, в какое бы время она не проводилась, всегда в достаточной степени остро встаёт проблема, которая является одной из важнейших и труднейших для школьного математического образования. Это проблема обучения учащихся составлению математических задач, в частности обращенных задач. Вообще говоря, дело ведь не только в том, сколько часов в школе отводится на изучение математики, есть ли профильное или специализированное обучение или его нет, дело ещё и в том, чему школьники учатся на уроках математики.

Самостоятельное составление задач является сложным и вместе с тем интересным процессом. Когда обучаемый решает готовые задачи, он редко задумывается над вопросом: как они появились и кто их составил? И, очевидно, не подозревает, что сам может их придумывать, а ведь в жизни для достижения намеченной цели важно самому уметь подобрать оптимальные величины, учесть их зависимости, неизвестные факторы, самостоятельно сформулировать вопросы и проблемы и, кроме того, решить их. Простота решения подобных задач напрямую зависит от самого субъекта, как он определил исходные данные, их взаимосвязь и сформулировал конечную цель.

В исследованиях П.М. Эрдниева неоднократно подчеркивает значимость и важность самостоятельного творчества учащихся. Приведены не только всевозможные творческие задания данного характера, а также отмечается, что самостоятельное составление и решение таких задач обучаемыми запоминается полнее и прочнее, чем простое решение задач. Составленную самим задачу решить легче, нежели готовую чужую задачу, продукт мысли другого лица [7, с.73]. Тем самым учителю важно знать и использовать в своей практике упражнения для обучения школьников самостоятельному составлению задач.

Л.М. Фридман определил составление задач как одно из очень мощных средств обучения учащихся решению задач[6]. По его мнению, для составления задач необходимо основание. В качестве таких оснований автор указывает три: какой должна быть задача (по определенному разделу, простая, по сюжету и т.д.); что должна содержать задача (определенный объект, вопрос, соотношение и т.д.); какими свойствами должна обладать задача (должна иметь определенное решение, аналогична ранее решенной задаче, обратной к решенной и т.д.). Второе и третье основания являются уточнениями первого. Без наличия оснований нельзя составить задачу. Основание может быть очень жестоким или, наоборот, достаточно свободным.

Общепринятая ныне система обучения математике основана преимущественно на аналитических упражнениях. Современные школьные учебники по математике содержат огромное количество задач, требования которых, как правило, не отличаются разнообразием: «Решите...», «Вычислите...», «Найдите…», «Докажите...» и т.п. Для школьников они обыденны и не вызывают у них интереса, чувства азарта, жажды узнать что-то новое, самостоятельно поучаствовать в процессе составления задач.

Решение подобных задач способствует лишь формированию алгоритмической культуры мышления, но никак не развитию творческих способностей обучаемого. Сказанное совершенно не преуменьшает образовательной ценности задач, представленных в учебных пособиях, а только подчеркивает необходимость расширения потенциалов школьного курса математики для развития интуиции, гибкости мышления, творческих способностей школьников за счет привлечения задач, нестандартных с методической точки зрения. К числу последних можно отнести обращенные задачи.

Дело в том, что традиционно в методике математики закрепился один термин для всех задач, получаемых в результате реализации частичного или полного обращения элементов условия и требования прямой задачи - «обратная задача», однако мы не можем согласится с этим. Обусловлено это прежде всего тем, что этим определением обозначают две связанные между собой задачи, но всё же неодинаковых. Было бы, пожалуй, целесообразнее как-то различать эти два аспекта понятия и употреблять разные термины – «обращённая задача» и «обратная задача» [1].

Определим в рамках данной работы, что мы будем понимать под такими задачами.

Обращённой задачей будем называть задачу, получаемую из исходной, путем последовательного её видоизменения через извлечения из её условия части или даже всех данных и включения их в требование; при этом из него, соответственно, исключаются несколько или все найденные искомые и переводятся в условие. Важно, что обращённая задача станет обратной по отношению к исходной, то есть прямой, если все её условия и требования полностью поменяются местами. Таким образом, обратная задача получается в предельном случае обращения исходной задачи. Обратим внимание, что всякую обратную задачу можно назвать обращённой, обратное утверждение не верно, то есть не любая обращённая задача окажется обратной [2].

Но, несмотря на признание богатейших возможностей обращения задач, как показывает практика, этому виду деятельности в процессе обучения математике учащихся не уделяется должного внимания. Почему же учителя не используют обращение математических задач в учебном процессе? Причин этому несколько, одни сетуют на нехватку времени, другие, связывают её со сложившейся методикой обучения математике, предполагающей в основном решение целесообразно подобранных учителем задач, третьи связывают её с отсутствием методических разработок, поскольку довольно часто сами учителя не владеют методикой обращения задачи. В связи с вышесказанным в данной статье рассмотрим основные этапы процесса обращения задачи, следуя которым каждый учащийся самостоятельно или под руководством учителя сможет обращать любую математическую задачу [3].

Прежде чем обучать школьников процессу обращения задачи учитель сам должен чётко представлять основные этапы данного процесса и последовательность действий по их осуществлению.

Как же должна быть организована работа по обращению школьной математической задачи? Один из возможных путей организации подобной работы представлен ниже.

Пусть дана следующая исходная задача.

Задача 1. *Найти первый и шестой члены геометрической прогрессии, если известно, что её знаменатель равен 2, а сумма семи первых членов равна 381.*

(Ответ: $b_1 = 3$; $b_6 = 96$.)

Используя описанный приём, будем составлять новые задачи – обращённые. Для того чтобы упорядочить и облегчить процесс составления новых задач, полезно после решения исходной задачи записать поэлементный состав условия и требования этой задачи в виде числовой цепочки, присоединив к нему и найденное искомое (ответ) в следующем виде:

$$q=2 \qquad S_7=381 \qquad \boxed{b_1=3} \qquad \boxed{b_6=96}\ .$$

Следуя рекомендациям П.М. Эрдниева [7], будем заключать искомое в числовой цепочке в рамочку – это позволит школьникам более наглядно увидеть исходные и искомые элементы задачи, поскольку весь поэлементный состав задачи целостно предстает перед их глазами. А это, в свою очередь, увеличивает степень осознанности учащимися возможных вариантов образования новых обращённых задач на базе исходной. К тому же, по составленной числовой цепочке ученикам легче обнаружить и исправить допущенную ошибку, что будет способствовать развитию критичности их мышления, навыков самоконтроля.

Затем, составляются всевозможные числовые цепочки обращённых задач, в которых искомым элементом последовательно выступает каждый элемент данной задачи или их комбинация.

В результате последовательной реализации обращения исходной задачи числовые цепочки структурных элементов всех обращённых задач будут следующими:

1. $\boxed{q=2} \qquad S_7=381 \qquad b_1=3 \qquad \boxed{b_6=96}$;
2. $\boxed{q=2} \qquad S_7=381 \qquad \boxed{b_1=3} \qquad b_6=96$;
3. $q=2 \qquad \boxed{S_7=381} \qquad \boxed{b_1=3} \qquad b_6=96$;
4. $q=2 \qquad \boxed{S_7=381} \qquad b_1=3 \qquad \boxed{b_6=96}$;

5.	$\boxed{q=2}$	$S_7=381$	$b_1=3$	$b_6=96$	;
6.	$q=2$	$\boxed{S_7=381}$	$b_1=3$	$b_6=96$	;
7.	$\boxed{q=2}$	$\boxed{S_7=381}$	$\boxed{b_1=3}$	$b_6=96$	;
8.	$\boxed{q=2}$	$\boxed{S_7=381}$	$b_1=3$	$\boxed{b_6=96}$	;
9.	$\boxed{q=2}$	$\boxed{S_7=381}$	$b_1=3$	$b_6=96$	.

Далее, по полученным числовым цепочкам структурных элементов задачи можно формулировать условия и требования обращённых задач. Число без рамочки включаем в условие задачи, а число в рамочке в её требование, поскольку оно должно быть скрыто, т.е. сделано неизвестным, и для него подбираем соответствующий вопрос. Таким образом, числа, заключенные в рамочку, становятся своеобразными опорными пунктами для составления формулировок обращённых задач.

Так, выбрав в качестве неизвестного, например, знаменатель прогрессии, и включив при этом найденное искомое – первый член геометрической прогрессии в условие конструируемой задачи (см. схему 1.1), можно сформулировать следующую обращённую задачу:

Задача 1.1. *Первый член геометрической прогрессии равен 3, а сумма первых семи ее членов равна 381. Найти знаменатель прогрессии и шестой член.*

В случае, когда в качестве искомого выбрана сумма семи первых членов геометрической прогрессии, а найденный шестой её член введён в условие задачи (см. схему 1.3) можно получить уже такую обращённую задачу:

Задача 1.3. *Шестой член геометрической прогрессии равен 96, а её знаменатель равен 2. Найти первый член этой прогрессии и сумму семи первых членов.*

Аналогичным образом могут быть составлены и все остальные обращённые задачи по соответствующим числовым цепочкам.

Обратим внимание на то, что в результате обращения исходной задачи получаются не только обращённые задачи, представленные числовыми цепочками 1.1–1.8, некоторые из которых являются не разрешимыми, например 1.7, 1.8, но и разрешимая обратная задача (1.9), которая формулируется так:

Задача 1.9. *Первый и шестой члены геометрической прогрессии соответственно равны 3 и 96. Найти ее знаменатель и сумму семи первых членов.*

Такие задачи учат школьников мыслить нестандартно, открывать способы решения задачи, отрываясь от заученных формул учебника математики, приучают думать самостоятельно, принимать верные решения в короткий срок посредством обдуманных, но выполненных в свернутой форме, действий, обеспечивают благоприятное психологическое ощущение того, что задача получена самостоятельно. При решении обратной задачи, учащиеся перестраивают суждения и умозаключения, использованные при решении прямой задачи, самостоятельно, при этом преодолевая инерцию действий, осуществленных при решении прямой задачи, а это есть проявление гибкости мышления. Таким образам, в одном случае дети овладевают как новыми связями между известными им мыслями, так и новыми, более сложными формами рассуждений. В другом - возможностью одновременного восприятия задачи как единого целого со всеми ее данными и взаимоотношениями между ними, обеспечивается качественный анализ задачи, ведется осознанный поиск ее решения, обоснованный выбором арифметического или алгебраического действия, тем самым предупреждая многие ошибки в решении задач школьниками. Уместно здесь вспомнить слова Н.Г.Чеботарева: «Математическую задачу нельзя считать решенной, пока не решена или хотя бы поставлена обратная задача»[5].

Метод составления обращённых задач, является почти универсальным, т.к. его применение возможно для любых разделов математики, и всегда приводит ученика к постановке новых проблем, получению существенно иных разновидностей задач. Умение составить и решить обращенную задачу является одним из важных критериев достигнутой обучаемым глубины понимания изучаемого раздела математики.

Если на первых порах у школьников возникают затруднения по обращению математических задач, то им можно предлагать следующие задачи:

№ 1. а) Решите задачу: *Бригада трактористов вспахала в первый день* $\frac{4}{15}$ *всего поля, во второй день на* $\frac{2}{15}$ *всего поля больше, чем в первый день, а в третий день на* $\frac{1}{5}$ *всего поля меньше, чем во второй день. Какую часть поля вспахала бригада за* 3 *дня*?

б) Составьте и решите обращённую задачу с вопросом: «На какую часть поля бригада вспахала в третий день меньше, чем во второй день?».

№ 2. а) Решите задачу: *Велосипедист в первый час проехал* 13,6 *км, во второй* – 17, 5 *км. С какой средней скоростью двигался велосипедист?*

б) Составьте и решите обращённую задачу, такую, чтобы искомым выступала скорость движения велосипедиста в первый час.

№ 3. Восстановите пропущенные числа в следующей таблице 1 для вычисления площади и периметра прямоугольника:

Таблица 1

длина a	12 *м*	$\boxed{\dots м}$	15 *м*	$\boxed{\dots м}$	3 *м*	8 *м*	10 *м*	9 *м*
ширина b	6 *м*	6 *м*	$\boxed{\dots м}$	8 *м*	$\boxed{\dots м}$	9 *м*	2 *м*	$\boxed{\dots м}$
площадь $S = a \cdot b$	$\boxed{\dots м^2}$	$\boxed{\dots м^2}$	$\boxed{\dots м^2}$	1600 $м^2$	450 $м^2$	$\boxed{\dots м^2}$	20 $м^2$	21 $м^2$
периметр $P = 2a + 2b$	$\boxed{\dots м}$	22 *м*	54 *м*	$\boxed{\dots м}$	$\boxed{\dots м}$	34 *м*	$\boxed{\dots м}$	20 *м*

Таким образом, привлечение школьников к составлению обратных задач оказывает положительное влияние не только на развитие их творческих способностей, но и на повышение мотивации к изучению математики, поскольку в данном случае учащиеся перестают воспринимать себя исключительно в роли обучаемых. Они осознают, что теперь работают на более высоком уровне, и это требует от них более ответственного отношения к своей деятельности. Скорость и гибкость мышления, формируемые при решении таких задач, сослужат хорошую службу при оценке возникшей жизненной ситуации и принятии нужного решения.

Сказанное выше убеждает в необходимости и целесообразности использования обращенных задач в процессе обучения математике. Но не следует увлекаться такими задачами, всё хорошо в меру.

Резюмируя изложенное выше, можно заключить, что успех обучения математике, в конечном счете, решается органическим сочетанием традиционных методов обучения, испытанных вековым опытом учителей, с новыми, в частности, с тем методом, описанию которого посвящена данная статья.

Литература

1. Абрамова О.М. Возможности использования прямых и обратных задач в развитии гибкости мышления учащихся на уроках математики // В мире научных открытий. – 2011. – № 9.1 (21). – С. 183 – 194.
2. Абрамова О.М. О функциональных и структурных отличиях понятий обратной и обращённой задачи. – Мир науки, культуры, образования, №6(37). – Горно-Алтайск, 2012. – С.152 – 154.
3. Абрамова О.М. Окрестность обращённых задач как средство достижения полноты решения задачи в процессе обучения математике школьников // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 8 (часть 2). – С. 426–432.
4. Гольдман А.М., Звавич Л.И. Учебные серии на уроках математики // Математика в школе. – 1990. –№ 5. – С.19-22.
5. Зайкин М.И. Семантические аспекты педагогической технологии математического творчества // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2012. – № 4 (1). – С.62-65.
6. Фридман Л.М. Как научиться решать задачи: пособие для учащихся / Л.М.Фридман, Е.Н.Турецкий. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1984. – 175 с.
7. Эрдниев П.М. Методика упражнений по математике. – М., 1970. – 319 с.

УДК 511.2
УДК 511.522

ЛЕММА ″ABC″ В ИССЛЕДОВАНИИ ДИОФАНТОВЫХ РАВЕНСТВ

Агафонцев В.В, кандидат технических наук,
Псковский государственный университет, г. Псков
fon-valery-ag@yandex.ru

Аннотация. В статье доказана лемма ″ABC″ о необходимом и достаточном условии выполнения равенства $A^x + B^y = C^z$, где $A, B, C, x, y, z \in \mathrm{N}; x, y, z \geq 2; (A, B, C) = 1$. На основании следствия из леммы ″ABC″ без использования метода бесконечного спуска и леммы о кубах предложен альтернативный подход к теореме Эйлера об отсутствии решений уравнения $x^3 + y^3 = z^3$ в натуральных числах. Предполагается, что этот подход применим к любой нечётной степени $n > 3$.

Ключевые слова: лемма ″ABC″, теорема Эйлера, C-ричные системы счисления, позиционные нумерации с целочисленным основанием.

LEMMA ″ABC″ IN THE STUDY OF DIOPHANTINE EQUATIONS

V.V. Agafontsev, candidate of technical sciences,
Pskov state University, Pskov
fon-valery-ag@yandex.ru

Abstract. In this article we prove a Lemma ″ABC″ on the necessary and sufficient condition for the fulfillment of equality $A^x + B^y = C^z$, where $A, B, C, x, y, z \in \mathrm{N}; x, y, z \geq 2; (A, B, C) = 1$. On the basis of the investigation, from Lemma "ABC" without using the method of infinite descent and the Lemma about cubes offers an alternative approach to the Euler's theorem about the absence of solutions of the equation $x^3 + y^3 = z^3$ in positive integers. It is assumed that this approach is applicable to any odd degree $n > 3$.

Keywords: lemma ″ABC″, Euler's theorem, number system with base ″C″, positional numbering integer base.

Введение. Методологическим базисом, на котором построено доказательство леммы ″ABC″, являются позиционные системы счисления с *произвольным* целочисленным основанием. Под системой счисления или нумерации понимают совокупность правил для записи действительных чисел с помощью заданного конечного множества символов; такое множество называют основанием системы счисления. Каждому символу в записи числа ставится в соответствие определённый количественный эквивалент. Различают непозиционные и позиционные системы счисления. В непозиционных системах счисления количественный эквивалент каждого символа, входящего в запись числа, не зависит от позиции символа в числе. Примерами непозиционных систем являются римская нумерация и различные нумерации алфавитного типа. Главный их недостаток заключается в ограниченном диапазоне представления чисел и в сложности выполнения арифметических действий над числами. В позиционных системах счисления количественный эквивалент каждого символа, входящего в запись числа, *зависит* от позиции символа в числе. С раннего детства, обучаясь чтению, письму и счёту, мы знакомимся с величайшим достижением человеческого разума - десятичной позиционной системой счисления. Эта система, построенная на основе десяти простых в написании символов (цифр 0, 1, 2 …9), благодаря принципу их позиционности в записи чисел позволяет представлять *любые* целые и дробные числа и сравнительно легко выполнять арифметические операции над ними. Данная система пришла в арабские страны из Индии, о чём свидетельствуют слова сирийского христианского епископа Северуса Себокхта, стоявшего во главе учёной академии на Евфрате и знакомого с греческой александрийской наукой. В рукописи, датируемой 662 г. н.э., он пишет об «искусном методе индийского счисления при помощи 9 знаков, для восхваления которого нельзя найти достаточных слов» [4; С. 68]. Об индийском происхождении десятичной позиционной системы счисления свидетельствует и книга "Об индийском счёте" арабского математика аль-Хорезми (ок. 787 – ок. 850 гг. н.э.). Эта книга была переведена на латынь только в XII веке, названном «веком великих переводов» [3; С. 31]. С начала XIII века стала формироваться собственная европейская математическая культура. Одним из первых ярких её представителей был итальянский математик Леонардо Пизанский (ок. 1170-ок. 1250 гг.), известный также под именем Фибоначчи. Главный труд Фибоначчи – «Книга абака» - написана им в 1202 году. В этой книге он систематизировал сведения из арабских трудов, из античного наследия и присоединил ко всему этому собственные задачи и методы. Книга содержит пятнадцать глав. Первые пять глав посвящены арифметике целых чисел на основе новой нумерации, то есть десятичной позиционной системы счисления. Для демонстрации её преимуществ Фибоначчи приводит таблицу, в которой некоторые числа записаны римскими и здесь же «индийскими» цифрами [5; С. 261]:

MI	MMMXX	MCXI	…	MMMMCCCXXI
1001	3020	1111		4321

В главах VI и VII Фибоначчи учит действиям над смешанными числами и дробями, приводимыми к общему знаменателю с помощью нахождения наименьшего общего кратного знаменателей, чего не было у арабских математиков.

В век технической революции, связанной с созданием компьютеров и информационных технологий, большое распространение получила двоичная нумерация. Её используют в устройствах хранения и обработки информации, построенных на базе физических элементов с двумя устойчивыми состояниями. В этом случае одному состоянию ставят в соответствие 0, другому - 1. Следует отметить, что элементы с двумя устойчивыми состояниями являются наиболее простыми в части их технической реализации. Недостаток двоичной нумерации состоит в длинной записи чисел, поэтому в программной составляющей информационных технологий используют нумерации с основанием, близким к 10. В качестве такого основания обычно выбирают основание, являющееся степенью числа 2, поэтому используют восьмеричную и шестнадцатеричную нумерации. В восьмеричной нумерации – восемь символов: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; в шестнадцатеричной – шестнадцать символов: десять цифр (от 0 до 9) и шесть букв латыни: a, b, c, d, e, f. Буква ″a″ соответствует количеству 10, буква ″b″ соответствует количеству 11, буква ″c″ – количеству 12, ″d″ – 13, ″e″ – 14, ″f″ – 15.

В принципе для записи различных количественных соотношений могут использоваться нумерации с *произвольным* целочисленным основанием. В этом случае между записью числа в *S*-нумерации и количественным эквивалентом устанавливается такое соответствие:

$$\underbrace{\overline{(a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0,\, a_{-1} \ldots a_{-n})_S}}_{\text{запись числа}} = \underbrace{\boldsymbol{a}_m \cdot S^m + \boldsymbol{a}_{m-1} \cdot S^{m-1} + \ldots + \boldsymbol{a}_1 \cdot S^1 + \boldsymbol{a}_0 \cdot S^0 + \boldsymbol{a}_{-1} \cdot S^{-1} + \ldots + \boldsymbol{a}_{-n} \cdot S^{-n}}_{\text{количественный эквивалент}} = \sum_{-n}^{m} a_i \cdot S^i$$

Черта наверху левой части этого выражения в соответствии с [7; С. 11] указывает на то, что эта часть рассматривается не как произведение чисел $a_m, a_{m-1} \ldots a_{-n}$, а как запись числа символами *S*- нумерации.

Записать число в *S*-нумерации означает определить коэффициенты a_i в разложении этого числа по степеням *S* и записать эти коэффициенты в соответствии с весами *S*-ричных разрядов.

Материал и методы исследования.

Рассмотрим применение позиционных систем счисления с произвольным целочисленным основанием при исследовании диофантовых равенств вида:

$$A^x + B^y = C^z, \text{ где } A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N};\ x, y, z \geq 2.$$

Для обеспечения целостности изложения повторим с некоторыми уточнениями и существенными дополнениями полное доказательство леммы ″ABC″, ранее представленной в [1] и [2].

Л Е М М А "АВС". *Необходимое и достаточное условие выполнения равенства*

$$A^x + B^y = C^z, \tag{1}$$

в котором $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$; $x, y, z \geq 2$, $(A, B, C)=1$, *представимо триадой равенств:*

$$A^x = a_{z-1} \cdot C^{z-1} + a_{z-2} \cdot C^{z-2} + \ldots + a_1 \cdot C + a_0$$
$$B^y = b_{z-1} \cdot C^{z-1} + b_{z-2} \cdot C^{z-2} + \ldots + b_1 \cdot C + b_0$$
$$C = a_0 + b_0 = a_i + b_i + 1,$$

где $i \in [1; z-1]; a_i, b_i, a_0, b_0 \in \mathbb{N} \leq C-1; a_0, b_0 \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем правую и левую части (1) в C-ричной позиционной системе счисления; получим:

$$(A^x)_c + (B^y)_c = (10\ldots0)_c, \tag{2}$$

где число нулей в правой части выражения (2) равно **z**.

Из равенства (2) следует *необходимое* условие его выполнения. Такое условие заключается:

а) *во-первых*, в том, что C-ричная запись каждого из чисел A^x и B^y должна содержать не более, чем **z** C-ричных разрядов, поэтому числа A^x и B^y в их C-ричной записи представимы так:

$$(A^x)_c = (a_{z-1}a_{z-2}\ldots a_1 a_0)_c \tag{3}$$

$$(B^y)_c = (b_{z-1}b_{z-2}\ldots b_1 b_0)_c; \tag{4}$$

по условию $(A, B, C) = 1$, следовательно, $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$;

б) *во-вторых,* в том, что поразрядные суммы C-ричных записей правой части равенств (3) и (4) должны удовлетворять таким соотношениям:

$$(a_0)_c + (b_0)_c = (10)_c \tag{5}$$

$$(a_i)_c + (b_i)_c + 1 = (10)_c, \text{ где } i \in [1; z-1]. \tag{6}$$

Исходя из (3) и (4), учитывая позиционность C-ричной системы счисления, числа A^x и B^y в их количественном эквиваленте представимы так:

$$A^x = a_{z-1} \cdot C^{z-1} + a_{z-2} \cdot C^{z-2} + \ldots + a_1 \cdot C + a_0 \tag{7}$$

$$B^y = b_{z-1} \cdot C^{z-1} + b_{z-2} \cdot C^{z-2} + \ldots + b_1 \cdot C + b_0 \tag{8}$$

Исходя из C-ричных записей (5) и (6), переходя к их количественному эквиваленту, получим:

$$C = a_0 + b_0 = a_i + b_i + 1, \text{ где } i \in [1; z-1]. \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что выполнение равенств (7), (8), (9) является не только необходимым, но и *достаточным* условием выполнения равенства (1). Действительно, если предположить, что равенства (7), (8), (9) выполняются и сложить левые и правые части (7) и (8) соответственно, а также учесть (9), то получим равенство (1).

Примечание: доказать необходимость выполнения равенств (9) можно, руководствуясь и такими рассуждениями. Подставим в (1) выражения для A^x и B^y из (7) и (8); учтём тождество

$$C^z = (C-1) \cdot C^{z-1} + (C-1) \cdot C^{z-2} + \ldots + (C-1) \cdot C + C$$

Получим:

$$\begin{aligned} &(a_{z-1} + b_{z-1}) \cdot C^{z-1} + (a_{z-2} + b_{z-2}) \cdot C^{z-2} + \ldots + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 = \\ &= (C-1) \cdot C^{z-1} + (C-1) \cdot C^{z-2} + \ldots + (C-1) \cdot C + C \end{aligned} \tag{10}$$

Очевидно, что равенство (10) выполнимо при

$$C = a_0 + b_0 = a_i + b_i + 1, \text{ где } i \in [1; z-1].$$

Лемма "АВС" доказана.

Можно убедиться в истинности леммы "АВС", рассмотрев следующие случаи:

1) $x = y = z = 2$; например: $8^2 + 15^2 = 17^2$, $20^2 + 21^2 = 29^2$;

2) $x = y = 2, z > 2$; например: $7^2 + 24^2 = 5^4$, $44^2 + 117^2 = 5^6$, $44^2 + 117^2 = 25^3$;

3) $x = 2; y, z > 2$ или $y = 2; x, z > 2$; например: $46^2 + 3^4 = 13^3$, $2^5 + 7^2 = 3^4$;

4) $x, y > 2; z = 2;$ например: $2^3 + 1^k = 3^2$, где $k \in \mathbb{N}$; $6^3 + 5^4 = 29^2$.

Рассмотрим в качестве примера случай 3.

Для *третьего* случая $(x = 2; y, z > 2$ или $y = 2; x, z > 2)$ необходимое и достаточное условие выполнения равенства (1) в соответствии с (7), (8), (9) запишется так:

а) на примере $x = 2, y = 4, z = 3$:

$$A^2 = a_2 \cdot C^2 + a_1 \cdot C + a_0$$
$$B^4 = b_2 \cdot C^2 + b_1 \cdot C + b_0$$
$$C = a_2 + b_2 + 1 = a_1 + b_1 + 1 = a_0 + b_0$$

б) на примере $x = 5, y = 2, z = 4$:

$$A^5 = a_3 \cdot C^3 + a_2 \cdot C^2 + a_1 \cdot C + a_0$$
$$B^2 = b_3 \cdot C^3 + b_2 \cdot C^2 + b_1 \cdot C + b_0$$
$$C = a_3 + b_3 + 1 = a_2 + b_2 + 1 = a_1 + b_1 + 1 = a_0 + b_0$$

Пункту (а) удовлетворяет тройка чисел (46, 3, 13), в которой $46^2 + 3^4 = 13^3$. В этом случае

$$A^2 = 46^2 = 12 \cdot 13^2 + 6 \cdot 13 + 10; \quad a_2 = 12, a_1 = 6, a_0 = 10$$
$$B^4 = 3^4 = 0 \cdot 13^2 + 6 \cdot 13 + 3; \quad b_2 = 0, b_1 = 6, b_0 = 3$$
$$C = 12 + 0 + 1 = 6 + 6 + 1 = 10 + 3$$

Пункту (б) удовлетворяет тройка чисел (2, 7, 3), в которой $2^5 + 7^2 = 3^4$. В этом случае

$$A^5 = 2^5 = 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 2; \quad a_3 = 1, a_2 = 0, a_1 = 1, a_0 = 2$$
$$B^2 = 7^2 = 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 1; \quad b_3 = 1, b_2 = 2, b_1 = 1, b_0 = 1$$
$$C = 1 + 1 + 1 = 0 + 2 + 1 = 1 + 1 + 1 = 2 + 1$$

Подобным образом можно убедиться в истинности леммы ″АВС″ для случаев 1, 2, 4.

Следствие из леммы "ABC": *необходимое условие выполнения равенства* $A^x + B^y = C^z$, *в котором A, B, C, x, y, z* $\in \mathbb{N}$; *x, y, z* ≥ 2, *(A, B, C)*=1, *представимо равенством*

$$A^x + B^y = (C - 1) \cdot C^{z-1} + C^{z-1} \tag{11}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из необходимого и достаточного условия выполнения равенства $A^x + B^y = C^z$, представленного равенствами (7), (8), (9), ***следует:***

$$A^x + B^y = (a_{z-1} + b_{z-1}) \cdot C^{z-1} + (a_{z-2} + b_{z-2}) \cdot C^{z-2} + ... + (a_1 + b_1) \cdot C +$$
$$+ a_0 + b_0 = (C - 1) \cdot C^{z-1} + (C - 1) \cdot C^{z-2} + ... + (C - 1) \cdot C + C =$$
$$= (C - 1) \cdot C^{z-1} + C^{z-1} \tag{12}$$

То есть, представляющая собой ряд по степеням C правая часть равенства (12) с *необходимостью* должна представляться суммой двух членов: первого - $(C - 1) \cdot C^{z-1}$, являющегося старшим членом ряда, и второго - C^{z-1}, являющегося суммой всех остальных членов ряда. Что и требовалось доказать.

Результат исследования.

Перейдём к альтернативному доказательству теоремы Эйлера об отсутствии решений уравнения $x^3 + y^3 = z^3$ в натуральных числах без использования метода бесконечного спуска и леммы о кубах. В соответствии с [7; С. 11] под натуральными числами будем понимать целые положительные числа без нуля 0.

Вначале кратко о сути метода бесконечного спуска. Цитата из книги Г. Эдвардса ″Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел″ [10; С. 22]: “Метод бесконечного спуска основывается на следующем принципе. *Если из предположения, согласно которому данное положительное целое обладает данным множеством свойств, следует, что существует меньшее положительное целое с тем же множеством свойств, то ни одно положительное целое не может обладать этим множеством свойств*” (конец цитаты). Метод бесконечного спуска был открыт Ферма и применён им для доказательства отсутствия решений уравнения $x^4 + y^4 = z^4$ в положительных целых числах [10; С. 21-23]. Доказательство Ферма в трактовке [9, глава 3; С. 88], ориентированной на широкий круг читателей, начинается с предположения о том, что уравнение $x^4 + y^4 = z^4$ имеет решение в положительных целых числах X_1, Y_1, Z_1. Исследованием свойств чисел X_1, Y_1, Z_1 Ферма показал, что если бы такое гипотетическое решение действительно существовало, то существовало бы решение и для тройки меньших чисел X_2, Y_2, Z_2. Рассматривая это новое решение, Ферма показал, что если бы оно существовало, то существовало бы решение и для тройки меньших чисел X_3, Y_3, Z_3 и так далее. Таким образом, Ферма обнаружил нисходящую лестницу решений, которая теоретически могла бы продолжаться без конца, порождая всё меньшие и меньшие тройки чисел. Но числа *x, y, z* должны быть целыми положительными, следовательно, нескончаемая нисходящая лестница невозможна, так как, по предположению, должно быть наименьшее решение в положительных целых числах. Полученное противоречие доказывает, что исходное предположение о существовании целочисленного решения X_1, Y_1, Z_1 является ложным.

Доказательство теоремы об отсутствии решений уравнения $x^3 + y^3 = z^3$ в положительных целых числах было выполнено Эйлером в 1768 году [8; С. 34] и опубликовано в 1770 году [10; С. 63]. Доказательство Эйлера в изложении [8; С. 34-38] строилось на следующей лемме, называемой леммой о кубах: *если взаимно простые числа a и b обладают тем свойством, что число* $a^2 + 3b^2$ *является кубом целого числа, то существуют такие целые числа s и t, что* $a = s(s^2 - 9t^2), b = 3t(s^2 - t^2)$. Вариант доказательства этой леммы, опубликованный в 1770 году, содержал фундаментальный пробел, заключающийся в неверной идее о том, что произведение двух взаимно простых сомножителей $x + y\sqrt{-3}$ и $x - y\sqrt{-3}$ является кубом, только если кубами являются оба сомножителя [10; С. 63]. На основании письма к Гольдбаху от 4 августа 1753 года, в котором Эйлер сообщает, что ему удалось приспособить метод бесконечного спуска и доказать утверждение Ферма для показателя $n = 3$, *предполагается* наличие у Эйлера правильного доказательства леммы о кубах. В статье [6] *доказывается* возможность правильного варианта её доказательства.

Т Е О Р Е М А. *Уравнение*

$$x^3 + y^3 = z^3 \tag{13}$$

не имеет решений в ненулевых положительных целых числах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное: пусть уравнение (13) имеет хотя бы одно решение в ненулевых положительных целых числах. Пусть это решение представляется числами *A, B, C* и выполняется такое равенство:

$$A^3 + B^3 = C^3 \tag{14}$$

Числа *A, B, C* будем считать попарно взаимно простыми. Очевидно, $A \neq B, A < C, B < C$. Тогда можно записать:

$$A = C - p \tag{15}$$

$$B = C - q \tag{16}$$

Здесь p и q - натуральные числа. С учётом (15) и (16) левая часть гипотетического равенства (14) представится так:

$$A^3 + B^3 = (2C - 3p - 3q) \cdot C^2 + 3C \cdot (p^2 + q^2) - p^3 - q^3 \tag{17}$$

С другой стороны, в соответствии со следствием из леммы "АВС" *необходимое* условие выполнения равенства (14) при $x = y = z = 3$ требует выполнения такого равенства:

$$A^3 + B^3 = (a_2 + b_2) \cdot C^2 + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 =$$

$$= (C - 1) \cdot C^2 + (C - 1) \cdot C + C = (C - 1) \cdot C^2 + C^2 \tag{18}$$

Следовательно, в силу этого *необходимого* условия должны выполняться исходящие из (17) такие два равенства:

$$2C - 3p - 3q = C - 1 \tag{19}$$

$$3C \cdot (p^2 + q^2) - p^3 - q^3 = C^2 \tag{20}$$

Докажем невыполнимость равенства (19). Действительно, из него следует такое равенство:

$$C+1=3\cdot(p+q) \tag{21}$$

Исходя из свойства чёт-нечёт, все три числа *A, B, C* равенства (14) не могут быть нечётными, так как сумма или разность двух нечётных чисел чётна. Следовательно, одно и только одно из чисел *A, B, C* чётно. При этом возможны такие и только такие два случая:

- ✓ первый - числа *A, B* разной чётности, тогда число *C* будет *нечётным*;
- ✓ второй - числа *A, B* одной чётности (они *нечётны*), тогда число *C* будет *чётным*.

В первом случае, не ограничивая общности, будем считать число *A* *чётным*, а число *B* *нечётным.* Тогда, исходя из (15), число p должно быть *нечётным*, а, исходя из (16), число q должно быть *чётным*. При нечётном *C* левая часть равенства (21) представится *чётным* числом, а правая часть этого же равенства представится *нечётным* числом, чего быть не может. Следовательно, равенство (21) ***невыполнимо.***

Во втором случае (в предположении, что *A* и *B* *нечётны*, а *C* *чётно)*, исходя из (15) и (16), числа p и q должны быть *нечётными.* При чётном *C* левая часть равенства (21) представится *нечётным* числом, а правая часть этого же равенства представится *чётным* числом, чего быть не может. Следовательно, равенство (21) и в этом случае ***невыполнимо.***

Итак, предполагая выполнимость равенства (14), при всех возможных вариантах чётности-нечётности ненулевых положительных целых чисел *A, B, C* через последовательность импликаций пришли к равенству чётного и нечётного чисел, что является ***абсурдом***. Поэтому предположение о выполнимости равенства (14), как решения уравнения (13), является *ложным*. Следовательно, уравнение (13) не имеет решений в ненулевых положительных целых числах, что и требовалось доказать.

Покажем, что прийти к гипотетическому равенству (21) можно и другим путём. Представим этот путь следующей цепочкой импликаций.

1. Предположим выполнимость равенства

$$A^3+B^3=C^3\text{, где } A, B, C, n\in \mathbb{N}; (A, B, C)=1. \tag{22}$$

2. Очевидно, что A<C, B<C. Запишем:

$$A=C-p, B=C-q\text{, где } p, q\in \mathbb{N} \tag{23}$$

3. Равенство (22) представим так:

$$(2C-3p-3q)\cdot C^2+3C\cdot(p^2+q^2)-p^3-q^3=C^3 \tag{24}$$

4. Разделим левую и правую часть (24) на C^2. Для сохранения гипотетического равенства (24) выражение $3C\cdot(p^2+q^2)-p^3-q^3$ должно *нацело* делиться на C^2. Из этого следует *необходимость* выполнения таких равенств:

$$3C\cdot(p^2+q^2)-p^3-q^3=l\cdot C^2\text{, где } l\in \mathbb{N} \tag{25}$$

$$2C-3p-3q=C-l \tag{26}$$

5. С учётом (26), (25), (24) равенство (22) запишется так:

$$A^3+B^3=(C-l)\cdot C^2+l\cdot C^2 \tag{27}$$

6. С другой стороны, в соответствии со следствием из леммы ″ABC″ *необходимое* условие выполнения равенства (22) при $x=y=z=n$ *требует* выполнения такого равенства:

$$A^3+B^3=(C-1)\cdot C^2+C^2 \tag{28}$$

Следовательно, в силу этого *необходимого* условия $l=1$ и, значит, равенство (26) преобразуется в равенство (21), невыполнимость которого доказана выше.

Заключение.

На основании леммы ″ABC″, определяющей необходимое и достаточное условие выполнения равенства $A^x+B^y=C^z$, где $A,B,C,x,y,z\in \mathrm{N}; x,y,z\ge 2; (A,B,C)=1$, без использования метода бесконечного спуска и леммы о кубах предложено альтернативное доказательство теоремы Эйлера об отсутствии решений уравнения $x^3+y^3=z^3$ в ненулевых положительных целых числах. Можно предположить, что подобный подход применим к *любой* нечётной степени $n>3$.

Литература

1. Агафонцев В.В. Применение систем счисления в некоторых математических задачах // Задачи в обучении математике, физике и информатике: теория, опыт, инновации: материалы II междунар. научн.-практ. конф., Вологда, 16-18 февраля 2017г. / отв.ред. В.А.Тестов. Вологда: Изд-во Вологод. гос. ун-та, 2017. – С. 47-50.
2. Агафонцев В.В. Лемма «А, В, С» в альтернативном доказательстве теоремы Эйлера // Математика, её приложения и математическое образование (МПМО'17): материалы VI междунар. конф., Улан-Удэ, Байкал, 26 июня - 1 июля 2017г. / отв.ред. Л.И.Назарова. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2017. – С. 14-18.
3. Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж. [Dahan-Dalmédico A., Peiffer J.] Пути и лабиринты. Очерки по истории математики / пер. с фр. А.А.Бряндинской. – М.: Мир, 1986.
4. Депман И.Я. История арифметики: пособие для учителей. Изд. 2-е, испр. – М.: Просвещение, 1965.
5. История математики с древнейших времён до начала XIX столетия: в 3 т. / под ред. А.П. Юшкевича. Т.1. – М.: Наука, 1970.
6. Мачис Ю.Ю. О предполагаемом доказательстве Эйлера // Матем. заметки. – 2007. – N 82:3. – С. 395-400.
7. Мордкович А.Г., Семёнов П.В. Алгебра и начала математического анализа: учебник. 6-е изд. – М.: Изд-во Мнемозина, 2009.
8. Постников М.М. Введение в теорию алгебраических чисел. – М.: Наука, 1982.
9. Сингх С.[Singh S.] Великая теорема Ферма / пер. с англ. Ю.А.Данилова. – М.: МЦНМО, 2000.
10. Эдвардс Г. [Edwards H.] Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел / пер. с англ. В.Л.Калинина и А.И.Скопина / под ред. Б.Ф.Скубенко. – М.: Мир, 1980.

УДК 372.851

ОРГАНИЗАЦИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ ПО ФОРМИРОВАНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ

Акиндина А.С., аспирант 1 курса Института детства,
Российский государственный университет им. А.И. Герцена, г. Санкт-Петербург;
учитель начальных классов ГБОУ школа № 207 с углубленным изучением английского языка,
г. Санкт-Петербург
lime-anya@yandex.ru

Аннотация. В статье рассмотрены методы и приемы организации деятельности младшего школьника по формированию математических понятий, приведены примеры заданий, направленных на усвоение понятия «выражение» учащимися 1-2-х классов.

Ключевые слова: понятие, математика, формирование, выражение, деятельность, младший школьник.

THE ORGANIZATION OF ACTIVITY ON THE FORMATION OF MATHEMATICAL CONCEPTS AT ELEMENTARY SCHOOL

A.S. Akindina, postgraduate of 1 course, Institute of childhood,
Herzen State Pedagogical University of Russia, Saint-Petersburg;
Teacher of a primary school, school №207, Saint-Petersburg
lime-anya@yandex.ru

Abstract. The article presents the results of a research described the methods and techniques of the organization of pupil's activity for concept learning. Examples of tasks aimed at the assimilation of "expression" concept of students in 1-2 classes.

Keywords: concept, mathematics, formation, term, activity, pupil of a primary school.

Одной из приоритетных задач ФГОС НОО является «овладение базовыми предметными и межпредметными понятиями, отражающими существенные связи и отношения между объектами и процессами». В связи с этим на уроках математики важно начать формирование основных математических понятий и установление связи между ними.

Наше исследование выявило проблемы в усвоении понятий учениками 2-х и 4-х классов. Так активно используемое понятие «выражение» усвоили на среднем уровне 33% второклассников (из 75 чел.), на низком - 63%. При этом выявлены: несформированность объема понятия (не выделяли буквенные выражения); смешение понятий «выражение» и «уравнение»; ошибки при разбиении выражений на суммы и разности.

На основе анализа литературы и опыта работы мы выделили некоторые причины, препятствующие формированию у младших школьников математических понятий [1]: невозможность их «увидеть»; преобладание остенсивных определений понятий; недостаточная подготовка учителей начальных классов (теоретическая и методическая), о чем свидетельствует и результаты нашего анкетирования; невозможность передачи понятий в готовом виде, доказанная Л.С. Выготским [2]; отсутствие или недостаток разнообразных заданий в учебниках математики по многим УМК.

А.В. Усова [3] выделяет следующие аспекты в формировании понятия: усвоение его **содержания**, **объема**, существенных **связей и отношений** с другими понятиями, **умения оперировать** при решении задач.

Исходя из них и этапов формирования понятий у учащихся средней школы [4], мы выделили 2 этапа работы учителя начальных классов. Кратко охарактеризуем их (подробнее описаны в нашей статье [1]) и приведем примеры для изучения понятия «прямоугольник» во 2 классе.

1 этап – профессиональный. Для обеспечения высокого качества усвоения любого понятия, учителю нужно видеть перспективу его развития, основные этапы, «узловые точки» (А.В. Усова) процесса усвоения и уметь осуществлять его целенаправленно и осознанно.

На этом этапе в рамках нашего эксперимента мы составляли «паспорта» понятий, выполнив их логико-математический анализ. Наличие таких паспортов понятий помогло учителю устанавливать межпредметные связи процессуального характера при изучении разных предметов [5]. После такого детального рассмотрения каждого формируемого понятия был проведен следующий этап – обучающий. Теоретическая основа, выделенная в «паспортах» помогла организовать этот этап на научном уровне.

2 этап – обучающий. Он относится к работе учителя с детьми. Для организации деятельности по формированию математических понятий при проведении эксперимента мы использовали *структуру учебной деятельности и элементы технологии ее формирования*: мотивация; учебная задача; контроль; оценка; коррекция (Д.Б. Эльконин, Г.И. Вергелес [6])

Для мотивации введения новых понятий мы выделили и использовали такие приемы: связь с семантическим значением слова (например, для понятий «умножение», «прямоугольник»); выявление субъектного опыта учащихся – анализ жизненных ситуаций, требующих введения новых слов («выражение») или использующих математический термин в бытовом смысле («угол»); выявление знакомых значений многозначного слова («корень уравнения»).

Этап *принятия и решения учебной задачи* непосредственно связан с усвоением критериев, необходимых для формирования каждого понятия.

Для организации работы на этом этапе мы создали «карту изучения понятия» (рис. 1), в которой раскрыт обобщенный подход к изучению математических понятий в начальных классах. В ней на листе формата А 4 для каждого ученика названо изучаемое понятие, выделены его существенные свойства (изображены в виде «пазлов») и указаны виды заданий по его усвоению, которые для младших школьников представлены в виде плана (рис. 1).

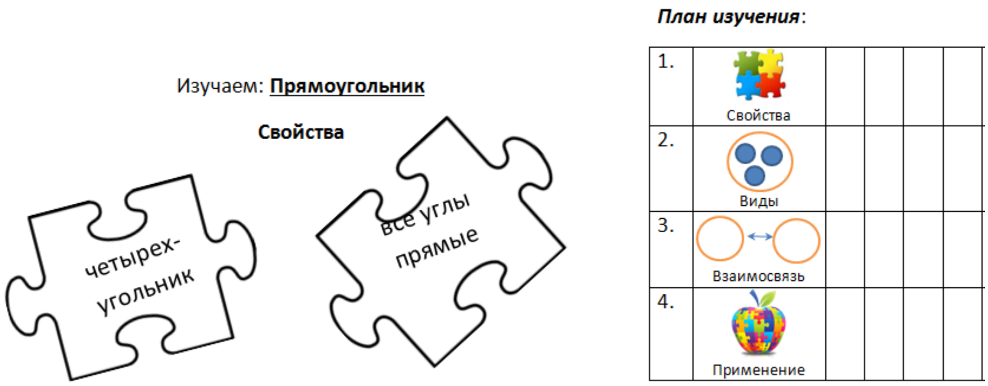


Рис. 1. Карта изучения понятия «прямоугольник»

Каждый учащийся выполняет задания, проверяет и оценивает работу, отмечая в карте определенным цветом. По цвету ячеек таблицы и ученик, и педагог могут видеть успешность в овладении понятием. Так осуществлялся **контроль** за усвоением понятия, **оценка** правильности выполнения заданий учеником и учителем, а также своевременная **коррекция** по основным критериям формирования понятия.

Приведем примеры заданий разных видов для усвоения понятия «прямоугольник». Каждое задание «работает» на критерий сформированности понятия и соответствует пунктам плана на рис. 1.

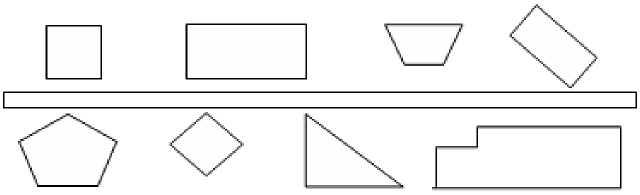
Пункт плана 1. *Задание на усвоение содержания понятия.*

Даны пазлы (как на рис. 1) с разными свойствами понятия «прямоугольник», включая лишние. Учащиеся должны выбрать только те, которые важны (существенны) для рассматриваемого понятия:

1) быть четырехугольником; 2) иметь все прямые углы.

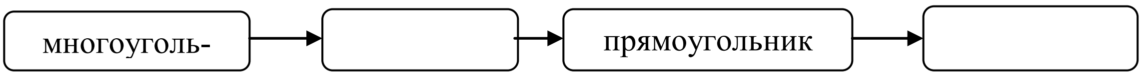
Также использовали задания с двумерными таблицами, созданными по аналогии с учебной картой Н.Ф. Талызиной [7] (описана нами в [1])

Пункт плана 2. *Задание на усвоение объема понятия*. Отметь прямоугольники.



Пункт плана 3. *Задание на установление взаимосвязи между понятиями*.

1) Заполни пропуски.



2) Нарисован геометрический человечек (рис. 2). Запиши слева номера квадратов, справа – прямоугольников. Каких фигур больше? Почему? [8])

Пункт плана 4. *Задания на применение понятия*

Сделай рисунок, используя только прямоугольники.

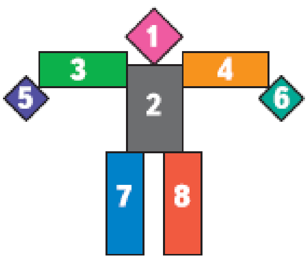


Рис. 2.

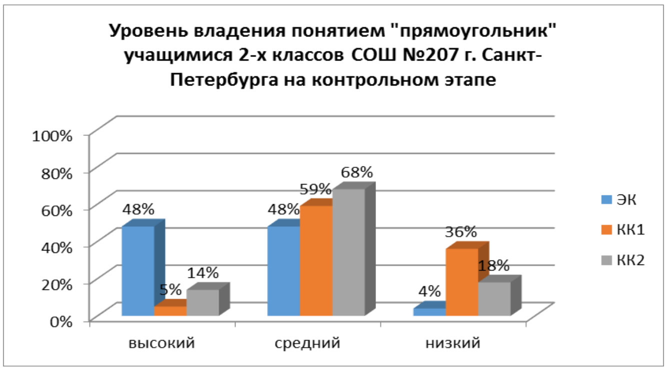


Рис. 3.

Выполняя задания, учащиеся фиксируют результаты своей работы в «плане изучения». Карта хранится в портфолио ученика. В течение обучения, углубляя знание о понятии, дети продолжают работу с ней.

Карта становится ориентировочной основой для усвоения понятий не только по математике, но и по другим предметам.

После проведенной работы по изучению понятия «прямоугольник» мы провели контрольный срез в экспериментальном классе (ЭК) и двух контрольных (КК1 и КК2). Результаты представлены на рис. 3.

Результативности деятельности учащихся по усвоению каждого понятия способствовала четкая *организация деятельности*:

- *планирование* деятельности учителя перед введением нового понятия;
- *мотивирование* учащихся;
- *постановка и принятие учебной задачи*, включающая разнообразные задания (в том числе разработанные на основе таблиц, описанных в [3]) и предполагающая фиксацию результатов их выполнения учащимися в «картах изучения понятий»;

• *контроль* учителя и учащихся на основе карты изучения понятия;

• *корректировка* знаний в соответствии с продвижением по «карте» для предупреждения трудностей дальнейшего усвоения понятий.

Реализация предложенной модели работы дала положительные результаты, позволила организовать деятельность младших школьников над понятиями на уроках не только математики, но и других предметов.

Литература

1. Ивашова О.А., Акиндина А.С. Проблемы формирования математических понятий у младших школьников /Герценовские чтения. Начальное образование. Том 7. Вып. 1.– СПб.: ВВМ, 2016. – С. 99–111
2. Выготский Л.С. Мышление и речь / Л.С. Выготский / Изд. 5, испр. – Издательство «Лабиринт», М. – 1999. – С. 118-184.
3. Усова А.В. Формирование у школьников научных понятий в процессе обучения. – М.: Педагогика, 1986. – 176 с.
4. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов. Стефанова Н.Л., Подходова Н.С. и др. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.
5. Ивашова О.А. Развитие математической культуры школьников на метаметодической основе. - СПб, РГПУ им. А.И. Герцена, 2006 – 35 с.
6. Вергелес Г.И., Денисова А.А. Технологии обучения младших школьников. – СПБ.: 2014. – 218 с.
7. Талызина Н.Ф. Педагогическая психология: Учебник для студ. сред. пед. учеб. заведений. – 2-е изд., стереотип. – М.: Издательский центр «Академия», 1998. – 288 с.
8. Математика. 1 кл.: в 2 ч. Ч. 2: учебник / О.А. Ивашова, Н.С. Подходова, В.М. Туркина, Е.Е. Останина; под ред. О.А. Ивашовой. М., Дрофа. 2014. – 158 с.

УДК 372.851

РЕГУЛЯТИВНЫЕ УНИВЕРСАЛЬНЫЕ УЧЕБНЫЕ ДЕЙСТВИЯ В ОБУЧЕНИИ СОСТАВЛЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Алексеева Е.Е., старший преподаватель кафедры математических дисциплин ДПО,
ГБОУ ВО МО «Академия социального управления», г. Москва;
МОУ СОШ № 9, г. Павловский Посад МО
alekseeva.ok@mail.ru

Аннотация. В статье представлены результаты исследования, направленного на использование составления геометрических задач как средства развития универсальных учебных действий.

Ключевые слова: составление геометрических задач, приём, условие, требование, текст, следствие, формирование, система, универсальные учебные действия, регулятивные действия, средство.

REGULATORY UNIVERSAL TRAINING ACTIVITIES IN TRAINING TO THE CONSTRUCTION OF GEOMETRIC PROBLEMS

E.E. Alekseeva, senior lecturer department of mathematical disciplines APE,
State Educational Institution of Higher Education of Moscow region
«Academy of Social Management», Moscow;
Municipal educational institution secondary school № 9
Pavlovsky Posad of the Moscow Region
alekseeva.ok@mail.ru

Abstract. The article presents the results of a research aimed at the usage of drafting the geometric tasks as means of development of regulatory actions.

Keywords: drafting geometric tasks, method, condition, claim, text, consequence, formation, system, universal learning activities, regulatory actions, means.

В соответствии Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования к метапредметным результатам обучения относятся регулятивные универсальные учебные действия, характеризующие самостоятельность планирования и осуществления учащимися собственной учебно-познавательной деятельности (УПД) [8].

Согласно целевому разделу Примерной основной образовательной программы основного общего образования к ним относятся умения: 1) определения цели обучения, постановки и формулировки новых задач в учебе и познавательной деятельности; 2) планирования путей достижения целей, осознанного выбора наиболее эффективных способов решения учебно-познавательных (учебных) задач; 3) соотнесения своих действий с планируемыми результатами, осуществления контроля своей деятельности в процессе достижения результата, определения способов действий в рамках предложенных условий и требований, корректировки своих действий; 4) оценки правильности выполнения учебных задач, собственных возможностей их решения; 5) владение основами самоконтроля, самооценки, принятия решений и осуществления осознанного выбора в процессе УПД [7].

Формирование умения *определения цели обучения*, постановки и формулировки задач для её достижения включает постановку учителем общей цели обучения составлению и решению задач в курсе геометрии, выбор учеником уровня обучения на основе анализа и планирования собственных умений [6]. Для этого учителю необходимо иметь уровневые цели, сформулированные им в направлении планируемых результатов обучения составлению и решению геометрических задач. Уровневые цели помогают учителю в логической последовательности при постановке учебно-познавательных задач, сформулированных в общем виде «Составьте геометрическую задачу, используя текст задачной ситуации» [2; 3], и создании условий для выдвижения учащимися гипотез, описывающих конечный результат обучения составлению задач. При выдвижении гипотез учащиеся выявляют учебную информацию для решения поставленной учебно-познавательной задачи и соотносят её с собственными умениями составления геометрических задач и необходимыми знаниями [2].

В процессе *планирования путей достижения целей*, учащиеся выявляют необходимые действия, последовательность их выполнения и составляют план или алгоритм выполнения действий. При выборе способов решения учебных задач из предложенных учителем или найденных самостоятельно средств и/или способов решения учебно-познавательной задачи выбирают наиболее рациональные, на основе анализа предложенного текста задачной ситуации выбирают соответствующее предписание для составления геометрической задачи [3]. Это умение используется обучающимся при планировании и корректировке индивидуальной образовательной траектории обучения составлению геометрических задач.

Умение *соотносить свои действия с планируемыми результатами и осуществлять контроль своей деятельности* позволяет учащимся самостоятельно или совместно с учителем или одноклассниками установить критерии оценки УПД осуществляемой при составлении и решении задачи, и её результатов. После оценки результатов деятельности учащиеся обосновывают причины отсутствия или наличия планируемых результатов обучения составлению задач. На основании выявленных причин учащиеся при необходимости самостоятельно или под руководством учителя исправляют ошибки, допущенные при составлении задачи по конкретному тексту задачной ситуации, и устраняют причины.

После решения учебной задачи учащиеся оценивают корректность её выполнения, результат решения по самостоятельно установленным или заданным критериям. На основании *анализа и оценки результатов решения учебно-познавательных задач*, связанных с составлением геометрических задач, учащиеся самостоятельно или под руководством учителя фиксируют динамику обучения.

Владение последним умением позволяет учителю при контроле выполнения учащимися учебно-познавательной деятельности в обучении составлению и решению задач и её результатов постепенно перейти от внешнего контроля к осуществлению учащимися *самоконтроля и самооценки, взаимоконтроля и взаимооценки,* компонентами которых являются наблюдение, сравнение и анализ.

Эти регулятивные учебные действия в процессе развития трансформируются в регулятивные умения и являются основой волевой саморегуляции учеником УПД в обучении взаимосвязанным процессам: составлению и решению задач (табл. 1).

Таблица 1

Саморегуляция УПД в обучении составлению геометрических задач

Умения самопланирования УПД обучения составлению геометрических задач
1. Выбрать уровень обучения составлению геометрических задач; 2. Ознакомиться с уровневыми целями и планируемыми результатами обучения составлению геометрических задач; 3. Сравнить уровневые цели и планируемые результаты с индивидуальными потребностями и возможностями; 4. Выдвинуть гипотезу, описывающую конечный результат обучения составлению задач; 5. Выявляют учебную информацию для решения учебной задачи, сравнить её с собственными умениями составления задач и необходимыми знаниями; 6. Определить последовательность познавательных действий для решения учебной задачи; 7. Выполнить познавательные действия, оценить УПД и её результат
Умения самоконтроля УПД при составлении геометрической задачи
1. Осуществлять УПД в соответствии уровневыми целями и планируемыми результатами; 2. Осмысленно выполнять познавательные действия при составлении задач; 3. Осмысленно составлять задачи на основе предложенного текста задачной ситуации; 4. Использовать приёмы контроля усвоения знаний и умений составления и решения задач; 5. Самооценивать УПД и составленную геометрическую задачу как результата деятельности
Умения самооценки УПД при составлении геометрической задачи
1. Самостоятельно разработать или отобрать из заданных критериев учителем критерии оценки УПД составления задачи, соответствующие учебной задаче; 2. Проанализировать выполненную деятельность при составлении задачи; 3. Оценить сформированность познавательных умений и умений составления задач в соответствии с уровнем обучения с использованием критериев и результатов анализа; 4. Сравнить результаты оценки сформированности умений познавательных и составления задач на этом этапе обучения составлению геометрических задач с результатами предыдущего этапа; 5. Выявить причины отсутствия/наличия планируемых результатов обучения составлению задач и зафиксировать динамику обучения; 6. Сделать выводы по отношению к УПД в обучении составлению задач (необходимость корректировки, переход на следующий уровень обучения)
Умения самодиагностики и самокоррекции УПД при составлении задач
1. Выбрать уровень обучения составлению задач; 2. Ознакомиться с уровневыми целями и планируемыми результатами обучения составлению геометрических задач; 3. Ознакомиться с критериями сформированности познавательных умений и умений составления задач на этом уровне; 4. Выявить причины появления ошибок допущенных при составлении задачи по конкретному тексту задачной ситуации путём сравнения выполненных действий с составом соответствующего приёма составления задачи или образцом; 5. Выявить познавательные действия, которые необходимо повторить или усвоить; 6. Скорректировать собственную УПД обучения составлению геометрических задач

Волевая саморегуляция – «способность к мобилизации сил и энергии, способности к волевому усилию, к преодолению препятствий» [8, с. 68]. Саморегуляция в обучении составлению задач выполняется при использовании познавательных умений и базируется на интеллектуальных умениях саморегуляции учеником УПД при освоении школьного курса геометрии, выделенных Л. И. Боженковой [4; 5].

Формирование умений саморегуляции у обучающихся в обучении составлению геометрических задач осуществляется при: 1) знакомстве с содержанием приёмов планирования, контроля, оценки, диагностики и коррекции в процессе обучения составлению задач; 2) осмыслении обучающимися действий этих приёмов; 3) осознании учащимися значения действий приёмов для организации самостоятельной деятельности составления и решения геометрической задачи.

Формирование учителем регулятивных умений учащихся в обучении составлению задач, переходящих в волевую саморегуляцию, осуществляется на мотивационно-подготовительном, операционно-познавательном и коррекционно-контролирующем этапах, выделенных в рамках формирования универсальных учебных действий учащихся в процессе обучения составлению геометрических задач [1].

Полный регуляторный процесс в обучении составлению задач, учитывающий регуляторный процесс при обучении математике [4, с. 49], обусловлен спецификой обучения составлению и решению геометрических задач. «Наполнение» этого процесса познавательными умениями, релевантными составлению геометрических задач по предложенным текстам задачных ситуаций, содержанием УПД при работе с текстами задачных ситуаций позволяет получить структуру саморегуляции УПД при обучении составлению задач в единстве с формированием познавательных умений [1; 6] (табл. 2).

Таблица 2

Структура полного регуляторного процесса в обучении составлению задач

Этапы становления умений	*Регулятивные действия учащихся в обучении составлению задач*
Мотивационно-подготовительный	1) постановка цели обучения составлению геометрических задач; 2) выявление познавательных умений, релевантных составлению задач по предложенным текстам задачных ситуаций;
Операционно-познавательный	*Ознакомительная часть*: 3) выявление учебной информации, необходимой для освоения приёма составления задач при изучении конкретной темы курса геометрии; 4) определение познавательных действий соответствующих открываемому приёму составления задачи; 5) соотнесение выявленной информации и познавательных действий с собственными знаниями и умениями; 6) принятие решения о необходимости помощи;
	Формирующая часть: 7) формулировка учебной задачи и конкретизация её в зависимости от предложенного текста задачной ситуации; 8) составление и реализация плана освоения приёма составления геометрической задачи с использованием ТЗС; 9) выявление необходимых познавательных действий соответствующих предложенному тексту задачной ситуации и составление алгоритма их выполнения в рамках приёма составления задачи;
Коррекционно-контролирующий	10) контроль сформированности умений составления задач и необходимых для этого познавательных умений; 11) самооценка выполненной деятельности при составлении задач и составленной геометрической задачи; 12) самодиагностика и самокоррекция УПД при составлении задач

Таким образом, специально организованная учебно-познавательная деятельность при обучении составлению и решению задач в курсе геометрии способствует формированию у учащихся регулятивных универсальных учебных действий и их переходу в волевую саморегуляцию.

Литература

1. Алексеева Е.Е. Дидактическая модель процесса обучения составлению геометрических задач / Л.И. Боженкова, Е.Е. Алексеева // «Вестник Оренбургского государственного педагогического университета. Электронный научный журнал. – 2016. – № 2 (18). – С. 239–250. [Электронный ресурс]: режим доступа: http://www.vestospu.ru/archive/2016/content2.html; http://www.vestospu.ru/.
2. Алексеева Е.Е. Составление геометрических задач как средство активизации умственной деятельности учащихся./ Е.Е. Алексеева // Вестник Брянского государственного университета. № 1 (2014): «Педагогика, психология». – Брянск: РИО БГУ, 2014. – 338 с. – С. 272 –277.
3. Алексеева Е.Е. Учебный модуль к основному курсу геометрии 7-го класса «Составление и решение геометрических задач»: учебно-методическое пособие / Е. Е. Алексеева // М.: АСОУ, 2015. – 168 с.
4. Боженкова Л.И. Методика формирования универсальных учебных действий при обучении геометрии / Л.И. Боженкова// М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. – 205 с.
5. Боженкова Л.И. Интеллектуальное воспитание учащихся при обучении геометрии: Монография / Л. И. Боженкова // Калуга: Изд-во КГПУ им. К.Э. Циолковского, 2007. – 281 с.
6. Боженкова Л.И., Алексеева Е.Е. Составление задач учащимися, как средство достижения предметных и метапредметных результатов при обучении геометрии. / Л. И. Боженкова, Е. Е. Алексеева // Наука и школа. – 2013. – № 5. – С. 103–107.

7. Примерная основная образовательная программа основного общего образования (Одобрена решением федерального объединения по общему образованию. Протокол от 8 апреля 2015 г. № 1/15). – Министерство образования и науки Российской Федерации. Документы [Электронный ресурс]. – Режим доступа: минобрнауки.рф/документы
8. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования / Мин-во образования и науки Рос. Федерации. – М.: Просвещение, 2011. – 48 с.

УДК 372.851

ФОРМИРОВАНИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНЫХ УМЕНИЙ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОСВОЕНИИ КУРСА АЛГЕБРЫ 7–9 КЛАССОВ

Алексеева Е.Е., старший преподаватель кафедры математических дисциплин ДПО, ГБОУ ВО МО «Академия социального управления», г. Москва; МОУ СОШ № 9, г. Павловский Посад МО
alekseeva.ok@mail.ru

Аннотация. В статье представлено использование заданий раздела «Логика» курса математики, как средства развития познавательных универсальных учебных действий.

Ключевые слова: универсальные учебные действия, познавательные умения, формирование, логика, математика, алгебра, задания.

FORMATION COGNITIVE SKILLS STUDENTS AT THE DEVELOPMENT OF THE ALGEBRA COURSE OF 7-9 CLASSES

E.E. Alekseeva, senior lecturer department of mathematical disciplines APE, State Educational Institution of Higher Education of Moscow region «Academy of Social Management», Moscow; Municipal educational institution Secondary school № 9 Pavlovsky Posad of the Moscow Region
alekseeva.ok@mail.ru

Abstract. The article presents the results of a research aimed at the usage of drafting the geometric tasks as means of development of regulatory actions.

Keywords: universal learning activities, cognitive skills, formation, logics, mathematics, algebra, tasks.

Формирование познавательных универсальных учебных действий (УУД) у учащихся является одной из задач, стоящей перед современной школой. Познавательные УУД в соответствии Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования (ФГОС ООО) составляют действия: общеучебные, включающие знаково-символические; логические; постановки и решения проблем. Эта группа УУД при изучении математики направлена на формирование логического мышления, овладение математическими рассуждениями и развитие математической интуиции [5].

В содержание курса математики 7–9 классов введен раздел «Логика», на изучение которого примерной основной образовательной программой основного общего образования (ПООП ООО) не предусмотрено дополнительных часов. Он встраивается в различные темы курса математики [4, с. 341].

Поэтому учителю математики необходимо, во-первых, выявить задания входящие в раздел «Логика»; во-вторых, специально организовать выполнение этих заданий; в-третьих, направить учебно-познавательную деятельность учащихся при их решении на формирование познавательных УУД.

Базируясь на планируемых результатах обучения математике, представленных в ПООП ООО, выявлены познавательные действия, соответствующие разделу «Логика» (табл. 1). Эти действия формируются у учащихся при выполнении заданий этого раздела и трансформируются в познавательные умения в процессе их развития.

Таблица 1

Познавательные УУД соответствующие разделу «Логика»

ФГОС ООО, ПООП ООО	*Познавательные действия*
Общеучебные: смысловое чтение информационных объектов; работать с информацией, содержащейся в готовых информационных объектах; строить смысловые высказывания при представлении информации	1) анализировать предложенный математический текст; 2) структурировать математический текст; 3) устанавливать взаимосвязь составляющих математического текста; 4) критически оценивать содержание и форму текста; 5) преобразовывать текст, «переводя» его в другую форму; 6) проводить доказательные рассуждения в ходе решения заданий
Логические: использовать: сравнение, анализ и синтез, обобщение и конкретизацию, аналогию; выводить следствия	7) устанавливать причинно-следственные связи между составляющими текста; 8) обозначать данные логические связи между составляющими текста с помощью знаков; 9) строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное, по аналогии) при выведении из условия (требования) задания
Постановки и решения проблем: формулировать проблему и находить пути ее решения на основе анализа	10) выдвигать гипотезы при решении логической задачи; 11) опровергать гипотезы; 12) подтверждать гипотезы; 13) обобщать процесс решения логической задачи

Пример 1 (7 класс). Значение дроби $\frac{a}{b} = 0$. Что можно сказать о дроби $\frac{b}{a}$? Ответ объясните [1].

Учитель на этапе анализа условия задания вводит понятие “составляющие математического текста”. Учащиеся в процессе анализа дробей выявляют их составляющие (числитель и знаменатель).

Затем учащиеся под руководством учителя выдвигают гипотезу: если $\frac{a}{b} = 0$, то и $\frac{b}{a} = 0$ и устанавливают причинно-следственные связи между составляющими дроби $\frac{a}{b}$.

Рассуждения учащихся сводятся к следующему:

1) так как дана дробь $\frac{a}{b}$, то записано арифметическое действие – деление; 2) так как частное двух чисел равно 0, то делимое равно 0, а делитель не равен 0 (свойство деления); 3) так как a – числитель, b – знаменатель этой дроби, то $a = 0$, $b \neq 0$ (п. 2); 4) так как $a = 0$, $b \neq 0$ (п. 3) и $\frac{b}{a}$, то $\frac{b}{a} = \frac{b}{0}$ (по свойству равенств); 5) так как $\frac{b}{a}$ и $\frac{b}{a} = \frac{b}{0}$ (п. 4) и a – знаменатель, то дробь не существует (свойство деления).

После этого учащиеся обобщают выполненную деятельность и формулируют вывод: так как $\frac{a}{b} = 0$, то дробь $\frac{b}{a}$ не существует, что опровергает выдвинутую гипотезу.

В процессе выполнения этого задания учитель организовал УПД учащихся, направленную на формирование у учащихся умений построения логических рассуждений в форме «Так как …………….., то ……..… (………..)»; выдвижения и опровержения гипотезы, установления причинно-следственных связей. Такой подход к решению аналогичных заданий в курсе алгебры 7 класса способствует формированию у учащихся умений решения задач на доказательство в курсе математики, в частности геометрии.

Пример 2 (8 класс). Определите знаки дробей $\frac{x}{y}, \frac{x^2}{y}, \frac{x}{y^2}$, если известно, что:

а) $x > 0$, $y > 0$; б) $x > 0$, $y < 0$; в) $x < 0$, $y > 0$; г) $x < 0$, $y < 0$ [2].

Решение.

б) $x > 0$, $y < 0$:

– Дробь $\frac{x}{y}$: так как $\frac{x}{y}$ и $x > 0$ и $y < 0$, то $\frac{x}{y} < 0$ (свойство деления чисел с разными знаками).

– Дробь $\frac{x^2}{y}$: 1) оценим числитель дроби: так как x^2, то $x^2 > 0$ (свойство степени с натуральным (четным) показателем); 2) так как $\frac{x^2}{y}$ и $x^2 > 0$ (п. 1) и $y < 0$ (по условию), то $\frac{x^2}{y} < 0$ (свойство деления чисел с разными знаками).

– Дробь $\frac{x}{y^2}$: 1) так как дробь и определить знак дроби (требование), то оценим числитель и знаменатель дроби – составляющие математического текста; 2) так как y^2, то $y^2 > 0$ (свойство степени с четным показателем); 2) так как $\frac{x}{y^2}$ и $x < 0$ (по условию) и $y^2 > 0$ (п. 1), то $\frac{x}{y^2} < 0$ (свойство деления чисел с разными знаками).

В процессе выполнения этого задания учителем организована УПД учащихся, направленная на формирование умений выделения составляющих математического текста (дроби), оценивания составляющих, установления причинно-следственных связей, построения логического рассуждения.

Пример 3 (8 класс). Докажите, что при любых значениях переменной:

а) значение дроби $\frac{5}{a^2+7}$ положительно; б) значение дроби $\frac{-3}{a^2+4}$ отрицательно;

в) значение дроби $\frac{(x-3)^2}{a^2+8}$ неотрицательно; г) значение дроби $\frac{(y-6)^2}{-a^2-3}$ неположительно [2].

Выполнение этого задания учитель организует на основе уровневого подхода в соответствии с ПООП ООО. Менее успешные ученики под руководством учителя анализируют пошаговое решение задания с использованием карточки-образца (табл. 2), выполняют аналогичное задание с использованием средств помощи; более успешным учащимся учитель предоставляет частично заполненную карточку с решением, наиболее успешные – выполняют задание самостоятельно, не используя средства помощи.

При выполнении задания формируются умения структурированной записи решения; установления взаимосвязи составляющих математического текста; логические познавательные действия.

Таблица 2

Карточка-образец

Условие: $\frac{(x-3)^2}{a^2+8}$	*Требование*: доказать, что дробь неотрицательна при любых значениях переменной	
Решение		*Обоснование*
1) Так как $\frac{(x-3)^2}{a^2+8}$ и значение дроби неотрицательно	то $\frac{(x-3)^2}{a^2+8} \geq 0$	Условие, множество неотрицательных чисел
2) Так как $\frac{(x-3)^2}{a^2+8} \geq 0$ и значения переменных (требование)	то оценим числитель и знаменатель дроби	Требование, составляющие математического текста
3) Так как $(x-3)^2$ – числитель дроби, и дробь может быть равна 0 и показатель степени – натуральное число	то $(x-3)^2 \geq 0$	п. 1, условие, свойство степени с четным показателем
4) Так как $(x-3)^2 \geq 0$	то $(x-3)$ – любое число	п. 1, свойство степени с четным показателем
5) Так как $(x-3)$ – любое число	то x – любое число	п. 4, свойство разности
6) Так как a^2+8 – знаменатель дроби и $\frac{(x-3)^2}{a^2+8} \geq 0$ и $(x-3)^2 \geq 0$	то $a^2+8 > 0$	Условие, п. 1, п. 4, свойство неравенств
7) Так как $a^2+8 > 0$	то a^2 и 8 – компоненты суммы	п. 6, компонентный состав суммы
8) Так как a^2 и 8	то $a^2 \geq 0$ и $8 > 0$	п. 7, свойство степени с четным показателем
9) Так как $a^2+8 > 0$ и $a^2 \geq 0$ и $8 > 0$	то a – любое число	п. 7, п. 8, свойство неравенств
10) Так как x и a – любое число (п.5, п.9), то $\frac{(x-3)^2}{a^2+8} \geq 0$ при любых значениях переменных, что и требовалось доказать		

Таким образом, при выполнении этих заданий используются познавательные УУД. При этом особая роль отводится логическим познавательным действиям. Использование аналогичных заданий для организации УПД учащихся способствует формированию планируемых результатов обучения математике, сформулированных в ПООП ООО в соответствии ФГОС ООО.

Литература

1. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. УМК для учащихся общеобразовательных учреждений / [А. Г. Мордкович и др.]; под ред. А. Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 2015 г.

2. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. УМК для учащихся общеобразовательных учреждений / [А. Г. Мордкович и др.]; под ред. А. Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 2015 г.

3. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. УМК для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г Мордкович, П. В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2015 г.

4. Примерная основная образовательная программа основного общего образования (Одобрена решением федерального объединения по общему образованию. Протокол от 8 апреля 2015 г. № 1/15). – Министерство образования и науки Российской Федерации. Документы [Электронный ресурс]. – Режим доступа: минобрнауки.рф/документы
5. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования / Мин-во образования и науки Рос. Федерации. – М.: Просвещение, 2011. – 48 с.

УДК 372.8

ФОРМИРОВАНИЕ ПОНЯТИЙ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В УСЛОВИЯХ РЕАЛИЗАЦИИ ФГОС ООО

Антонова Е.И., кандидат педагогических наук,
Институт развития образования, г. Владимир
antonova-e-i@mail.ru

Аннотация. В работе раскрывается процесс формирования понятий при обучении математике. Показаны особенности построения современного урока в условиях реализации образовательного стандарта.

Ключевые слова: формирование понятий, этапы формирования, образовательный стандарт, современный урок.

FORMING THE CONCEPTS OF MATH EDUCATION IN CONDITIONS OF REALISATION FGOS OOO

E.I. Antonova, PhD (Pedagogy),
Institute of development of education, Vladimir
antonova-e-i@mail.ru

Abstract. The process of forming the concepts of Math education is described in this article. The main features of creating modern lesson in conditions of new educational standard are in the spotlight.

Keywords: Forming the concepts, stages of forming, educational standard, modern lesson.

Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (ФГОС ООО) содержит требования к планируемым результатам освоения образовательной программы: личностным, метапредметным, предметным [4]. Один из критериев предметного результата является овладение основными элементами содержания образования, формирование понятийного аппарата. Метапредметные результаты в основной школе - это не только освоение УУД, но и формирование межпредметных понятий.

Вопросу формирования понятий всегда уделялось большое внимание как в организации учебно-воспитательного процесса, так и в общей методике обучения математике. В процессе формирования понятия образуются, определяются и систематизируются. Процесс формирования понятий проходит следующие этапы [3].:

- мотивация изучения понятия;
- выявление существенных свойств понятия, формулировка определения;
- использование понятия в конкретных ситуациях;
- установление связей и отношений нового понятия с другими.

Ежегодно в нашем регионе для учителей математики проводится конкурс «Современный урок». Конкурс направлен на включение в образовательный процесс этапов и уровней формирования понятий у школьников, формирующих и диагностических заданий для контроля достижений учащихся в процессе освоения ими фундаментальных понятий.

Сценарии урока, представляются согласно структуре урока, с выделением трех обязательных блоков: мотивационно-ориентировочный, организационно – деятельностный, рефлексивно – оценочный.

Рассмотрим на примере урока математики в 5 классе по теме: «Задачи на переливание» [2]. Урок - предъявления и усвоения (изучения) нового учебного материала. На этом уроке школьники осуществляют отбор существенных признаков понятия «задачи на переливание», объединение существенных признаков в определение, формулируют определение по заданной схеме, закрепляли в памяти, устанавливают связи данного понятия с другими, проводят классификацию задач на переливание, определяют виды этих задач, сравнивают, называют отношения между понятиями. Также обучающиеся находят алгоритмы решения различных видов задач на переливание и практически демонстрируют решение каждой задачи, проводят самооценку. Целью данного занятия является создание условий для развития опыта самостоятельного анализа информации, направленного на расширение понятийной базы, за счет освоения алгоритмов решения задач на переливание.

Технологическая карта урока (фрагмент):

Этапы урока	Деятельность учителя	Деятельность учащихся
Мотивационно-ориентировочный блок		
Этап актуализации	Учитель вместе с учащимися отправляется в сказку «По-щучьему веленью на новый лад», где щука предлагает Емеле решить две задачи: 1. Вот тебе два ведра. Вместимостью 3 литра и 5 литров. Набери-ка мне из реки 7 литров воды? 2. А теперь есть три ведра: 8 литров - полное воды, а 5 и 3 литра - пустые. Как поделить воду пополам?	Погружаются в мир сказки, вступают в диалог с учителем, отвечая на вопросы, возникающие по мере прочтения сказки. Вспоминают, что волшебники бывают добрыми и злыми, выясняют какая щука волшебница и почему?
Этап выделения проблемного поля	Стало трудно Емеле - не решал он еще таких задач. Учитель предлагает ребятам помочь Емеле решить задачи. Почему, оказалось, трудно решить эти задачи? Как бы вы их назвали?	Решают предложенные задачи и сталкиваются с затруднениями. Не знаем способов решения. Придумывают название задачам.
Этап целепо лагания	Сформулируйте тему урока. Именно незнание затрудняет решение задач. Каковы цели нашего урока? В нашей сказке, щука предлагает Емеле потрудиться. Какие пословицы и поговорки вы знаете на эту тему? Какие качества нам необходимы для достижения поставленных целей урока?	Формулируют тему «Задачи на переливание» и записывают в тетрадь. Определяют цели по отработанному алгоритму **ЧКК.** Узнать и понять: **Что** такое задачи на переливание? **Какие** виды и **как** их решать? Отвечают на вопросы. Трудолюбие, внимательность, сообразительность и самостоятельность
Организационно-деятельностный блок		
Этап модели-рования	Для понятия «Задачи на переливание» укажите родовое понятие. Прочитайте еще раз задачи для Емели, найдите общее. Укажите существенные признаки для понятия задачи на переливание. Дайте определение задач на переливание по схеме В - это А и Р, где А – это род, а Р - видовые отличия (существенные признаки).	Указывают родовое понятие – задача. Находят общее и отмечают существенные признаки задач на переливание. По ранее изученной схеме определения понятия, самостоятельно формулируют определение задач на переливание и под диктовку одного из учащихся записывают в тетрадь. Подчеркивают род и существенные признаки.

Этап конструирования	Уточнение и закрепление существенных признаков понятия в памяти. Заполнение листов самоконтроля (см. приложение). Учитель предлагает определить, к какому виду относятся данные задачи: Задача 1. *Парное молоко.* Задача 2. *Серый волк.* Задача 3. *Губка Боб.* Проведите классификацию задач на переливание по основанию источник. Учитель выслушивает предложенные учащимися классификации, помогает определиться с названиями каждого вида задач. Задачу, в которой речь идет о бесконечном источнике, назвали «Водолей», а задачу, в которой ограничено количество жидкости «Переливашка». Соотнесите задачи с их видами «Водолей» и «Переливашка». Установление связей данного понятия с другими, выделение сходных понятий по определенным признакам. Назовите отношения, существующие между понятиями: Задача-задача на переливание; Задача-условие; Задача на движение - задача на переливание; Задача на переливание - «Водолей»; «Водолей» - «Переливашка» Учитель предлагает выполнить задание в парах. Используя понятие «задачи на переливание» найдите неверную операцию. В задачах на переливание разрешены следующие операции: • Заполнение жидкостью одного сосуда до краев; • Переливание жидкости в другой сосуд или выливание жидкости; • Переливание половины жидкости одного сосуда в другой. Работает со словом алгоритм: учитель предлагает учащимся *создать образ слова* ***алгоритм.*** Вовлекает в игру «Реставратор**»,** просит восстановить тексты: Алгоритм I - Наполнить большую емкость из _____источника - Перелить из______емкости в _____емкость - Вылить жидкость из_____ емкости - Перелить оставшуюся жидкость из _____ в _____емкость	Воспроизводят определение задач на переливание по памяти (работа в парах). Оформляют листы самоконтроля. Определяют, что задачи 1 и 3 относятся к задачам на переливание, а задача 2 не относится, т.к. нет соответствия с существенными признаками задач на переливание. В листе самоконтроля проводят самооценку выполненного задания, изображают улыбающийся смайлик с лучиками, если все получилось верно и без лучиков, если пока не все верно. Соотносят задачи 1 и 3 с их видами. Записывают в листах самоконтроля отношения: Род-вид Целое-часть Вид-вид Род-вид Вид-вид Проверяют, сравнивая с образцом на экране, и проводят самооценку в листе самоконтроля. Работа в парах: опытным путем с помощью стаканчиков или логическими рассуждениями находят неверную операцию, обосновывают выбор и оценивают результат. Вспоминают определение алгоритма. Включаются в игру. Заполняют пропуски в алгоритме I и определяют верную последовательность шагов в алгоритме II, устанавливая смысловые связи между шагами. Определяют виды задач на переливание, которые решаются по восстановленным алгоритмам. Сравнивают свои алгоритмы с образцом на экране и вносят коррективы при необходимости. Проводят самооценку и заносят в лист самоконтроля.

	- Повторить действия 1-4 до тех пор, пока не будет получено обозначенное в условии задачи количество жидкости. Какой вид задач на переливание можно решить по данному алгоритму? Алгоритм II Определите последовательность шагов алгоритма. Какие два шага необходимо поменять местами, чтобы алгоритм стал верным?	
Этап презентации	Пользуясь совместно созданными алгоритмами, предлагает решить задачи для Емели. С помощью приготовленных стаканчиков и шариков из пластилина, повторите действия Емели. Практически продемонстрируйте решение каждой задачи. Представьте решение этих задач в таблице.	Работа в парах. Учащиеся с помощью стаканчиков и шариков из пластилина выполняют переливание по алгоритмам, демонстрируя практическое решение каждой задачи. Таблицы с решениями записывают в тетрадь. Сверяют решения.

Литература

1. Задачи на смекалку. 5-6 класс: пособие для учащихся общеобразов. учреждений / И.Ф. Шарыгин, А.В. Шевкин ,10-е издание. – М.: Просвещение, 2010. – 95с.
2. Современный урок: формирование понятий: сборник методических материалов. – Владимир: ГАОУДПО ВО ВИРО, 2017. – 64 с.
3. Справочные материалы по общей методике преподавания математики: учебное пособие. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2009. – 60 с.
4. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования /М-во образования и науки Рос. Федерации. – М.: Просвещение, 2011. – 48 с. – (Стандарты второго поколения).

УДК 372.851

ФОРМИРОВАНИЕ РЕГУЛЯТИВНЫХ УМЕНИЙ ПРИ ОБУЧЕНИИ АЛГЕБРЕ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

Беребердина С.П., соискатель кафедры ЭМиМОМ МПГУ,
заместитель директора МАОУ СОШ №8 им. Ц.Л.Куникова города-курорта Геленджик,
sbereberdina@yandex.ru

Аннотация. В статье исследуется взаимосвязь универсальных учебных действий (УУД) в обучении алгебре. Автор показывает, что в основе управления своей учебной деятельностью лежат регулятивные УУД, которые делятся на общие и специфические. В обучении алгебре одно и то же действие может быть предметом обучения, а затем – средством обучения, то есть в ходе учебной деятельности предметное умение может стать специфическим регулятивным умением.

Ключевые слова: саморегуляция, регулятивные умения, регуляторный опыт, общие и специфические регулятивные умения.

THE FORMATION OF REGULATORY SKILLS IN TEACHING ALGEBRA IN THE PRIMARY SCHOOL

S.V. Bereberdina,
deputy director of secondary school No. 8, Gelendzhik
sbereberdina@yandex.ru

Abstract. The article explores the relationship of universal educational activities in learning algebra. The author shows that at the heart of their learning activities are regulatory UUD, which are divided into General and specific. In teaching algebra one and the same action may be subject to learning, then a learning tool, that is, in the course of learning activities subject-specific ability may be specific regulatory ability.

Keywords: self-regulation, regulatory skills, regulatory experience, General and specific regulatory skills.

Стандарт устанавливает требования к таким метапредметным результатам основного общего образования, как «самостоятельность планирования и осуществления учебной деятельности и организации учебного сотрудничества с педагогами и сверстниками, построение индивидуальной образовательной траектории» [5]. Эти результаты достигаются сформированными регулятивными универсальными учебными действиями, которые обеспечивают саморегуляцию учащимися собственной учебной деятельности.

Отметим, что в 90-х годах XX века перед школой ставилась задача формирования общих учебных умений (интеллектуальных, информационных, коммуникативных и организационных), которая была сформулирована в соответствующей программе. Педагогические коллективы отдельных школ занимались исследовательской работой в этом направлении. Проблема формирования отдельных видов учебных умений отражена в научно-методической литературе и в педагогических диссертационных исследованиях. В теории и методике обучения математике достаточно полно разработана проблема формирования интеллектуальных умений посредством приёмов умственных действий, которые частично соответствуют познавательным УД. Это исследования таких известных методистов, как М.Б. Волович, О.Б. Епишева, Е.И. Лященко, И.Л. Никольская, Г.И. Саранцев и др. Методологической базой в данном случае являются труды российских психологов В.В. Давыдова, Л.В. Занкова, Е.Н. Кабановой-Меллер, Н.А. Менчинской, П.Я. Гальперина, Н.Ф. Талызиной, Д.Б. Эльконина. Методисты - математики отмечают обобщённый характер интеллектуальных умений, рассматривают различные подходы к системе приёмов умственной деятельности, предлагают этапы их формирования. Большинство авторов в качестве основных приёмов умственной деятельности выделяют анализ, синтез, сравнение, обобщение, классификацию и др. Указанные приёмы входят в состав логических познавательных УД. Общим для этих исследований является построение процесса формирования умений в неразрывной связи с процессом усвоения математических знаний. К сожалению, поставленная задача формирования у учеников общих учебных умений, не стала массовой основополагающей идеей в организации школьного учебно-воспитательного процесса. Однако богатый материал, накопленный в этой области исследований, с учётом современных требований Стандарта, необходимо использовать для формирования УУД при обучении математике.

В состав регулятивных УУД входят действия целеполагания, планирования, прогнозирования, контроля, коррекции и оценки, которые в совокупности образуют полный процесс осознанной саморегуляции. В соответствии с этими этапами можно выделить личностные, коммуникативные и познавательные универсальные учебные действия. Психические процессы обеспечиваются соответствующими интеллектуальными действиями, в число которых входят познавательные общеучебные (знаково-символические действия; структурирование учебной информации и знаний; построение устного и письменного речевого высказывания; выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от условий и др.) и логические (анализ объекта; синтез; сравнение; подведение под понятие; выведение следствий; построение логической цепи рассуждения и др.) УУД. Взаимосвязь регулятивных УУД с остальными систематизированы в таблице. Поставленная в Стандарте задача формирования УУД, включение УУД в цели обучения учащихся - одна из его характерных отличительных особенностей. Реализовать указанные возможности ученик сможет только тогда, когда у него будут сформированы регулятивные умения, как основа развития личностных, познавательных и коммуникативные УУД.

Таблица 1

Взаимосвязь регулятивных с личностными,
познавательными и коммуникативными учебными действиями

Регулятивные	Целеполагание	Планирование	Прогнозирование	контроль	коррекция	оценка
Личностные	Установление связи между целью учебной деятельности и ее мотивом Определение того«какое значение, смысл имеет для меня учение».	Личностное, профессиональное, жизненное самоопределение и построение жизненных планов во временной перспективе.		Построение системы нравственных ценностей как основания морального выбора.	Ориентировка в моральной дилемме и осуществление личностного морального выбора.	Построение образа Я (Я-концепции), включая самоотношение и самооценку. Нравственно-этическое оценивание событий и действий с точки зрения моральных норм.

Познавательные	Самостоятельное выделение и формулирование учебной цели.	Информационный поиск Знаково-символические действия Структурирование знаний.	Выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от условий.	Рефлексия способов и условий действия, их контроль и оценка; критичность.
Коммуникативные		Планирование учебного сотрудничества с учителем и сверстниками – определение цели, функций участников, способов взаимодействия.		Рефлексия способов и условий коммуникации, их контроль и оценка; критичность.

Под умением, согласно Д.Н. Богоявленскому и Н.А. Менчинской будем понимать «освоенный учеником прием умственной деятельности; сознательное владение этим приемом – системой интеллектуальных действий (операций), специально-организованных для решения задач определенного типа разной степени обобщенности» [1, с.16]. Именно регулятивные умения составляют регуляторный опыт учащегося. А.С.Осницкий с психологических позиций выявил и описал структурные компоненты опыта. В.И.Моросанова в своих исследованиях описала структурные звенья саморегуляции учебно-познавательной деятельности. В нашем диссертационном исследовании обоснованно установлены компоненты РО в обучении алгебре: ценностно-активизирующий, операционально-рефлексивный и коммуникативно-рефлексивный опыт [2, с. 58].

Каждый из взаимосвязанных компонентов РО содержит комплекс регулятивных умений, и фиксация активности учащихся на освоении этих умений обеспечивает впоследствии их включенность в общую систему осознанного саморегулирования, в регуляторный опыт.

Согласно Н.Ф.Талызиной «Все действия, входящие в деятельность учения, можно поделить на два класса: а) общие (не специфические), б) специфические» [4, стр. 79]. Таким образом, регулятивные умения также можно поделить на общие (используемые в разных областях при работе с разными знаниями) и специфические (отражающие специфику предмета). Общие, свою очередь, Н.Ф.Талызина распределила на логические и психологические. Наше исследование опирается на тезис о том, что «в деятельности учения одно и то же действие может занимать разное место: вначале быть предметом усвоения, а потом – его средством» [4, с. 91]

В условиях предметного обучения учащихся алгебре поставим задачу целенаправленного и результативного использования дидактического потенциала данного предмета для формирования УУД. Конкретизируем специфические регулятивные умения, используемые учащимся при изучении содержательно-предметной линии «Функции». Проанализируем те умения и приемы, которые из познавательных «перешли» в регулятивные. По словам А.Я.Хинчина содержание функциональной линии в курсе алгебры основной школы является «тем основным стержнем, проходящим от элементарной арифметики до высших разделов алгебры, геометрии и тригонометрии, вокруг которого группируется все математическое преподавание» [6, с.36]. Функциональная линия методически и дидактически связана со всеми другими предметно-методическими линиями. Представим взаимосвязь типовых заданий функциональной линии с другими предметно-содержательными линиями в таблице 2.

Таблица 2

Взаимосвязь типовых заданий функциональной линии с другими предметно-содержательными линиями

№	Примеры типовых заданий функциональной линии в 7-9 классах	Умение, к которому сводится решение ТЗ (не из функциональной линии)	Предметно-содержательная линия, к которой относится указанное умение

1.	Нахождение значений функции в точке, на промежутке с помощью формулы	Вычислять значение выражения	Числовая линия
2.	Нахождение значений аргумента по значению функции, заданной аналитически	Решать уравнение	Тождественные преобразования, уравнения и неравенства
3.	Нахождение точек пересечения графика функции с осью Ох	Решать уравнение	Тождественные преобразования, уравнения и неравенства
4.	Доказательство свойств монотонности функции, заданной аналитически	Применять свойства числовых неравенств, решать неравенства	Уравнения и неравенства
5.	Нахождение формулы, задающей функцию	Решать систему уравнений	Уравнения и неравенства

Таким образом, данная статья направлена на решение проблемы выявления общих и специфических регулятивных умений в обучении алгебре.

Рассмотрим регулятивные умения «выбирать технологию деятельности из известных или выделять часть известного алгоритма для решения конкретной задачи и составлять план деятельности». Данное действие основывается на предметном содержании и познавательных действиях в обучении линии тождественных преобразований. Рассмотрим технологию выбора стратегии решения задания основного государственного экзамена по алгебре (таблица 3).

Таблица 3

Выбор технологии решения задачи

Задание	Сформированные предметные умения	Выбор решения
Разложить на множители многочлен $x^2 - 2x - 15$	Разложение квадратного трехчлена на множители по формуле $a(x - x_1)(x - x_2)$	1. Найти корни 2. Применить формулу
	Разложение на множители через выделение полного квадрата	1. Выделить полный квадрат. 2. Применить формулу разности квадрата
	Разложение на множители способом группировки	1. Записать многочлен в удобном для группировки виде. 2. Применить способ группировки.

Значит, выбрать технологию деятельности учащийся может, только освоив эти предметные умения, чтобы они стали ему «известными». То есть предметные умения «выполнять тождественные преобразования» стали средством усвоения регулятивных умений «выбирать технологию действий».

Итак, прежде всего, следует сформировать у учеников познавательные действия, и только затем включить соответствующие умения в содержание функциональных звеньев, реализующих процесс саморегуляции, наполненный регулятивными умениями.

Литература

1. Богоявленский Д.Н. Приёмы умственной деятельности и их формирование у школьников // Вопросы психологии. – 1969. – №2. – С. 12-18.

2. Боженкова Л.И., Беребердина С.П. Регуляторный опыт учащихся общеобразовательной школы при обучении алгебре // Педагогическое образование и наука. – 2012. – №3. – С. 58-66.

3. Примерная программа основного общего образования в образовательной области «Математика и информатика» [Электронный ресурс] // Реестр основных общеобразовательных программ. URL: http://fgosreestr.ru.

4. Талызина Н.Ф. Формирование приемов математического мышления. – М.: ТОО «Вентана Граф», 1995. – 231 с.

5. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования [Электронный ресурс] // Министерство образования и науки РФ: сайт. URL: http://минобрнауки.рф/документы/938.

6. Хинчин А.Я. Основные понятия математики и математические определения в средней школе. 3-е изд. – М.: ЛЕНАНД, 2014. – 256 с.

УДК 372.851

НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ ЧИСЛОВОЙ ОКРУЖНОСТИ И ИХ НАГЛЯДНЫЕ ОБРАЗЫ

Богданова Е.А., кандидат педагогических наук, доцент,
ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева», г. Самара
bogdanovaea2014@gmail.com

Богданов П.С., кандидат физико-математических наук,
ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева», г. Самара
poulsmb@rambler.ru

Богданов С.Н., кандидат физико-математических наук, доцент,
Самарский филиал ГАОУ ВО «Московский городской педагогический университет», г. Самара
bogdanovsan@rambler.ru

Аннотация. В работе рассматриваются две новые модели числовой окружности – винтовая линия и спираль, которые обладают рядом преимуществ по сравнению с традиционной числовой (единичной) окружностью при их использовании в тригонометрии. Приводится пример решения задач с помощью спирали.

Ключевые слова: числовая окружность, винтовая линия, спираль, отбор корней тригонометрических уравнений.

SOME MODELS OF THE NUMERICAL CIRCLE AND THEIR INTUITIVE IMAGES

E.A. Bogdanova, candidate of pedagogic sciences, associate professor,
FSAEI HE «Samara National Research University named after academician S.P. Korolev», Samara
bogdanovaea2014@gmail.com

P.S. Bogdanov, candidate of physical and mathematical sciences,
FSAEI HE «Samara National Research University named after academician S.P. Korolev», Samara
poulsmb@rambler.ru

S.N. Bogdanov, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor,
Samara Branch of the state autonomous educational institution
of higher education «Moscow City University», Samara
bogdanovsan@rambler.ru

Abstract. The paper considers two new models of a numerical circle - a helix line and a spiral, which have a number of advantages over the traditional numerical (unit) circle when used in trigonometry. An example of solving problems by applying a spiral is given.

Keywords: numerical circle, helix line, spiral, selection of roots of trigonometric equations

Курс тригонометрии имеет большую практическую направленность, знания по этому разделу математики применяются при изучении других предметов. Уровень освоения навыков решения тригонометрических уравнений и преобразований тригонометрических выражений проверяется на едином государственном экзамене по математике.

Фундаментом для изучения всей тригонометрии автор учебника «Алгебра и начала математического анализа 10-11» А.Г. Мордкович [1] считает усвоение модели числовой окружности, в частности, это важно и для решения уравнений с отбором корней. Он отмечает, что отбор корней в простейших тригонометрических уравнениях позволяет понять структуру формулы корней, роль параметра в ней [2].

Модель «числовая окружность» относится к знаково-символическим моделям. Отбор корней тригонометрического уравнения представляет собой использование и преобразование этой символической модели. Преобразование модели заключается в выделении дуги окружности, соответствующей заданному промежутку, и точек, интерпретирующих корни уравнения. Н.С. Салмина [4] считает, что проблемы при изучении математики возникают у школьников из-за неумения «декодировать информацию, представленную знаково-символическими средствами, идентифицировать изображение с реальностью, наличествующей в нём, выделять в моделях закономерности, зафиксированные в них, оперировать моделями, знаково-символическими средствами». В применении к нашей модели, в частности, это означает, что многие школьники не понимают, как одна и та же точка числовой окружности может соответствовать различным дугам или углам, например, $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{9\pi}{4}$ (в учебнике А.Г. Мордковича и др. такие величины называются именами точек). Это непонимание особенно усиливается, когда начинают рассматривать принадлежность точек какому-либо промежутку.

В работе «Подготовка учителя математики» [3] отмечается, что в основе обучения лежит восприятие наблюдаемых объектов. «Чему бы ни учить, каким бы способом не учить, мы прежде всего обращаемся к органам чувств обучаемого». Благодаря органам чувств осуществляется восприятие объекта. В результате восприятия формируется образ. Чувственные образы подразделяются на первичные (образы восприятия) и вторичные (образы представления), которые формируются на основе следов памяти и образа воображения школьника.

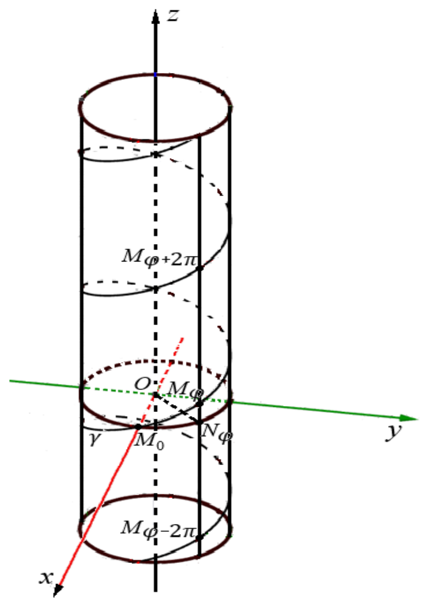


Рис. 1

С нашей точки зрения для осознанного восприятия модели «числовая окружность» можно использовать следующий зрительный образ. Представим винтовую линию в пространстве (рис.1). Пусть α - некоторая плоскость, перпендикулярная оси винтовой линии. Тогда ортогональной проекцией винтовой линии на плоскость α будет окружность ω. Пусть радиус данной окружности равен единице. Тогда, если за начало отсчета на окружности выбрать точку её пересечения с винтовой линией, и задать направление отсчета, то ω является числовой окружностью. Каждая точка окружности является образом всех точек винтовой линии, расположенных на прямой, параллельной оси этой линии, и проходящей через данную точку окружности. На рисунке 1 - это точки $M_\varphi, M_{\varphi-2\pi}, M_{\phi+2\pi}$. «Имена» двух таких соседних точек винтовой линии отличаются на 2π. Полученный образ позволяет школьникам осознать факт наличия различных имён одной и той же точки N_φ числовой окружности.

Очевидно, что построенную модель не очень удобно использовать для отбора корней тригонометрических уравнений, так как при этом необходимо работать с пространственной фигурой, а в тетради и на доске проще изображать плоские объекты. Поэтому рассмотрим образ винтовой линии при центральном проектировании на плоскость α, выбирая центр проектирования на оси винтовой линии «выше» плоскости α. Проектировать будем ту часть винтовой линии, которая располагается «ниже» центра проектирования. Её образом является плоская спираль (рис.2), причем образы точек, лежащих выше плоскости α, принадлежат виткам спирали вне окружности ω, а образы точек, лежащих ниже плоскости α, - виткам внутри окружности ω. Зрительный образ спирали можно получить, если наблюдатель находится на оси винтовой линии внутри её. Тогда витки винтовой линии выглядят постепенно сужающимися к центру.

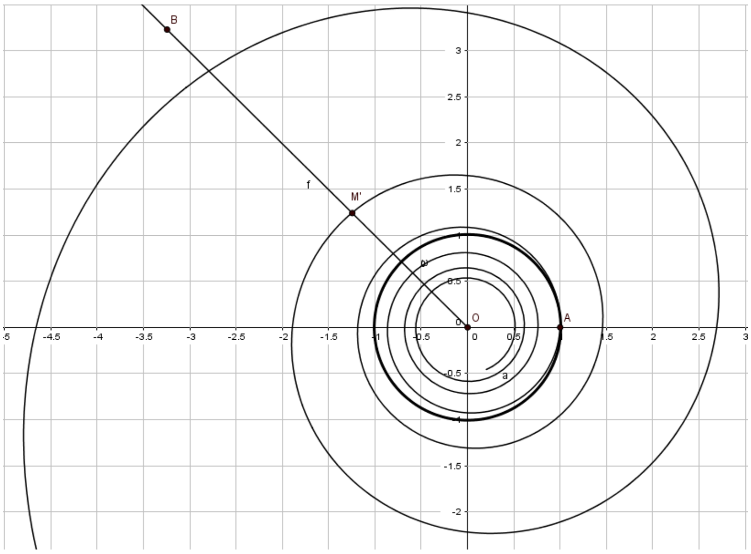


Рис. 2

Построенную модель можно использовать, например, для отбора корней тригонометрических уравнений.

Пример. Найдите все корни уравнения $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Решение. Сначала запишем все корни данного уравнения $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z$. Сделаем отбор корней с помощью спирали (рис.3). Сначала от точки A по спирали отсчитываем пять прямых углов при движении против часовой стрелки, получаем точку D, затем – восемь прямых углов или два круга в том же направлении, получаем точку F. Дуга DF спирали изображает отрезок $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$. Точки E и C соответствуют углу $\frac{5\pi}{6}$ на числовой окружности и спирали. Точка B отличается от точки C ровно на один виток спирали в положительном направлении движения, поэтому она соответствует углу $\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6}$. Как видно из рисунка, это единственный корень уравнения из серии решений $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, который принадлежит отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Из методических соображений на числовой окружности удобно откладывать точки, соответствующие углам $(-2\pi; 2\pi)$. Точки L и K соответствуют углу $-\frac{5\pi}{6}$ на числовой окружности и спирали. Точка G отличается от точки K ровно на два витка спирали в положительном направлении движения, поэтому она соответствует углу $-\frac{5\pi}{6} + 4\pi = \frac{19\pi}{6}$. Как видно из рисунка, это единственный корень уравнения из серии решений $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, который принадлежит отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

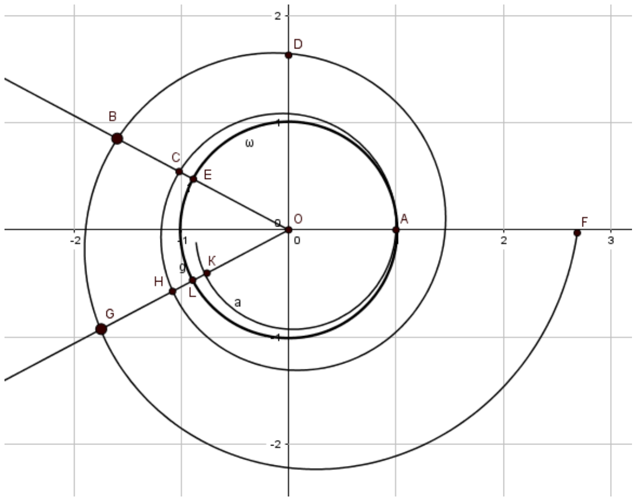


Рис. 3

Таким образом, в статье рассмотрены две различные модели и их наглядные образы, позволяющие упростить решение некоторых тригонометрических задач.

Литература

1. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч.1 Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2010. – 424 с.
2. Мордкович А.Г. Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе / А.Г.Мордкович // Математика в школе. - 2002. - №6. - С. 32-38.
3. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы: Учеб. пособие / Под ред. В.Д. Шадрикова. – М.: Гардарики, 2002. – 383 с.
4. Салмина Н.С. Знак и символ в обучении / Н.С.Салмина. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. - 288 с.

УДК 372.851

АВТОРСКАЯ ПРОГРАММА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА ПО МАТЕМАТИКЕ «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ И ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ»

Валиева С.М., учитель математики и физики первой квалификационной категории,
МОУ «Утар-Атынская СОШ» Арского муниципального района РТ
Sag1975@mail.ru

Аннотация. В статье раскрываются основные аспекты авторской программы по математике «Решение задач на построение сечений многогранников и тел вращения», предназначенной для учащихся 9 классов.

Ключевые слова: обучение математике, элективный курс, компьютерные технологии.

AUTHOR'S PROGRAM OF AN ELECTIVE COURSE IN MATHEMATICS "THE SOLUTION OF PROBLEMS ON THE CONSTRUCTION OF SECTIONS OF POLYHEDRA AND BODIES OF REVOLUTION"

S.M. Valieva, the teacher of mathematics and physics of the first qualifying category,
MOU "Utar-Ata Sosh" of the Arsky Municipal District of the Republic of Tatarstan
Sag1975@mail.ru

Abstract. The article reveals the main aspects of the author's program in mathematics «The solution of problems on the construction of sections of polyhedra and bodies of revolution», intended for students of 9 classes.

Keywords: teaching mathematics, elective course, computer technologies.

Главной целью использования элективных курсов в образовательных учреждениях является расширение возможностей развития мыслительной деятельности учащихся за счет интеграции знаний из различных предметных областей, свободного ориентирования в информационном пространстве. Проведение элективных курсов предоставляет ученику возможность работать на уровне повышенных требований, а результаты такого учебного процесса, в свою очередь, влияют как на степень подготовленности обучающихся к успешной сдаче итоговых государственных экзаменов, так и на перспективы продолжения образования после школы.

Элективные курсы по математике призваны сформировать у школьников представления о математике как части общечеловеческой культуры, как определённом методе познания мира [2].

Автором статьи разработан элективный курс «Решение задач на построение сечений многогранников и тел вращения», рассчитанный на 18 аудиторных часов и предназначенный для учащихся 9 класса, желающих расширить и углубить свои предметные знания по математике, сделать правильный выбор профиля обучения в старших классах и качественно подготовиться к единому государственному экзамену по математике. Рабочая программа элективного курса составлена на основе Федерального государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования (утвержден приказом Министерства образования и науки России от 17 мая 2012 г. № 413) и санитарно-эпидемиологических требований к условиям и организации обучения ОУ (утверждены постановлением Главного государственного санитарного врача РФ от 29.12.2010 г. № 189) [3].

Основными целями программы явились повышение уровня математической подготовки школьников, развитие пространственного мышления (как составной части математического мышления), геометрической интуиции. Курс намечает и использует целый ряд межпредметных связей, прежде всего, связанных с историей, искусством.

Методологической основой предлагаемого курса является деятельностный подход к обучению математике. Данный подход предполагает обучение не только готовым знаниям, но и деятельности по приобретению этих знаний, способов рассуждений, доказательств. В связи с этим в процессе изучения курса учащимся предлагаются задания, стимулирующие самостоятельное открытие ими математических фактов, новых, ранее неизвестных, приемов и способов решения задач.

Курс включает 4 раздела. Первый раздел посвящен знакомству учащихся с понятием «стереометрический чертеж» и требованиями, предъявляемыми к стереометрическим чертежам. Здесь же предусмотрены: исторический экскурс, направленный на знакомство обучающихся с основателями начертательной геометрии; занимательные факты, связанные с изображением таких фигур на плоскости, которые не могут существовать в трехмерном пространстве (например, работы шведского архитектора О. Рутерсвард). Во втором разделе раскрываются: сущность метода следа при решении стереометрических задач на построение сечений многогранников и тел вращения, выделяются базовые позиционные задачи, на основе которых выводится алгоритм построения сечений многогранников и тел вращения методом следа. Третий раздел «Метод внутреннего проектирования» знакомит учащихся с принципиально новым методом решения стереометрических задач на построение сечений многогранников и тел вращения, выходящим за рамки школьной программы. В данном разделе акцентируется внимание учащихся на понятиях «параллельное внутреннее проектирование» и «центральное внутреннее проектирование». Четвертый раздел «Комбинированный метод» нацелен на совершенствование навыков решения задач на построение сечений многогранников и тел вращения.

Для решения ряда проблемных учебных задач, включенных в каждый из разделов курса, привлекаются информационно-коммуникационные технологии, компьютерные средства с широкими мультимедийными и графическими возможностями, в частности, пакет символьной математики Maple. Задачи проблемного характера в данном случае направлены на стимулирование пространственного мышления школьников. Компьютер выступает здесь как средство моделирования и конструирования объемных геометрических фигур, наглядного представления их специфических свойств [1].

В настоящее время осуществляется апробация разработанного курса в МОУ «Утар-Атынская средняя общеобразовательная школа» Арского муниципального района РТ. Предлагаемый элективный курс представляет интерес не просто как частная методическая разработка, а как общий методический подход к проблеме совершенствования универсальных учебных действий учащихся на уроках математики современной средней школы.

Литература

1. Горохов Д.Н., Разумова О.В. Развитие пространственного мышления школьников графическими средствами пакета Maple / Д.Н. Горохов, О.В. Разумова // Информатика и образование. – 2007. – № 8. – С. 75-83.
2. Рванова А.С. Проектирование и реализация целевого и содержательного компонентов элективных курсов для классов математического профиля на основе локальной аксиоматизации: автореферат дис….канд. пед. наук. – Омск, 2006. – 20 с.
3. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. URL: http//минобрнауки.рф/документы (дата обращения 18.09.2017 г.)

УДК 51-8

ПРОЕКТ КАК МЕТОД ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОБУЧЕНИЯ

Васильева Е.А., учитель математики,
МБОУ «Лицей №116 им.М.И.Махмутова», г. Казань
elenavasilieva116@yandex.ru

Выборнова А.В., учитель истории,
МБОУ «Лицей №116 им.М.И.Махмутова», г. Казань
4522000144@edu.tatar.ru

Аннотация. Авторы данной статьи делятся опытом использования проектного метода на уроках математики и истории для повышения эффективности обучения.

Ключевые слова: проект, проблемно-ориентированное обучение, математика, история.

THE PROJECT AS A METHOD OF INCREASING THE EFFECTIVENESS OF LEARNING

E.A. Vasilieva, math teacher,
Lyceum № 116, Kazan
elenavasilieva116@yandex.ru

A.V. Vybornova, history teacher,
Lyceum № 116, Kazan
4522000144@edu.tatar.ru

Abstract. The authors of this article share the experience of using the project method in math and history classes to improve effectiveness of learning.

Keywords: project, problem basic learning, math, history.

Одна из главных задач современного образования заключается в развитии творческого потенциала учащегося. И здесь как нельзя лучше подходит методика проблемного обучения, которая как раз и предполагает творческое участие обучающихся в процессе приобретения новых знаний.

М. И. Махмутов, автор концепции проблемного обучения, так писал о нем: «…тип развивающего обучения, в котором сочетаются регулярная самостоятельная поисковая деятельность учащихся с усвоением ими готовых выводов науки, а система методов построена с учетом целеполагания и принципа проблемности; процесс взаимодействия преподавания и учения ориентирован на формирование познавательной самостоятельности студентов, устойчивости мотивов учения и мыслительных (включая и творческие) способностей в ходе усвоения ими научных понятий и способов деятельности, детерминированного системой проблемных ситуаций».

Одной из форм реализации проблемного обучения является метод проектов. Преподаватель создает проблемную ситуацию и управляет процессом разрешения ее учащимися. В силу того, что проблемно-ориентированный подход в обучении позволяет реализовывать различные проекты, мы с 2015 года начали работу над проектом «Узнай свою страну» совместно с московской школой №1158. Данный проект, является метапредметным, поскольку объединил математику и историю, и несет творческий, прикладной и информационный характер.

Целью данного проекта является - воспитание социальных чувств, познавательных интересов, формирование у ученика умение достойно жить, развиваться, чувствовать себя человеком, гражданином своей страны.

В рамках проекта была проделана следующая работа:

- подготовлен и проведен интегрированный урок «Квадратные уравнения и Отечественная война 1812 года» в 8 классе для слушателей курсов ГАОУ ДПО «Института развития образования Республики Татарстан» учителей математики по проблеме «Проектная деятельность учащихся как базовая образовательная технология в условиях реализации ФГОС»;

- создан историко-математический путеводитель «Казань историческая» (часть I), который был представлен и апробирован на Московской конференции «Формирование метапредметной компетенции учащихся и учителей в условиях введения ФГОС»(28.03.2016) и VI Международной НПК «Математическое образование в школе и вузе: теория и практика»(26.11.2016);

- ученические лектории по данной тематике с приглашением специалистов в рамках работы по профориентации;

- выступления учащихся на НПК различных уровней: III Городская НПК «Дни науки на базе МАОУ «Лицей№131», VIII Городская конференция школьников им. Д.В.Вилькеева», краеведческая конференция в КФУ «Татарстан в математических задачах»;

- подготовка квеста для учащихся школы №1158г. Москвы «Экскурсия в задачах по центру Казани».

Учащиеся нашего лицея составляли задачи. Они с большим интересом изучали историческую и краеведческую литературу, бороздили просторы Интернета, проделали большую работу, подбирая и составляя задания по математике.

Правила квеста:

Чтобы пройти квест класс делится на две команды, которые получают маршрутный лист, содержащий по 6 задач. После каждой правильно решенной задачи команды будут переходить с одной достопримечательности к другой, при этом, узнавая ее историю. Конечной целью обеих команд является одна из интереснейших достопримечательностей нашего города. Виртуальный квест был проведен для московских школьников лицея №1158 в весенние каникулы 2016-2017 учебного года. А уже в мае этого же года ребята, приехав в Казань, прошли по тем историческим местам, с которыми уже были знакомы заочно.

Мы предлагаем одну из задач маршрутного листа.

Задача №2.

Историческая справка. Кремлевская набережная – одна из главных достопримечательностей нашего города. На берегу реки Казанки находится прогулочная зона, которую так любят жители столицы, и ее гости *(видео набережной).*

Условие. *Определите, кто является архитектором Кремлевской набережной*.

1) Решите квадратные уравнения. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите меньший корень.

1) $x^2+6x+9=0$; 2) $5x^2-15x=-10$; 3) $x^2+5x=6$; 4) $-10x^2-x+3=0$;
5) $-x^2-8x=16$; 6) $9y+5=2y^2$; 7) $x^2+7=8x$; 8) $a^2+a-12=0$.

2) Затем соотнесите ответы с буквами в таблице.

-0,5	1	-3	-4	-6	-0,6
ш	и	з	н	г	а

Презентация игры находится по адресу: https://yadi.sk/i/uX7vb34I3E6L3z

Большой многолетний проект «Узнай свою страну», работа над которым продолжается, включает в себя создание следующих глав Историко-математического путеводителя по Казани, историко-математических игр, дружественных визитов, проведение тематических лекториев.

Проектный метод привлек наше внимание так как, учащиеся получают в процессе подготовки проекта возможность работать творчески, самостоятельно, планировать свои действия, анализируя и обобщая информацию. Каждый из участников проекта получает отличную возможность для самореализации, и приобретает навыки работы в коллективе. Кроме этого данный проект способствует мотивации в учебной деятельности. Получив творческий импульс, у ребят возникает желание к расширению своих знаний по математике, истории родного края и стремление к саморазвитию.

Литература

1. Асмолов А.Г. Системно-деятельностный подход к разработке стандартов нового поколения // Педагогика. – 2011. – №4. – С. 12-18.
2. Глухов М.С. Tatarica. Энциклопедия. – Казань: Изд-во «Ватан», 1997. – 453 с.
3. Махмутов М. И. Проблемное обучение. Основные вопросы теории / М. И. Махмутов. – М.: Педагогика, 1975. – 368с.
4. www.иске-казань.рф Памятники архитектуры . Старая Казань.

УДК 378.147
372.851

О ПРОПЕДЕВТИКЕ ИЗУЧЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ В КУРСЕ ПЛАНИМЕТРИИ В ВУЗЕ И КЛАССАХ С УГЛУБЛЕННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ МАТЕМАТИКИ

Винтиш Т.Ю., кандидат педагогических наук, доцент,
Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Челябинск
Мартынова Е.В.,
Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Челябинск
martynova@cspu.ru

Прокопенко Г.И., кандидат педагогических наук, доцент,
Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет,
г. Челябинск

Аннотация. В работе представлена система примеров, иллюстрирующих закономерности возникающие при рассмотрении пространств разной размерности.

Ключевые слова: профильные классы, геометрия.

ABOUT PROPAEDEUTICS OF STUDYING OF STEREOMETRY IN PLANIMETRY IN HIGHER EDUCATION INSTITUTION AND PROFILE CLASSES

T.Y. Vintish, PhD education, associate professor,
Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Chelyabinsk
E.V. Martynova,
Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Chelyabinsk
G.I. Prokopenko, PhD education, associate professor,
South Ural State Humanitarian Pedagogical University,
Department of Mathematics and Methods of Teaching Mathematics, Chelyabinsk
martynova@cspu.ru

Abstract. The system of the examples illustrating the regularities arising by consideration of spaces of different dimension is presented in this work.

Keywords: profile classes, geometry.

В процессе преподавания спецкурсов по планиметрии в вузе и классах с углубленным изучением математики мы сталкиваемся с проблемой, что учащиеся не воспринимают стереометрические задачи при решении и закреплении планиметрических задач. Учащиеся не обобщают сведения, полученные при изучении геометрии двумерного пространства, не переносят их на объекты трехмерного, четырехмерного пространства. Однако человеку с рождения свойственно ощущать трехмерное пространство. Он знает из опыта, наблюдает его объекты, свойства различных трехмерных тел. Решать задачи по стереометрии мы начинаем только в старших классах, когда формирование пространственных представлений с точки зрения психологов, завершилось. Стереометрию и планиметрию традиционно начинают изучать с помощью аксиоматического метода, хотя формирование мышления происходит в обратном направлении: от конкретного к абстрактному, но не наоборот. В работе с одаренными детьми и учащимися, увлеченными геометрией мы стараемся использовать наблюдение, опыт, интуицию; вырабатываем умения обобщения, систематизации, предвидения.

Целью наших спецкурсов в среднем звене является не только овладение фактами и методами решения различных типов планиметрических задач, но и перенос этих фактов и методов в трехмерное и многомерное пространства.

Простейшая фигура в n – мерном пространстве состоит из (n +1) точек. При n=1 это будет отрезок АВ, при n=2 – получаем треугольник АВС, где $C \notin AB$. При n=3 берем треугольник АВС и точку Д, не лежащую в плоскости АВС, получим тетраэдр АВСД. Продолжая: при n=4 берем простейшую фигуру трехмерного пространства – тетраэдр АВСД и точку Е, не принадлежащую этому трехмерному пространству и получаем простейшую фигуру АВСДЕ, состоящую из 5 вершин, 10 сторон и 10 двумерных граней и 5 трехмерных граней. Заметим, что число вершин простейших фигур будет равно C_n^1, число сторон равно C_n^2, число двумерных граней - C_n^3 и т.д.

Аналогично определяется сфера в любом пространстве как множество точек, равноудаленных от точки С, называемой центром, на данное расстояние, называемым радиусом сферы.

На спецкурсах рассматриваются свойства медиан треугольника, тетраэдра. Например: медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в отношении 2:1, считая от вершины. Медианы тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся в отношении 3:1.

Высота СН треугольника АВС находится по формуле: СН = СА $\sin\alpha$, где α - угол между основанием АВ и стороной АС. Высота тетраэдра ДН находится по формуле: ДН = ДА $\sin\alpha$, где α - угол между основанием АВС и стороной АД.

Аналогично можно рассуждать относительно площадей фигур и их объёмов, и вывести формулы для вычисления радиусов вписанных окружностей, сфер и т.д.

Интересно обобщаются теоремы Менелая и Чевы, известные для треугольников на тетраэдры.

В школьном курсе стереометрии не рассматриваются свойства касательных и секущих, пересекающихся хорд для сферы. Поэтому теоремы планиметрии относительно окружности переносятся и обобщаются для сферы.

Аналогично можно рассмотреть и преобразования на плоскости, инверсию относительно окружности и перенести эти преобразования в трехмерное пространство.

Как показал опыт преподавания спецкурсов, ребята легче усваивают стереометрический материал, школьники успешно сдают ЕГЭ, а студенты получают материал для работы с одаренными детьми и умение создавать проблемные ситуации.

Литература

1. Винтиш Т.Ю. Межпредметные связи физики и геометрии и их реализация в геометрии / Т.Ю. Винтиш, Е.В. Мартынова, Г.И. Прокопенко //Актуальные вопросы преподавания математики и информатики (сборник научных трудов Второй Всероссийской научно-практической конференции 16 апреля 2007г.). – Биробиджан. – С.66-71.

2. Севостьянова С.А. Подготовка студентов к проектной деятельности при обучении математике / С.А. Севостьянова, Е.В. Мартынова// Стандартизация математического образования: проблемы внедрения и оценка эффективности материалы XXXV международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. – 2016. – С. 309-311.

УДК 004.9

ЗАДАЧИ ОРГАНИЗАЦИИ ЗАНЯТИЙ ПРИ ДИСТАНЦИОННОМ ОБУЧЕНИИ

Волокобинский М.Ю., доктор технических наук,
Санкт-Петербургский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации, г. Санкт-Петербург
MYVolokobinskij@fa.ru

Аннотация. В работе рассматриваются вопросы дистанционного обучения студентов, в том числе и в группах. Предлагается провести диверсификацию обучающихся для того, чтобы сделать занятия более эффективными. Разработана методика для организации обследования обучаемых с целью получения рекомендаций для создания однородных групп обучаемых. Это позволит повысить качество дистанционного обучения, поднять престиж и репутацию вузов.

Ключевые слова: образовательные технологии, информационно-коммуникационное поле, методика преподавания, дистанционное образование, потенциал студентов.

OBJECTIVES OF ORGANIZATION OF LESSONS AT REMOTE TRAINING

M.Y. Volokobinskij., D. Sci. (Engin.),
Saint-Petersburg Branch of Financial University under the Government of Russian Federation, Saint-Petersburg
MYVolokobinskij@fa.ru

Abstract. The work considers the problems of distance learning of students, including group studies. It is proposed to diversify the students in order to make the classes more effective. A methodology has been developed for organizing a survey of students in order to obtain recommendations for the creation of homogeneous groups of trainees. This will improve the quality of distance learning, raise the prestige and reputation of universities.

Keywords: educational technologies, information and communication fields, teaching methods, distance education, the potential of students.

В настоящее время возникает острая необходимость в новых, инновационных подходах к способам получения информации и знаний. Эта тенденция основана на стремлении к построению общества, основанного на Знании. Эта задача требует создания новых методов и организационных структур, касающихся образовательной отрасли. Такие структуры должны усиливать эффективность высшего образования, ориентироваться на запросы экономики и удовлетворять новым требованиям по квалификации, предъявляемым к выпускникам вузов [3].

Развитие информационно-коммуникационных технологий (ИКТ) открывает сегодня для системы высшего образования новые возможности более совершенного уровня обучения. Широкое использование ИКТ, бесспорно, совершенствует образовательную отрасль. В рамках современного дистанционного образования происходит наиболее глубокое привлечение ИКТ.

В современных условиях такие технологии применяются в Финансовом университете при Правительстве Российской Федерации не только для изучения широкого спектра дисциплин, от математических и экономических до гуманитарных, а также для ведения практико-лабораторных занятий для студентов в различных регионах [2].

Рассмотрим проблемы, возникающие при реализации данных образовательных технологий.

Первой проблемой является создание качественно нового подхода к преподаванию – такой методики, которая базируется на специфике данного вида коммуникативного общения. Такая методика была разработана, были созданы методические указания по проведению вебинаров: лекций, лабораторных работ, практических занятий, и, что особенно важно, для осуществления контроля.

Вторая проблема – подбор программного обеспечения для дистанционных занятий. Для преподавания лекций, проводимых в режиме реального времени (лекций on-line) наиболее удачна программа Adobe Connect Pro, которая не только способствует легкой загрузке презентаций, документов, программ, но также позволяет в интерактивном режиме обеспечить проверку знаний студентов.

Для проведения вебинаров в компьютерной аудитории на дистанционном обучении рекомендуется использование программ Remote Office и Lite Manager, основное достоинство которых в том, что они позволяют при затруднении у обучаемых самому преподавателю управлять дистанционно компьютером студентов.

Третьей проблемой является разный качественный состав студентов. Как показывает практика, нередко преподаватель, при работе с обучаемыми, стремится достичь освоения материала всеми студентами. Поэтому он сдвигает акцент преподавания в сторону отстающих студентов. Та же ситуация возникает и на лабораторных работах, и практических занятиях, когда преподаватель, работая с удалённой аудиторией, ждет выполнения текущего задания от студента. Это не позволяет продолжить занятие оставшейся части группы [1].

В сложившемся положении определенные отрицательные последствия неизбежны: у сильных студентов мотивация к изучению материала снижается, так как они начинают отвлекаться, их внимание рассеивается, интерес к дисциплине постепенно теряется. Негативно влияет эта проблема и на преподавателя, который снижает эффективность процесса обучения, рассматривая слишком упрощённые задачи, что, в конечном итоге, приводит к уменьшению объема знаний студентов по преподаваемой дисциплине.

Самым очевидным решением данной проблемы станет разделение студентов на группы по уровню знаний уже на первом занятии, для того, чтобы те из них, кто имеет более высокий уровень подготовки, выполняли задания среднего и повышенного уровня сложности, а остальная часть группы, постоянно взаимодействуя с преподавателем, решали более простые задачи. Нужно подчеркнуть, что осуществление непрерывного контроля всех обучаемых, включающего проверку и коррекцию работ, является обязательным условием.

Чтобы имеющие более высокий уровень подготовки студенты не отвлекались от выполнения своих заданий, слушая указания преподавателя, адресованные другой подгруппе, будет рационально разбить поток на лабораторные группы, учитывая уровни подготовки обучающихся.

Очевидно, что при таком формировании групп для семинарских и практических занятий мы должны учесть несколько приоритетных факторов и провести исследование, используя многофакторный анализа. Алгоритм выявления главных показателей при проведении анализа описан многими авторами [1], [2]. Информацию о потенциальных способностях студентов получают путём анкетирования и тестирования. Обычно используется шестнадцать показателей, которые характеризуют потенциал студентов в обучающей системе. Десять первых показателей характеризуют уровень интеллектуального развития и запас знаний студента (например, словарный запас, умение абстрагироваться, математические способности, индуктивное и комбинаторное мышление), одиннадцатый – творческий потенциал, двенадцатый – уровень адаптивности, последние – мотивация к учебной деятельности.

Нами была поставлена конкретная задача – на основе проведенного анализа сформулировать рекомендации по организации качественно однородных групп (по критерию уровень подготовки студента) для проведения практических занятий и лабораторных работ. Отметим, что такой подход может быть использован не только при дистанционном обучении, но и при проведении занятий в традиционной форме.

Для простоты обработки результата мы ограничились восемью показателями, применяемыми при тестировании и анкетировании. Покажем их. X_1 – начальный уровень теоретической подготовки к предмету; x_2 – уровень знаний по текущему материалу; x_3 –уровень владения персональным компьютером; x_4 – способность использовать на практике знания, полученные на занятиях; x_5 – способность к адаптации; x_6 – способность к абстрагированию; x_7 – уровень мотивации получения знаний по предмету; x_8 – уровень мотивации получить высшее образование. Каждый показатель может принимать значения от 0 до 1. Для принятия решения исследовались три студенческие группы по 20 человек при изучении ими дисциплин «Информатика», «Математика» и «Теория вероятностей и математическая статистика» [3].

Для того, чтобы выявить наиболее важные, сильнее всего влияющие на ситуацию факторы, все показатели мы нормируем (приводим к единой шкале) по следующей формуле:

$$y_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{S_i} \tag{1}$$

где x_{ij} – значение j-го показателя , у i-го студента (j=1,2…,8; i=1,2,…,120), S_i − сумма показателей у i-го студента (j=1,2…,8; i=1,2,…,120), $\bar{x}_j$– среднее значение показателя j по группе студентов.

На основе анализа изучаемых показателей нами выделены четыре доминирующих фактора, воздействующих на ситуацию: показатель интеллекта (связан с первичными показателями x_2 и x_4), общий уровень подготовки (связан с x_1 и x_3), показатель адаптивности (x_5 и x_6) и уровень мотивации к учебной деятельности (x_7 и x_8).

Вклад k-го фактора в общую дисперсию определяется по формуле:

$$V_k = \sum_{j=1}^{8} a_{jk}^2 \quad (2) \tag{2}$$

где V_k – собственное значение k-го фактора,

a_{jk} – вес k-го фактор в j-м показателе.

Значения весовых коэффициентов a_{jk} определяются экспертным методом.

Суммарный вклад факторов вычисляется следующим образом:

$$\gamma_k = \frac{1}{8} \sum_{j=1}^{8} V_k \ . \tag{3}$$

Предел этой суммы задается обычно равным 0,8 – 0,95, и по этой величине определяется, сколько последних главных компонент (факторов) можно без ущерба для решаемой задачи изъять из рассмотрения, сократив тем самым ее размерность. Методом главных компонент выделены последовательно главные факторы по принципу максимального вклада в дисперсию. Общий вклад первых двух выделенных факторов (показатель интеллекта и общий уровень подготовки) равен 72,59%. Этого достаточно, чтобы наиболее полно описать изучаемое явление.

Для формирования однородных групп удобно использовать нормированные значения отобранных (главных) факторов:

$$f_{ki} = \frac{1}{V_k}(a_{ik}y_{1i} + a_{2k}y_{2i} + \ldots + a_{nk}y_{ni}) \tag{4}$$

где k – номер фактора,

i – номер студента.

Принято считать, что при:

f_k <1 – уровень по данному фактору ниже среднего;

– 1 < f_k ≤ 1 – средний уровень;

f_k > 1 – уровень выше среднего.

Проведённый анализ позволил установить, что из обследуемого потока в 120 человек 30 студентов имеют уровень выше среднего, 22 – ниже среднего и 68 человека – средний уровень. Отсюда можно сделать вывод, что для оптимальной организации учебного процесса необходимо исследуемый поток делить на практические занятия не формально, не на шесть групп по 20 человек, а по качественно однородному составу на восемь групп:

– две группы с высоким уровнем подготовки (по 15 студентов каждая);

– четыре группы со средним уровнем подготовки (по 17 студентов каждая);

– две группы с уровнем подготовки ниже среднего (по 11 студентов каждая).

Такой подход к формированию групп позволит повысить интенсивность образовательного процесса, повысить заинтересованность студентов к изучаемому предмету, а следовательно, гарантирует более высокий уровень знаний. Вооружая студентов владением современными технологиями и компетентностью, вузы гарантируют своим выпускникам высокий уровень образования и востребованности на рынке труда, повышая одновременно престиж и репутацию вуза.

Литература

1. Баринова Т.П., Казакова В.Н., Карюкина С.В. Модель организации дистанционного обучения, как основа для создания индивидуальной образовательной траектории // Дистанционное обучение: реалии и перспективы. Материалы I региональной научно-практической конференции. – СПб: ГБУ ДПО «СПбЦОКОиИТ». – 2016. – 113 с.
2. Пекарская О.А. Интеграционные образовательные технологии, применяемые в дистанционном обучении студентов, - важнейший ресурс образования / В сборнике: Актуальные проблемы инфотелекоммуникаций в науке и образовании. Сборник научных статей. – 2016. – С. 396-400.
3. Пекарская О.А. Управление качеством преподавания математики в вузе с помощью квалиметрических методов / Задачи в обучении математике, физике и информатике: теория, опыт, инновации. Материалы II Международной научно-практической конференции, посвященной 125-летию П.А.Ларичева. – 2017. – С. 126-131.
4. Санкт-Петербургский ресурс для дистанционного обучения: [Электронный ресурс] – 2016. – Режим доступа: http://do2.rcokoit.ru

УДК 514.112.4

РАВЕНСТВО МЕНЕЛАЯ, ПУЧОК ПРЯМЫХ И МНОГОУГОЛЬНИК

Гаврилов В.К., кандидат физико-математических наук,
Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева, г. Красноярск
gavrilov1009@mail.ru

Аннотация. Предложено рассмотрение равенства Менелая в качестве равенства для пересечений сторон угла и двух прямых пучка. Получено равенство единице для пересечений сторон угла и трёх прямых пучка. Предложен новый алгоритм доказательства аналога теоремы Понселе для многоугольника с нечётным и чётным числом сторон. Получено равенство единице для многоугольника вида «звезда».

Ключевые слова: теоремы Менелая, Чевы, многоугольник, пучок прямых, контур.

MENELAUS’ EQUALITY, BUNCH OF DIRECT LINES AND POLYGON

V.K. Gavrilov,
State Pedagogic University of name V.P. Astaviav, Krasnoiarsk,
gavrilov1009@mail.ru

Abstract. It is offered consideration Menelau’s equality as an equality for intersection the sides of the angle and two cross-line the bunch of direct lines. It is received equality to unit for intersection the sides of the angle and three cross-line the bunch of direct lines. It is considered variant of proof Ponsele’s theorem for polygon with uneven and even numbers of the sides. It is offered equality to unit for polygon of the form "star".

Key words: Menelaus’, Ceva’s theorems, polygon, bunch of direct line, contour.

Известно расширение действия равенства Чевы на многоугольник с нечётным числом сторон по теореме Понселе: «Прямые, соединяющие какую-нибудь точку с вершинами многоугольника, имеющего нечетное число сторон, образуют на противоположных его сторонах такие отрезки, что произведение отрезков, не имеющих общих концов, равно произведению остальных отрезков», [1, с. 35]. Делением одной части равенства на другую теорема Понселе легко приводится к виду равенства единице.

Будем искать расширение действия равенства Чевы на многоугольник с чётным числом сторон на основе связи равенства Чевы с равенством Менелая.

В [2, с. 8] предложен вариант расширенной трактовки теоремы Менелая:

Теорема 1. *Если прямые A_0B_0, A_0C_0, B_0B_1, C_0C_1 пересекаются, то отрезки между точками пересечения прямых образуют ряд контуров, на каждом из которых, при направленном обходе контура, произведение отношений длин отрезков равно единице.*

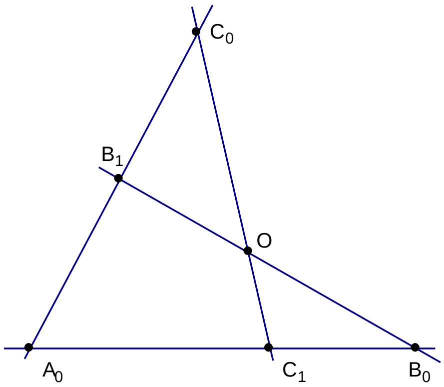
В теореме Менелая пересечения четырёх прямых традиционно рассматривают в качестве треугольника и прямой [1, с. 37], секущей треугольник (рис. 1). Теорема 1 не ограничивает действие теоремы Менелая треугольником и секущей, в частности, рассмотрим пересечения четырёх прямых в теореме Менелая в качестве пересечений двух прямых, образующих угол, и прямых пучка.

Теорема 1, следствие 1. *Пересечения прямых, образующих угол, и прямых пучка.*

В пучке две прямых.

Доказательство. Следствие 1 эквивалентно теореме Менелая (рис. 1), равенство (1); доказательство известно [1, с. 37], [2, с. 9, ф.1].

$$\frac{A_0B_0}{B_0C_1}\cdot\frac{C_1O}{OC_0}\cdot\frac{C_0B_1}{B_1A_0}=1. \tag{1}$$



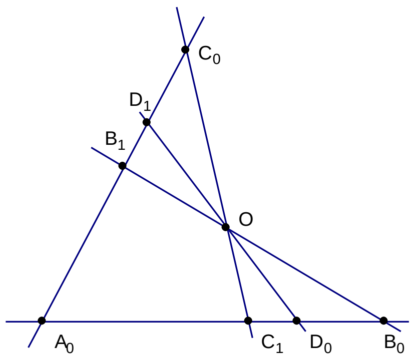
$$\left(\frac{A_0B_0}{B_0C_1}\right)\cdot\left(\frac{C_1O}{OC_0}\right)\cdot\left(\frac{C_0B_1}{B_1A_0}\right)=1,00$$

Рис. 1

Ремарка. На рисунках приведены доказанные равенства в виде равенств единице. Появление нулей после единицы не связано с доказательством и обусловлено численной проверкой равенств на компьютере (программа The Geometer's Sketchpad V4 KCP Technologies ,– «Живая геометрия»).

В пучке три прямых.

Доказательство. На рисунке 1 через центр O пучка проведём прямую D_0D_1 и рассмотрим пересечения двух прямых A_0B_0, A_0C_0, образующих угол A_0, и трёх прямых пучка, B_0B_1, C_0C_1, D_0D_1, с центром в точке O (рис. 2). Будем искать равенство единице на контуре, образованном отрезками прямых между точками пересечений: C_1, O, C_0, D_1, B_1, O, B_0, D_0, C_1.



$$\left(\frac{C_1O}{OC_0}\right)\cdot\left(\frac{C_0D_1}{D_1B_1}\right)\cdot\left(\frac{B_1O}{OB_0}\right)\cdot\left(\frac{B_0D_0}{D_0C_1}\right)=1,00$$

Рис. 2

Согласно (1) для прямой D_0D_1, секущей треугольники $A_0B_0B_1$ и $A_0C_1C_0$, соответственно имеем равенства:

$$\frac{A_0D_1}{D_1B_1}\cdot\frac{B_1O}{OB_0}\cdot\frac{B_0D_0}{D_0A_0}=1;$$

$$\frac{A_0D_0}{D_0C_1}\cdot\frac{C_1O}{OC_0}\cdot\frac{C_0D_1}{D_1A_0}=1.$$

Перемножив равенства, получим:

$$\frac{C_1O}{OC_0}\cdot\frac{C_0D_1}{D_1B_1}\cdot\frac{B_1O}{OB_0}\cdot\frac{B_0D_0}{D_0C_1}=1. \qquad (2)$$

Равенство единице найдено, – равенство (2), – следствие 1 теоремы 1 доказано.

С помощью (2) докажем теорему 2, расширяющую действие равенства Чевы на многоугольник с нечётным и чётным числом сторон.

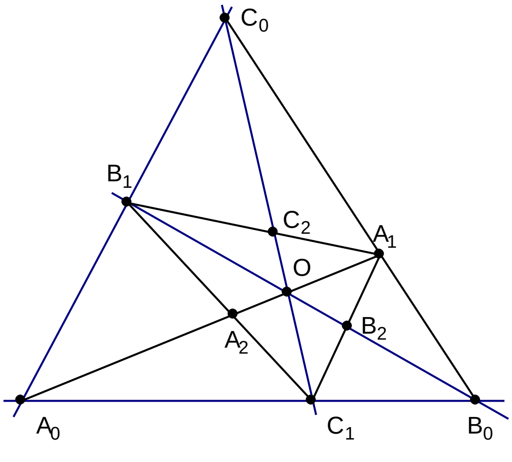
Теорема 2. *Прямые пучка с центром в многоугольнике, поочерёдно проходящие через вершины и пересекающие стороны углов многоугольника, отсекают на прямых, проходящих через вершины углов многоугольника, отрезки, образующие контур, при направленном обходе которого, произведение отношений длин отрезков на сторонах контура равно единице.*

Следствие 1. *В случае нечётного числа прямых в пучке контур образован отрезками на сторонах многоугольника.*

Следствие 2. *В случае чётного числа прямых в пучке контур образован отрезками на сторонах многоугольника и отрезками на прямой пучка, принятой за отсчётную.*

Докажем следствие 1 теоремы 2 на примере треугольника.

Доказательство следствия 1. На рисунке 1 проведём прямые A_0O, B_0C_0, точку пересечения прямых обозначим через A_1. Проведём отрезки A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1, точки пересечения отрезков с прямыми A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 обозначим соответственно через A_2, B_2, C_2 (рис. 3). В каждом из треугольников $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$ прямые пучка с центром в точке O поочерёдно проходят через вершины и пересекают стороны углов треугольника.



$$\left(\frac{A_0B_1}{B_1C_0}\right)\cdot\left(\frac{C_0A_1}{A_1B_0}\right)\cdot\left(\frac{B_0C_1}{C_1A_0}\right)=1,00$$

$$\left(\frac{A_1C_2}{C_2B_1}\right)\cdot\left(\frac{B_1A_2}{A_2C_1}\right)\cdot\left(\frac{C_1B_2}{B_2A_1}\right)=1,00$$

Рис. 3

Согласно (2) для каждой пары противолежащих сторон треугольников $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$ имеем равенства:

$$\frac{A_0O}{OA_1}\cdot\frac{A_1C_2}{C_2B_1}\cdot\frac{B_1O}{OB_0}\cdot\frac{B_0C_1}{C_1A_0}=1;$$

$$\frac{B_0O}{OB_1}\cdot\frac{B_1A_2}{A_2C_1}\cdot\frac{C_1O}{OC_0}\cdot\frac{C_0A_1}{A_1B_0}=1;$$

$$\frac{C_0O}{OC_1}\cdot\frac{C_1B_2}{B_2A_1}\cdot\frac{A_1O}{OA_0}\cdot\frac{A_0B_1}{B_1C_0}=1.$$

Перемножив равенства, получим:

$$\left(\frac{A_0B_1}{B_1C_0}\cdot\frac{C_0A_1}{A_1B_0}\cdot\frac{B_0C_1}{C_1A_0}\right)\cdot\left(\frac{A_1C_2}{C_2B_1}\cdot\frac{B_1A_2}{A_2C_1}\cdot\frac{C_1B_2}{B_2A_1}\right)=1. \tag{3}$$

Поскольку форма треугольника $A_0B_0C_0$ постоянна, а форма треугольника $A_1B_1C_1$ зависит от выбора положения точки O, то треугольники независимы и полученное равенство (3) эквивалентно равенствам:

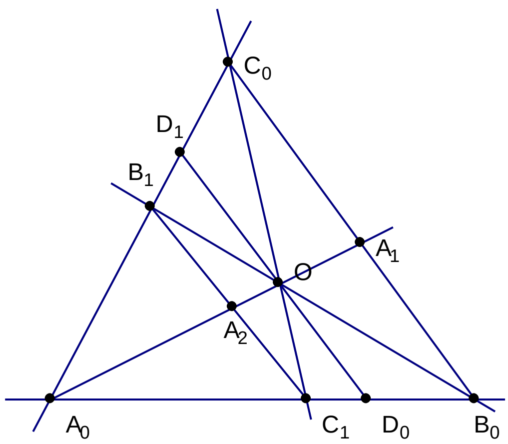
$$\frac{A_0B_1}{B_1C_0}\cdot\frac{C_0A_1}{A_1B_0}\cdot\frac{B_0C_1}{C_1A_0}=1; \tag{3.1}$$

$$\frac{A_1C_2}{C_2B_1}\cdot\frac{B_1A_2}{A_2C_1}\cdot\frac{C_1B_2}{B_2A_1}=1. \tag{3.2}$$

Равенство единице для треугольника получено, – равенство (3.1), – следствие 1 теоремы 2 доказано. Полученное для каждого треугольника равенство является равенством Чевы. Аналогично доказывается и теорема Понселе для случая многоугольника с нечётным числом сторон большим трёх.

Докажем следствие 2 теоремы 2 на примере четырёхугольника.

Доказательство следствия 2. На рисунке 1 проведём прямые A_0O, B_0C_0, D_0D_1 и отрезок B_1C_1; точки пересечения отрезков с прямой A_0O обозначим A_1, A_2 (рис. 4). Рассмотрим четырёхугольник $C_1B_0C_0B_1$ и четыре прямых пучка с центром O, – A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1, D_0D_1, из которых поочерёдно две – B_0B_1, C_0C_1, каждая проходит через две вершины углов четырёхугольника, а две, – A_0A_1, D_0D_1, каждая пересекает две стороны четырёхугольника.



$$\left(\frac{C_1O}{OC_0}\right)\cdot\left(\frac{C_0D_1}{D_1B_1}\right)\cdot\left(\frac{B_1A_2}{A_2C_1}\right)\cdot\left(\frac{C_1O}{OC_0}\right)\cdot\left(\frac{C_0A_1}{A_1B_0}\right)\cdot\left(\frac{B_0D_0}{D_0C_1}\right)=1{,}00$$

Рис. 4

Согласно (2) для каждой пары противолежащих сторон четырёхугольника имеем равенства:

$$\frac{C_1O}{OC_0}\cdot\frac{C_0D_1}{D_1B_1}\cdot\frac{B_1O}{OB_0}\cdot\frac{B_0D_0}{D_0C_1}=1;$$
$$\frac{B_0O}{OB_1}\cdot\frac{B_1A_2}{A_2C_1}\cdot\frac{C_1O}{OC_0}\cdot\frac{C_0A_1}{A_1B_0}=1.$$

Перемножив равенства, получим:

$$\frac{C_1O}{OC_0}\cdot\frac{C_0D_1}{D_1B_1}\cdot\frac{B_1A_2}{A_2C_1}\cdot\frac{C_1O}{OC_0}\cdot\frac{C_0A_1}{A_1B_0}\cdot\frac{B_0D_0}{D_0C_1}=1. \tag{4}$$

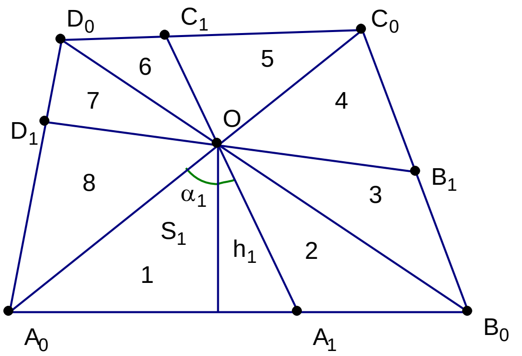
Равенство единице для четырёхугольника получено, – равенство (4), – следствие 2 и теорема 2 доказаны. Аналогично доказывается теорема 2 для случая многоугольника с чётным числом сторон большим четырёх.

В многоугольнике с чётным числом сторон половина прямых пучка не проходит через вершины многоугольника и, следовательно, прямыми Чевы [1, с. 11] не является. Вероятно, это и объясняет отсутствие аналога теоремы Чевы для многоугольника с чётным числом сторон.

Получим для многоугольника с чётным числом сторон (четырёхугольника) доказанное равенство (4) известным способом отношения площадей треугольников, построенных на сторонах многоугольника [1, с. 35].

Будем искать при направленном обходе контура четырёхугольника результат последовательного деления и умножения отношений длин отрезков, противолежащих вертикальным углам в центре пучка. Такой алгоритм поиска обеспечивает для многоугольника с нечётным числом сторон выполнение утверждения теоремы Понселе (см. выше) о равенстве единице отношения произведений длин отрезков, не имеющих общих концов.

Действительно, отрезки на сторонах многоугольника, противолежащие вертикальным углам в центре пучка, общих концов не имеют, а чтобы в произведении отношений длин отрезков не оказались смежные отрезки, при направленном обходе контура многоугольника необходимо чередовать деление и умножение отношений длин отрезков, не имеющих общих концов.



$$\left(\frac{A_0A_1}{A_1B_0}\right)\cdot\left(\frac{B_0B_1}{B_1C_0}\right)\cdot\left(\frac{C_0O}{OA_0}\right)\cdot\left(\frac{A_0D_1}{D_1D_0}\right)\cdot\left(\frac{D_0C_1}{C_1C_0}\right)\cdot\left(\frac{C_0O}{OA_0}\right)=1{,}00$$

Рис. 5

Аналогично [1, с. 35] (рис. 5) имеем равенства:

$$2\cdot S_1=h_1\cdot A_0A_1=A_0O\cdot A_1O\cdot\sin(\alpha_1);\quad 2\cdot S_2=h_2\cdot A_1B_0=A_1O\cdot B_0O\cdot\sin(\alpha_2);$$
$$2\cdot S_3=h_3\cdot B_0B_1=B_0O\cdot B_1O\cdot\sin(\alpha_3);\quad 2\cdot S_4=h_4\cdot B_1C_0=B_1O\cdot C_0O\cdot\sin(\alpha_4);$$
$$2\cdot S_5=h_5\cdot C_0C_1=C_0O\cdot C_1O\cdot\sin(\alpha_5);\quad 2\cdot S_6=h_6\cdot C_1D_0=C_1O\cdot D_0O\cdot\sin(\alpha_6);$$
$$2\cdot S_7=h_7\cdot D_0D_1=D_0O\cdot D_1O\cdot\sin(\alpha_7);\quad 2\cdot S_8=h_8\cdot D_1A_0=D_1O\cdot A_0O\cdot\sin(\alpha_8).$$
$$h_1=h_2;\, h_3=h_4;\, h_5=h_6;\, h_7=h_8;\qquad \alpha_1=\alpha_5;\,\alpha_2=\alpha_6;\,\alpha_3=\alpha_7;\,\alpha_4=\alpha_8.$$

Далее, согласно алгоритму поиска получим:

$$\frac{A_0A_1}{C_0C_1}\cdot\frac{C_1D_0}{A_1B_0}\cdot\frac{B_0B_1}{D_0D_1}\cdot\frac{D_1A_0}{B_1C_0}=(\frac{S_1}{S_5}\cdot\frac{S_6}{S_2}\cdot\frac{S_3}{S_7}\cdot\frac{S_8}{S_4})\cdot(\frac{h_5}{h_1}\cdot\frac{h_2}{h_6}\cdot\frac{h_7}{h_3}\cdot\frac{h_4}{h_8})=$$

$$=\frac{A_0O\cdot A_1O}{C_0O\cdot C_1O}\cdot\frac{C_1O\cdot D_0O}{A_1O\cdot B_0O}\cdot\frac{B_0O\cdot B_1O}{D_0O\cdot D_1O}\cdot\frac{D_1O\cdot A_0O}{B_1O\cdot C_0O}=(\frac{A_0O}{C_0O})^2.$$

Или:

$$\frac{A_0A_1}{C_0C_1}\cdot\frac{C_1D_0}{A_1B_0}\cdot\frac{B_0B_1}{D_0D_1}\cdot\frac{D_1A_0}{B_1C_0}=(\frac{A_0O}{C_0O})^2. \qquad (5)$$

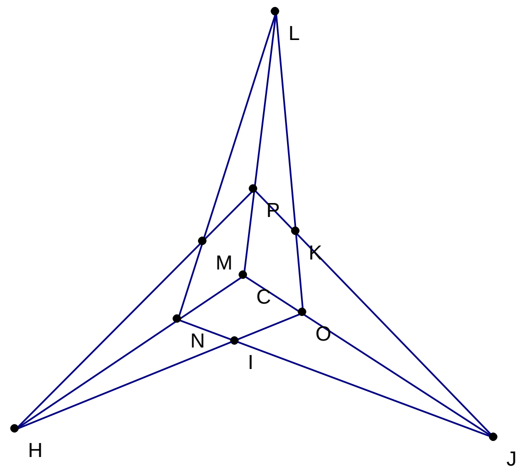
После приведения равенства (5) к единице получим равенство (6), эквивалентное равенству (4):

$$\frac{A_0A_1}{A_1B_0}\cdot\frac{B_0B_1}{B_1C_0}\cdot\frac{C_0O}{OA_0}\cdot\frac{A_0D_1}{D_1D_0}\cdot\frac{D_0C_1}{C_1C_0}\cdot\frac{C_0O}{OA_0}=1. \qquad (6)$$

Четырёхугольник Менелая (рис. 1) можно рассматривать и в качестве невыпуклого четырёхугольника вида «звезда» с двумя лучами. Размещая такие четырёхугольники один возле другого, можно получить ряд невыпуклых многоугольников вида «звезда» с числом лучей больше двух. В частности, применяя равенство (7) [2, с. 9, ф. (5)] к контурам смежных четырёхугольников, получим равенство (8) на контуре из отрезков, формирующих три луча многоугольника вида «звезда» (рис. 6).

$$\frac{A_0C_1}{C_1B_0}\cdot\frac{B_0B_1}{B_1O}\cdot\frac{OC_1}{C_1C_0}\cdot\frac{C_0B_1}{B_1A_0}=1. \qquad (7)$$

$$\frac{HO}{OI}\cdot\frac{IN}{NJ}\cdot\frac{JP}{PK}\cdot\frac{KO}{OL}\cdot\frac{LN}{NM}\cdot\frac{MP}{PH}=1. \qquad (8)$$



$$\left(\frac{HO}{OI}\right)\cdot\left(\frac{IN}{NJ}\right)\cdot\left(\frac{JP}{PK}\right)\cdot\left(\frac{KO}{OL}\right)\cdot\left(\frac{LN}{NM}\right)\cdot\left(\frac{MP}{PH}\right)=1{,}00$$

Рис. 6

Таким образом, расширенный вариант теоремы Менелая даёт возможность получить аналоги равенства Чевы для многоугольников с нечётным и чётным числом сторон и для многоугольников вида «звезда».

Литература

1. Зетель С.И. Новая геометрия треугольника. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство мин. просвещения РСФСР, 1962.
2. Гаврилов В.К. Равенства Менелая, Чевы и другие равенства // «Информационные технологии в математике и математическом образовании». Материалы V Всероссийской научно-методической конференции с международным участием. – Красноярск, 2016. – С. 8-12. http://elibrary.ru/item.asp?id=27468320.

УДК 372.851

РАЗВИТИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ 8 КЛАССА

Гаврилова Т. Ю. ,
МОУ Дергаевская СОШ №23, д. Дергаево
tomagavrilova@mail.ru

Игнатова О. Г.,
МОУ Дергаевская СОШ №23, д. Дергаево
Раменский М.Р.,
МОУ Дергаевская СОШ №23, д. Дергаево

Аннотация. В статье рассматривается аспект формирования универсальных учебных действий (УУД) при изучении понятия отрицательной степени в раках темы «Степенная функция» в курсе алгебры 8 класса. Рассмотрен вопрос межпредметных связей данного понятия, а также приведены примеры заданий для развития УУД при введении данного понятия.

Ключевые слова: алгебра, 8 класс, универсальные учебные действия, степенная функция.

DEVELOPMENT OF COURSE AT THE STUDY OF THE THEME "DEGENERATE FUNCTION" IN THE 8-CLASS ALGEBRA COURSE

Gavrilova T.Y.,
School №23, Dergaevo v.
tomagavrilova@mail.ru

Ignatova O. G.,
School №23, Dergaevo v.
Ramensky M.R.,
School №23, Dergaevo v.

Abstract. The article considers the question of the formation of universal educational activities in the study of the concept of negative degree in the cancers of the theme "Power function" in the course of algebra of the 8th class. The issue of intersubject connections of the given concept is considered. Also, examples of assignments for the development of the ACD are given when introducing this concept.

Keywords: algebra, Grade 8, UDC, power function.

Математика во все времена служила базой для изучения окружающего мира и по сей день служит базой для научно технического прогресса. Математическое образование служит одним из важнейших элементов формирования личности. Важно заметить, что повышенный уровень математических знаний в обществе является воздействующим фактором на развитие научного творчества[1].

В рамках развития отечественной системы образования основной целью является обеспечение условий для развития конкурентно способного человеческого потенциала. Базой для такого развития служит обучение в школе. В настоящее время логически завершаются начатые в 2011 году масштабные преобразования, начавшиеся принятием нового стандарта ФГОС ООО и «Закона об образовании в Российской Федерации».[2] Данные документы стали базой для внедрения перспективных образовательных технологий.

С целью модернизации содержания учебной программы и обеспечению базовых знаний для каждого обучающегося по теме "Степенная функция" в курсе алгебры 8 класса были рассмотрены основные УУД, формируемые при изучении данной темы.

УУД (универсальные учебные действия) – это действия, обеспечивающие овладение ключевыми компетенциями, составляющими основу умения учиться. В широком смысле, УУД – означает саморазвитие и самосовершенствование путем сознательного и активного присвоения нового социального опыта [3].

Таблица 1

Межпредметные связи темы "Степенная функция" в курсе 8 класса

Класс	Алгебра	Физика
8 класс	Корень. Отрицательная степень и ее понятие. Если n – натуральное число, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$ $(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$, в частности, $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$	Работа с отрицательными степенями. Перевод величин. Преобразование дробных выражений. Запись удельных единиц: Удельная теплота плавления льда равна 3,4 .10^5 Дж/кг. Удельная теплота парообразования воды равна 2,3. 10^6 Дж/кг. Удельная теплота сгорания спирта равна 2,7. 10^7 Дж/кг.

Прежде всего, следует рассмотреть место темы «Степенная функция» в рамках курса математики.

Рассмотрим эволюцию изучения и применения данной темы в рамках курсов математики и физики основной школы. Пропедевтика изучения данного понятия начинается ещё в 5 и 6 классе (дети знакомятся с понятием степени, знают что степень числа - это произведение числа самого на себя столько раз каков показатель степени), но основное изучение приходится на 7 класс в рамках предмета «Алгебра». Следует отметить, что именно на 7 класс средней школы приходится период существенных изменений в рамках преподавания предмета «Математика» (в 7 классе дети знакомятся и изучают свойства степеней). Во-первых, это разделение одного предмета на два различных, а именно «Алгебра» и «Геометрия». Во-вторых, это начало изучения нового предмета «Физика», который наиболее тесно связан с курсом «Математики». Например, изучение понятия степени, приобретённых ранее в рамках курса «Математика».

В рамках курса 8 класса вводиться понятие степени с отрицательным показателем.

Для развития познавательных УУД в 8 классе при изучении степени с отрицательным показателем целесообразно создать проблемную ситуацию: подобрать блок заданий на деление степеней в рамках которого появится отрицательный показатель, например: $2^3:2^2$; $8^6:4^5$; $27^3:3^{10}$. При решении такого рода заданий целесообразно так же организация развития коммуникативных УУД (организация работы по поиску лишнего примера). Следует отметить, что технически ученик 7 класса может решить все три примера, не применяя отрицательные показатели степеней, оставив ответ в виде дроби. В случае, если в классе присутствует два типа решений:

1 тип: $27^3:3^{10} = \frac{3^9}{3^{10}} = \frac{3^9}{3*3^9} = \frac{1}{3}$.

2 тип: $27^3:3^{10} = \frac{3^9}{3^{10}} = 3^{9-10} = 3^{-1}$.

При сопоставлении двух типов решений развиваются познавательные и коммуникативные УУД, а также подключаем регулятивные УУД в рамках организации самостоятельного вывода определения степени с отрицательным показателем.

Если в классе присутствует только один из типов решений (первый или второй). Первый тип (следует обратить внимание учащихся на свойство деления степени на степень и предложить воспользоваться свойством при решении данного примера и входе диалоговой беседы подвести учащихся к самостоятельной формулировке определения), второй тип (в рамках развития регулятивных УУД целесообразно предложить учащимся осуществить самостоятельный поиск определения в учебнике или сформулировать определение и составить ряд примеров на данное правило, тем самым мы получаем развитие коммуникативных УУД).

Далее для развития общеучебных и познавательных УУД следует предложить учащимся решить ряд задач из учебника по данной тематике, а в качестве домашнего задания осуществить самостоятельно составить примеры по данной теме или подобрать из учебника.

В рамках действующих в настоящее время стандартов образования, развитие УУД становится одной их приоритетных задач современного учителя. В итоге перед учителем стоит задача достижения метапредметных, предметных и личностных образовательных результатов, как основного требования стандарта образования.

Литература

1. Распоряжение Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. №2506-р о концепция развития математического образования в Российской Федерации.
2. Распоряжение Правительства Российской Федерации от 29 декабря 2014 г. №2765-р, утверждающее Концепция Федеральной целевой программы развития образования на 2016-2020 годы.
3. Алгебра: Учеб. пособие для учащихся 8 кл. с углубл. изучением математики / Под ред. Н.Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 2001. – 256 с.
4. Разумова О.В., Садыкова Е.Р., Шакирова К.Б. Формирование творческого мышления учащихся на уроках математики средствами информационно-коммуникационных технологий / О.В. Разумова, Е.Р. Садыкова, К.Б. Шакирова. // Информатика и образование. – 2011. – № 9 . – С. 79-82.
5. Новая дидактика современного урока в условиях введения ФГОС ООО: методическое пособие / О.Н. Крылова, И.В. Муштавинская. – Санкт-Петербург: КАРО, 2015.

УДК 372.851

МЕТОД КРАМЕРА КАК СРЕДСТВО ПРОДУКТИВНОГО ИЗУЧЕНИЯ ТЕОРИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Гербеков Х.А., кандидат педагогических наук, доцент,
заведующий кафедрой алгебры и геометрии,
Карачаево-черкесский государственный университет имени У. Д. Алиева, г. Карачаевск
hamit_gerbekov@mail.ru

Боташева З.Х., старший преподаватель кафедры алгебры и геометрии,
Карачаево-черкесский государственный университет имени У. Д. Алиева, г. Карачаевск

Аннотация. В данной статье рассматривается методика продуктивного изучения теории определителей студентами нематематических специальностей с помощью метода Крамера. Формулы Крамера для системы двух линейных уравнений и трех линейных уравнений получаются непосредственно методом подстановки. Определитель предлагается вычислять разложением по первой строке. Для доказательства свойств определителей широко используется метод математической индукции.

Ключевые слова: система линейных уравнений, метод Крамера, формулы Крамера, теория определителей, разложение определителя по первой строке, метод математической индукции.

METHOD KRAMER AS A MEANS OF PRODUCTIVE STUDY THEORY OF DETERMINANTS

H.A. Gerbekov, PhD, associate professor, head of the department of algebra and geometry,
Karachayevo-cherkessia state university named after W. D. Aliyev, Karachaevsk
hamit_gerbekov@mail.ru

Z.N. Botasheva, senior lecturer of the department of algebra and geometry,
Karachay-cherkessia state university named after W.D. Aliyev, Karachaevsk

Abstract. This article discusses the technique of productive study of the theory of determinants of student non-mathematical specialties using the method of cramer solution of linear equations. Cramer's formula for a system of two linear equations and three linear equations are obtained directly by the method of substitution.

Determinant serves to calculate the expansion in the first row. To prove the properties of determinants widely used method of induction.

Keywords: system of linear equations, the method of Cramer, Cramer's formula, the theory of determinants, expansion of the determinant of the first row, the method of mathematical induction.

При обучении математике практико - ориентированность играет существенную роль не только в школе, но и в вузе. Например, при изучении темы матриц и определителей студенты нематематических специальностей часто задают вопрос, для чего им это нужно. При ответе на этот вопрос мы акцентируем их внимание на том, что матрицы и определители – это инструмент, аппарат для решения конкретных задач. В частности, наиболее используемая модель для решения многих практических задач различных областей, будь то экономика, психология, статистика и т. д. – это система линейных уравнений относительно конечного числа переменных с действительными коэффициентами.

Рассматривая тему решения систем линейных уравнений со студентами гуманитарных специальностей в курсе дисциплины «Математика», начнем с метода Крамера решения невырожденной системы линейных уравнений. Этот метод позволяет параллельно ввести понятие матрицы и определителя матрицы. Получается, на наш взгляд, достаточно понятная и экономящая время методика, приводящая к продуктивному усвоению теории матриц и определителей.

Вначале рассмотрим линейное уравнение относительно нескольких переменных и его решения. Для этого начнем объяснение со знакомого из школьной математики линейного уравнения относительно одной неизвестной и его решения:

$$ax = b\,. \tag{1}$$

Решением уравнения (1) называется такое число α, что подставляя это число вместо переменной x в уравнение (1), получим числовое тождество. Решить уравнение (1) значит найти множество всех его решений.

Со школы известно, что при решении уравнения (1) возможны три случая:

1. Если $a \neq 0$, уравнение имеет единственное решение $x = \frac{b}{a}$.

2. Если $a = 0$, но $b = 0$, уравнение имеет бесконечное множество решений (так как уравнение имеет вид $0 * x = 0$, то любое число будет решением).

3. Если $a = 0$, но $b \neq 0$, уравнение не имеет решений (в этом случае уравнение принимает вид $0 * x = b, где\ b \neq 0$, и ни одно число этому свойству не удовлетворяет).

Уравнение первой степени вида

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \tag{2}$$

является линейным уравнением относительно двух переменных x_1, x_2. Числа a_{11}, a_{12} называются коэффициентами уравнения, а число b_1 называется свободным членом. Числа, стоящие в нижнем правом углу, назовем индексами.

Решением уравнения (2) называется пара чисел (α_1, α_2) такая, что при подстановке вместо переменной x_1 числа α_1, а вместо переменной x_2 числа α_2превращает уравнение (2) в числовое тождество. Решить уравнение (2) – значит найти множество всех таких пар чисел (α_1, α_2).

Аналогично, уравнение первой степени вида

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \tag{3}$$

- это линейное уравнение относительно *n* неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ (все переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ в уравнении встречаются в первой степени). Числа $a_{11}, \dots, a_{1n}$ называются коэффициентами уравнения, а число b_1 - свободным членом уравнения.

Решением уравнения (3) называется упорядоченная строка *n* чисел (*n*-ка) $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ такая, что при подстановке вместо переменной x_1 числа α_1, а вместо переменной x_2 числа α_2 , …, вместо переменной x_n числа α_n превращает уравнение (3) в числовое тождество. Решить уравнение (3) – значит найти множество всех таких упорядоченных строк чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Переход от школьной к высшей математике, по нашему мнению, предполагает обязательное рассмотрение вопроса равносильных преобразований уравнения. Два уравнения называются равносильными, если имеют одинаковое множество решений. Переход от одного уравнения к равносильному ему уравнению назовем равносильным преобразованием. Необходимо обратить особое внимание студентов на тот факт, что если к обеим частям уравнения (1), (2) или (3) прибавить одно и то же число или умножить обе части уравнения на одно и то же ненулевое число, то получится равносильное уравнение. Можно задать доказательство этого утверждения в качестве аудиторной самостоятельной работы студентов.

Обратим внимание студентов на то, что равносильные преобразования позволяют привести уравнение к более простому виду, такому, которое мы можем решить, - как правило, это линейное уравнение относительно одной неизвестной.

Рассмотрим теперь систему n линейных уравнений относительно n неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (4)$$

Квадратная таблица чисел, состоящая из коэффициентов при неизвестных системы (4) называется матрицей системы. Матрица является квадратной – в ней число строк (горизонтальные строки) совпадает с числом столбцов (вертикальные строки). Существуют и неквадратные матрицы, в которых число строк не совпадает с числом столбцов. Матрицы обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C, D… Числа $a_{11},\ a_{12}, \dots,\ a_{nn}$, составляющие матрицу, - ее элементы. Числа b_iсвободными членами.

Решением системы (4) называется упорядоченная строка *n* чисел (*n*-ка) $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ такая, что при подстановке вместо переменной x_1 числа α_1, а вместо переменной x_2 числа α_2 и т. д. , вместо переменной x_n числа α_n в систему каждое уравнение системы превращается в числовое тождество. Решить систему (4) – значит найти множество всех таких упорядоченных строк чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Изучим вопрос равносильных преобразований системы (4). Очевидно, что при перемене местами двух уравнений системы множество решений системы остается неизменным. Такое преобразование системы назовем элементарным преобразованием второго рода. Также решение системы останется неизменным, если какое-нибудь уравнение системы (4) умножить на ненулевое число. Такое преобразование системы назовем элементарным преобразованием третьего рода. Легко увидеть, что если два уравнения системы сложить и результат записать вместо одного из уравнений системы, то получится равносильная система. Действительно, не ограничивая общности, сложим первое и второе уравнения системы и запишем вместо второго уравнения системы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ (a_{11} + a_{21})x_1 + (a_{12} + a_{22})x_2 + \cdots + (a_{1n} + a_{2n})x_n = b_1 + b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (5)$$

Пусть строка чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ является решением системы. Тогда

$a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha \equiv b_1$

$a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n \equiv$

Сложим левые и правые части тождеств, Получим тождество:

$(a_{11} + a_{21}) * \alpha_1 + (a_{12} + a_{22})\alpha_2 + \cdots + (a_{1n} + a_{2n})\alpha_n \equiv b_1 + b_2.$

Оно доказывает, что строка чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ является решением системы (5).

Легко заметить, что последовательное проведение описанных преобразований приводит к равносильной системе. В частности, композиция элементарного преобразования третьего рода и последнего преобразования, называемая элементарным преобразованием первого рода, сохраняет равносильность системы.

Решение системы линейных уравнений начнем с решения системы двух линейных уравнений относительно двух неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \qquad (6)$$

Используем «школьный» метод подстановки. Из первого уравнения выразим x_2 через x_1 и подставим во второе уравнение:

$x_2 = \frac{b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}} x_1,\ a_{21}x_1 + a_{12}\left(\frac{b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}} x_1\right) = b_2,$

$a_{21}a_{11}x_1 + a_{22}b_1 - a_{22}a_{11}x_1 = b_2 a_{12},$

$$x_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = b_1 a_{22} - a_{12}b_2. \quad (6.1)$$

Аналогично, найдем x_2:

$$x_2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = b_2 a_{11} - a_{21}b_1. \quad (6.2)$$

Коэффициенты линейных уравнений (6.1) и (6.2) назовем определителями (детерминантами) (матрицы) второго порядка и обозначим:

$det\ A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$

Тогда линейные уравнения (6.1) и (6.2) относительно одной переменной примут в новых обозначениях вид: $x_1\Delta = \Delta_1$, $x_2\Delta = \Delta_2$.

Откуда при $\Delta \neq 0$ получим $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $\quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$. Это формулы Крамера решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Определитель Δ будем называть главным определителем, а Δ_1 и Δ_2 - побочными (вспомогательными) определителями системы (6).

Аналогично, последовательно выражая переменные и подставляя их в другие уравнения системы, решим систему трех линейных уравнений относительно трех неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (6.3)$$

Получим систему (6.4)

$$x_1\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21}a_{23} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22} \\ a_{31}a_{32} \end{vmatrix}\right) = b_1\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} b_2a_{23} \\ b_3a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} b_2a_{22} \\ b_3a_{32} \end{vmatrix}$$

$$x_2\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21}a_{23} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22} \\ a_{31}a_{32} \end{vmatrix}\right) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} b_2a_{23} \\ b_3a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}b_2 \\ a_{31}b_3 \end{vmatrix} \quad (6.4)$$

$$x_3\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21}a_{23} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22} \\ a_{31}a_{32} \end{vmatrix}\right) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}b_2 \\ a_{32}b_3 \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21}b_2 \\ a_{31}b_3 \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix}$$

Назовем коэффициенты определителями третьего порядка и обозначим их следующим образом

$$\Delta = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21}a_{23} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}a_{22} \\ a_{31}a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = b_1\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} b_2a_{23} \\ b_3a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} b_2a_{22} \\ b_3a_{32} \end{vmatrix} \quad (6.5)$$

$$\Delta_2 = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} b_2a_{23} \\ b_3a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21}b_2 \\ a_{31}b_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}b_2 \\ a_{32}b_3 \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21}b_2 \\ a_{31}b_3 \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix}$$

Тогда мы получим формулы Крамера для системы трех линейных уравнений при условии $\Delta \neq 0$:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \quad (6.6)$$

Правило $det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ назовем разложением определителя матрицы по первой строке. Возьмем первый элемент первой строки - a_{11}. Он находится на пересечении первой строки и первого столбца. Зачеркнем в уме первую строку и первый столбец (по месту, на котором находится этот элемент). Тогда от матрицы останется число a_{22}. Назовем это число дополнительным минором элемента

a_{11}. Сумма индексов элемента a_{11} равна 1+1=2- четному числу. Дополнительный минор, умноженный на $(-1)^{1+1} = (-1)^2 = 1$, называется алгебраическим дополнением элемента a_{11} и обозначается A_{11}.Аналогично, зачеркивая в уме место, на котором находится элемент a_{12}, получим число a_{21} , - дополнительный минор элемента a_{12}. Умножая его на $(-1)^{1+2} = (-1)^3 = -1$, получим число A_{12} =-a_{21} ,являющееся алгебраическим дополнением элемента a_{12}. Тогда определитель второго порядка есть сумма произведений элементов первой строки на их алгебраические дополнения:

$$det\ \text{A}=a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12}. \qquad (7)$$

Легко заметить, что если одна строка нулевая, т. е. все элементы строки равны нулю, то определитель второго порядка равен нулю. Допустим, что две строки одинаковые. Тогда $det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$=$a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11}$=0, т. е. определитель нулевой.

Поменяем две строки местами, т. е. произведем над матрицей элементарное преобразование второго рода:
$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$=$a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -det\ A$ - определитель поменял знак.

Умножим строку на число, т. е. произведем над матрицей элементарное преобразование третьего рода:
$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$=$\lambda a_{11}a_{22} - \lambda a_{12}a_{21}$ =$\lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda det\ A$.

Рассмотрим матрицу третьего порядка: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Если в уме зачеркнуть первую строку и первый столбец матрицы, то останется подматрица второго порядка: $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Определитель этой матрицы назовем дополнительным минором элемента a_{11}.Алгебраическое дополнение $A_{11} = (-1)^{1+1}det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$= $det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Соответственно, алгебраическое дополнение элемента a_{12} равно $A_{12} = (-1)^{1+2}det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$=$-det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$.

$A_{13} = (-1)^{1+3}det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$= $det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$. Тогда определителем третьего порядка назовем число

$$det\ \text{A}=a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \qquad (8)$$

Последнее определение полностью соответствует равенствам (6.5), полученным методом Крамера.

Аналогично, определитель *n*-го порядка примем равным:

$$det\ \text{A}=a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}. \qquad (9)$$

Методом математической индукции легко доказать по этой формуле все основные свойства определителей. Заметим, что большинство доказательств этих утверждений можно задать студентам в качестве домашней самостоятельной работы.

Теперь выведем формулу Крамера для системы n линейных уравнений с n неизвестными. Обе части первого уравнения системы (4) умножим на алгебраическое дополнение A_{11}, обе части второго уравнения системы (4) умножим на алгебраическое дополнение A_{21} , обе части третьего уравнения умножим на алгебраическое дополнение A_{31} и т. д. обе части последнего уравнения умножим на алгебраическое дополнение A_{n1}. Получим равносильную систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}A_{11}\,x_1 + a_{12}A_{11}\,x_2 + \cdots + a_{1n}A_{11}\,x_n = b_1\,A_{11} \\ a_{21}A_{21}\,x_1 + a_{22}A_{21}\,x_2 + \cdots + A_{2n}A_{21}x_n = b_2\,A_{21} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}A_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,A_{n1}x_2 + \cdots + a_{nn}A_{n1}\,x_n = b_n\,A_{n1} \end{cases}$$

Сложим все уравнения и вынесем общие множители:

$(a_{11}A_{11} + \cdots + a_{n1}A_{n1})x_1 + (a_{12}A_{11} + \cdots + a_{n2}\,A_{n1})x_2 + \cdots + (a_{1n}A_{11}+$
$a_{2n}A_{21} + \cdots + a_{nn}A_{n1}) = b_1A_{11} + b_2\,A_{21} + \cdots b_2A_{n1}$. В левой части уравнения только одно слагаемое

отлично от нуля – первое, а в правой части стоит определитель Δ_1 :$\Delta x_1 = \Delta_1$. Рассуждая аналогично, $\Delta x_2 = \Delta_2, \ldots, \ \Delta x_n = \Delta_n$

При условии $\Delta \neq 0$ для главного определителя получим формулы Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$.

Заметим, что при использовании приведенной выше методики можно подготовить хороший задел для объяснения метода Гаусса решения систем линейных уравнений. Приведенная методика, как показывает наш опыт приводит к продуктивному обучению теории определителей, а также матриц. Данную методику можно также использовать при углубленном изучении математики в школе.

Литература

1. Всеросийские математические олимпиады школьников: Кн. Для учащихся/Г.Н. Яковлев, Л. П. Купцов,С. В. Резниченко, П. Б. Гусятников. – М.: Просвещение, 1992.
2. Кострикин А. И.Введение в алгебру. / А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 1.Основы алгебры: Учеб. для вузов.- 2-е изд., исправл. – М.:ФИЗМАТЛИТ, 2004.

УДК 511.1

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫХ ЗАДАЧ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ В ШКОЛЕ

Гриншпон Я.С., кандидат физико-математических наук, доцент,
Томский государственный университет, г. Томск
grinshpon@mail.ru

Лемешко Д.Д., магистрант
Томский государственный университет, г. Томск
dmitriy-lemeshko@mail.ru

Аннотация. Многие задачи элементарной теории чисел можно решать как методами математики, так и методами информатики. Подобные задачи входят в варианты ЕГЭ и различных олимпиад и конкурсов. Исследованию таких задач целесообразно посвятить специальный междисциплинарный курс.

Ключевые слова: концепция числа, элементарная теория чисел, междисциплинарные связи, методика обучения математике и информатике.

FEATURES OF SOLVING PROBLEMS IN NUMBER THEORY WHEN STUDYING MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE AT SCHOOL

Ya.S. Grinshpon., associate professor,
Tomsk state university, Tomsk
grinshpon@mail.ru

D.D. Lemeshko, master
Tomsk state university, Tomsk
dmitriy-lemeshko@mail.ru

Abstract. Many problems of elementary number theory can be solved by using both mathematical and computer methods. Such problems are included in final exam and various olympiads and competitions. It is wise to devote a special interdisciplinary course to the study of such problems.

Keywords: number concept, elementary number theory, interdisciplinary relations, teaching methods in mathematics and computer science.

Понятия числа является одним из фундаментальных понятий современного естествознания. Учащиеся школ оперирует числами в большей или меньшей степени на уроках практически по всем предметам. Наиболее часто числа встречаются в курсах математики, информатики и ИКТ, физики и химии.

Однако, безусловно, главная роль в осознании концепции числа (натуральные числа → целые числа → рациональные числа → действительные числа) и в изучении свойств различных числовых систем принадлежит математике. При этом приобретение уверенных навыков по выполнению различных операций с действительными числами и по применению этих навыков при решении разнообразных задач естествознания, допускающих математическое числовое моделирование, невозможно без крепкого усвоения фундамента построения числового смыслового пространства. Таким фундаментом являются множества натуральных и целых чисел. Именно поэтому столь важны вопросы элементарной теории чисел, изучаемые в рамках общего среднего образования.

К элементарной теории чисел традиционно относят вопросы, связанные с понятием целого числа, для решения которых не привлекаются методы математического анализа. Это вопросы записи целых чисел (системы счисления), выполнимости арифметических операций над целыми числами (делимость), решения уравнений в целых числах (диофантовы уравнения).

Формирование понятия числа и изучение свойств чисел осуществляется не только на уроках математики, но и на уроках информатики и ИКТ. Действительно, программирование на многих языках требует умения описывать используемые в программе числовые данные, причем необходимо четко формулировать являются ли используемые числа постоянными (константы) или они могут изменяться в ходе выполнения программы (переменные), а также определять тип этих данных. При этом тип данных часто влияет на набор возможных операций, выполняемых над числами (например, операции нахождения остатка и неполного частного определены только для целочисленных типов). Кроме того, задачи, связанные с системами счисления (перевод чисел из одной позиционной системы счисления в другую, выполнение арифметических операций и сравнение чисел в различных позиционных системах счисления), на уроках информатики обсуждаются более подробно, чем на уроках математики.

Отметим также, что у большинства учащихся российских школ теоретико-числовые задачи вызывают живой интерес. Одна из причин данного интереса – это понятные и естественные формулировки таких задач, простота проверки их условий для частных случаев, возможность решения некоторых из этих задачи путем перебора возможных вариантов. Данный интерес стимулируется постоянным включением теоретико-числовых задач в олимпиады и конкурсы различного уровня и в КИМ ЕГЭ по математике и информатике.

Существует большой класс теоретико-числовых задач, допускающих как строго доказательное математическое решение, так и решение методами информатики путем проведения вычислительного эксперимента на компьютере. Более того эти два подхода хорошо дополняют друг друга: вычислительный эксперимент помогает увидеть верный ответ и тем самым подсказать ход теоретического решения, математическое же решение объясняет, почему только данные ответы удовлетворяют условию задачи.

Следовательно, для расширения кругозора школьников путем установления ими междисциплинарных связей математики и информатики было бы полезно рассматривать такие задачи на специальных межпредметных уроках.

Цель данной работы заключается в составлении банка таких задач и разработке цикла занятий по курсу «Решение теоретико-числовых задач методами математики и информатики». Для программной реализации задач на компьютере был выбран язык программирования Pascal ABC.net, хорошо знакомый школьникам по базовому курсу информатики.

Курс рассчитан на 10 академических часов. Занятия проводятся один раз в неделю по одному уроку в течение четверти.

Содержание курса:

- повторение основ программирования;
- знакомство с языком программирования PascalABC.NET;
- повторение основ теории чисел;
- решение базовых задач;
- решение олимпиадных задач.

Результаты освоения курса:

- владение синтаксисом языка программирования PascalABC.NET;
- знание основных законов теории чисел;
- умение составлять алгоритмы решения теоретико-числовых задач и программировать их;
- знакомство с основными идеями, применяемыми при решении теоретико-числовых задач в математике.

При подборе задач для курса необходимо обращать внимание на то, что вычислительный эксперимент имеет существенные ограничения на свое применение, так как он позволяет проводить перебор только конечного числа вариантов, в частности, он эффективен при необходимости перебора всех натуральных чисел с известным количеством цифр (двузначные числа, трехзначные числа и т.д.), но неприменим для перебора всех элементов бесконечного подмножества во множестве натуральных чисел (всех натуральных чисел, всех четных чисел, всех простых чисел и т.д.). Например, рассмотрим три похожие по содержанию и математическому решению задачи:

а) Приведите пример натурального числа, которые увеличивается в 9 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить ноль.

б) Найдите все двузначные натуральные числа, которые увеличиваются в 9 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить ноль;

в) Найдите все натуральные числа, которые увеличиваются в 9 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить ноль.

Математически эти три задачи решаются практически одинаково. Запишем искомое число в виде $10a + b$, где b – последняя цифра числа, a – число, составленное из всех цифр, кроме последней. Получим уравнение $100a + b = 9(10a + b)$. Отсюда $5a = 4b$. Так как b – это цифра, b делится на 5 и $a \neq 0$, то $b = 5$ и $a = 4$. Получаем единственный ответ 45.

Применение же вычислительного эксперимента возможно при решении только задач а) и б). Причем в задаче а) удобно использовать цикл с постусловием, который будет выполняться до тех пор, пока не будет найдено искомое число.

```
var
  chislo, a, b: integer;
begin
  chislo := 9;
  repeat
    chislo := chislo + 1;
    b := chislo mod 10;
    a := chislo div 10;
  until(100 * a + b = 9 * (10 * a + b));
  writeln(chislo);
end.
```

В задаче б) лучше записать два цикла со счетчиками, пробегающими все возможные значения цифр двузначного числа:

```
var
  i, j: integer;
begin
  for i := 1 to 9 do
  begin
    for j := 0 to 9 do
    begin
      if (100 * i + j = 9 * (10 * i + j)) then
        writeln(10 * i + j);
    end;
  end;
end.
```

В задаче в) цикл неприменим, так как проверка условия должна осуществляться бесконечное число раз.

С другой стороны, вычислительный эксперимент в тех задачах, где он применим, оказывается чаще проще, чем математическое решение. Более того программа, предназначенная для решения некоторой задачи, часто с небольшими модификациями позволяет решать и многие другие схожие задачи, либо решать целый класс однотипных задач.

Сформулируем, например, задачу г), аналогичную задаче б).

г) Найдите все двузначные натуральные числа, которые увеличиваются в 16 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить девять.

Математически задача сводится к уравнению $100a + 90 + b = 16(10a + b)$. Отсюда $6 = 4a + b$, а значит, $4a \le 6$. Так как $a \ne 0$, то $a = 1$ и $b = 2$. Получаем единственный ответ 12.

Программная реализации задачи г):

```
var
  i, j: integer;
begin
  for i := 1 to 9 do
  begin
    for j := 0 to 9 do
    begin
      if (100 * i+90 + j = 16 * (10 * i + j)) then
        writeln(10 * i + j);
    end;
  end;
end.
```

Обратим внимание, что, несмотря на схожесть условий задач, математические решения содержат принципиальные отличия: если в решении задачи б) использовались соображения делимости, то основной идеей решения задачи г) являлась оценка с помощью неравенств.

С точки же зрения программирования эти задачи решаются практически одинаково. Более того, несложно составить общую программу, которая сможет решить все возможные задачи такого типа, а именно, данная программа для всех допустимых значений параметров c и k решит задачу:

д) Найдите все двузначные натуральные числа, которые увеличиваются в k раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить цифру c.

```
var
  i, j,c,k: integer;
begin
  readln(c,k);
  for i := 1 to 9 do
  begin
    for j := 0 to 9 do
    begin
      if (100 * i + 10*c + j = k * (10 * i + j)) then
        writeln(10 * i + j);
    end;
  end;
end.
```

Приведем теперь несколько примеров задач, которые планируется разбирать со школьниками. Задачи 1-5 имеют базовый уровень сложности, эти задачи аналогичны задачам 19 из базового ЕГЭ по математике. Задача 6-10 имеют повышенный уровень сложности, эти задачи предлагались на олимпиадах по математике муниципального или регионального уровней.

Задача 1[2]. Найдите трёхзначное натуральное число, большее 400, которое при делении на 6 и на 5 даёт равные ненулевые остатки, и первая слева цифра которого является средним арифметическим двух других цифр.

Задача 2[2]. Найдите четырёхзначное число, кратное 22, произведение цифр которого равно 24.

Задача 3[2]. Найдите четырёхзначное натуральное число, кратное 19, сумма цифр которого на 1 больше их произведения.

Задача 4[2]. Сумма цифр трёхзначного числа A делится на 13. Сумма цифр числа $A + 5$ также делится на 13. Найдите такое число A.

Задача 5[3]. Найдите все трехзначные числа, которые уменьшаются в пять раза при вычеркивании первой цифры.

Задача 6[3]. Найдите все такие трёхзначные числа, которые в 12 раз больше суммы своих цифр.

Задача 7[4]. Найдите такое четырехзначное число, что первые две его цифры одинаковы, следующие две цифры также одинаковы, а само это число является квадратом натурального числа.

Задача 8[4]. Числа 1, 2, 3, …, 2016, 2017 разбиты на две группы. К первой группе отнесены числа с нечетной суммой цифр, ко второй группе – с четной. Что больше: сумма всех чисел первой группы или сумма всех чисел второй группы

Задача 9[4]. Чему равно максимальное значение разности трехзначного числа и суммы кубов его цифр? Для какого трехзначного числа достигается этот максимум? Чему равно минимальное положительное значение этой разности?

Задача 10[3]. Первоклассник умеет писать только одну цифру 1. Докажите, что он сможет записать число, делящееся на 2017.

Литература

1. Носков В.В. Реализация межпредметных связей математики и информатики в современном учебном процессе / Носков В.В., Попова В.В. // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. – 2015. – № 1(31). – С. 65 – 68.
2. Гущин Д. Д. Образовательный портал «РЕШУ ЕГЭ». [Электронный ресурс] / Гущин Д. Д. – Режим доступа: http://ege.sdamgia.ru.
3. Интернет-проект «Задачи». [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.problems.ru.
4. Л. П. Купцов. Российские математические олимпиады школьников: кн. для учащихся / Л. П. Купцов, С. В. Резниченко, Д. А. Терёшин. – Ростов н/Д: Феникс, 1996. – 640 с.

УДК 373.167.2:51

О РАСПОЗНАВАНИИ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

Дятлов В.Н., кандидат физико-математических наук, доцент,
Южный математический институт ВНЦ РАН, г. Владикавказ,
Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск
vndyatlov@gmail.com

Дмитриева Ю.А., старший преподаватель,
Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск
yudmitrieva@gmail.com

Аннотация. Описаны признаки применимости методов для решения задач с параметрами.

Ключевые слова: распознавание применимости методов, задачи с параметром.

CRITERIA FOR APPLICABILITY OF METHODS FOR SOLVING PROBLEMS WITH PARAMETERS

V.N. Dyatlov, associate professor,
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
Novosibirsk State University, Novosibirsk
vndyatlov@gmail.com

Yu.A. Dmitrieva, assistant professor,
Novosibirsk State University, Novosibirsk
yudmitrieva@gmail.com

Abstract. We describe some criteria for applicability of methods for solving problems with parameters.

Keywords: criteria for applicability of methods, problems with parameter.

Одна из причин затруднений, возникающих при решении задач с параметрами, состоит в слабом развитии механизмов выбора методов для решения той или иной задачи и отсутствии отличительных особенностей применимости каждого из методов. Большинство пособий, посвященных задачам с параметрами, устроены по принципу ``от метода к задаче'', т. е. дается какой-то метод решения и приводится набор задач, решаемых данным методом. Более того, обычно не обсуждается эффективность разных методов, которые могут быть применены для решения поставленной задачи. Подготовка учащихся к решению задач с параметрами обычно основана на изучении определенного набора методов, и если на экзамене попадается задача, выходящая за его пределы, то трудно ожидать успехов в ее решении.

Для повышения эффективности обучения решению задач с параметрами предлагается изменить направление обучения, перейдя к использованию принципа ``от задачи к выбору метода''. Разумеется, на первом этапе необходимо освоение минимального набора методов и решение определенного набора задач, на котором каждый из методов осваивается. Однако на втором этапе необходимо обучать выбору метода решения при данной задаче, и тогда возникает потребность в механизмах распознавания применимости методов для решения поставленной задачи.

В статье [1] была изложена система изучения задач с параметрами, позволяющая рассматривать этот материал как часть школьного курса математики. В частности, были отмечены требования, выполнение которых желательно для включения какой-либо темы, в частности задач с параметрами, в программу школьного курса математики в качестве элективного курса или в виде раздела общего курса. Среди них отмечена необходимость изложения методов, применяемых при анализе задач каждого класса, и особенно присутствие признаков применимости методов для решения поставленной задачи.

Если в задаче идет речь о соотношении с параметром, т. е. об описании семейства множеств, заданных путем указания выраженных с помощью равенств или неравенств свойств, которыми обладают их элементы, то среди постановок задач были отмечены следующие:

* решение соотношения, т.е. при каждом значении параметра нахождение множества решений;

* исследование количественных характеристик множеств решений (при каких значениях параметра соотношение имеет определенное число решений);

* исследование качественных свойств, например, когда множество решений будет промежутком или промежутком определенной длины и т.п.;

* исследование вопросов, связанных с пересечением или объединением множеств решений, соответствующих разным значениям параметра;

* при рассмотрении двух соотношений изучение взаимодействия множеств их решений, например, выяснение, при каких значениях параметра одно из множеств содержится в другом или их пересечение непусто и т.д.

Каждая из постановок допускает достаточно регулярные средства ее анализа. Среди всевозможных методов анализа задач для соотношений можно выделить

(1) аналитический,

(2) графический с использованием плоскости ``переменная – параметр'',

(3) графический с использованием плоскости переменных или плоскости ``переменная – значение'',

(4) использование свойств функций, участвующих в задании соотношения.

Для каждого из указанных методов сформулируем отличительные особенности применимости метода к анализу данной задачи. Как правило, эти особенности легко обнаруживаются, и тогда можно мотивированно выбирать средства для решения задачи.

(1) Аналитический метод подразумевает непосредственное решение соотношения, т.е. поиск наиболее простого способа описания задаваемого соотношением множества при каждом значении параметра. Здесь имеется в виду организация процесса решения, в котором учитываются все обстоятельства, связанные с параметром и вызванные имеющимися в соотношении ограничениями или условиями выполнимости необходимых для решения действий. Отличительная особенность применимости этого средства состоит в оценке реальности выражения переменной через параметр. Кроме того, о применении исключительно этого средства говорит постановка задачи, если в ней требуется решить соотношение, т.е. при каждом значении параметра указать множество решений.

(2) Применение графики, связанной с плоскостью ``переменная – параметр'', в принципе возможно лишь в том случае, если переменная одна и параметр один. Только в этом случае есть принципиальная возможность изображения множества, задаваемого данным соотношением, на плоскости ``переменная – параметр''. Однако это не единственное ограничение применимости такого метода. Еще одно ограничение связано с реализацией такого изображения, ибо далеко не всякое соотношение может быть изображено на плоскости ``переменная – параметр'' с использованием доступных учащемуся средств. Среди признаков применимости служит присутствие в соотношении либо параметра, либо переменной в первой

степени и возможность выражения соответствующей величины в виде функции, график которой реально изобразить. Еще один признак применимости состоит в наличии особенностей, связанных с уравнением прямой или окружности.

Надо иметь в виду, что к графике вообще можно прибегать лишь в тех случаях, когда в задаче требуется ответить на какой-то вопрос, связанный с множеством решений. Решить соотношение только с использованием графики нельзя, хотя проверить правдоподобность ответа или увидеть путь решения можно.

Одним из преимуществ использования плоскости ``переменная – параметр'' является то, что ответить на самые разнообразные вопросы, связанные с соотношением, можно с использованием изображения лишь одного множества на плоскости, тогда как применение плоскости ``переменная – значение'' или плоскости переменных всегда предполагает анализ взаимодействия семейств множеств, что представляет для учащихся большие трудности по сравнению с получением информации на основе одного множества.

(3) Графика на плоскости ``переменная – значение'' или на плоскости переменных применима в следующих ситуациях.

Во-первых, когда в соотношении две переменные, т.е. когда рассматривается система уравнений и/или неравенств с двумя переменными. В таком случае изучается вопрос возможности изображения (семейств) множеств, описываемых составляющими систему соотношениями на координатной плоскости переменных. Обычно в качестве таких множеств оказываются прямые, окружности, параболы или гиперболы, т.е. те множества, которые изучаются в школьном курсе математики. Конечно, надо обращать внимание на особенности соотношений, приводящих к соответствующим множествам.

Во-вторых, если в уравнении или неравенстве одна переменная и один параметр и есть возможность представить соотношение в виде сопоставления двух функций, для которых либо нетрудно изобразить их графики, либо возможно установить свойства этих функций, позволяющие дать ответ на вопрос задачи. В этом случае обычно соотношение представляют в таком виде, чтобы в одной его части не было параметра, а в другой собирается все связанное с параметром. Тем самым появляется одно множество, представляющее собой график одной функции, а также семейство множеств, изображающих графики семейства функций.

При использовании графических средств вопрос задачи переводится на теоретико-множественный язык, на этом языке вырабатывается процедура ответа на вопрос задачи, которая затем переводится на аналитический язык, т.е. формулируется в терминах соотношений (уравнений или неравенств), в которых в качестве переменной участвует параметр исходной задачи.

(4) К использованию свойств функций прибегают в тех случаях, когда надо ответить на какой-то связанный с соотношением вопрос. Вряд ли можно привести общего вида признаки применения свойств функции, однако в каких-то частных ситуациях что-то порекомендовать можно.

Свойство четности функции может быть использовано в вопросах о количестве корней уравнения. А именно, четная функция в ненулевых точках может обращаться в нуль лишь четное число раз. Стало быть, если у четной функции нечетное число нулей, то она с необходимостью обращается в нуль в нулевой точке, и это служит поводом для выделения множества значений параметра, среди которых расположены искомые.

Встречается использование монотонности для ответа на вопрос задачи. Однако это свойство носит достаточно яркий наглядный характер и обычно сопровождает графические средства, связанные с плоскостью ``переменная – значение''.

Обращение к свойствам функций неизбежно в постановках задач, в которых речь идет не о семействе соотношений, т. е. о семействе описываемых ими множеств, а о семействе функций. В таком случае обычно свойства функции участвуют в условии задачи и возможность их применения для решения достаточно очевидна. Здесь могут возникнуть проблемы с обоснованием наличия тех или иных свойств у конкретных участвующих в формулировке задачи функций, но это разговор на другую тему.

В заключение отметим, что для формирования навыков в выборе пути решения задачи с параметром требуются знания, связанные с различными весьма важными для математики понятиями и объектами, что, в свою очередь, стимулирует глубокое изучение соответствующих разделов школьного курса и служит основой для успешного продолжения образования по специальностям, в образовательных программах которых присутствует математика.

Связанный с тематикой этой статьи материал более подробно, с рассмотрением примеров и различных типов рассуждений, изложен в [2--4].

Литература

1. Дятлов В.Н., Дмитриева Ю.А. Задачи с параметром как раздел школьного курса математики // Математическое образование в школе и вузе: теория и практика (MATHEDU-2016): материалы VI Международной научно-практической конференции, 25-26 ноября 2016 года/ Отв. ред. Н.В. Тимербаева. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2016. – С. 43-45.

2. Дятлов В.Н. Технологии решения задач. Лекция 12. Задачи с параметрами. Анализ семейств функций или множеств. Поиск пути решения // Математика: Методический журнал для учителей математики. 2013. – № 5. – С. 52-58.

3. Дятлов В.Н. Как научить решать задачи с параметрами. Лекции 1--4. М.: Педагогический университет ``Первое сентября'', 2014.

4. Дятлов В.Н. Как научить решать задачи с параметрами. Лекции 5--8. М.: Педагогический университет ``Первое сентября'', 2014.

УДК 372.851

ИЗУЧЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ В КЛАССАХ НЕМАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОФИЛЕЙ

Евсеева А.А., учитель математики,
МБОУ «Лицей №1» Чистопольского муниципального района Республики Татарстан
aleksandra25_10@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается возможность обучения дискретной математике школьников, обучающихся в классах химико-биологических профилей. Приведены примеры заданий по комбинаторике и теории вероятностей.

Ключевые слова: комбинаторика, тория вероятностей, дискретная математика, химико-биологический профиль обучения

THE STUDY OF DISCRETE MATHEMATICS IN THE CLASS NON-MATHEMATICAL PROFILES

A.A. Evseeva, math teacher,
Liceum №1, Chistopol
aleksandra25_10@mail.ru

Abstract. The article discusses the possibility of teaching discrete mathematics students enrolled in the school of chemical and biological profiles. Examples of tasks in combinatorics and probability theory.

Keywords: combinatorics, thorium probability, discrete mathematics, chemical-biological profile of training.

Математика – это часть общечеловеческой культуры, такая же неотъемлемая и важная, как право, медицина, естествознание и многое другое. Все наилучшие достижения человеческой мысли и составляют основу гуманитарного образования, необходимого каждому современному человеку. Таким образом, для гуманитария математика, прежде всего, общеобразовательная дисциплина, как, например, право для математика.

Но для химика или биолога значение математики этим не исчерпывается.

Сейчас уже никто не сомневается в том, что математические методы наряду с физическими и химическими, являются мощным инструментом при исследовании чисто биологических проблем. Сейчас в биологии используются различные приложения математики. Основными темами изучения для студентов-биологов являются: вероятности, векторы и матрицы, линейное программирование, макрковские цепи, теория игр, дифференциальные уравнения и др. Некоторые из них, а именно элементы дискретной математики, можно изучать и в школе.

Наконец, применение математических методов расширяет возможности каждого специалиста. В медицинской практике важную роль играет статистика, умение правильно обработать информацию, сделать достоверный вывод или прогноз на основании имеющегося статистического материала. Ценность специалиста существенно возрастает, если он умеет делать все это.

Курс математики для химиков и биологов должен, с одной стороны, быть достаточно широким, чтобы играть развивающую, гуманитарную роль. С другой стороны, он должен быть и достаточно содержательным, чтобы школьники научились решать хотя бы несложные прикладные задачи. Дискретная математика, а именно комбинаторика, теория вероятностей и математическая статистика – благодатная почва для развития математических способностей в классах нематематических профилей.

Рассмотрим примеры заданий, которые можно предложить учащимся химико-биологических профилей при изучении элементов дискретной математики на примере комбинаторики и теории вероятностей.

При изучении понятия перестановок биологам можно предложить следующие задания:

1. В некотором ареале имеется 14 видов плодовых мушек, 17 видов бабочек и 13 видов комаров. Сколькими способами можно выбрать по одному виду каждого типа?

Решение: $14 \cdot 17 \cdot 13 = 3094$ различных способов.

2. В трёх пробирках, поставленных в штатив для пробирок, содержатся разные препараты C_1, C_2, C_3. Перечислите возможные расположения этих препаратов в штативе.

Решение: Возможные расположения таковы $C_1C_2C_3$, $C_1C_3C_2$, $C_2C_1C_3$, $C_2C_3C_1$, $C_3C_1C_2$, $C_3C_2C_1$.

3. Восемь лабораторных животных нужно проранжировать в соответствии с их способностями выполнять определенные задания. Каково число возможных ранжировок, если допустить, что одинаковых способностей нет?

Решение: Существует $8! = 40320$ упорядочений или ранжировок по способностям.

При рассмотрении понятий размещения и сочетания можно решить с учащимся следующие задачи:

1. Три типа бактерий культивируются в девяти пробирках. Три пробирки содержат бактерии 1-го типа, четыре – бактерии 2-го типа и две – бактерии 3-го типа. Сколькими различными способами можно расположить пробирки в ряд на штативе, если нам важно расположение лишь типов бактерий?

Решение: Множество из девяти пробирок разбивается на три подмножества, содержащие соответственно три, четыре и два неразличимых объекта.

Получаем число размежений: $\dfrac{9!}{3!4!2!} = 1260.$

2. Для эксперимента по определению скорости роста требуется выбрать четыре штамма бактерий из имеющихся восьми. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Нужно найти число способов выбора четырех объектов из восьми вне зависимости от порядка выбора. Т.е, число сочетаний: $C_8^4 = \dfrac{8!}{4! \cdot 4!} = 70.$

В химии комбинаторика используется для оценки вероятности той или иной конфигурации частиц, подсчета числа изомеров, определения числа микросостояний по формуле Больцмана.

1. Сколько существует различных галогенопроизводных метана вида CH_2XY, где X и Y – атомы галогенов?

Решение: Порядок расположения галогенов в этом случае роли не играет, так как у молекул этого вида нет изомеров. Число различных веществ дается сочетанием из четырех галогенов по два положения в молекуле, т.е.: $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$ веществ.

2. Сколько трипептидов, содержащих три различных аминокислотных остатка, можно составить из 20 аминокислот?

Решение: Пептиды – несимметричные молекулы, для них важен порядок расположения аминокислот. Поэтому число трипептидов равно числу размещений 20 аминокислот по трём позициям в трипептиде: $A_{20}^3 = \dfrac{20!}{(20-3)!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ трипептидов.

3. Шесть одинаковых молекул распределены по двум ячейкам. Какова вероятность того, что все шесть молекул окажутся в одной ячейке (всё равно какой)?

Решение: Пусть в первой ячейке оказалось k молекул из 6, а во второй – (6 – k), где $0 \le k \le 6$. Такое распределение можно реализовать числом способов, которое равно числу сочетаний из 6 по k: $C_6^k = \frac{6!}{k!(6-k)!}$. Общее число всех возможных распределений 6 молекул по 2 ячейкам равно: $n = \sum_{k=0}^{6} C_6^k = 1+6+15+20+15+6+1 = 64$.

Из этих 64 случаев условию задачи удовлетворяют только 2: когда все шесть частиц находятся в одной ячейке или в другой. Таким образом, вероятность искомого разбиения $P = \frac{2}{64} = \frac{1}{32}$

Для применения понятия вероятности события биологам можно предложить следующие задачи:

1. В большой популяции плодовой мушки 25% мух имеют мутацию глаз, 50% - мутацию крыльев, а 40% мух с мутацией глаз имеют и мутацию крыльев.

а) Какова вероятность того, что у мухи, наудачу выбранной из этой популяции, окажется хотябы одна из мутаций?

б) Какова вероятность того, что у случайно выбранной мухи есть мутация глаз, но нет мутации крыльев?

Решение: Обозначим через A и B события, состоящие в том, что случайно выбранная муха имеет соответственно мутацию глаз или мутацию крыльев.

а) Вероятность того, что муха имеет мутацию глаз $P(A) = 0{,}25$; мутацию крыльев $P(B) = 0{,}5$; мутацию и глаз, и крыльев $P(A \cap B) = 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}1$. Таким образом, вероятность того, что муха имеет одну или обе мутации: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}25 + 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}65$.

б) Вероятность того, что у мухи есть мутация глаз, но нет мутации крыльев – это $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}25 - 0{,}1 = 0{,}15$.

2. Некоторая операция пересадки кожи приводит к успеху в 40% всех случаев. Пациенту делают пересадку кожи несколько раз подряд до тех пор, пока она не удается. Какова вероятность того, что пересадка окажется успешной: а) с первой попытки? б) с третьей попытки?

Решение:

а) Вероятность успеха при каждом испытании P = 0,4. Поэтому вероятность успеха с первой попытки равна 0,4.

б) Чтобы успех имел место с третьей попытки, первые две пересадки должны быть неудачными, а третья – удачной. Вероятность неудачи при любом испытании 1 – 0,4 = 0,6. Поэтому искомая вероятность равна 0,6 · 0,6 · 0,4 = 0,144.

Даже из рассмотренных примеров видно, что и в химико-биологическом классе можно решать задачи теории вероятностей и комбинаторики, напрямую связанные со спецификой учебного плана данного профиля. Кроме того, полезно включать в содержание обучения химиков и биологов элементы теории множеств, непрерывную вероятность, распределение Пуассона, нормальное распределение, решение оптимизационных задач и элементы математического моделирования. Учащихся гуманитарных классов необходимо знакомить и с теорией принятия решений.

Литература

1. Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., Виленкин П. А., Комбинаторика. – М.: МЦНМО, 2006. – 396 с.
2. Гроссман С., Тернер Дж. Математика для биологов: Пер. с англ.: / Предисл. и коммент. Ю. М. Свирежева. – М.: Высш. школа, 1983. – 383 с., ил.
3. Еремин В. В. Теоретическая и математическая химия для школьников. Подготовка к химическим олимпиадам. – М.: МЦНМО, 2007. – 392 с.

УДК 378. 147

ОРГАНИЗАЦИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

Евсюкова Е.В., кандидат педагогических наук, доцент,
Тюменский государственный университет, г. Тобольск
l-evsjukova@rambler.ru

Аннотация. В статье описывается опыт организации учебно-исследовательской деятельности студентов в процессе изучения математики.

Ключевые слова: учебно-исследовательские задания, математика**,** приложения математического анализа.

THE ORGANIZATION OF RESEARCH WORK OF STUDENTS IN THE PROCESS OF STUDYING MATHEMATICS

E.V. Evsjukova, cand. pedagogical sciences, associate professor,
Tyumen State University, Tobolsk
l-evsjukova@rambler.ru

Abstract. The experience of organizing the educational and research activities of students in the process of studying mathematics is described in article.

Keywords: teaching and research tasks, mathematics, applications of mathematical analysis.

Зачастую преподаватели вузов сталкиваются с отсутствием готовности выпускников школ осуществлять учебно-исследовательскую деятельность в процессе изучения высшей математики в вузе. Исследователи определяют учебно-исследовательское задание как требование или предписание студенту решить проблему, работа над которой требует применения одного или нескольких методов научного исследования, с помощью которых студенты открывают ранее неизвестное для них знание. Отличительной чертой задания является то, что форма организации работы над предложенной проблемой студентам заранее неизвестна. Следствием выполнения такого задания является усвоение обобщенного способа действий, который способствует формированию умений находить новые знания, приемы и способы действий, самостоятельно достигать поставленных учебных целей, развивает мышление. Учебно-исследовательские задания можно использовать как средство формирования соответствующих видов деятельности, как средство контроля знаний, получения знаний, как средство формирования самостоятельной деятельности студентов.

В [1, 2] описан наш опыт организации учебно-исследовательской деятельности студентов в процессе изучения дискретной математики и основ теории групп. Большие возможности для формирования методологических и методических умений, связанных с овладением общими приемами моделирования и решения прикладных задач, переносом навыков использования идей математики в будущую деятельность школьного учителя имеет обучение приложениям математического анализа. Нами разработан курс «Приложения математики в других науках», целью которого является формирование систематизированных знаний в области применения математики, ее месте и роли в системе математических наук, использование в естественных науках.

Литература

1. Евсюкова Е.В. Учебно-исследовательские задачи по дискретной математике // Стандартизация математического образования: проблемы внедрения и оценка эффективности: Материалы XXXV Междунар. семинара преподавателей математики и информатики унтов и педагогических вузов. – Ульяновск. УлГПУ, 2016. – С.247-249.

2. Евсюкова Е.В. Организация учебно-исследовательской деятельности будущих учителей математики в процессе изучения основ теории групп // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Выпуск 16: периодический межвузовский сборник научно-методических работ. – Киров: Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2014. – С. 143-147.

УДК 372.851

ОРГАНИЗАЦИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ

Еникеева С.Р., кандидат физико-математических наук,
ФГБОУ ВПО «Казанский национальный исследовательский технологический университет»,
г. Казань
enikeeva.svetlana@mail.ru
Старцева Н.В., учитель математики,
МБОУ «Гимназия №8- Центр образования», г. Казань
Krupskaya_nadin@mail.ru

Аннотация. Статья посвящена организации исследовательской деятельности учащихся на уроках геометрии. Через использование средств оригами, которое знакомит школьников с геометрическими объектами и облегчает освоение курса в целом.

Ключевые слова: исследовательская деятельность, геометрия, оригами.

NIKOLAI IVANOVICH LOBACHEVSKY - THE OUTSTANDING PEOPLE OF NATIONAL EDUCATION

S.R. Enikeeva, PhD,
Kazan National Research Technological University, Kazan
enikeeva.svetlana@mail.ru
N.V. Startseva, mathematics teacher,
MBEU «Gymnasium No. 8», Kazan
Krupskaya_nadin@mail.ru

Abstract. Article is devoted to the organization of research activity studying at geometry lessons. Through use of means of origami which acquaints school students with geometrical objects and facilitates development of a course in general.

Keywords: research activity, geometry, origami.

Активизация учебной деятельности в школах лежит в основе большинства педагогических технологий. Необходимо учитывать индивидуальные особенности школьников, максимально развивать их исследовательскую активность и познавательный интерес [1].

При изучении геометрических понятий мы часто сталкиваемся с тем, что многим учащимся трудно излагать свои суждения, доводы, выдвигать гипотезы. Ученики заучивают теорию, а на практике применить знания не могут. Образную, наглядную модель евклидовой геометрии позволяет создать оригами.

Лист бумаги очень часто используется в математике как наглядное средство. Но на уроках математики важно не то, какую фигуру вы сложите из бумаги, а наоборот. Разверните любую бумажную поделку. Линии сгиба образовали треугольники, квадраты, параллелограммы, трапеции… К тому же, разворачивая поделку, можно наблюдать преобразование пространственной фигуры в плоский лист бумаги. А значит, упражнения с листом бумаги позволяют знакомиться с различными геометрическими фигурами и изучать их простейшие свойства.

Многим кажется, что математика – наука сложная и скучная. Но подумайте сами, сколько всего интересного можно сконструировать из простого листа бумаги! Самых разнообразных животных, фигуры мебели, самые необычные сказочные дворцы… И при всем при этом в каждой фигуре можно найти большое множество самых разных геометрических фигур. Это заинтересует любого школьника, ведь конструировать объемные поделки намного интереснее, чем просто чертить рисунок какой-либо геометрической фигуры. Так можно превратить урок математики в настоящую сказку.

Приведем несколько примеров того, как на уроках математики можно использовать модели из бумаги. Сформулируем конкретные цели и задачи, которые можно решить, используя предложенную методику.

Цель: Организация работы учащихся на уроках по математике при изучении геометрических понятий и решении задач на основе активного использования моделей из бумаги.

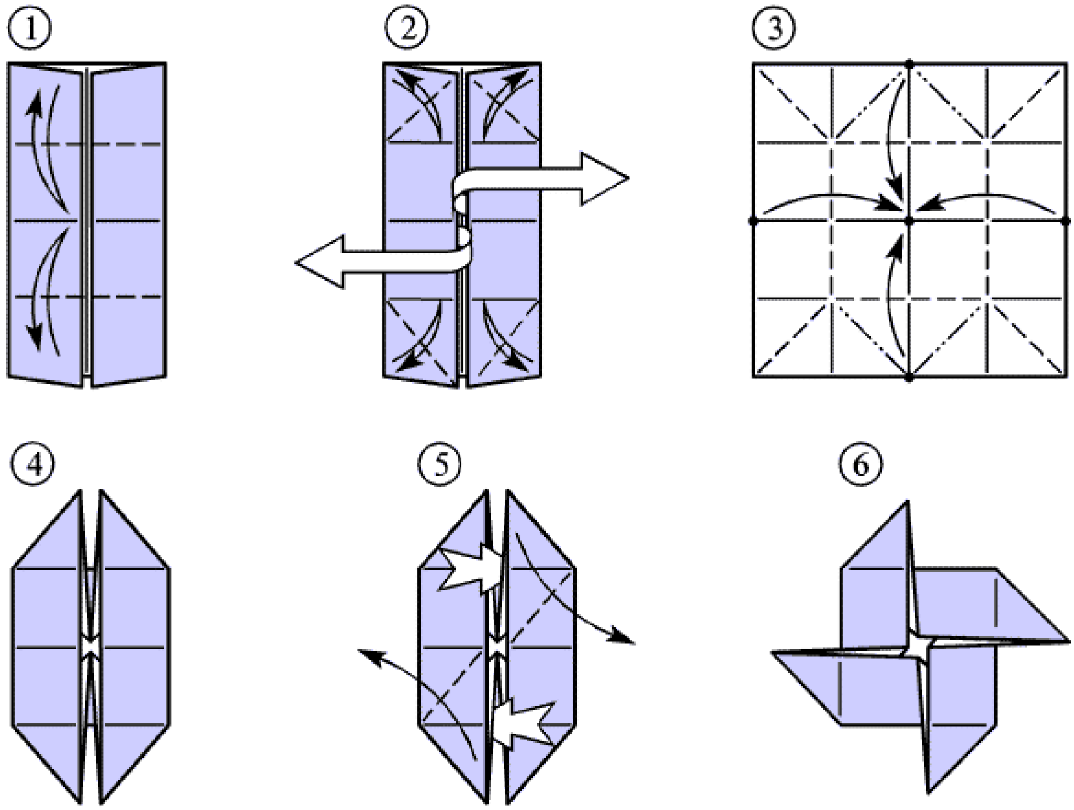
Задачи:

1) Активизация творческой деятельности учащихся.
2) Организация работы с моделями и чертежами геометрических фигур.
3) Нахождение новых способов решения задач.
4) Придумывание собственных задач и «изобретение» фигур с определенными свойствами.
5) Способствование реализации дифференцированного подхода в обучении.

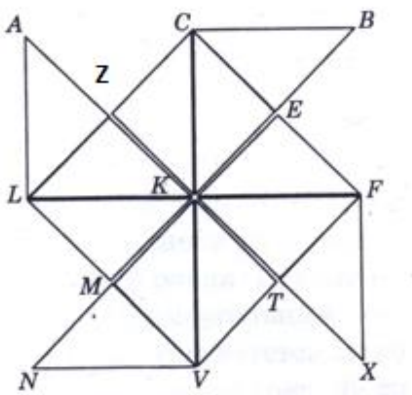
Техника оригами в младшей школе.

Уже в младшей школе ученики начинают работать с различными геометрическими фигурами, учатся искать периметр прямоугольника, площадь квадрата и прямоугольника, определять на готов чертеже количество радиусов и диаметров окружности. А почему бы не разнообразить уроки математики в младшей школе техникой оригами?

Давайте сконструируем вертушку.



Собрав эту несложную фигурку, обозначим её вершины буквами, чтобы работать было удобнее.



Теперь у нас есть возможность решить ряд несложных задач, связанных с фигурами, которые мы видим на вертушке.

Задача 1. Назовите фигуры, которые вы видите на картинке.

Решение:

Треугольники: ALK, BCK, BCE, KEF, KFX, KFT, FTX, KTV, KMV, KNV, MVN, LKM, LKC, CKF, FKV, VKL, CLV, CFV, LCF, LVF, LZK, CZK.

Квадраты: LCFV, MLZK, KZCE, EKTF, KTVM.

Прямоугольники: MLCE, ZCFT, EFVM, TVLZ.

Четырехугольники: AKML, BCZK, XFKE, NVTK, LKEC, ZKFC…

Задача 2. Назовите один из самых маленьких и один из самых больших треугольников, который вы видите на картинке.

Решение:

Самый маленький: Δ LZK.

Самый большой:Δ CLV.

Задача 3. Найдите периметр квадрата MKTV.

Решение:

PMKTV = MK + KT + TV + MV.

Задача 4. Определите, во сколько раз площадь самого большого квадрата больше площади самого маленького треугольника.

Решение:

SLSFV = 8ΔLKM

Задача 5. Найдите площадь и периметр треугольника LCF.

Решение:

SLCF = 1/2LF*CK.

PLCF = LC + CF + LF.

Задача 6. Найдите периметр всей вертушки.

Решение:

PAZCBEFXTVNML = AZ + ZC + CB + BE + EF + FX + XT + TV + VN + NM + ML + AL.

Задача 7. Найдите площадь четырехугольника ALVT.

Решение:

SALVT = 5*SΔALZ.

Задача 8. Найдите площадь флюгера.

Решение:

SAZCBEFXTVNML = 12*SΔALZ

Примечание: Задачи 7 и 8 можно решить на уроке с сильными учащимися или предложить классу в качестве домашнего задания.

Доказательство теоремы о сумме углов треугольника.

В средней школе работу с оригами на уроках геометрии целесообразно начинать в 7-ом классе с изучения темы «Сумма углов треугольника». Попросите учащихся принести на урок заготовку – произвольный треугольник, вырезанный из бумаги.

Покажем, что сумма углов треугольника равна 180 градусов.

1. Пусть имеется произвольный треугольник ABC.
2. Проведем в этом треугольнике высоту BD (сложим треугольник так, чтобы совместились части основания).
3. Перегнем все три угла треугольника, чтобы их вершины совместились с точкой D.

Все углы при вершинах треугольника составили в сумме развернутый угол с вершиной D, равный 180 градусам. А значит, сумма углов треугольника ABC равна 180 градусам.

Впоследствии можно вернуться к этой технике при изучении тем «Теорема Пифагора» и «Площадь четырехугольников».

Решение задач на клетчатой бумаге.

Сейчас в выпускных классах сдают экзамены в формате ГИА и ЕГЭ. В одной из задач предлагают вычислить площадь фигуры, изображенной на бумаге в клетку. Если на рисунке изображен прямоугольный треугольник, у которого длины катетов легко определяются «по клеточкам», то ученики обычно без труда вычисляют его площадь.

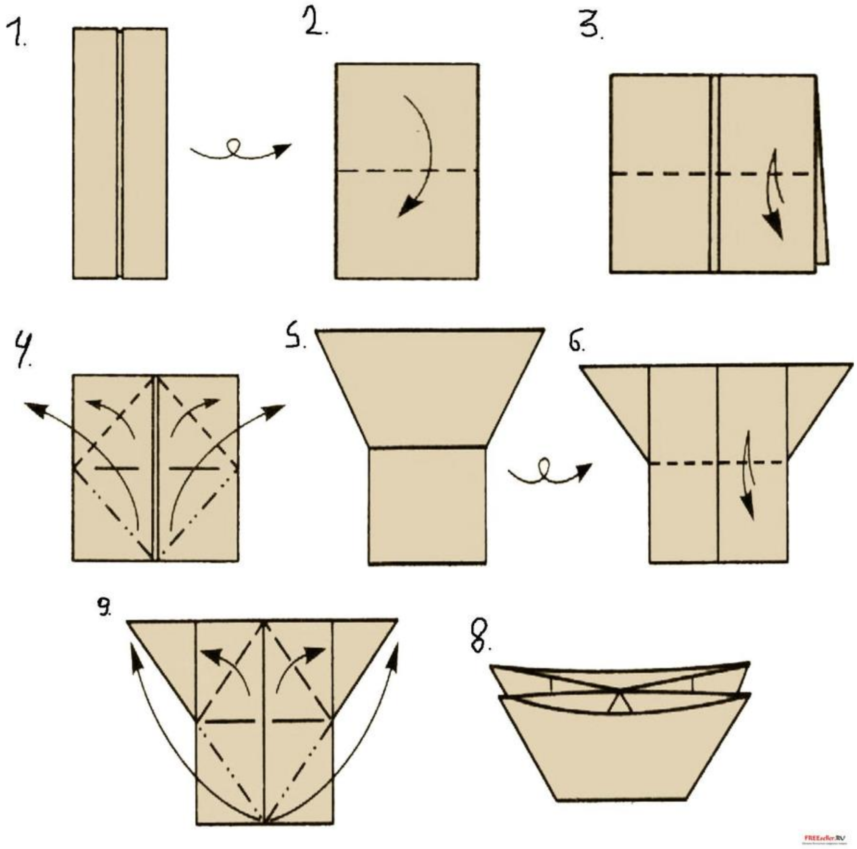
Если же предлагаемая фигура расположена «под другим углом», учащиеся теряются и не могут дать правильный ответ. Почему-то им бывает сложно соотнести диагональ клетки с гипотенузой прямоугольного равнобедренного треугольника. Предлагаемая методика позволит соприкоснуться с гипотенузой треугольника в прямом смысле. Доказав на уроке теорему Пифагора любым предлагаемым в учебнике способом, можно применять это знание при решении задач.

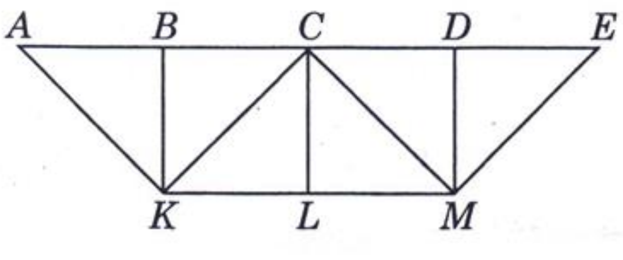
Сначала решим задачу: «Найдите гипотенузу равнобедренного прямоугольного треугольника, если катет равен *x*». По теореме Пифагора гипотенузу можно вычислить так:

Несложно понять, что диагональ квадрата со стороной 1, равна корень из 2

1.4 Использование оригами для средней школы.

А теперь рассмотрим наглядный пример: фигуру «катамаран».





Это тоже достаточно простая фигура, с помощью которых можно решить ряд задач:

Задача 9. Выпишите все прямоугольные треугольники, изображенные на рисунке.

Решение:

Прямоугольные треугольники: ABK, KBC, KCL, CLM, CDM, EDM, AKC, KCM, CME.

Задача 10. Найдите KC, если BC = 3 см.

Решение:

Т. К. $BC = BK$, $KC^2 = BC^2 + BK^2$, $KC^2 = 2BC^2$

$KC = 3\sqrt{2}$

Задача 11. Найдите гипотенузу треугольника CME, если CM = 8 см.

Решение:

CM находится аналогично по теореме Пифагора.

Задача 12. Найдите катет треугольника KCM, если его гипотенуза равна 1,5 корней из 2.

Задача 13. Найдите площадь треугольника KCL, если AD = 15 см.

Задача 14. Выпишите названия всех отрезков, длины которых равны корню из 2, если KL = 1.

Список задач можно продолжать и дальше. Здесь все зависит от фантазии учителя и от того, какое умение при решении задач необходимо закрепить у учеников.

В заключение отметим, что в сегодняшних условиях учитель должен обладать вариативным стилем преподавания, используя различные методы. Метод "оригами" позволяет использовать на уроке принцип моделирования, он делает материал наглядным, позволяет школьникам убедиться в правильности классических утверждении, побуждает к дальнейшим исследованиям.

Литература

1. Еникеева С.Р., Садреева Г.Р. О некоторых аспектах современных методик обучения математике, информатике и физике в школе// Материалы VI Международной научно–практической конференции «Математическое образование в школе и вузе: теория и практика (MATHEDU -2016)» Казань: Изд –во Казан. ун –та, 2016. – С.46-48

2. http://origami-paper.ru

УДК 517

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЭКОНОМИКЕ НА ПРИМЕРЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ

Зелимова А.Р., студентка 5 курса,
Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова, г. Ульяновск albinazelimva@mail.ru

Аннотация. В данной статье рассматривается приложение теории дифференциальных уравнений в экономике, приводятся примеры решения некоторых экономических задач с помощью данной теории.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, модель, экономика, прикладные задачи.

APPLYING OF THE THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE ECONOMICS ON THE EXAMPLE OF SOME TASKS

A.R. Zelimova, 5th-year student,
Ulyanovsk state pedagogical university, Ulyanovsk
albinazelimva@mail.ru

Abstract. In this article there is the applying of the theory of the differential equations in the economics, the examples of solving some economic tasks with the help of this theory.

Keywords: differential equation, model, economics, applied tasks

В современной науке, несомненно, дифференциальные уравнения играют чрезвычайно важную роль. Они имеют множество приложений в различных областях, одной из которых является экономика. Для описания многих социально-экономических моделей применяется аппарат теории дифференциальных уравнений. Поэтому студентам-экономистам чрезвычайно важно владеть этой теорией и уметь ее применять на практике, а для студентов-математиков эти модели интересны с точки зрения многочисленных приложений математической теории.

Рассмотрим примеры таких задач из практикума Высшей математики для экономического бакалавриата [1].

Задача 1.

В условиях ненасыщаемости рынка найти объем производства по истечении шести месяцев, при норме инвестиций $m = 0{,}6$, продажной цене $p = 0{,}15$ (ден.ед) и $l = 0{,}4$, если в начальный момент времени объем производства $y_0 = y\,(0) = 24$ (ден.ед).

Решение.

Исходя из того, что задано условие ненасыщаемости рынка, доход к моменту времени t будет составлять $Y(t) = py(t)$. Полагая, что величина инвестиций $I(t)$ составляет фиксированную часть дохода, получаем $I(t) = mY(t) = mpy(t)$. Зная, что $k = mpl$, приходим к уравнению $y' = ky(t) = mply(t)$. Подставим все известные значения: $y' = 0{,}6 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}4 \cdot y(t) \Rightarrow \frac{dy}{y} = 0{,}036$. Получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 0{,}036\,;$$

$$\ln|y| = 0{,}036t + C_1;$$

$$y = e^{0{,}036t} \cdot e^{C_1}.$$

Обозначим $C = e^{C_1} \Rightarrow y = Ce^{0{,}036t}$.

Зная, что в начальный момент времени объем производства $y_0 = y\,(0) = 24$, найдем неизвестный коэффициент: $y_0 = Ce^{0{,}036t_0} \Rightarrow C = 24 \Rightarrow y = 24e^{0{,}036t}$.

Таким образом, найдем объем производства по истечении 6 месяцев: $y = 24e^{0{,}036\cdot 6} =$
$= 24e^{0{,}216} \approx 24 \cdot 1{,}24110 \approx 29{,}8$.

Ответ: 29,8

Задача 2.

Известно, что рост числа $y = y\,(t)$ жителей некоторого района описывается уравнением

$$\frac{dy}{dt} = \frac{0{,}2y}{m}(m - y),$$

где m – максимально возможное число жителей для данного района. В начальный момент времени число жителей составляло 1% от максимального. Через какой промежуток времени оно составит 80% от максимального?

Решение.

Разделяя переменные в уравнении, приходим к следующему равенству:

$$\frac{dy}{0{,}2y(m-y)} = \frac{dt}{m} \Rightarrow 5\int \frac{dy}{y(m-y)} = \int \frac{dt}{m}.$$

Выполняя почленное интегрирование этого равенства, получаем

$$5\left(\int \frac{dy}{my} + \int \frac{dy}{m(m-y)}\right) = \frac{1}{m}t + C_1;$$

$$\frac{5}{m}\ln\left|\frac{y}{m-y}\right| = \frac{t}{m} + C_1;$$

$$\left(\frac{y}{m-y}\right)^{\frac{5}{m}} = Ce^{\frac{t}{m}}, \text{где } C = e^{C_1} \Rightarrow \frac{y}{m-y} = Ce^{\frac{t}{5}}.$$

Из начальных условий находим значение постоянной C. Так как $y(0) = \frac{m}{100}$, то $\frac{\frac{m}{100}}{m - \frac{m}{100}} = C \Rightarrow$

$C = \frac{1}{99}$. А значит, $\frac{y}{m-y} = \frac{1}{99}e^{\frac{t}{5}} \Rightarrow 99\frac{y}{m-y} = e^{\frac{t}{5}}$.

Выразим функцию t из данного равенства:

$$\ln\left|99\frac{y}{m-y}\right| = \frac{t}{5} \Rightarrow t = 5\ln\left|99\frac{y}{m-y}\right|.$$

Принимая во внимание, что $y(t) = \frac{80}{100}m = \frac{4}{5}m$, получим

$$t = 5\ln\left|99\frac{\frac{4}{5}m}{m-\frac{4}{5}m}\right| = 5\ln|396| \approx 5\cdot 5{,}98141 \approx 29{,}91.$$

<u>Ответ</u>: 29,91.

Задача 3.

Найти функцию спроса $y = y\,(p)$, если эластичность E_p постоянная и задана цена p при некотором значении спроса y:

а) $E_p = -\frac{1}{2},\ p = 5$ при $y = 2$;

б) $E_p = -3,\ p = 2$ при $y = 27$.

<u>Решение.</u>

а) Из определения эластичности следует, что $E_p(y) = \frac{pdy}{ydp} = -\frac{1}{2}$, т.е. искомая функция задается уравнением с разделяющимися переменными. Решая это уравнение, получаем

$$\int\frac{dy}{y} = -\frac{1}{2}\int\frac{dp}{p};$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln|p| + C_1 \Rightarrow \ln|y| = \ln\left|p^{-\frac{1}{2}}\right| + C;$$

$$\ln\left|y\sqrt{p}\right| = C \Rightarrow y\sqrt{p} = e^C \Rightarrow y^2p = e^{2C}.$$

Учитывая начальные условия, имеем

$4\cdot 5 = e^{2C} \Rightarrow y^2p = 20.$

а) Аналогично $E_p(y) = \frac{pdy}{ydp} = -3$;

$$\int\frac{dy}{y} = -3\int\frac{dp}{p};$$

$$\ln|y| = -3\ln|p| + C_1 \Rightarrow \ln|y| = \ln|p^{-3}| + C;$$

$$\ln|yp^3| = C \Rightarrow yp^3 = e^C \Rightarrow 27 * 8 = e^C \Rightarrow yp^3 = 216 \text{ или } p\sqrt{y} = 6.$$

<u>Ответ</u>: а) $y^2p = 20$; б) $p\sqrt{y} = 6$.

Задача 4.

Функции спроса и предложения на некоторый товар имеют соответственно вид

$$y = 50 - 2p - 4\frac{dp}{dt};$$

$$x = 70 + 2p - 5\frac{dp}{dt}.$$

Найти зависимость равновесной цены от времени, если $p(0) = 10$, и определить, является ли равновесная цена устойчивой.

<u>Решение.</u>

Из условия равенства спроса и предложения имеем

$$50 - 2p - 4\frac{dp}{dt} = 70 + 2p - 5\frac{dp}{dt},$$

откуда $\frac{dp}{dt} = 20 + 4p$, т.е. получаем уравнение с разделяющимися переменными. Решая это уравнение, приходим

$$\int\frac{dp}{20+4p} = \int dt;$$

$$\frac{1}{4}\ln|20+4p| = t + C_1;$$

$$(20+4p)^{\frac{1}{4}} = C_2e^t, \text{где } C_2 = e^{C_1};$$

$20 + 4p = C_3e^{4t}$,где $C_3 = C_2{}^4$;

$p = C_4e^{4t} - 5$, где $C_4 =$ где $\frac{C_3}{4}$.

Из условия $p(0) = 10$ следует, что $10 = C_4 - 5 \Rightarrow C_4 = 15$, поэтому $p = 15e^{4t} - 5$.

Отметим, что поскольку $\lim_{t\to\infty} p = \lim_{t\to\infty}(15e^{4t} - 5) \to \infty$, цена не обладает устойчивостью.

Ответ: $p = 15e^{4t} - 5$; не является.

Таким образом, с помощью приведенных моделей продемонстрировано описание некоторых социально-экономических моделей с помощью аппарата дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения применяются для нахождения объема производства, равновесной цены, функции спроса и предложения и многого другого.

Литература:

1. Кремер Н. Ш. Высшая математика для экономического бакалавриата: учебник и практикум / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; под ред. Н. Ш. Кремера. – 4-е изд., перераб. И доп. – М.: Издательство Юрайт; ИД Юрайт, 2013. – 909 с. – Серия: Бакалавр. Углубленный курс.
2. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений. Ред. Ю.С.Богданов. Мн.: Вышэйш. школа, 1973. - 560 с.

УДК 378

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИИ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ С НАУЧНЫМ ТЕКСТОМ ПРИ ОБУЧЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Игнатушина И.В., кандидат физико-математических наук, доцент,
кафедра математического анализа и методики преподавания математики
Оренбургский государственный педагогический университет, г. Оренбург
streleec@yandex.ru

Аннотация. Статья знакомит с сущностью нового принципа обучения математике в вузе – принципа центризма научного текста. Согласно ему научный математический текст выступает в качестве предмета изучения и может рассматриваться как аутентичная единица в обучении математике. Особенности технологии работы с научным текстом показаны на примере одного из занятий по дифференциальной геометрии.

Ключевые слова: технология, дифференциальная геометрия, принцип центризма научного текста

USE OF TECHNOLOGY OF WORK OF STUDENTS WITH SCIENTIFIC TEXT IN TRAINING DIFFERENTIAL GEOMETRY

I.V. Ignatushina, candidate of physico-mathematical sciences, associate professor,
Head of the Department of Mathematical Analysis and methods of teaching mathematics,
Orenburg State Pedagogical University, Orenburg
streleec@yandex.ru

Abstract. The article presents the essence of the new principle of teaching mathematics in high school – principle doctrine of scientific text. According to scientific mathematical text serves as a subject of study and can be considered as an authentic unit in teaching mathematics. Features of work with scientific text shown on the example of one of the classes in differential geometry.

Keywords: technology, differential geometry, the principle of centrism scientific text

Процесс педагогической адаптации научных фактов при формировании учебных курсов является необходимым. Однако следует отметить, что со временем содержание этих курсов отшлифовывается, изложение теорий становится весьма кратким, подчас настолько, что оказываются утерянными сами причины, подтолкнувшие ученых к разработке конкретной области науки. Между тем, побудительные мотивы первопроходцев служат источником формирования интереса студентов к предмету изучения.

Для решения этой проблемы мы предлагаем в процессе обучения математике в вузе активно использовать труды создателей изучаемой науки. В связи с этим нами был выдвинут *принцип центризма научного текста,* согласно которому аутентичный научный математический текст выступает в качестве предмета изучения и может рассматриваться как важнейшая учебная единица. Рассматривая ход мыслей ученого в получении той или иной теоремы, студенты формируют и развивают определенные приемы мышления (анализ, синтез, обобщение и др.), способствующие освоению учебного курса.

В зависимости от индивидуальных особенностей обучаемых, мышление, согласно работам [1–3, 6], классифицируется по видам (наглядно-действенное, наглядно-образное, словесно-логическое), типам (эмпирическое и теоретическое) и качествам (гибкость, глубина, критичность). Б. М. Теплов [7] подразделяет мышление на теоретическое (понятийное, образное) и практическое (наглядно-образное и наглядно-действенное). Теоретическое мышление направлено в основном на нахождение общих закономерностей, а практическое – на разрешение частных конкретных задач. Оба указанных вида мышления носят алгоритмический характер, т. е. представляют собой процессы поиска алгоритмов решения проблем.

Следует отметить, что принцип центризма научного текста тесно связан с принципом научности, но в отличие от него подразумевает не опосредованное, т.е. преломленное методической обработкой, а непосредственное знакомство с научным материалом через изучение работ ученых, сыгравших важную роль в истории изучаемой дисциплины.

Для реализации принципа центризма научного текста необходимо выполнение следующих *условий*:

– постепенное наращивание используемых лексических единиц;

– владение учащимися минимальным запасом терминов, встречающихся в изучаемом тексте, в том числе и на языке оригинала;

– демонстрация преподавателем теоретической и прикладной роли изучаемого материала как внутри курса, так и вне его.

При знакомстве студентов с историей появления и первыми шагами дифференциальной геометрии незаменимыми являются научные трактаты одного из создателей данного раздела математики Леонарда Эйлера (1707– 1783). Его сочинения по приложению дифференциального исчисления к геометрии написаны столь доходчиво и живо, что могут стать прекрасным дополнением к современной учебной литературе по дифференциальной геометрии, а также стартовой площадкой для приобщения студентов к научно-исследовательской деятельности. Не лишним здесь будет вспомнить и знаменитую фразу П.С. Лапласа, которую он повторял молодым математикам: «Читайте, читайте Эйлера, он – наш общий учитель» [5, с. 80]. Следует отметить, что в своих научных текстах Л. Эйлер всегда оставляет возможность своим читателям для самостоятельных размышлений и доказательства тех логических переходов, которые посильны им. Таким образом, изучая эти работы, студенты осваивают дифференциальную геометрию.

Технология работы с научным текстом основывается на базовом дидактическом цикле, состоящем из трех этапов (стадий).

Каждый этап имеет свои цели и задачи, а также набор характерных приемов, направленных сначала на активизацию исследовательской, творческой деятельности, а потом на осмысление и обобщение приобретенных знаний.

Первая стадия – «введение в проблему», во время которой создаются условия для актуализации у студентов опорных знаний, пробуждения интереса к теме, определения цели изучения предстоящего учебного материала.

Вторая стадия – «осмысление» – содержательная, в ходе которой происходит непосредственная работа обучающегося с текстом, причем работа, направленная, осмысленная. Процесс чтения всегда сопровождается действиями студента (маркировка, составление таблиц, ведение дневника), которые позволяют отслеживать собственное понимание.

Третья стадия – «рефлексия» – размышление. На этом этапе у студента формируется личностное отношение к тексту, которое может быть зафиксировано либо с помощью собственного текста, либо своей позиции в дискуссии. Именно здесь происходит активное переосмысление собственных представлений с учетом вновь приобретенных знаний.

Покажем на конкретном примере технологию проведения занятия по работе с научным текстом.

Тема: Эволюта и эвольвента плоской кривой

Цель: закрепить понятия «эволюта» и «эвольвента» плоской кривой, с которыми студенты познакомились на лекции; рассмотреть основные свойства эволюты плоской линии; выяснить, какие кривые имеют n-ю эволюту, подобную исходной кривой.

«Введение в проблему». Преподаватель сообщает, что понятия «эволюта» и «эвольвента» кривой были введены известным голландским математиком, физиком и астрономом XVIIв. Христианом Гюйгенсом (1629– 1695) в его работе «Маятниковые часы, или геометрические доказательства, относящиеся к движению маятников, приспособленных к часам» (1673).

Затем он просит студентов дать определение понятий «эволюта» и «эвольвента», записать уравнение эволюты плоской кривой, а также назвать ее основные свойства.

Эволютой называется геометрическое место центров кривизны плоской кривой. Исходная кривая по отношению к эволюте называется эвольвентой.

Из определения «эволюты» следует, что для получения параметрических уравнений эволюты исходной кривой, которая тоже задана параметрически: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, достаточно вспомнить уравнения, дающие координаты x_0, y_0 центра ее кривизны:

$$x_0 = x - \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}y', \; y_0 = y + \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}x'. \tag{1}$$

Основные свойства эволюты плоской кривой:

1. Нормаль исходной кривой касается ее эволюты в соответствующем центре кривизны.
2. Приращение длины дуги эволюты на некотором участке кривой по абсолютной величине равно соответствующему приращению радиуса кривизны данной кривой.

Далее преподаватель предлагает студентам, опираясь на второе свойство эволюты, доказать, что параметрические уравнения эвольвенты кривой имеют следующий вид: $x = x_0 - \dfrac{x'\int_a^t \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$,

$$y = y_0 - \frac{y'\int_a^t \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Доказательство. Пусть кривая BD является эволютой кривой AD [рис. 1]. Обозначим координаты некоторой точки A исходной кривой через $(x_0;y_0)$, а координаты соответствующей ей точки B эволюты через $(x;y)$. Тогда по второму свойству эволюты длина отрезка AB равна длине дуги BD. Из прямоугольного треугольника ABC имеем: $AC = AB \cdot \cos\angle BAC$; $BC = AB \cdot \sin\angle \overset{\frown}{BAC}$.

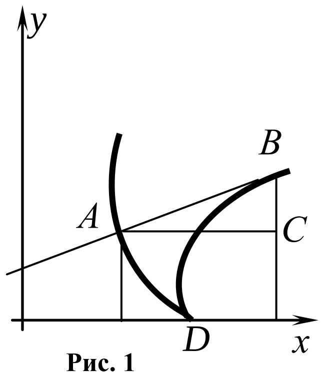


Рис. 1

Отсюда $x_0 - x = BD\dfrac{dx}{ds} = \displaystyle\int_a^t \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt \cdot \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$;

$$y_0 - y = \overset{\frown}{BD}\frac{dy}{ds} = \int_a^t \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt \cdot \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},$$

что эквивалентно требуемому доказать.

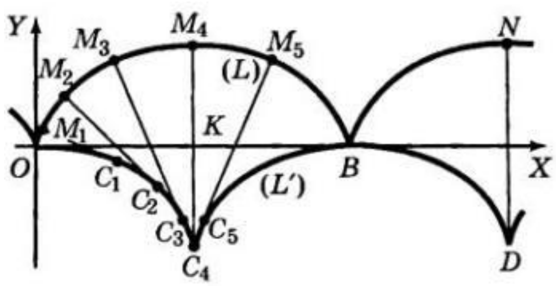


Рис. 2

Затем преподаватель говорит о том, что Гюйгенс в указанной работе установил следующий факт: эволютой циклоиды служит конгруэнтная циклоида, точки возврата которой находятся в вершинах исходной циклоиды, и предлагает студентам доказать его справедливость.

Доказательство. Из параметрических уравнений циклоиды:

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t), \tag{2}$$

по формулам (1) находим параметрические уравнения эволюты:

$$x_0 = a(t + \sin t),\ y_0 = -a(1 - \cos t). \tag{3}$$

Сходство уравнений (2) и (3) не случайно; если ввести новый параметр *t'*, который связан с параметром *t* следующим соотношением:

$$t = t' + \pi,$$

то уравнения (3) преобразуются к виду:

$$x_0 = \pi a + a(t' - \sin t'),\ y_0 = -2a + a(1 - \cos t').$$

Таким образом, эволюта циклоиды есть циклоида, конгруэнтная с данной, но смещенная вдоль основания на величину πa, т.е. на половину основания, и опущенная под основание на величину 2*a,* т.е. на диаметр производящего круга [рис. 2].

Это утверждение было использовано Гюйгенсом при конструировании маятниковых часов: чтобы период качания маятника не зависел от его амплитуды, конец маятника должен двигаться по циклоиде, а для этого необходимо верхнюю часть маятника поместить между двумя циклоидальными щеками.

Установленное свойство циклоиды приводит к вопросу о существовании других кривых, обладающих аналогичным свойством. Другими словами, требуется найти кривые, которые имеют *n*-ю эволюту, подобную исходной кривой.

«Осмысление». Ответ на этот вопрос получил крупнейший математик XVIII в. Леонард Эйлер. Далее студентам предлагается познакомиться с отрывком из работы Эйлера «Исследование кривых, подобных своей эволюте, либо первой, либо второй, либо третьей, либо даже какого угодно порядка» (1787г.) [4, с. 13–24], которая посвящена этой проблеме.

Пусть дана кривая *as* [рис. 3]. Построим в точках *a* и *s* соответствующие радиусы кривизны *aa'* и *ss'* кривой *as*. Обозначим точку их пересечения через *r*, а $\angle ars$ через φ. Точки *a'* и *s'* будут лежать на первой эволюте *a's'* кривой *as*. Из точек *a'* и *s'* проведем радиусы кривизны *a'a''* и *s's''* кривой *a's'*. Точку их пересечения обозначим *r'*. По построению $\angle a'r's' = \varphi$, следовательно, кривые *as* и *a's'* подобны. Продолжая аналогичные построения, получим следующие кривые: *a''s''*– эволюта второго порядка кривой *as,* $a'''s'''$– эволюта третьего порядка кривой *as* и т.д. Все они будут подобны исходной кривой.

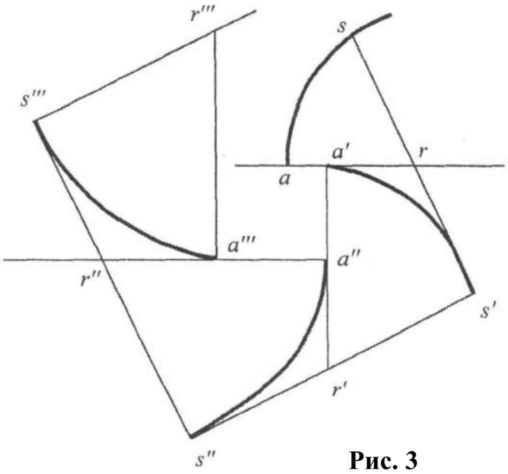


Рис. 3

Из самой природы эволюты следует, что $ss' = aa' + a's'$. Аналогично,

$$s's'' = a'a'' + a''s'',\quad s''s''' = a''a''' + a'''s''' \text{ и т.д.} \tag{4}$$

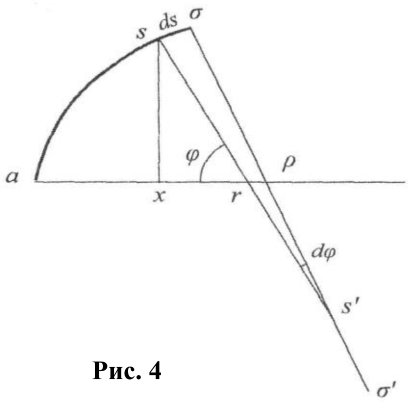


Рис. 4

Положив длину кривой *as*=*s*, радиусы кривизны *ss'*= *r*, *aa'* =*a*; длину первой эволюты *a's'*=*s'*, радиусы кривизны *s's''*= *r'*, *a'a''* =*a'*; длину второй эволюты *a''s''*=*s''*, радиусы кривизны *s''s'''*= *r''*, *a''a'''* =*a''* и т.д., перепишем равенства (4) в следующем виде: $r = a + s'$, $r' = a' + s''$, $r'' = a'' + s'''$ и т.д.

Отсюда $s' = r - a$, $s'' = r' - a'$, $s''' = r'' - a''$ и т.д. (5)

Рассмотрим кривую *as* [рис. 4], соответствующую $\angle ars = \varphi$. Зададим приращение $ds = s\sigma$ и проведем в точке σ радиус кривизны $\sigma\sigma'$. Обозначим через ρ точку пересечения *ar* и $\sigma\sigma'$. Из построения следует, что $\angle a\rho\sigma = \varphi + d\varphi$, где $d\varphi = \angle rs'\rho$.

Из прямоугольного треугольника $s's\sigma$ имеем $d\varphi = \dfrac{ds}{r}$ и, следовательно, $ds = rd\varphi$.

Аналогично, $ds' = r'd\varphi$, $ds'' = r''d\varphi$, $ds''' = r'''d\varphi$ и т.д. (6)

Из равенств (5) получаем, что $ds' = dr$, $ds'' = dr'$, $ds''' = dr''$ и т.д., а отсюда, учитывая равенства (6), имеем $dr = r'd\varphi$, $dr' = r''d\varphi$, $dr'' = r'''d\varphi$ и т.д. или $r' = \dfrac{dr}{d\varphi}$, $r'' = \dfrac{d^2r}{d\varphi^2}$, $r''' = \dfrac{d^3r}{d\varphi^3}$ и т.д.

В общем виде длина радиуса кривизны для эволюты *n*-го порядка будет вычисляться по формуле:

$$r^{(n)} = \frac{d^n r}{d\varphi^n}. \tag{7}$$

По условию задачи эволюта *n*-го порядка подобна исходной кривой, откуда $r^{(n)} = \pm Cr$, где *C* – коэффициент подобия. Тогда из равенства (7) получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^n r}{d\varphi^n} \pm Cr = 0,$$

которое позволяет определить искомую кривую.

Преподаватель предлагает студентам во время чтения делать в тексте следующие пометки: «V» – «это мне было известно», «+» – «это новая информация», «-» – «об этом я думал иначе», «?» – «этот фрагмент остался не понятным или вызвал у меня вопрос». Затем студенты систематизируют свои мысли, заполняя следующую таблицу. В последней графе «Ход рассуждений» они с опорой на текст восстанавливают последовательность рассуждений, приводящую к решению рассматриваемой проблемы.

«V»	«+»	«-»	«?»	«Ход рассуждений»

Эту работу студенты выполняют либо в парах, либо в микрогруппах (4–6 человек), при этом идет обсуждение новой информации, а преподаватель может контролировать промежуточные результаты и оказывать помощь в выполнении задания. Например, студенты должны обосновать справедливость промежуточного равенства $ds = rd\varphi$. (Доказательство: из треугольника $s's\sigma$ с прямым углом s имеем $\dfrac{ds}{r} = tg\Delta\varphi \cong \Delta\varphi = d\varphi$).

«Рефлексия». После заполнения таблиц преподаватель предоставляет слово каждой из групп. Студенты обмениваются информацией из каждого столбца, дополняют друг друга, а преподаватель фиксирует их ответы в сводной таблице на доске и отвечает на возникшие вопросы. Таким образом, происходит многократное повторение прочитанной информации и восстанавливается полный ход рассуждений великого ученого с обоснованием каждого перехода.

На дом студенты получают следующие задания: для эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и параболы $x^2 = 2py$ найти эволюту и эвольвенту; дочитать текст работы Эйлера до конца [4, с. 17–24]; продолжить заполнение таблицы; перечислить кривые, которые подобны своей первой эволюте, своей эволюте второго порядка.

На следующем занятии можно предложить студентам с помощью любого из математических пакетов построить кривые из домашней работы. Кроме того, по результатам выполнения домашнего задания, в том числе отраженным в таблице, преподаватель имеет возможность ответить на возникшие вопросы и оценить работу каждого студента.

Для контроля усвоения пройденного материала студентам предлагается выполнить следующие задания:

1. Дайте определение понятиям эволюта и эвольвента кривой. Кто впервые ввел эти понятия?

2. Докажите, что радиус кривизны эволюты можно представить выражением: $r_1 = \dfrac{rdr}{ds} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d\left(r^2\right)}{ds}$.

3. Составьте дифференциальное уравнение кривой подобной своей эволюте n-го порядка принимая длину дуги s эвольвенты за функцию от угла φ между ее нормалями.

4. Какое свойство циклоиды было описано в работе Х. Гюйгенса «Маятниковые часы» (1673г.)?

5. Составьте уравнения эволюты и эвольвенты кривой $y = \sin x$.

Представленная технология работы с научным текстом позволяет обучающемуся освоить такую образовательную стратегию, как методологическая редукция, или реконструкция идей, посредством которых он, изучая ход мыслей создателей классической дифференциальной геометрии, воспроизводит математическую логику мышления, осуществляя тем самым трансфер проблемно-поискового способа научного исследования. Это способствует не только лучшему пониманию студентами изучаемого материала, но и служит подготовительным этапом к их будущей научно-исследовательской работе.

Литература

1. Атаханов Р.А. Математическое мышление и методики определения уровня его развития / Р.А. Атаханов. – Москва-Рига, 2000. – 208 с.

2. Выготский Л.С. Педагогическая психология / Л.С. Выготский. – М.: Педагогика, 1991. – 480 с.

3. Давыдов В.В. Теория развивающего обучения / В.В. Давыдов. – М.:ИНТОР, 1996. – 544 с.

4. Игнатушина И. В. Материалы для спецкурса «Из истории формирования классической дифференциальной геометрии: применение математического анализа к геометрии в работах Леонарда Эйлера»: учебно-методическое пособие для студентов физико-математического факультета / И.В. Игнатушина. – Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2010. – 132 с.

5. История Академии наук СССР/ Ред. К. В. Островитянов. – М., 1958. – Т. 1. – 483с.

6. Леонтьев А.Н. Избранные психологические произведения: В 2-х тт. / А.Н. Леонтьев; Под ред. В.В. Давыдова, В.П. Зинченко, А.А. Леонтьева, А.В. Петровского. – М.: Педагогика, 1983. – Т. 1. – 392 с. – Т. 2. – 320 с.

7. Теплов Б.М. Избранные труды: В 2-х тт. / Б.М. Теплов. – М.: Педагогика, 1985. – Т.1. – 328 с. – Т. 2. – 360 с.

УДК 378

О ПОНЯТИИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРЕМ

Игошин В.И., доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор,
Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского, г. Саратов
igoshinvi@mail.ru

Аннотация. Выпускники современной средней школы слабо владеют понятием и методами доказательства математических, прежде всего геометрических, теорем. Это обусловлено как системой организации изучения геометрии в школе (ЕГЭ, отмена устного экзамена), так и недостаточным уровнем логико-дидактической подготовки будущих учителей математики на уровнях бакалавриата и магистратуры в реформированных классических университетах. В сообщении предлагается усилить роль курса математической логики в системе подготовки будущих учителей математики, в частности, в процессе формирования у них понятия строгого математического доказательства. Прекрасной методической моделью для этого может служить формализованное исчисление высказываний. Показывается, что доказательства теорем школьного курса геометрии полностью укладываются в концепцию строгого математического доказательства, предлагаемую формализованным исчислением высказываний.

Ключевые слова: доказательство, вывод из аксиом, теорема, аксиоматический метод, аксиоматическая теория, формализованное исчисление высказываний.

ABOUT NOTION OF PROOVING OF MATHEMATICAL THEOREMS

V.I. Igoshin, doctor of pedagogical sciences, candidate of physico-mathematical sciences, professor,
Saratov national research state University name N. G. Chernyshevsky, Saratov
igoshinvi@mail.ru

Abstract. The graduates of modern secondary schools have a poor command of the concept and methods of mathematical proofs, especially geometric theorems. This is due to the system of organization of study of geometry in school (Unified State Examination, cancel the oral examination), and the low level of logical-didactical training of future teachers of mathematics at the levels of undergraduate and graduate programs in a reformed classical universities. The message proposed to strengthen the role of the course in mathematical logic in the system of preparation of future teachers of mathematics, in particular, in the process of forming the concept of rigorous mathematical proof. A great methodological model for this may be formalized propositional calculus. It is shown that the proof of the theorems of school geometry course completely fit into the concept of rigorous mathematical proofs offered by formal calculus.

Keywords: proof, inference from the axioms, the theorem, axiomatic method, axiomatic theory, propositional calculus.

Введение. Педагогическая проблема обучения доказательству. В современной средней школе понятия доказательства, аксиоматического метода, аксиоматической теории, свойственные, прежде всего, школьному курсу геометрии, практически полностью исчезли. Система ЕГЭ и отмена устного экзамена по геометрии привели к тому, что теоретический материал на уроках геометрии излагается без доказательств, директивно, учащиеся перестали воспроизводить доказательства, демонстрирующие им логические способы рассуждений, в устной форме и тем самым перестали обучаться искусству рассуждений, необходимому в любой области деятельности. Основное внимание в курсе геометрии уделяется утилитарному применению теоретических фактов и формул к решению типовых задач, аналогичных тем, которые предлагаются в ЕГЭ. В результате такого реформирования геометрия, наиболее логичная из школьных учебных дисциплин, оказалась отделена от логики и перестала учить логике доказательств и рассуждений.

С другой стороны, и сами современные молодые учителя, выпускаемые по четырехлетней программе бакалавриата направления «Педагогическое образование» из современных классических университетов, в которых бесследно растворились бывшие педагогические институты, не владеют логическими понятиями доказательства, аксиоматического метода и аксиоматической теории. Курсы геометрии и математической логики сокращены в этих университетах до катастрофических объемов, а в некоторых университетах курс математической логики для будущих учителей математики исключен вовсе. Это во многом обусловлено тем, что современный ФГОС отпустил составление конкретных учебных планов по направлениям бакалавриата на откуп самим университетам. Мощный сокрушительный удар в этом направлении нанесло бездумное применение очередной образовательной инновации – прикладного бакалавриата.

Спасительной соломинкой в этой катастрофической ситуации могла бы служить магистратура, призванная расширить и углубить знания и компетенции, приобретенные на уровне бакалавриата. Но для этого должна быть глубоко продумана преемственная взаимосвязь в образовательных системах двух уровней – бакалаврата и магистратуры. Некоторые соображения на этот счет в части подготовки учителей математики высказывались автором в [1] – [5].

Интуитивно убедительное доказательство и формальное доказательство. Что же такое доказательство? «Доказательство (в общепринятом употреблении этого слова) – это всего лишь рассуждение, которое должно убедить нас настолько, что мы сами готовы убеждать с его помощью других. Несомненно, что уточнение этого понятия (во всей полноте его объёма) – одна из важнейших задач математики». [6, с. 14]. Математика выделилась из системы всех прочих наук именно тем, что утверждаемые в ней факты подтверждались доказательствами. Считается, что первые математические доказательства в современном их понимании появились в Древней Греции в VII – VI вв. до Р.Х. и связаны они с именами Фалеса и Пифагора. Эту мысль подчеркивает Н.Бурбаки, начиная свой знаменитый трактат «Начала математики» словами: «Со времён греков говорить “математика” – значит говорить “доказательство”». [7, с. 23]. Сократ, Платон и Аристотель заложили основы логики как науки о рассуждениях и доказательствах и сформулировали принципы построения всякой науки как аксиоматической теории. Следуя их заветам, Евклид впервые построил геометрию как доказательную логическую теорию.

Понимание доказательства, утвердившееся в математике со времен древних греков, можно рассматривать как интуитивно-убедительное. Оно тесно связано с языковыми средствами и с социальной психологией человеческого общества. Оба эти фактора меняются с течением времени, а вместе с ними меняются языковое оформление доказательств и представления об интуитивной ясности, очевидности и убедительности. С течением времени вместе с развитием математики и логики развивались также критерии и принципы логической строгости математических доказательств.

Такой характер интуитивно-убедительного рассуждения понятие доказательства имело вплоть до конца XIX века. К этому времени развитие новых направлений в математике (в частности, открытие неевклидовых геометрий, обнаружение парадоксов канторовской теории множеств, проистекших из применения к бесконечным множествам методов рассуждений, свойственных рассуждениям о конечных множествах) привели к необходимости подвергнуть понятие доказательства более глубокому анализу с целью полного исключения из него интуитивного элемента. Такой анализ был осуществлен (математическими) логиками, начиная с Г.Фреге, что привело к введению нового понятия – понятия формального доказательства, которое стало существенным усовершенствованием интуитивно-психологического понятия доказательства. Можно сказать, что понятие формального доказательства, оттолкнувшись от интуитивных представлений о содержательном доказательстве, явилось логико-математической моделью интуитивного понятия доказательства.

Таким образом, понятие доказательства, появившись в древнегреческой математике вместе со становлением логики как науки, современного уровня строгости достигло в XX веке вместе со становлением логики как математической науки и превращением ее в математическую логику. Поэтому логические понятия строгого математического доказательства, аксиоматического метода и аксиоматической теории призван сформировать в будущем учителе математики курс математической логики.

Понятие формального доказательства и школьная геометрия. Понятия формального доказательства, аксиоматического метода и аксиоматической теории возникают в формальной части курса математической логики, когда изучаются формализованные исчисления высказываний и предикатов, а также формальные аксиоматические математические теории. При этом, курс математической логики, конечно же, не учит находить доказательства тех или иных математических теорем, а тем более открывать сами эти теоремы. Его задача состоит в том, чтобы вскрыть методологическую сущность этих важнейших математических категорий с тем, чтобы будущий учитель математики мог руководствоваться ими в своей педагогической практике.

Важнейшее логическое правило, на котором основано построение рассуждений и доказательств, сформулировано еще Аристотелем. Это – правило Modus Ponens (MP): из утверждений F и $F \to G$ («если F, то G») непосредственно следует утверждение G. Понятие доказательства определяется в рамках некоей аксиоматической теории $\mathbf{Th(\Sigma)}$, построенной на базе некоторой системы аксиом $\mathbf{\Sigma} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. При этом, в процессе доказательства могут использоваться какие-то ранее доказанные утверждения (которые называют гипотезами), совокупность которых обозначается Г.

Итак, в математической логике дается следующее определение строгого доказательства.

Под *доказательством (выводом* (из аксиом)) утверждения G из системы аксиом $\mathbf{\Sigma}$ понимают такую конечную последовательность утверждений $B_1, B_2, \ldots, B_s \equiv G$ утверждений теории, оканчивающуюся доказываемым утверждением G, в которой каждое утверждение есть либо аксиома из $\mathbf{\Sigma}$, либо получено из предшествующих утверждений этой последовательности по правилу вывода MP. Утверждение G *доказуемо (выводимо из аксиом,* или *является теоремой)*, если существует доказательство этого утверждения, т.е. доказательство, оканчивающееся этим утверждением G. При этом пишут: $\mathbf{\Sigma} \vdash G$, или, короче, $\vdash G$, если понятно, о какой системе аксиом идет речь. Определение понятия *вывода (и выводимости) из множества гипотез* Г отличается от сформулированного тем, что члены последовательности-вывода $B_1, B_2, \ldots, B_s \equiv G$ могут быть также и элементами из Г. При этом пишут: $\Gamma \vdash G$.

Покажем, что этому определению действительно соответствуют доказательства теорем школьного курса геометрии. В качестве примера рассмотрим теорему 6.3 из учебника А.В.Погорелова «Геометрия. 7 – 11»: «*У параллелограмма противолежащие стороны равны*». (Мы опустили вторую часть этой теоремы, утверждающую, что у параллелограмма противолежащие углы равны). Воспроизведём сначала доказательство этой теоремы, приводимое в учебнике:

«Пусть $ABCD$ – данный параллелограмм. Проведём диагонали параллелограмма. Пусть O – точка их пересечения. Равенство противолежащих сторон AB и CD следует из равенства треугольников AOB и COD. У них углы при вершине O равны как вертикальные, а $OA = OC$ и $OB = OD$ по свойству диагоналей параллелограмма. Точно так же из равенства треугольников AOD и COB следует равенство другой пары противолежащих сторон – AD и BC».

Более строгая логическая формулировка требуемой теоремы имеет вид: «*Если ABCD – параллелограмм, то AB = CD*». Представим ее доказательство в виде последовательности (цепочки) узловых утверждений, составляющих его:

а) $ABCD$ – параллелограмм (по условию);

б) O – точка пересечения его диагоналей (по построению);

в) $\angle AOB = \angle COD$ (как вертикальные, по теореме 2.2);

г) $OA = OC$ (по свойству диагоналей параллелограмма, теорема 6.2);

д) $OB = OD$ (по свойству диагоналей параллелограмма, теорема 6.2);

е) $\Delta AOB = \Delta COD$ (из в, г, д по первому признаку равенства треугольников, теорема 3.1);

ж) $AB = CD$ (из е по определению равных треугольников).

Наконец, расширим эту последовательность до такой последовательности утверждений, которая предусмотрена в определении доказательства, сформулированном выше:

(1) $ABCD$ – параллелограмм. Гипотеза

(2) O – точка пересечения его диагоналей. Гипотеза

(3) Углы $\angle AOB$ и $\angle COD$ вертикальные. Гипотеза

(4) Если углы $\angle AOB$ и $\angle COD$ вертикальные, то $\angle AOB = \angle COD$. Теорема 2.2

(5) $\angle AOB = \angle COD$ (MP): (3), (4)

(6) $ABCD$ – параллелограмм и O – точка пересечения его диагоналей. $\wedge$-введ: (1), (2)

(7) Если $ABCD$ – параллелограмм и O – точка пересечения его диагоналей, то $OA = OC$
Теорема 6.2

(8) $OA = OC$ (MP): (6), (7)

(9) Если $ABCD$ – параллелограмм и O – точка пересечения его диагоналей, то $OB = OD$
Теорема 6.2

(10) $OB = OD$ (MP): (6), (9)

(11) $\angle AOB = \angle COD$ и $OA = OC$ и $OB = OD$ $\wedge$-введ: (5), (8), (10)

(12) Если $\angle AOB = \angle COD$ и $OA = OC$ и $OB = OD$, то $\Delta AOB = \Delta COD$ Теорема 3.1

(13) $\Delta AOB = \Delta COD$ (MP): (11), (12)

(14) Если $\Delta AOB = \Delta COD$, то $AB = CD$ По опр. равных треугольников

(15) $AB = CD$ (MP): (13), (14)

Аналогично доказывается, что $AD = BC$. Теоремы 2.2, 6.2 и 3.1, указанные в доказательстве, это – доказанные ранее теоремы из учебника А.В.Погорелова. В пунктах (5), (8), (13) и (15) используется правило вывода Modus Ponens, а в пунктах (6) и (11) – правило введения конъюнкции ($\wedge$-введ): из утверждений F и G непосредственно следует утверждение $F \wedge G$.

Итак, из гипотезы «*ABCD – параллелограмм*» выведено утверждение «*AB = CD*». В результате заключаем, что доказана теорема «*Если ABCD – параллелограмм, то AB = CD*». Это заключение основано на правиле введения импликации (теореме о дедукции): если из утверждений Γ, F выводится утверждение G, то из утверждений Γ выводится утверждение $F \to G$. Отметим, что в процессе доказательства могут использоваться и другие правила логических умозаключений. Вот некоторые из них (см., например, [8, с. 77 – 81], [9, с. 43 – 45]):

1) $P \wedge Q \vdash P$; $P \wedge Q \vdash Q$ (правила удаления конъюнкции);

2) $P \vdash P \vee Q$; $Q \vdash P \vee Q$ (правила введения дизъюнкции);

3) $P \to Q,\ Q \to R \vdash P \to R$ (правило силлогизма, или цепного заключения);

4) $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$ (правило контрапозиции);

5) $P \to Q,\ \neg Q \vdash \neg P$ (правило Modus Tollens);

6) $(P \wedge Q) \to R \vdash (P \wedge \neg R) \to \neg Q$ (правило расширенной контрапозиции);

7) $P \to (Q \to R) \vdash (Q \to P) \to R$ (правило перестановки посылок);

8) $P \to R,\ Q \to R \vdash (P \vee Q) \to R$ (правило разбора случаев);

9) $P_1 \to Q,\ P_2 \to Q,\ P_1 \vee P_2 \vdash Q$ (простая конструктивная дилемма);

10) $P_1 \to Q_1,\ P_2 \to Q_2,\ P_1 \vee P_2 \vdash Q_1 \vee Q_2$ (сложная конструктивная дилемма);

11) $P \to Q_1$, $P \to Q_2$, $\neg Q_1 \vee \neg Q_2 \vdash \neg P$ (простая деструктивная дилемма);

12) $P_1 \to Q_1$, $P_2 \to Q_2$, $\neg Q_1 \vee \neg Q_2 \vdash \neg P_1 \vee \neg P_2$ (сложная конструктивная дилемма);

13) $\neg\neg P \vdash P$ (сильное удаление отрицания);

14) P, $\neg P \vdash Q$ (слабое удаление отрицания).

Приведем пример умозаключения, выполняемого по правилу расширенной контрапозиции.

$(P \wedge Q) \to R$: «*Если прямая l перпендикулярна двум прямым* a *и* b*, лежащим в плоскости* π*, и прямые* a *и* b *не параллельны, то прямая l перпендикулярна всякой прямой* c*, лежащей в плоскости* π».

$(P \wedge \neg R) \to \neg Q$: «*Если прямая l перпендикулярна двум прямым* a *и* b*, лежащим в плоскости* π*, и прямая l не перпендикулярна некоторой прямой* c*, лежащей в этой плоскости, то прямые* a *и* b *параллельны*».

Здесь: P: «*Прямая l перпендикулярна двум прямым* a *и* b*, лежащим в плоскости* π»;

Q: «*Прямые* a *и* b *не параллельны*»;

R: «*Прямая l перпендикулярна всякой прямой* c*, лежащей в плоскости* π». □

Приведенные правила умозаключений по существу и являются математической формализацией тех мыслительных процессов, которые происходят в нашем мозгу при рассуждениях в поисках доказательства математических теорем.

Коротко говоря, доказательство в математике получается в результате конечной последовательности применений правил вывода, т.е. правильных умозаключений, в которых вывод каждого предыдущего умозаключения служит посылкой для следующего, а последним заключением является утверждение, истинность которого требуется установить. При этом, исходными посылками могут служить не только аксиомы, но и утверждения, истинность которых установлена (доказана) раньше (они-то и образуют множество гипотез Г).

Таким образом, рассмотренное определение доказательства представляет собой логическую формализацию, своего рода логическую модель процесса доказательства в конкретно-содержательных математических теориях. Именно так устроены доказательства в математике, как в высшей, так и в школьной. Чрезвычайно важно наглядно и доступно продемонстрировать это будущему учителю математики и убедить его в этом.

Заключение. Дальнейшее развитие теория доказательства получает в математической логике, в тех ее разделах, где вводятся и изучаются формализованные исчисления высказываний и предикатов, а также формальные аксиоматические математические теории. На уровнях бакалавриата и магистратуры будущие учителя математики могут с разной степенью подробности ознакомиться с этой теорией [2]. Если будущие учителя математики будут владеть теорией доказательства, то есть надежда, что они сумеют и своих учеников – выпускников школ – через школьные математические дисциплины и, прежде всего, через геометрию, приобщить к культуре рассуждений, обоснований и доказательств, так необходимой выпускникам школ во всякой деятельности, какую бы они ни избрали.

По-прежнему актуальной остаётся двуединая педагогическая задача, поставленная великим математиком XX века академиком АН СССР А.Н.Колмогоровым в 1962 г.: «1) Привести общие логические основы современной математики в такое состояние, чтобы их можно было излагать в школе подросткам 14 – 15 лет. 2) Уничтожить расхождение между «строгими» методами чистых математиков и «нестрогими» приёмами математических рассуждений, применяемых прикладными математиками, физиками и техниками». (Цит. по книге [6, с. 15]). Решая её, полезно не забывать, что «то, что было доказательством для Евклида, остается доказательством и в наших глазах». [7, с. 23].

Литература

1. Игошин В. И. О подготовке бакалавров и магистров педагогического образования по профилю «педагогическое образование» // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Философия. Психология. Педагогика. – 2014. – Т. 14. – Вып. 3. – С. 103-106.
2. Игошин В. И. Подготовка будущих учителей математики и информатики в области дисциплин дискретной математики в условиях бакалавриата и магистратуры // Образование и наука. – 2013. – №7 (106). – С. 85-100.
3. Игошин В. И. Формирование логико-философской культуры будущих учителей математики в условиях магистратуры // Известия Самарской государственной сельскохозяйственной академии. – 2012. – Т. 2. – С. 153-157.

4. Игошин В. И. Подготовка в области дискретных математических наук будущих учителей информатики в условиях бакалавриата и магистратуры // Вектор науки Тольяттинского государственного университета. – 2011. – № 4 (18). – С. 343-345.
5. Игошин В. И., Капитонова Т. А., Лебедева С. В. Содержательно-методические аспекты предметной подготовки бакалавров педагогического образования (профиль – математическое образование) // Гуманитарные науки и образование. (Мордовский государственный педагогический институт им. М.Е.Евсевьева (Саранск)). – 2012. – №1(9). – С. 14-17.
6. Успенский В. А. Апология математики: [сборник статей] – СПб: Амфора. ТИД Амфора, 2009. – 554 с.
7. Бурбаки Н. Теория множеств / Пер. с фр. – М.: Мир, 1965. – 456 с.
8. Игошин В. И. Элементы математической логики: Учебник для студ. учреждений сред. проф. образования. – М.: Изд. центр «Академия», 2016. – 320 с.
9. Игошин В. И. Сборник задач по математической логике и теории алгоритмов: учебное пособие. – М.: КУРС: ИНФРА-М, 2017. – 392 с. (Бакалавриат).

УДК 378

РАБОТА С ТЕОРЕМОЙ ПОМПЕЙЮ НА ЭТАПЕ ПОИСКА РАЗЛИЧНЫХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Калинин С.И., доктор педагогических наук, профессор
Вятский государственный университет, г. Киров
kalinin_gu@mail.ru

Аннотация. Статья посвящается характеризации этапа поиска различных доказательств теоремы на примере утверждения Помпейю о среднем значении дифференцируемой функции.

Ключевые слова: работа с теоремой, этап поиска различных доказательств, теорема Помпейю.

WORKING WITH THE THEOREM POMPEIU IN THE SEARCH FOR VARIOUS PROOFS

S. I. Kalinin, doctor of pedagogical sciences, professor,
Vyatka State University, Kirov
kalinin_gu@mail.ru

Abstract. The article is devoted to characterizing the stage of searching for various proofs of the theorem by the example of Pompeiu's statement about the mean value of a differentiable function.

Keywords: work with the theorem, the stage of searching for various proofs, the Pompeiu theorem.

Как известно, деятельностная составляющая содержания обучения будущих учителей математики в качестве одного из основных направлений включает в себя работу с теоремой. При организация деятельности, связанной с изучением конкретной теоремы, преподаватель обычно настраивает студентов на прохождение следующих принципиальных этапов: 1) рассмотрение мотивации изучения теоремы; 2) осмысление отражаемого в теореме факта; 3) усвоение содержания теоремы; 4) осмысление метода доказательства; 5) реализация данного метода при доказательстве теоремы; 6) попытка рассмотрения иных способов доказательства данной теоремы; 7) при наличии таковых необходимо их сравнение на предмет определения наиболее эффективного, рационального, эстетичного; 8) рассмотрение возможных применений теоремы; 9) установление связей теоремы с ранее изученными утверждениями; 10) получение по возможности различных следствий установленной теоремы. Обозначим, наконец, еще такие три этапа работы с теоремой: 11) попытка рассмотрения обобщений доказанной теоремы; 12) осмысление возможностей ее развития; 13) формулировка новых гипотез и открытых вопросов, восходящих к изучаемой теореме.

В настоящей статье, обращаясь к важной теореме Помпейю из дифференциального исчисления функций одной переменной, мы намерены остановиться на характеризации этапа поиска различных доказательств утверждения.

Подчеркнем, что отмечаемая в заголовке теорема до 2016 г. практически не была представлена в научной и учебно-методической литературе на русском языке, хотя она гармонично вписывается в известный перечень классических теорем о среднем – Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши, Флетта. Впервые с формулировкой данной теоремы мы познакомились по краткому реферату 16.11.–13Б.2 статьи «Обобщенное неравенство Помпейю для локально дробных интегралов и его применения» (Appl. Math. And Comput. 2016. 274, с.282–291) реферативного журнала «Математика». Ее осмысление привело к появлению нашей работы [1], в которой ставится цель – попытаться познакомить русскоязычного читателя как с самой теоремой Помпейю, так и ее некоторыми обобщениями.

Упоминаемая теорема есть следующее утверждение о среднем значении для дифференцируемой на отрезке функции.

Теорема 1 (D. Pompeiu). Пусть f – дифференцируемая на отрезке $[a;b]$ числовой прямой функция, при этом $0 \notin [a;b]$. Тогда для любых двух различных точек x_1, x_2 из $[a;b]$ найдется лежащая между ними точка ξ такая, что

$$\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2} = f(\xi) - \xi f'(\xi). \tag{1}$$

Данная теорема впервые была установлена в статье [3]. С ее доказательством читатель может познакомиться, обратившись к доступной работе [2]. Мы же в данном месте скажем, что анализ доказательства из цитируемой работы позволяет заключить о возможности формулирования теоремы 1 в более слабых предположениях относительно функции f – достаточно предполагать ее непрерывность на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемость на интервале $(a;b)$.

С учетом сказанного переформулируем теорему 1 в форме, присущей классическим «французским» теоремам о среднем значении.

Теорема 2. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, не содержащем точки x=0, и дифференцируема на интервале $(a;b)$. Тогда найдется точка $\xi \in (a;b)$ такая, что

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a-b} = f(\xi) - \xi f'(\xi). \tag{2}$$

Теорему 2 условимся называть так же, как и теорему 1 – теоремой Помпейю, а соотношение (2) – формулой Помпейю.

В настоящей статье мы рассмотрим четыре доказательства теоремы 2. Они будут принципиально отличаться друг от друга, хотя, заметим, каждое из первых трех использует один и тот же эвристический прием – введение в рассмотрение вспомогательной функции. Четвертое же доказательство будет основываться на геометрическом подходе.

В качестве первого доказательства реализуем то, которое использует метод выше цитируемой работы [2].

Доказательство 1. Введем вспомогательную функцию $F(t) = t\,f\left(\frac{1}{t}\right)$. Она непрерывна на отрезке $\left[\frac{1}{b};\frac{1}{a}\right]$ и дифференцируема на интервале $\left(\frac{1}{b};\frac{1}{a}\right)$. Следовательно, в силу теоремы Лагранжа найдется хотя бы одна точка η, принадлежащая интервалу $\left(\frac{1}{b};\frac{1}{a}\right)$, для которой будет верно соотношение

$$\frac{F\left(\frac{1}{a}\right) - F\left(\frac{1}{b}\right)}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = F'(\eta),$$

или

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a-b} = f\left(\frac{1}{\eta}\right) - \frac{1}{\eta} f'\left(\frac{1}{\eta}\right). \tag{3}$$

Полагая в (3) $\frac{1}{\eta} = \xi$, получаем формулу Помпейю (2). Теорема 2 доказана.

Доказательство 2. Снова используем метод введения вспомогательной функции. В качестве таковой возьмем функцию

$$\Phi(x) = \frac{(a-b)f(x) - af(b) + bf(a)}{x}, \quad x \in [a,b].$$

Данная функция, очевидно, непрерывна на отрезке [a;b] и дифференцируема внутри его. Кроме того, нетрудно проверить, что $\Phi(a) = \Phi(b) = f(a) - f(b)$. Следовательно, функция Φ на отрезке [a;b] удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Согласно этой теореме найдется такая точка $\xi \in (a,b)$, что будет справедливо условие

$$\Phi'(\xi) = \frac{(a-b)(\xi f'(\xi) - f(\xi) + af(b) - bf(a))}{\xi^2} = 0.$$

Из него следует справедливость формулы (2). Доказательство 2 завершено.

Обратим внимание читателя на то, что вспомогательные функции $F(t)$ и $\Phi(x)$, использованные в проведенных доказательствах теоремы Помпейю, в своем определении принципиально учитывают ограничение $0 \notin [a;b]$.

Прежде, чем реализовать третье доказательство теоремы 2, установим следующую вспомогательную лемму.

Лемма. Пусть $\varphi : [a;b] \to \mathbf{R}$ $\left(0 \notin [a;b]\right)$ – функция, удовлетворяющая всем условиям классической теоремы Ролля о среднем значении, то есть 1) φ непрерывна на рассматриваемом отрезке; 2) дифференцируема внутри его; 3) $\varphi(a) = \varphi(b)$. Тогда на интервале (a;b) найдется хотя бы одна точка ξ такая, что

$$\varphi(a) = \varphi(\xi) - \xi\varphi'(\xi). \tag{3}$$

Доказательство. Если $\varphi(x) \equiv const$, то соотношение (3) выполняется с очевидностью.

Предположим, что условие $\varphi(x) \equiv const$ не выполняется. Рассмотрим угол α, под которым виден график Γ_φ функции φ из точки $M_0(0;\varphi(a))$. В силу условия $0 \notin [a;b]$ и непрерывности φ сторонами данного угла будут являться невертикальные лучи, исходящие из точки M_0 и опорные к Γ_φ, при этом хотя бы один из них не будет содержать в себе хорду, стягивающую концы кривой Γ_φ. Такой луч обозначим l.

В силу условия 2) леммы Γ_φ есть гладкая на интервале (a,b) кривая, следовательно, продолжение l является касательной к Γ_φ в некоторой его точке $P(c;\varphi(c))$, $c \in (a;b)$. Запишем уравнение данной касательной:

$$y = \varphi(c) + \varphi'(c)(x-c).$$

Полагая в нем $x = 0$, найдем значение ординаты y_{M_0} точки M_0:

$$y_{M_0} = \varphi(c) + \varphi'(c)(-c).$$

С другой стороны, $y_{M_0} = \varphi(a)$, потому можно заключить, что искомой точкой ξ является точка c.

Лемма доказана.

Доказательство 3. Введем в рассмотрение функцию

$$G(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}x.$$

Нетрудно проверить, что она удовлетворяет всем условиям установленной леммы. Следовательно, для нее будет выполняться соотношение вида (3):

$$G(a) = G(\xi) - \xi G'(\xi),$$

где $\xi \in (a;b)$ – некоторая средняя точка. Более подробно это соотношение распишется так:

$$f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}a=$$
$$=f(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\xi-\xi\left(f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right),\ \xi\in(a;b).$$

Отсюда простыми преобразованиями получаем формулу Помпейю (2). Теорема доказана.

Техника доказательства установленной выше леммы порождает следующее геометрическое доказательство теоремы Помпейю.

Доказательство 4. В силу непрерывности функции *f* хорда *AB*, соединяющая концы графика Γ_f данной функции, есть невертикальный отрезок. Этот отрезок описывается уравнением

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{a-b}(x-a)+f(a),\ x\in[a;b]. \tag{4}$$

Из (4) следует, что продолжение хорды *AB* пересечет ось *Oy* в точке M_0, имеющей ординату $y_{M_0}=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}$. Рассмотрим угол α, под которым виден график Γ_f функции *f* из точки M_0. В силу ограниченности *f* значение раствора этого угла лежит в промежутке $[0;\pi)$.

Рассмотрим случай, когда $\alpha>0$. В данном предположении сторонами угла α будут являться невертикальные лучи, исходящие из точки M_0 и опорные к Γ_f, при этом хотя бы один из них не будет содержать в себе точек хорды *AB*, стягивающей концы кривой Γ_f. Такой луч обозначим *l*. Поскольку Γ_f есть гладкая на интервале (a,b) кривая, то продолжение *l* является касательной к Γ_f в некоторой ее точке $P(c;f(c)),\ c\in(a;b)$. Запишем уравнение этой касательной:

$$y=f(c)+f'(c)(x-c).$$

Полагая в последнем $x=0$, находим другое представление значения ординаты y_{M_0} точки M_0:

$$y_{M_0}=f(c)+f'(c)(-c).$$

Таким образом, искомой точкой ξ, обосновывающей формулу Помпейю, является найденная точка *c*.

Пусть сейчас $\alpha=0$. В этом случае функция *f* является линейной, она имеет вид (4). Непосредственно проверкой убеждаемся в том, что для нее формула Помпейю (2) выполняется для любой точки $\xi\in(a;b)$. Теорема 2 доказана.

Таким образом, все намеченные четыре подхода к обоснованию теоремы Помпейю нами реализованы.

Литература

1. Калинин С. И., Дозморов А. В. Теорема Помпейю и ее обобщения // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: математика, механика, информатика. Сыктывкарский гос. университет. – 2017. – №1(22) – С. 73-79.

2. Dragomir S. S. An inequality of Ostrowski type via Pompeiu's mean value theorem. J. Ineq. Pure and Appl. Math. 6(3) Art. 83, 2005. http://jipam.vu.edu.au.

3. Pompeiu D. Sur une proposition analogue au théorème des accroissements finis. Mathematica (Cluj, Romania), 22 (1946), 143-146.

УДК 378.14

РЕАЛИЗАЦИЯ КОМПЕТЕНТНОСТНОГО ПОДХОДА В ПРАКТИКУМЕ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Каштанова Е.К., ст. преподаватель,
Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань
mst-stat@mail.ru

Аннотация. В статье рассмотрены основные требования к современным учебникам. В качестве примера представлена реализация компетентностного подхода в практикуме по теории вероятностей для студентов социальных и экономических специальностей.

Ключевые слова: компетентностный подход, учебник, компетентностная задача, теория вероятностей.

IMPLEMENTATION OF A COMPETENCE APPROACH IN THE TEXTBOOK ON THE PROBABILITY THEORY

E.K. Kashtanova, senior teacher,
Kazan Federal University, Kazan
mst-stat@mail.ru

Abstract. The article describes the main requirements for modern textbooks. In an example implementation of a competence approach in the teaching of probability theory for students of the social and economic specialties.

Keywords: competence approach, textbook, competence-oriented task, probability theory.

.

Введение компетентностного подхода, как ведущего подхода ФГОС ВО, изменило требования ко всему учебному процессу. В том числе и к учебнику, как к одному из основных средств обучения.

Наиболее перспективными сейчас считаются электронные учебники, т.к. они позволяют включать элементы мультимедиа, интерактивный компонент; в электронных учебниках отсутствует проблема объема учебника и т.д. Но и бумажные учебники продолжают быть востребованными.

С целью выявления предпочтений студентов был проведен опрос среди студентов нематематических специальностей КФУ. Студентам было предложено ответить на вопрос: «Какой учебник Вы предпочитаете: электронный или бумажный?». В опросе участвовали студенты-социологи (42 человека, 1 курс), географы (12 человек, 2 курс), экономисты (заочники, 42 человека, 2 курс). Результаты представлены на рис. 1.

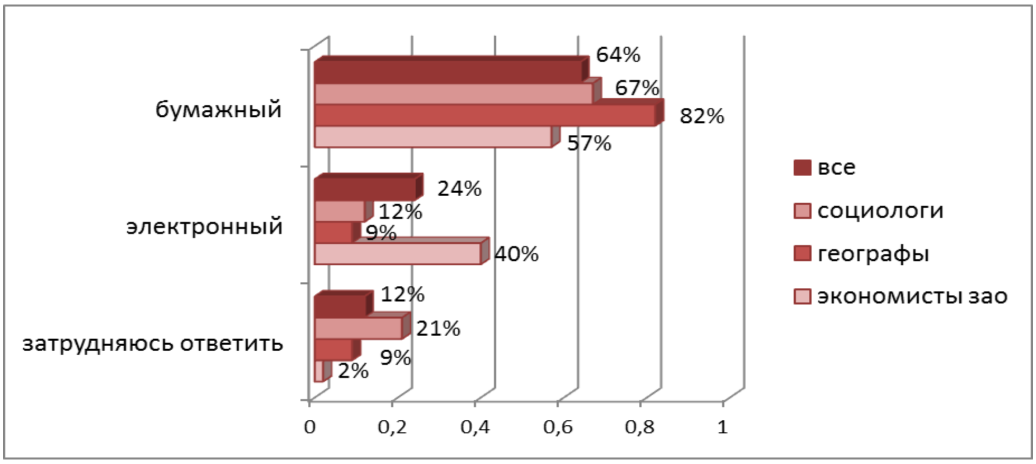


Рис. 1

Студенты младших курсов предпочитают бумажный вариант учебника, а среди более взрослых заочников голоса разделились примерно пополам. Из личных бесед мы выяснили, что главная причина выбора бумажных учебников в том, что у студентов младших курсов мало опыта работы с электронными обучающими ресурсами. Результаты проведенного опроса в целом совпадают с исследованием Е.О.Ивановой [3]. Автор также видит основную причину предпочтения бумажным учебникам в том, что выпускники школ не владеют в должной степени информационной компетенцией.

Таким образом, бумажные учебники продолжают быть актуальными. К тому же представление этих учебников в pdf-формате позволяет их читать на любой платформе. Кроме того, в дальнейшем бумажные учебники могут быть видоизменены в электронные учебники.

На основе анализа работ [2-4], в которых рассмотрены как бумажные, так и электронные учебники, мы выделили следующие основные требования к современным бумажным учебникам:

– соответствие требованиями ФГОС ВО, определяющих результаты обучения в виде общекультурных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций;

– создание не просто учебника, а учебно-методического комплекса (УМК), который задает обучающемуся образовательную среду;

– вариативность учебников и УМК.

К более локальным требованиям можно отнести следующие требования:

– содержание учебника должно быть адекватно современному развитию науки и общественной жизни;

– модульное построение учебника;

– деятельностная направленность учебника;

– наличие заданий проблемного характера, творческих заданий;

– ориентация учебника на самостоятельную работу обучающегося.

На основе вышеуказанных требований был разработан практикум по теории вероятностей для студентов социальных и экономических специальностей [5].

Практикум содержит методические рекомендации для студентов по самостоятельной работе, таблицы, глоссарий, справочный материал, итоговую контрольную работу (2 варианта), ответы, рекомендуемую литературу, Интернет-источники. Для наглядности изложения материала практически в каждом параграфе включены схемы.

Каждый параграф включает в себя: 1) цели изучения; 2) теоретический материал; 3) разбор типовых задач; 4) контрольные вопросы; 5) задачи; 6) задания для самоконтроля.

Ориентация учебника на компетентностный подход означает, в частности, наличие компетентностных задач, с помощью которых можно оценивать математические компетенции. Следует заметить, в настоящее время наряду с термином «компетентностная задача» также используются другие названия: «ситуационная задача», «контекстная задача» и др.

Нашему исследованию более всего соответствует определение компетентностных задач, предложенной Л.В.Павловой. «Под компетентностными задачами, рассматриваемыми при изучении математики, мы будем понимать задачи, целью решения которых является разрешение стандартной или нестандартной ситуации (предметной, межпредметной или практической по описанному в ней содержанию) посредством нахождения соответствующего способа решения с обязательным использованием математических знаний» [6].

В практикум включены как компетентностные, так и традиционные задачи по теории вероятностей. Мы также полагаем, что задачи экономического или управленческого содержания способствуют развитию профессиональных компетенций студентов любого профиля подготовки. Ведь в современных Госстандартах практически для всех специальностей в виды профессиональной деятельности, к которым готовятся выпускники, освоившие программу бакалавриата, включена организационно-управленческая деятельность.

При разработке комплекса задач мы также принимали во внимание, что учебные задачи должны выполнять следующие функции: обучающую, воспитывающую, развивающую, информационную, мировоззренческую, организационную, контролирующую, мотивационную, развивающую, рефлексивную и др.

Блок задач был разработан на основе дифференциации по уровням сложности. Для выделения уровней мы использовали уровневый подход В.П.Беспалько [1].

Задачи элементарного уровня **(**α=1, у В.П.Беспалько − репродуктивное узнавание [1]) представляют собой тестовые вопросы по изучаемой теме. Отвечая на вопросы, студенты демонстрируют степень узнавания основной информации по данной теме.

Задачи, соответствующие α=2 (репродуктивное алгоритмическое действие), мы поделили на 2 уровня – базовый и средний. На базовом уровне студенты осваивают новый материал, а на среднем – учатся применять формулы в более сложных задачах.

Задачи базового уровня представляют собой типовые задачи, решение которых основано на однократном применении формулы данной темы.

Задачи среднего уровня являются комплексными задачами, в решении которых наряду с формулами данной темы также используются другие формулы теории вероятностей, математические формулы и т.д. К среднему уровню также отнесены задачи, в решении которых, как составляющая часть, применяется классическое определение вероятности. Хотя следует заметить, что нахождение вероятностей по классическому определению вероятности на определенном этапе перестает восприниматься студентами как дополнительное усложнение и выполнятся автоматически. В задачи среднего уровня также включены задачи, при решении которых необходимы дополнительные расчеты, действия, рассуждения.

Задачи повышенной сложности (α=3, продуктивное эвристическое действие) предполагают знание не только формул теории вероятности, но и других математических дисциплин, а также понимания представленных в задаче конкретных ситуаций из профессиональной или повседневной деятельности. Решение задач этого уровня требует более сложных рассуждений, чем задачи среднего уровня.

В качестве *творческих задач* (α=4, продуктивное творческое действие) включены задачи следующих типов:

1) решение задачи несколькими способами;

2) по исходным данным составить новую задачу на заданную тему и решить ее;

3) переформулировать предложенную задачу на заданную тему и решить ее.

Задание на переформулирование является достаточно сложным. Поэтому в помощь студентам в каждом параграфе приводятся примеры переформулирования конкретной задачи из §1. Мы постарались, по возможности, сохранить единый номер для этих задач.

Предложенные варианты заданий творческого уровня могут быть использованы для организации внеаудиторной самостоятельной работы по теории вероятностей.

К сожалению, математическая подготовка на момент изучения теории вероятностей студентов-экономистов и, главным образом, социологов не позволяет включить в творческий уровень более сложные задания.

В практикуме часть задач имеет несколько вопросов, расположенных в порядке усложнения. Дробление подобных задач по уровням сложности мы считаем нецелесообразным, поскольку постепенно усложняющиеся вопросы позволяют студентам лучше понять формулы, их отличия и взаимосвязь. В этом случае уровень сложности задачи определяется по самому сложному вопросу.

Приведем несколько примеров компетентностных задач среднего уровня.

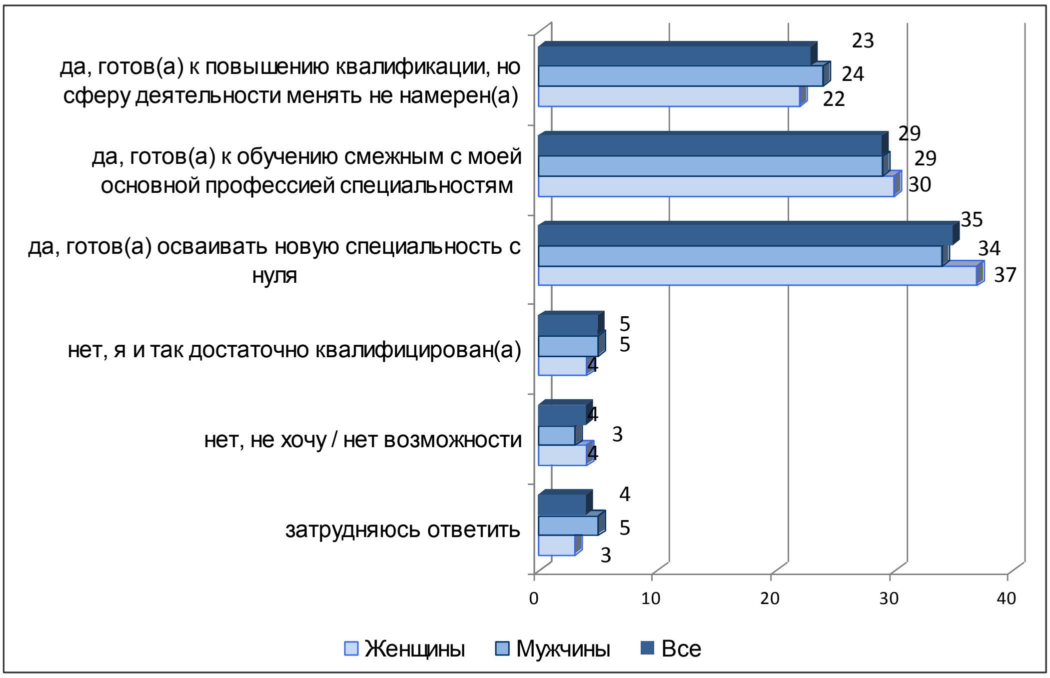
Задача 1. Руководство компании, недовольное постоянными опозданиями работников с обеденного перерыва, решило ввести систему штрафов. За каждое опоздание с обеда более, чем на 10 мин, был определен штраф в размере 10 д.е. Наблюдения предыдущих месяцев показало, что ежедневно опаздывают с обеда в среднем 70 человек из 150 работников.

Социологические исследования показывают, что после введения подобных штрафов на 2-й месяц количество опозданий уменьшается на 42%, а на 3-й − еще на 20% (т.е. от уровня 1-го месяца на 62%). Какая сумма вероятнее всего будет возвращена компании в виде штрафов за 3 месяца? При расчетах следует полагать, что в месяце 24 рабочих дня.

Задача 2. В рекламных целях фирма «А», изготавливающая бытовую технику, в каждую 20-ю коробку с СВЧ-печью положила подарочный купон. А фирма «В» − в каждую 30-ю. Найти наивероятнейшее число подарочных купонов, которые могут быть предъявлены, если в магазин поступило 50 коробок фирмы «А» и 60 коробок фирмы «В».

Задача 3.

Готовы ли Вы сейчас к переквалификации?



(Опрос SuperJob.ru, %, февраль 2009 г.)

На основе результатов опроса SuperJob определите, чему равна вероятность того, что более 30% из 460 человек готовы осваивать новую специальность с нуля, если а) опрашиваются только мужчины; б) среди опрошенных мужчин и женщин одинаковые количества.

Для самоконтроля в конце каждой темы предусмотрены задания. В таблице 1 рассмотрен состав задания с оценкой в баллах, а в таблице 2 указана интерпретация оценок в баллах. По предлагаемой схеме составлены и итоговые контрольные работы.

Таблица 1

№ задания	Уровень задания	Оценка, балл
1	Элементарный	3
2	Элементарный	3
3	Базовый	6
4	Средний	9
5	Творческий	9
Итого		30

Таблица 2

Количество баллов	Оценка
0-8	Неудовлетворительно
9-12	Удовлетворительно
13-25	Хорошо
26-30	Отлично

Таблица 1 имеет ориентировочный характер. Студент может самостоятельно составлять задания для самоконтроля, используя задачи практикума. В зависимости от достигнутого уровня, студент сам определяет: убавить количество заданий элементарного уровня или вообще их убрать. А вместо них добавить задачи, например, базового уровня. Соответственно изменится и интерпретация оценок в баллах. Таким образом, таблицами 1,2 можно пользоваться как конструкторами для составления заданий для самоконтроля.

Практикум по теории вероятностей был апробирован в учебном процессе студентов различных специальностей. По результатам работы с практикумом можно сделать следующий выводы. Практикум, основанный на уровневой дифференциации, способствует лучшему усвоению материала, становлению студента как субъекта обучения, а также может быть использован для оценивания математической компетенции.

Литература

1. Беспалько В.П. Теория учебника: Дидактический аспект. М.: Педагогика, 1988. 160с.
2. Давыдова О.В. Современный учебник для вузов: компетентностный подход / О.В.Давыдова // Вестник Университета (Государственный университет управления). – 2013. – № 15. – С. 166-174.

3. Иванова Е.О. Подготовка учебника для работы в информационной образовательной среде/ Е.О.Иванова // Ярославский педагогический вестник. – 2017. – № 1. – С. 40-46.

4. Мендубаева З.А. Учебник нового формата для общепрофессиональной подготовки студента/ З.А. Мендубаева // Высшее образование сегодня. – 2012. – № 9. – С. 51-54.

5. Каштанова Е.К. Практикум по теории вероятностей. [Электронный ресурс] / Е.К.Каштанова. – Режим доступа: https://kms.kpfu.ru/sites/default/files/various/ЭОР/Каштанова Е.К. Практикум по теории вероятностей.pdf

6. Павлова Л. В. Компетентностные задачи как средство совершенствования предметно-методической компетентности будущего учителя математики [Текст] / Л. В. Павлова // Проблемы и перспективы развития образования: материалы междунар. заоч. науч. конф. (г. Пермь, апрель 2011 г.).Т. II. – Пермь: Меркурий, 2011. – С. 111-115.

УДК 372.851

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Каюмова А.А., учитель математики,
МБОУ «Школа №161», г. Казань
kayumova.alisa2011@yandex.ru

Тимербаева Н.В., кандидат педагогических наук, доцент,
Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань
timnell@yandex.ru

Аннотация. В данной статье рассматриваются особенности преподавания обратных тригонометрических функций в курсе математики средней школы, а также приводятся методические рекомендации для успешного изучения этой темы.

Ключевые слова: обратные тригонометрические функции, числовая окружность, обратная функция.

INVERSE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS IN THE SCHOOL COURSE OF THE MATHEMATICS

A.A. Kayumova, math teacher,
MBEI «School №161», Kazan
kayumova.alisa2011@yandex.ru

N.V. Timerbaeva, PhD in education, associate professor,
Kazan Federal University, Kazan
timnell@yandex.ru

Abstract. The article discusses the features of the teaching of the inverse trigonometric functions in the school mathematics course and provides guidelines for the lessons.

Keywords: inverse trigonometric functions, numeric circle, reverse function.

Школьники испытывают немалые трудности, изучая тригонометрию. Причинами этому является большое количество формул, которые необходимо помнить, и отсутствие готовых алгоритмов преобразования тригонометрических выражений.

Тригонометрический материал весьма интересен и специфичен, так как находится на стыке геометрии и алгебры. С тригонометрическими понятиями учащиеся средней школы впервые знакомятся в курсе планиметрии. Поэтому пропедевтическая роль тригонометрического материала, изложенного в курсе геометрии, велика: от освоения его в курсе геометрии будет зависеть, насколько успешным будет изучение тригонометрии в курсе алгебры. Учителю надо прийти к пониманию того, что тригонометрия в алгебре и геометрии не является никак не связанными отдельными дисциплинами, это – единый блок, изучение которого невозможно без получения первоначальных сведений о тригонометрии в курсе геометрии.

До 2000 г. постепенно претворялись в жизнь предложения по изменению порядка изучения тригонометрии. К сегодняшнему дню эти изменения являются общепринятыми. Как и в 1985-1986 уч. гг., так и сейчас раздел алгебры и начала анализа, посвященный тригонометрическим функциям и преобразованиям тригонометрических выражений, изучается в старших классах одиннадцатилетней школы. Поэтому на сегодняшний день те учащиеся, которые не переходят учиться в старшую школу, знакомятся с этой темой только в курсе геометрии.

Изучение тригонометрии должно осуществляться таким образом, чтобы у учащихся создалось целостное представление об этой теме. Не следует включать отдельные вопросы тригонометрии в другие разделы. Не следует также разделять материал на блоки, которые рассматриваются в отрыве друг от друга в разных классах, изучение материала надо осуществлять целостно, показывая все возможности применения тригонометрических преобразований на примере задач с разумным практическим содержанием. Полноценное обучение тригонометрии требует достаточно большого объема времени. Если физико-математические школы имеют необходимые ресурсы времени, то в общеобразовательной школе их совершенно недостаточно.

Чтобы показать значение данного раздела в школьной программе, приведем примерное поурочное планирование (3 ч в неделю, всего 102 ч) 10 класса по учебнику Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10-11 кл. сред. шк. / Под ред. А. Н. Колмогорова. М.: Просвещение, 2008.

Таблица 1

Примерное поурочное планирование

№ п/п	Наименование раздела	Содержание	Урок №	Количество часов + контрольные работы
1	Тригонометрические функции любого угла	Угол поворота. Тригонометрические функции: синус, косинус, тангенс, котангенс любого угла. Знаки значений тригонометрических функций.	1-3	10 (часов) +1кр
		Соотношение между тригонометрическими функциями одного и того же угла. Применение основных тригонометрических формул к преобразованию выражений.	4-8	
		Радианная мера угла. Вычисление значений тригонометрических функций с помощью микрокалькулятора.	9-10	
2	Тригонометрические функции числового аргумента	Тригонометрические функции числового аргумента и их графики.	12-16	5 часов
3	Основные свойства функций	Функции и их графики.	17-20	26 часов +1кр
		Четные и нечетные функции. Периодичность тригонометрических функций.	21-22	
		Возрастание и убывание функций. Экстремумы.	23-24	
		Исследование функций. Свойства тригонометрических функций.	25-26	
4	Формулы сложения и их следствия	Формулы сложения.	28-30	8 часов
		Следствия из формул сложения. Формулы приведения, формулы двойного аргумента, формулы суммы и разности тригонометрических функций.	31-35	
5	Решение тригонометрических уравнений и неравенств	Арксинус, арккосинус и арктангенс.	36-37	15 часов +1кр
		Решение простейших тригонометрических уравнений.	38-40	
		Решение простейших тригонометрических неравенств.	41-43	
		Примеры решения тригонометрических уравнений и систем неравенств.	44-49	
…	…	…	…	…

6	Итоговое повторение	Тригонометрические преобразования	93-94	8часов +2кр
		Функции и графики.	95-96	
		Производная функции. Применение непрерывности и производной функции.	97-99	
		Тригонометрические уравнения и неравенства, системы тригонометрических уравнений.	100	

Изучение тригонометрических функций имеет особое значение в курсе тригонометрии. Наиболее сложным и для преподавателя с методической точки зрения, и для ученика с позиций понимания и усвоения является тема «Обратные тригонометрические функции». В учебниках школьной программы, к сожалению, должного внимания этой теме не уделяется. Например, в учебнике Колмогорова даются только определения арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса и простейшие упражнения на применение этих определений. Термин «Обратные тригонометрические функции» не вводится.

Очевидно, что понятия аркфункций, их свойства играют немаловажную роль в понимании сути решения тригонометрических уравнений и неравенств. Перед учителями возникает проблема: Что делать в такой ситуации?

Для хорошего овладения материалом и успешной сдачи школьниками ЕГЭ учителя проводят дополнительные часы, связанные с понятиями «обратимость» и «обратные тригонометрические функций».

Остановимся на двух главных моментах изучения этого дополнительного материала:

1) основное внимание в начале изучения тригонометрии надо уделить модели числовой окружности на координатной плоскости;

2) обратные тригонометрические функции.

Раскроем их суть более подробно.

1. Числовая окружность.

В школьном курсе математики в разные годы использовались различные варианты введения тригонометрических функций. В современных учебных пособиях предпочтение отдается определению с помощью единичной числовой окружности.

Личный опыт преподавания тригонометрии в школе показывает, что знакомить учащихся с единичной окружностью следует, как можно раньше, начиная хотя бы с IX класса. Единичная окружность – это вторая, после координатной прямой, модель действительных чисел. На единичной окружности легко демонстрируется то, что не очень наглядно представляется на координатной прямой, например, множества чисел, схожих друг с другом по каким-то особым свойствам. Эта идея в дальнейшем используется при решении тригонометрических уравнений и неравенств. Для грамотной записи ответа, требующей, в частности, исключения повторяющихся чисел, целесообразней использовать единичную окружность.

Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат окружность с центром в начале координат – точке *O*. Отметим на окружности точку *P*, лежащую на оси абсцисс справа от точки *O*. Осуществим поворот радиуса *OP* около точки О на угол a в верхнюю полуплоскость. При этом радиус *OP* займет положение *OA*. Говорят, что при повороте на угол альфа радиус *OP* переходит в радиус *OA*, а точка *P* переходит в точку *A(x;y)*. Достраивая прямоугольный треугольник *OAB*, приходим к определениям синуса, косинуса, тангенса и котангенса на единичной окружности (рис. 1).

После введения таких определений становится понятным установление взаимно-однозначного соответствия между множеством углов поворота (углов вращения) и множеством действительных чисел. Введения угла поворота позволяет придать смысл всем тригонометрический функциям неограниченного угла (в том числе и отрицательного), которое имеет широкое практическое значение.

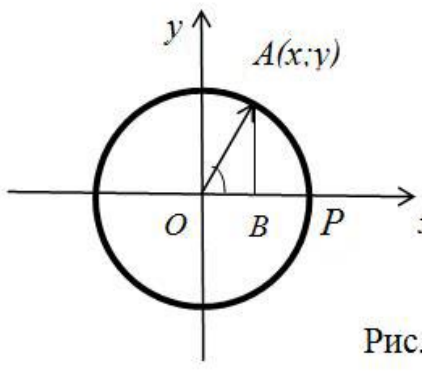


Рис. 1

Для графического изображения тригонометрических функций осью *Ox* выступает бесконечная длина единичной числовой окружности с радианными мерами, это меры углов (аргументов) функций, а осью *Oy* выступает обычная числовая прямая со значениями функций от определенных аргументов. Центр числовой окружности совпадает с точкой начала координат координатной плоскости.

2. Обратные тригонометрические функции.

При введении этой темы, если ранее обратные функции не изучались, нужно напомнить учащимся, где они могли встретиться с понятием «обратная функция». Можно предложить задачу: зная площадь квадратной комнаты, определить длины ее сторон. Для функции возведения числа в квадрат обратной функцией является извлечение арифметического квадратного корня.

После этого, по аналогии можно сказать о существовании функций, обратных к тригонометрическим, которые называются «обратными тригонометрическими функциями». С помощью этих функций решают задачу вычисления углов по известному значению тригонометрической функции. Например, с использованием таблицы значений основных тригонометрических функций можно вычислить синус, какого угла равен $\frac{1}{2}$. Если мы вспомним о периоде синуса, то поймем, что углов, при которых синус равен $\frac{1}{2}$, бесконечное множество. И такое множество значений углов, соответствующих данному значению тригонометрической функции, будет встречаться и для косинусов, тангенсов и котангенсов, т.к. все они обладают периодичностью. Для того, чтобы избежать возможного многообразия ответов, и вводятся обратные тригонометрические функции, иначе называемые «аркфункциями» (от латинского слова arcus – «дуга»). К обратным тригонометрическим функциям относятся арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс, арксеканс, арккосеканс.

Проанализировав школьные учебники Колмогорова А.Н., Мордковича А.Г., Алимова А.Ш. Виленкина Н.Я. (Углубленный уровень) [1, 2, 3, 4] мы пришли к выводу что, в основном, авторы учебников придерживаются следующих двух позиций:

1) *введение понятий аркфункций и рассмотрение отдельных свойств в качестве тождеств*;

2) *введение понятий и изучение аркфункций со всеми свойствами.*

В результате проведенного анализа, с целью совершенствования изучения темы, выделим следующие методические рекомендации:

- необходимо придерживаться геометрического истолкования рассматриваемых понятий на числовой окружности. Например, полезно изобразить арксинус на тригонометрической окружности: «как видим, «арк-синусы живут справа» (то есть на правой полуокружности), но не просто справа, а именно на отрезке $[-\pi/2;\ \pi/2]$» (рис. 2.).

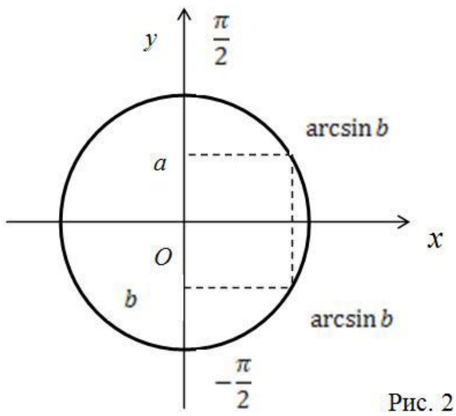


Рис. 2

При любом построении тригонометрической линии учитель математики при наличии времени и, конечно, желания может начать работу по обучению детей тригонометрии, в частности теме «Обратные тригонометрические функции», еще в VIII классе, так как значительное число упражнений выполняются «геометрически». Конечно, задания необходимо переформулировать так, чтобы они были знакомы ученикам и чтобы их решения были понятны;

- (рекомендация пропедевтического характера) при наличии времени учитель может предложить ученикам задания следующего типа:

Задача. Вычислить $cos\left(arctg\frac{3}{4}+arccos\frac{3}{5}\right)$.

Конечно, в такой формулировке задача учащимся основной школы непосильна, совсем непростая она и для десятиклассников. Если задачу переформулировать и расчленить на составляющие, то в VIII классе она легко решается. При формулировке надо помнить, что обратные тригонометрические функции решают задачу вычисления углов по известному значению тригонометрических функции.

Рассмотрим задачу «Вычислить косинус суммы острых углов α и β, если $tg\alpha=\frac{3}{4}$ и $\cos\beta=\frac{3}{5}$».

Восьмиклассники не знают тригонометрических формул и, естественно, им не придется преодолевать трудности их применения. Построим углы α и β на бумаге в клетку (рис. 3).

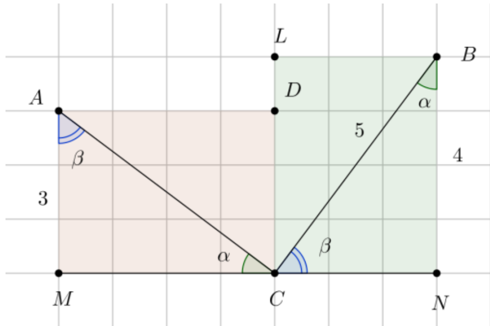


Рис.3

Прямоугольные треугольники AMC и CBN равны. А сумма двух острых углов в прямоугольном треугольнике равна $90°$. Восьмиклассники знают, что $\cos 90° = 0$, поэтому $cos(\alpha + \beta) = 0$;

- при изучении любой темы школьной программы, требуется актуализировать базовые знания. Для изучения темы «Обратные тригонометрические функции» нужно вспомнить о существовании обратных функций. Поэтому, прежде чем изучать обратные тригонометрические функции, необходимо хорошо изучить тему: «Обратная функция и ее свойства»;
- объяснение темы следует сочетать с наблюдением за учащимися, проводить в форме беседы с наводящими вопросами.

Перед тем как рассмотреть и исследовать графики обратных тригонометрических функций, учителю следует обсудить с учащимися такие вопросы:

- Всякая ли функция имеет обратную?

- Каким условиям должна удовлетворять обратимая функция?

- Имеет ли тригонометрические функции, рассматриваемые в их естественной области определения, обратные?

Для этого требуется повторить тригонометрические функции и их свойства, графики.

Приведем примерный список вопросов, которых можно задать при рассмотрении функции «арксинус»:

1. Что называется областью определения функции?

- Областью определения функции является множество значений, которое может принимать аргумент x.

2. Какие значения может принимать число x в $arcsin x$? Почему?

- Согласно определению, $|x| \leq 1$.

3. Что является областью определения функции $y = arcsin x$?

- Отрезок $[-1; 1]$.

4. Что называется множеством значений функции?

- Множество значений функции – это все значения, которые принимает функция на своей области определения.

5. Какие значения может принимать $arcsin x$? Почему?

- Согласно определению, $-\frac{\pi}{2} \leq arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$.

6. Какое множество значений имеет функция $y = arcsin x$?

- $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

- использовать возможности компьютерных технологий на уроках при изучении темы «Обратные тригонометрические функции». Интерактивная модель построения обратных тригонометрических функций в программе GeoGebra, позволяет улучшить точность графического материала на уроке (отсутствуют погрешности доски), значительно сэкономить время на изучение новой темы, увеличить продолжительность отработки и закрепления полученных знаний.

Эффективное усвоение свойств обратных тригонометрических функций, а, следовательно, в дальнейшем эффективная работа с тригонометрическими уравнениями и неравенствами, возможны лишь при условии, что ученик решит определенное число должным образом подобранных примеров с обратными тригонометрическими функциями.

Литература

1. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. (базовый и углубленный уровни). / Алимов А.Ш., Колягин Ю.М. и др. – М.: Просвещение, 2012. – 320 с.
2. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Углубленный уровень. / Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. – М.: Мнемозина, 2014. – 313 с.
3. Алгебра и начала математического анализа: учеб. Для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Дудницин Ю.П. и др.; под ред. А.Н.Колмогорова. -17-е изд. – М.: Просвещение, 2008. – 384 с.
4. Алгебра и начала математического анализа: учеб. для 10-11 кл. Учебник и задачник. Базовый уровень. В 2 ч. / Мордкович А.Г., Денищева Л.О, Корешкова Т.А. и др.; под ред. А.Г.Мордковича. – М.: Мнемозина, 2014. – 380 с.
5. Генкин Г. З. Тригонометрические упражнения в основной школе [Текст]/ Г. З. Генкин – Математика в школе. – 2004. – №7. – С. 33-38.
6. Захарова А. Е. Постигаем азы тригонометрии: арксинус, арккосинус, арктангенс [Текст] / А. Е. Захарова // Математика в школе. –2007. – №1. – С. 21-31.
7. Новиков А. И. Обратные отображения – основа изучения обратных тригонометрических функций [Текст]/ А. И. Новиков // Математика в школе. – 2006. – №8 – С. 27-35.
8. Новиков А. И. Вычислительные задачи с обратными тригонометрическими функциями [Текст]/ А. И. Новиков // Математика в школе. – 2007. – №1. – С.31-34.

УДК 372.8

ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ УЧЕБНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕКСТЫ

Кислякова М.А., ст. преподаватель кафедры математики и информационных технологий,
Тихоокеанский государственный университет, г. Хабаровск
rabota2486@yandex.ru

Аннотация. В статье рассматриваются учебные математические тексты как средства повышения мотивации к изучению математических дисциплин в подготовке бакалавров социогуманитарных направлений. Приведены примеры учебных математических текстов, описаны их функции в обучении математическим дисциплинам, а так же предложена методика работы с математическими текстами.

Ключевые слова: математические тексты, педагогический потенциал математических дисциплин, подготовка бакалавров социогуманитарных направлений, методика обучения математическим дисциплинам.

PROFESSIONALLY-ORIENTED EDUCATIONAL MATHEMATICAL TEXTS

M.A. Kisliakova, art. teacher of the department of mathematics and
information technologies,
Pacific State University, Khabarovsk
rabota2486@yandex.ru

Abstract. The article deals with educational mathematical texts as a means of increasing the motivation to study mathematical disciplines in the preparation of bachelors of social and humanitarian orientations. Examples of educational mathematical texts are given, their functions in teaching to mathematical disciplines are described, as well as a methodology for working with mathematical texts.

Keywords: mathematical texts, pedagogical potential of mathematical disciplines, preparation of bachelors of sociohumanitarian directions, methods of teaching mathematical disciplines.

В методике обучения математическим дисциплинам студентов социогуманитарных направлений подготовки одной из наиболее трудно решаемых является проблема мотивации к изучению математики. Причинами отсутствия интереса к математическим дисциплинам можно считать и сформированный негативный опыт изучения математики в школе, и слабые представления о роли математики в окружающем мире, и неумения студентов преодолевать познавательные трудности при изучении математики [3].

Однако, как показывают исследования последних лет, математические методы активно сближаются с методами исследования гуманитарных объектов и феноменов. Прежде всего, речь идет о практических приложениях математики, использующих методы элементарной математики. Например, финансовая культура человека основана на знании правил подсчета процентов и вкладов в банке, условиях страховых выплат, правилах работы пенсионных фондов, приемах ведения семейного бюджета, правил подсчетов тарифов ЖКХ и т.д.

Математика как часть общечеловеческой культуры, дает возможность человеку критически анализировать информацию, представленную числами, параметрами, функциями. Так, например, подсчет математического ожидания выигрыша позволит продемонстрировать новичку, что предпочтительнее выбирать игры, имеющие большую величину математического ожидания, потому как в этих играх меньше преимущества у казино. В преодолении стереотипов в отношении многих общепринятых мнений так же помогает вероятностная математика. Так, например, математический анализ авиа- и автокатастроф показывает, что вероятность наступления несчастного события на самом деле ничтожно малое число. Или, например, для участия в бинарных опционах необходимо владеть математической культурой в обращении с числами, уметь видеть функциональные зависимости, оценивать перспективу роста денежных потоков, просчитывать возможные риски.

Применение математического аппарата для решения ряда определенных задач в социогуманитарной сфере позволяет привнести новые научные достижения в исследования важных «социогуманитарных объектов». При исследовании психологических явлений и оценке качества педагогической деятельности статистические методы позволяют обосновать правильность выбранных методов исследования. С помощью методов математического моделирования разрабатываются эффективные модели управления товарами и услугами в социально-экономической деятельности. Методы теории игр позволяют анализировать и прогнозировать социальные общности, мнения людей, выявлять взаимосвязи и закономерности в социогуманитарных процессах. Моделирование общественно-политических процессов с использованием систем дифференциальных и разностных уравнений обеспечит получение новых свойств исследуемого объекта. Оценка культурологических объектов, таких как музыка, изобразительное искусство, с позиции математических методов представления пространства и времени позволить выявить основные традиции и инновации в представлении нового.

Для того чтобы студентам была видна связь между математикой и социогуманитарными науками, необходимо в математических дисциплинах четко указать, в чем именно эта связь состоит. На помощь преподавателям и студентам приходят многочисленные статьи и примеры в учебниках и монографиях по соответствующей тематике, однако нет единого источника, в котором были бы отражены все необходимые примеры. Именно поэтому возникает необходимость отбора таких примеров. Мы предлагаем информацию, содержащую примеры применения математического аппарата в гуманитарных исследованиях, представлять в виде профессионально-ориентированных учебных математических текстов.

Прежде чем перейти к характеристике математических текстов, рассмотрим некоторые представления о тексте как о таковом. В философском словаре текст есть «написанное высказывание, выходящее за рамки фразы, т.е. являющееся дискурсом и представляющее собой нечто законченное, единое и целое, наделенное внутренней структурой и организацией, соответствующей правилам к.-л. языка. Т. может быть книга, часть ее или отдельный фрагмент, обладающий вышеуказанными свойствами» [8]. В лингвистическом словаре текст определяется как «объединенная смысловой связью последовательность знаковых единиц, основными свойствами которого являются связность и целостность» [4, с. 505].

Каждой области знания характерны свои особенности в построении текстов, так под «математическим текстом» в самом общем смысле понимают любой текст, который содержит математические идеи и символы. К математическим текстам можно отнести параграфы учебников, монографии, научные статьи, примеры задач с решениями, отрывки из «нематематических» статей, содержащих математический аппарат.

Под «учебными математическими текстами» будем понимать специально разработанные для целей математических дисциплин тексты, которые представляют собой педагогически адаптированную информацию, взятую из различных источников: научные работы (диссертации, научные публикации), Интернет-ресурсы (блоги, социальные сети), научно-популярная литература.

Цель использования учебных математических текстов заключается в повышении мотивации студентов к изучению математических дисциплин в подготовке бакалавров, демонстрация конкретных примеров применения математики в будущей профессиональной деятельности. Работа с текстами позволит студентам получить опыт анализа социогуманитарных проблем математическими методами. Студенты будут понимать, для решения каких конкретно задач используется математический аппарат и какие существуют методологические подходы к его применению.

Использование таких текстов удовлетворяет требованию учитывать специфику гуманитарного образования в процессе изучения математических дисциплин. В работах Н.И. Мерзликиной [5], Э.Г. Гельфман [2] разработаны требования к разработке текстов, которые используются в учебном процессе. На основании их работ, сформулируем следующие требования к адаптации учебных математических текстов для студентов социогуманитарных направлений.

Во-первых, цель разработки или применения текста должна быть педагогически обоснована и соотнесена с целью обучения математической дисциплине. Более того, учебный текст, как один из основных носителей педагогического потенциала математических дисциплин должен четко отражать основную идею решения социогуманитарной задачи с привлечением математического аппарата.

Во-вторых, текст должен быть удобным для работы, как преподавателя, так и студента. Приветствуется сюжетная основа текстов, хорошая система заданий для работы с текстом, текст должен быть интересным и оптимальным по объему.

В-третьих, специально адаптированные тексты должны являться реализацией идей контекстного обучения, что «подразумевает создание условных моделей будущей трудовой деятельности с целью обеспечения смыслового и мотивационного компонентов получения теоретических знаний и отработки элементов профессиональной деятельности с использованием научной теории» [1, с.266]

В настоящей статье предметом рассмотрения являются «профессионально-ориентированные учебные математические тексты», т.е. такие тексты, в которых представлена информация, связанная с областью изучаемого знания.

Адаптация текста заключается в том, что преподаватель *искусственно* упрощает текст до уровня понимания студентов, и решение рассматриваемой математической задачи разбивает на этапы, сопровождая своими комментариями те рассуждения, которые в статье упущены.

Для того чтобы чтение текста не превратилось в пассивное восприятие информации, необходимо студентов обучать проводить определенную работу с текстом. В «Концепции развития критического мышления через чтение и письмо» (Ч. Темпл, К. Мередит, С.И. Заир-Бек, И.О. Загашев, И.В. Муштавинская и др.) приведены рекомендации по обучению учащихся работы с текстом: три стадии работы с текстом, приемы и методы работы с текстом [6]. При работе учащихся с любым текстом педагог должен предусмотреть прохождение учащимся трех стадий (вызов, осмысление, рефлексия), достаточных для формирования умений работать с текстом. Подробнее об этом в работе И.В. Муштавинской [6].

При работе с математическим текстом рекомендуется обучать студентов использованию определенных приемов. Приведем примеры специально сконструированных приемов и заданий, направленных, с одной стороны, на лучшее понимание учебного текста, а, с другой стороны, способствующее развитию компонент ментального опыта студентов. Обращаясь к внутреннему миру студента, к его ментальному опыту, необходимы приемы, обращающие внимание студента на собственный мыслительный процесс, в первую очередь на степень его «понимания». Такие приемы не являются новыми для студентов, однако при обучении математическим дисциплинам их используют не достаточно активно. Мы выделяем следующие приемы работы с учебными текстами: *«Пометки на полях», «Вопрос-ответ», «Пожалуйста, объясните», «Остановка», «Оцени себя».*

Прием *«Пометки на полях».* Педагог обращает внимание студентов, что работу с учебным текстом нужно проводить особым образом: введение символики (например, «+» усвоено, «-» неусвоено, «?» непонятно, «!!» обратить внимание); составление комментариев и вопросов (например, не согласен, подумать, как получилось это равенство? откуда взялась эта формула? куда делась переменная? и т.д.); написание аннотации, выделение ключевых задач по теме («мне понятно, как решается эта задача на тему, ее необходимо выписать» и т.д.).

С помощью приема *«Вопрос-ответ»* студент обучается формулировать конкретные вопросы себе и преподавателю, так чтобы ответы на них помогли ему в преодолении познавательного затруднения при работе с текстом (Я не понимаю, почему обосновано применение этого метода? Объясните, пожалуйста, как получилось данное равенство…).

Прием *«Остановка»* направлен на обучение студентов определять, с какого раздела в тексте начинается их непонимание или познавательное затруднение.

Прием «Оцени себя»: преподаватель, прежде всего, ориентирует студентов на высказывание критической самооценки, так студент должен сказать: «я понял», «я ошибся», «мне надо еще раз выполнить задание», «мне надо повторить формулу», «думаю, я разобрался».

Работа с учебными математическими текстами должна продемонстрировать учащимся рациональный подход к принятию решений, а именно процесс решения задач, состоящий из ряда этапов, аналогичен процессу принятия решения*: анализ задачи* – анализ ситуации, *схематическая запись задачи* – выделение существенных фактов; *поиск способа решения задачи* – поиск способа разрешения ситуации и прогнозирование возможных результатов, *осуществление решения задачи* – реальные действия по разрешению ситуации; *проверка решения* – анализ полученных результатов и исправление ошибок.

После прочтения текста студенту рекомендуется дать следующие задания.

1. Поняли ли вы содержание прочитанного текста?

2. Выделите все незнакомые элементы текста и найдите их значение.

3. Сформулируйте вопросы к преподавателю, ответы на которые помогут Вам лучше понять содержание текста.

4. Кратко напишите аннотацию к прочитанному тексту, которая будет служить Вам опорой для выполнения подобного рода заданий.

Приведем примеры источников «профессионально-ориентированных математических текстов», которые рекомендуется использовать в процессе обучения математическим дисциплинам.

1. ***Шкала ощущений***: из сборника «Математическая составляющая» / под ред. Н.Н. Андреева, С.П. Коновалова, Н.М. Панюнина. – М.: Фонд «Математические этюды», 2015. – 151 с. – С.62-65.

2. Оценка личности преподавателя: из статьи Афанасьева В.В. «Применение методов математической статистики в научных исследованиях / В.В. Афанасьев // Ярославский педагогический вестник. – 2006. – № 4. – С. 5-12».

3***. Еще один подход к оценке роста населения***: из статьи Геворкяна С.Г. «О математическом моделировании общественных процессов / С.Г. Геворкян // Пространство и время. – 2010. – № 1. – С. 69 – 78.»

4. ***Итоги чемпионатов мира по хоккею***: из статьи Афанасьева В.В. «Математическая статистика в спорте / В.В. Афанасьев, И.Н. Непряев // Ярославский педагогический вестник. – 2005. – № 2. – С. 108- 113».

5. ***Пример из экономической истории*** (анализ причин повышения цен на хлеб): из сборника «Математические методы в исторических исследованиях: сборник статей / под ред. И.Д. Ковальченко. – М.: Наука, 1972. – 236 с.»

6. Модель групповой продуктивности: из учебника Ахтямова А.М. «Математика для социологов и экономистов: учебное пособие / А.М. Ахтямов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464 с.»

7. ***Сколько людей жило, живет и будет жить на земле***: из монографии Капицы С.П. «Очерк теории роста человечества: Демографическая революция и информационное общество / С.П. Капица. – М.: URSS, 2014. – 128 с.»

8. ***Минимизация затрат на рекламу***: из учебника Мадера А.Г. «Моделирование и принятие решений в менеджменте: руководство для будущих топ-менеджеров: Изд. стереотип. – М.: Изд-во ЛКИ, 2013. – 688 с.»

9. ***Таблицы смертности***: из сборника «Мир математики в 40 т. Т.24. Укрощение случайности. Теория вероятностей / под ред. Фернандо Корбалан. – М.: Де Агостини, 2014. – 160 с.»

10. ***Модель распространения информации***: из статьи Михайлова А.П. «О свойствах простейших математической модели распространения информационной угрозы / А.П. Михайлов, Н.В. Клюсов // Математическое моделирование социальных процессов. – М.: МАКС Пресс, 2002. – вып. 4. – С. 115-123.»

11. ***Согласованность мнений нескольких людей***: из пособия Казиева В.М., «Информационно-логическое и математическое моделирование самоорганизующихся социально-экономических систем / В.М. Казиев, К.В. Казиев. – Нальчик: Изд-во Каб.-Балк. ун-та, 2003. – 232 с.»

12. ***Социоматрицы применительно к объектам психологии***: из учебного пособия Суходольского Г.В. «Математическая психология / Г.В. Суходольский – Х.: Изд-во: Гуманитарный центр, 2006. – 360 с.»

13. ***Статистическое построение текста:*** из учебного пособия Пиотровского Р.Г. «Математическая лингвистика: учеб. пособие / Р.Г. Пиотровский, К.Б. Бектаев, А.А. Пиотровская. – М.: Высшая школа, 1977. – 383 с.»

15***. К определению части речи в теоретико-множественной системе языка***: из монографии Успенского В.А. «Труды по нематематике. Том 1 / В.А. Успенский. – М.: ОГИ, 2002. – 584 с.»

16. ***Музыкальный строй***: из сборника «Математическая составляющая» / под ред. Н.Н. Андреева, С.П. Коновалова, Н.М. Панюнина. – М.:Фонд «Математические этюды», 2015. – 151 с. – С. 62-65.

Приведены лишь некоторые рекомендуемые для адаптирования статьи и отрывки из монографий и пособий, в литературе их представлено достаточно, для того, чтобы преподаватель математических дисциплин смог разработать профессионально-ориентированные математические тексты для бакалавров социгуманитарных направлений. Особую актуальность применение учебных математических текстов приобретает для студентов заочного обучения, лишенных постоянного контакта с преподавателем. В процессе самостоятельной работы над учебным математическим текстом, студенты заочного обучения не только получат представление о том, где именно используется математический аппарат в их будущей профессиональной деятельности, но и будут лучше ориентироваться в математической литературе, что способствует повышению профессиональной культуры специалиста [7].

Литература

1. Вербицкий А.А. Новая образовательная парадигма и контекстное обучение: монография / А.А. Вербицкий. – М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 1999. – 75 с.
2. Гельфман Э.Г. Учебные тексты как средство интеллектуального развития учащихся в процессе обучения математике / Э.Г. Гельфман, М.А. Холодная // Образование и наука. – 2014. – № 8 (117) – С. 67-80.
3. Кислякова М.А. Возможности и структура педагогического потенциала математических дисциплин в подготовке бакалавров гуманитарных направлений / М. А. Кислякова // Вестник КГПУ им. Астафьева. – 2016. – № 1. – С. 57-60.
4. Лингвистический энциклопедический словарь / под ред. В. Н. Ярцевой.– М.: Изд-во "Советская энциклопедия",1990. – 5987 стр.
5. Мерзликина Н. И. Учебные тексты как средство формирования критического мышления студентов: автореф. дис. ... к. п. н.: 13.00.01 / Мерзликина Н. И. – Москва, 2007. – 24 с.
6. Муштавинская И.В. Технология развития критического мышления на уроке и в системе подготовки учителя / И.В. Муштавинская. – Спб.: КАРО, 2009. – 144 с.
7. Поличка А.Е. Подходы проектирования содержания организации самостоятельной работы обучаемых в условиях формирования специальных профессиональных компетенций / А.Е. Поличка, А.П. Исакова // Педагогическое образование и наука. – 2012. – №7. – С. 74-77.
8. Философия: энциклопедический словарь / под ред. А. А. Ивина. – М.: Гардарики, 2004. – 1072 с.

УДК 372.8

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПРЕПОДАВАНИЯ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПРИ ПОДГОТОВКЕ БАКАЛАВРОВ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Князева Л.Е., кандидат педагогических наук, доцент,
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
leknyazeva@sfedu.ru

Аннотация. Рассматривается целесообразность использования аналитического и синтетического подходов к преподаванию проективной геометрии при подготовке бакалавров педагогического образования.

Ключевые слова: проективная геометрия, синтетическая геометрия, аналитическая геометрия.

SOME ASPECTS OF THE TEACHING OF PROJECTIVE GEOMETRY IN THE PREPARATION OF BACHELORS OF PEDAGOGICAL EDUCATION

L.E. Knyazeva, candidate of pedagogical sciences, associate professor,
South Federal University, Rostov-on-Don
leknyazeva@sfedu.ru

Abstract. Examines the feasibility of using analytic and synthetic approaches to the teaching of projective geometry in the training of bachelors of pedagogical education.

Key words: projective geometry, synthetic geometry, analytical geometry.

Проективная геометрия – один из традиционных разделов отечественного курса геометрии, изучаемого будущими учителями математики. Объясняется это тем, что этот раздел непосредственно направлен на развитие пространственного воображения и геометрической интуиции обучающихся. Его основные положения во многом составляют научную основу школьного курса геометрии. Методы проективной геометрии позволяют описать ряд неевклидовых геометрий плоскости. Некоторые положения и факты проективной геометрии применяются в номографии, в теории статистических решений, в квантовой теории поля и в конструировании печатных схем (через теорию графов).

Ф. Клейн призывал различать два рода геометрии: *геометрию синтетическую*, изучающую фигуры сами по себе, и *геометрию аналитическую*, строящую свое научное здание существенно с помощью анализа [5, с.7]. В данном контексте термины «анализ» и «синтез» употребляются в следующем смысле: аналитическая геометрия использует метод координат, в результате чего делается возможным применение алгебры и анализа в геометрии; синтетическая геометрия оперирует с непосредственными пространственными конструкциями. В истории проективной геометрии противостояние между аналитическим и синтетическим направлениями связывают с именами немецких математиков: Якоба Штейнера, Фердинанда Мёбиуса, Кристиана Штаудта, Юлиуса Плюккера. Отголоски этого противостояния можно обнаружить в современных учебных пособиях по геометрии, предназначенных для студентов, обучающихся в бакалавриате по направлению 44.03.01 Педагогическое образование, профиль Математика [1, 2, 4]: при изложении материала предпочтение отдается аналитическим методам обоснования, синтетические – используются лишь при рассмотрении отдельных вопросов.

В Южном федеральном университете (ЮФУ) геометрическую подготовку будущих учителей осуществляет кафедра теории и методики математического образования. Сохраняя традиции кафедры геометрии и методики преподавания математики Ростовского государственного педагогического университета, вошедшего в состав ЮФУ в 2006 году, изложение курса проективной геометрии ведется с позиций синтетического подхода. Основы этого подхода были заложены профессором Михаилом Павловичем Черняевым, который был приглашен на кафедру в 50-е годы прошлого века. М.П. Черняев – автор сборника задач по чисто синтетической проективной геометрии [7]. В подробной рецензии, посвященной выходу в свет сборника задач, отмечалось, что задачник «заполняет брешь» в математической литературе, способствует повышению уровня преподавания проективно-начертательной геометрии в педагогических институтах, являясь ценным пособием [6]. Задачи, вошедшие в сборник, и сегодня составляют основу задачного материала курса синтетической проективной геометрии.

Изложение курса проективной геометрии с аналитических позиций ведет к чрезмерной теоретизации дисциплины, к снижению её визуальной составляющей. Об этом свидетельствует сокращение, а порой и полное отсутствие, чертежей и рисунков, иллюстрирующих основные факты проективной геометрии, в некоторых учебных пособиях.

При реализации синтетического подхода в изложении проективной геометрии среди задач, предлагаемых студентам для аудиторного и самостоятельного решения, преобладают задачи на построение, в частности с помощью одной линейки. При обучении решению этих задач необходимо максимально использовать визуальные возможности современных информационных технологий. Так, в электронном учебнике «Проективная геометрия» [3] для 55 задач разработаны анимаций, позволяющие представить решение задач в динамике, продемонстрировать технологию построения, обратить внимание студентов на некоторые второстепенные детали, которые трудно обнаружить в уже готовом чертеже.

Литература

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия: Учебное пособие в 2-х частях. Часть 2. – М.: КноРус, 2015.
2. Атанасян С.Л., Покровский В.Г, Ушаков А.В. Геометрия 2. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
3. Бреус И.А., Князева Л.Е., Михайлова И.А. Электронное учебное пособие «Проективная геометрия». Свидетельство о регистрации электронного ресурса № 18846 от 11.01.2013 г.
4. Геометрия: учеб. пособие для студ. учреждений высш. пед. проф. образования: в 2 т. Т.2 / [Н.И. Гусева, Н.С. Денисова, Л.А. Игнаточкина и др.]. – М.: Академия, 2012.
5. Клейн Ф. Высшая геометрия. Пер. с немецкого Н.К.Брушлинского. – М. - Л.: ГОНТИ, 1939.
6. Копп В. Г. М. П. Черняев “Сборник задач по синтетической геометрии” (рецензия) // Успехи математических наук, том 10, выпуск 4(66). – 1955. – С. 222–225.
7. Черняев М. П. Сборник задач по синтетической геометрии. – М.: Учпедгиз, 1954.

УДК 371.84

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИДЕЙ Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО ПРИ ОРГАНИЗАЦИИ РАБОТЫ ЭТНОМАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА

Кондаурова И.К., кандидат педагогических наук, доцент, заведующая кафедрой математики и методики ее преподавания,
Саратовский национальный исследовательский государственный университет, г. Саратов
i.k.kondaurova@yandex.ru

Матершева Л. Н., магистрант 1 курса,
Саратовский национальный исследовательский государственный университет
mfirst@author.email, matersheva@yandex.ru

Аннотация. В статье систематизирован опыт работы школьного этноматематического кружка на основе использования педагогических идей Н.И. Лобачевского. Результат работы кружка – положительная динамика развития познавательного интереса к математике, повышение сформированности гражданско-патриотических качеств учащихся, стабильные результаты учебной деятельности. Результат получен посредством решения математических задач, содержащих историко-краеведческие, фольклорно-этнические и экологические сведения.

Ключевые слова: педагогические идеи Н.И. Лобачевского; этноматематический кружок.

THE USE OF PEDAGOGICAL IDEAS OF N.I. LOBACHEVSKI IN THE ORGANIZATION OF ETHNO MATHEMATICAL GROUP

I.K. Kondaurova, candidate of pedagogical sciences, associate professor, head of the Department of mathematics and methods of teaching,
Saratov National Research State University, Saratov
i.k.kondaurova@yandex.ru

L.N. Matersheva, 1th year student,
Saratov National Research State University, Saratov
mfirst@author.email, matersheva@yandex.ru

Abstract. Experience school ethnomathematical mug based on the use of ideas N.And. Lobachevsky systematized in the article. The result of the circle is the positive dynamics of development of cognitive interest in mathematics, enhancing the formation of civil and Patriotic qualities of pupils, consistent results of training activities. The result obtained by solving math problems containing local history, folklore and environmental information.

Keywords: pedagogical ideas of N.I. Lobachevski, ethno mathematical group.

«Стратегия развития воспитания в РФ на период до 2025 года» [6] ориентирует образовательный процесс на обновление, как с учетом современных достижений науки, так и исторических традиций, что актуализирует необходимость переосмысления и творческого использования богатого опыта педагогов-математиков вообще и педагогических идей Н.И. Лобачевского в частности. Николай Иванович Лобачевский был не только талантливым математиком, но и замечательным педагогом, который воспитывал у юношества веру в процветание русского народа, прививал любовь к отечеству и научному познанию, стремление к духовному совершенству. В его трудах «О важнейших предметах воспитания», «Наставления учителям математики в гимназиях и уездных училищах», «Краткое руководство к улучшению методов преподавания» и др. содержатся ценнейшие педагогические идеи. Юноша, поступивший в университет, по мнению Н.И. Лобачевского, должен был не просто получить высокую квалификацию по избранной им специальности, но и стремиться к патриотическому идеалу ученого-гражданина, который «высокими познаниями своими составляет честь и славу своего отечества» [Цит. по 1, с. 148]. Вся деятельность Н.И. Лобачевского была ориентирована на воспитание юношества в духе патриотизма, любви к родине, ее культуре. В письме к директору училищ Саратовской губернии Н.И. Лобачевский писал: «… не знать или не постигать духа в своем Отечестве – постыдно» [Цит. по 1, с. 148]. Именно эти взгляды великого геометра на роль родной культуры в развитии личности воспитуемых были использованы нами при проектировании и реализации кружка «Этноматематика».

Анализ исследований зарубежных и российских методистов-математиков показал, что учет этнокультурного подхода в обучении математике оказывает плодотворное воздействие на математические достижения учащихся, особенно в младшем подростковом возрасте, одновременно развивая гражданско-патриотические качества личности: любовь и уважение к родине, родному краю, неразрывность с их историей, культурой, традициями.

Для диагностики распространенности этноматематических идей в нашем регионе был проведен онлайн-опрос учителей математики Саратовской области в социальной сети «ВКонтакте» [5]. Результаты опроса показали незначительную распространенность этноматематического подхода при организации внеурочной деятельности школьников: 72,1% опрошенных не реализуют этноматематические идеи в школе; 20,9% изредка используют их; и только 4,7% учителей активно практикуют эти перспективные идеи в своей внеурочной работе. По мнению респондентов, это связано с «отсутствием готовых методических разработок этноматематических мероприятий» или «хотя бы рекомендаций по их подготовке и проведению». Таким образом, была выявлена потребность в разработке методического обеспечения внеурочной деятельности учащихся на основе этноматематического подхода.

В качестве основной формы организации внеурочной деятельности младших подростков [2] на основе этноматематического подхода нами был выбран этноматематический кружок [2, с. 91]. Цель разработанного нами кружка «Этноматематика» заключалась в развитии интереса к математике у учащихся и формировании у них гражданско-патриотических качеств личности посредством решения задач, содержащих историко-краеведческие, фольклорные, этнические и экологические сведения. Кружок, согласно разработанному тематическому плану, продолжительностью один учебный год (35 часов), рассчитан на учащихся 5-6 классов (10-12 лет). Тематический план кружка представлен двумя модулями. В первом модуле изучалась народная математика России и Поволжья, а именно, система счета и нумерация; измерение величин (времени, длины, площади, объема, веса); геометрические сведения и их выражения в хозяйственных постройках и народно-прикладном искусстве; изображение симметричной старославянской символики в орнаментах и на предметах быта; народные задачи; игры на счет, загадки, считалки, пословицы и другие виды устного народного творчества, содержащие математические знания и т.д. В рамках второго модуля рассматривалось краеведение и история родного края в математических задачах: история, промышленность, природа, этнос и народы Поволжья в математических задачах; народы и история края Татищевского в этноматематических задачах и т.д.

В качестве средств реализации этноматематической концепции в школе использовались этноматематические задачи, сгруппированные в сборник «Саратовская область в этноматематических задачах». Процесс решения таких задач увлекает учащихся открытием фактов о родном крае: его истории, географии, экономике, этническом составе, фольклоре, традициях, рецептах и культуре, о людях, прославивших его и т.п. По используемому математическому аппарату – это задачи на действия с натуральными числами, на движение, на проценты, на составление и решение линейных уравнений, на построение диаграмм, на действия с обыкновенными и десятичными дробями и др. Приведем примеры некоторых задач [3, с.222].

1. На территории города Саратова расположено порядка 270 га насаждений, относящихся к общему пользованию. В среднем, 1 га зеленых насаждений перерабатывает 150 кг углекислого газа и выделяет 180-200 кг кислорода за 4 часа. Сколько углекислого газа переработают и сколько кислорода выделят зеленые насаждения города за двое суток?

2. Академический театр драмы имени И.А. Слонова города Саратова входит в десятку самых старых театров в России. Свою работу начал театр в 1803 году. Саратовский академический театр оперы и балета открыл свои двери в 1875 году. Сколько лет прошло с момента открытия? Через сколько лет после открытия театра драмы открыли академический театр?

3. Алтей лекарственный – один из видов лекарственных растений, произрастающих на территории Саратовской области. Больше всего времени на очистку затрачивается при заготовке алтейного корня. Для получения 10 килограммов сухого очищенного товара тратится 2 часа на обрезку и до 15 часов на очистку. Сколько времени понадобится на заготовку 1 т 570 кг алтея лекарственного?

4. 27 января 1881 г. в городе Вольск Саратовской области проводил испытания своей платформы с самодвижущимися рельсами изобретатель «бесконечных рельсов» Ф. Блинов. На платформу поместили

2000 кирпичей и 30 взрослых человек. Запряженная парой лошадей, она проехала несколько раз по улицам города, вызывая всеобщий восторг и одобрение. «Самоход» Ф. Блинова выставлялся на русских промышленных выставках, в 1889 он был показан в работе на сельскохозяйственной выставке в Саратове. Какова была масса груза, перевезенного платформой, если, в среднем, масса человека была 70 кг, а кирпич в конце 19 века имел массу 10 фунтов? (1 фунт = 4,1 кг).

5. В Саратовской области встречается лекарственное растение – ромашка аптечная. В корзинках ромашки содержится 0,5% эфирного масла. Ромашку заваривают как чай и применяют внутрь как потогонное, противосудорожное средство. При сушке из сырья получается 25% сухих корзинок. Сколько сухого продукта и эфирного масла можно получить из 58 кг сырья?

Особую заинтересованность учащиеся проявляли при решении этноматематических задач, представленных в форме интерактивных упражнений в среде LearningApps.org – приложении Web 2.0 для обеспечения обучения и процесса преподавания с помощью интерактивных модулей [4]. Так, игра-соревнование «Ярмарка» заинтересовала учащихся информацией о ярмарках, проводимых на Руси, и интерактивными упражнениями в виде викторин с выбором правильного ответа (http://LearningApps.org/display?v=pg56ffj1n16, http://LearningApps.org/2682444). Математический вечер «Славянские праздники» запомнился учащимся представлением различных геометрических фигур (окружность, полукруг, спираль, ромб, квадрат, кривая и т.д.) в хороводе и предваряющим интерактивным упражнением (http://LearningApps.org/display?v=pdh9rage317). Уважение к историческому прошлому родного края воспитывали математические вечера, посвященные вкладу саратовцев в дело победы советского народа в Великой Отечественной Войне: «Летчицы города Энгельса» (http://LearningApps.org/display?v=pasya432n17), «Саратов в годы Великой Отечественной Войны» (http://LearningApps.org/display?v=pnjrd2jxa17). При помощи решения этноматематических задач и интерактивных упражнений на математическом вечере «Наши знаменитые земляки», школьники познакомились с биографиями знаменитых саратовцев (Федора Абрамовича Блинова – изобретателя-самоучки (https://learningapps.org/display?v=pmw1wknb216); Порфирия Ивановича Бахметьева – русского физика и биолога, открывшего анабиоз (http://LearningApps.org/display?v=p9nzug47217); Павла Николаевича Яблочкова – электротехника, военного инженера, изобретателя, разработавшего дуговую лампу (http://LearningApps.org/display?v=pmvfrqh0t17). Решали учащиеся и этноматематические задачи и интерактивные упражнения, фабула которых содержала историко-краеведческую информацию о малой Родине – Татищевском районе Саратовской области, например, работая с картой (http://LearningApps.org/display?v=p8ifrqxa316, http://LearningApps.org/display?v=p0u9v841j16).

В течение 2016/2017 учебного года нами проводился эксперимент по апробации программы кружка «Этноматематика» и проверке эффективности ее для формирования гражданско-патриотических качеств личности учащихся. Результаты эксперимента показали повышение в экспериментальной группе (8 учеников 5-6 класса, посещающих кружок) гражданско-патриотических качеств личности на 23%, в контрольной группе (4 ученика 5-6 класса, не посещающих кружок) – на 4%. Разница составляет 19%, что позволяет нам сделать вывод о развивающем воздействии этноматематического кружка.

Литература

1. Кандауров И.Н. Педагогические взгляды Н.И. Лобачевского // Вестник РГПУ имени А.И. Герцена. – 2009. – № 3. – С. 147-151.

2. Кондаурова И.К. Подготовка будущих учителей к интеграции урочной и внеурочной деятельности детей в условиях ФГОС // Карельский научный журнал. – 2015. – № 3 (12). – С. 13-14.

3. Кондаурова И.К., Матершева Л.Н. Математические задачи с использованием историко-краеведческого и фольклорного материала // Задачи в обучении математике, физике и информатике: теория, опыт, инновации: материалы II Международной научно-практической конференции, посвященной 125-летию П.А. Ларичева. – Вологда, 2017. – С.220-223.

4. Кондаурова И.К., Матершева Л.Н.Организация внеурочной деятельности школьников по математике с учетом возможностей образовательной организации, места жительства и историко-культурного своеобразия региона // Детство, открытое миру: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции. – Омск, 2017. – С. 278-282.

5. Кондаурова И.К., Матершева Л.Н. Этноматематический подход к организации внеурочной деятельности младших подростков // Балтийский гуманитарный журнал. – 2017. – № 2 (19).

6. Распоряжение Правительства Российской Федерации от 29 мая 2015 г. N 996-р г. Москва «Стратегия развития воспитания в Российской Федерации на период до 2025 года» [Электронный ресурс]. – Режим доступа:https://rg.ru/2015/06/08/vospitanie-dok.html

УДК 517

ОБ ОДНОЙ БИНАРНОЙ ПРОБЛЕМЕ В НЕКОТОРОМ КЛАССЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ЕЕ СВЯЗИ С ВЕЛИКОЙ ГИПОТЕЗОЙ ФЕРМА

Кочкарев Б.С., кандидат физико-математических наук, доцент,
Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань
bkochkar@gmail.com

Аннотация. Мы показываем, что доказательство Последней теоремы Ферма, опубликованное в Анналах Математики в 1995 году является ложным. Доказывается, что диофантовы уравнения Ферма не имеют решений в поле рациональных чисел, что уточняет утверждение Ферма. Строится алгоритм доказательства этого утверждения для любого конкретного n. Наконец, мы доказываем, что для $n = 3,4$ диофантовы уравнения Ферма имеют решения в радикалах, а для $n > 4$ они вообще алгоритмически неразрешимы.

Ключевые слова: бинарное математическое утверждение, аксиома спуска, алгебраическое уравнение, диофантово уравнение.

ABOUT ONE BINARY PROBLEM IN A CERTAIN CLASS OF ALGEBRAIC EQUATIONS AND ITS CONNECTION WITH THE GREAT HYPOTHESIS FARM

B.S. Kochkarev, PhD, docent,
Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan
bkochkar@gmail.com

Abstract. The author introduces the notion of the binary mathematical statement   from natural parameter and refined axiomatic Peano natural numbers by adding the axiom of descent wich is interpretation of the so-called method of descent Fermat. The known class of the Diophantine equations Fermat is reduced to some class of the algebraic equations from natural parameter   (degree of polynomial). It is proved that concerning binary statement: “whether has the equation for a preset value   some decision   ” the corresponding classes of the algebraic and Diophantine equations are equivalent. We show that the constructed class of the algebraic equations has rational decision only for n. For   the constructed class of the algebraic equations has decisions in radicals, and for   this classes of the equations isn’t solvable at all. Thus also it is prove, that the Great Hypothesis of Fermat is correct with the small precision: the class Diophantine equations of Fermat have not the decision non-only in integers but and in the rational field.

Keywords: binary mathematical statement, axiom of descent, algebraic equation, Diophantine equation.

В 1995 году в престижном журнале Анналы Математики была опубликована работа [1], в которой представлено так называемое доказательство Последней теоремы Ферма. Хотя с тех пор прошло больше 20 лет, но в научных журналах относительно ошибочности указанной работы публикаций не было. Более того в марте 2016 года Академия наук Норвегии объявила о награждении А.Уайлса за ту же работу [1] премией Абеля.

С 2014 года мы опубликовали работы [2-5], посвященные теме затронутой Пьером Ферма в оставленных им записках, которые были сформулированы как Великая теорема Ферма или как Последняя терема Ферма впоследствии.

В работе [2] было доказано, что диофантовы уравнения Ферма

$$u^n + v^n = w^n, n > 2, uvw \neq 0 \quad (1)$$

Не имеют решений не только в целых числах, но также в рациональных числах. Кроме того в работе [2] приводится алгоритм доказательства этого утверждения для любого конкретного $n > 2$, тогда как другие в течение почти 400 лет доказывали утверждение Ферма только для некоторых конкретных n. Алгоритм состоит в проверке факта, что алгебраическое уравнение

$$(x-2)^n + (x-1)^n = x^n \quad (2)$$

не имеет рациональных решений, удовлетворяющих условию Ферма (в работе [5] было показано, что уравнение (2) при $n = 4$ имеет рациональное решение $x = 1$, но оно не удовлетворяет условию Ферма $uvw \neq 0$). Таким образом, в [2] мы доказали больше, чем это требовалось в формулировке Ферма. Из работы [6] известно, что А.Уайлс узнав, что Фрею из предположения существования целых A, B, C, удовлетворяющих для некоторого N уравнению Ферма $(A^N + B^N = C^N)$ удалось преобразовать уравнение Ферма в эллиптическую кривую $y^2 = x^3 + (A^N - B^N)x^2 - A^N B^N$, изолировался в течение 7 лет от математического сообщества чтобы доказать, что такой эллиптической кривой нет в природе и поэтому, тем самым по его (А.Уайлса) мнению теорема Ферма доказана.

В этих рассуждениях имеются две неувязки. Одна неувязка состоит в том, что согласно [2] такой эллиптической кривой действительно не существует и поэтому не было необходимости сочинять по этому поводу более 100 журнальных страниц. Другая неувязка состоит в том, что эллиптическая кривая Фрея появляется из доказательства утверждения Ферма методом отпротивного. Но еще в 19 веке Куммер показал [6], что полное доказательство утверждения Ферма лежало за пределами возможностей существовавших математических подходов (в то время аксиоматики Пеано для натуральных чисел не было и метод спуска Ферма также не был до конца понят [2-3]).

Основная идея Фрея ничем не отличается от идей использованных до него другими математиками (Эйлер, Дирихле, Лежандр, Коши, Ламе и др.), которые доказывали утверждение Ферма для некоторых конкретных n, но это нужно было доказать для всех $n > 2$ что мы также сделали в [2].

Ферма сформулировал утверждение как обобщение диофантова уравнения $u^2 + v^2 = w^2$, для которого в Арифметике Диофанта были изложены все решения в целых, известные еще древним индусам. Так как в [2] мы показали, что диофантовы уравнения Ферма при $n > 2$ не имеют решений в поле рациональных чисел, то можно рассмотреть вопрос шире, т.е. имеют ли уравнения Ферма решения в радикалах. Для этой цели мы доказали в работе [5], что класс алгебраических уравнений (2) эквивалентен классу диофантовых уравнений (1), т.е. диофантово уравнение $u^k + v^k = w^k$ имеет решения в радикалах только в случае, если алгебраическое уравнение $(x-2)^k + (x-1)^k = x^k$ имеет решения в радикалах. Используя известные результаты [7], полученные Кардано и Феррари в работе [5] было установлено, что диофантовы уравнения Ферма для $k = 3{,}4$ имеют решения в радикалах, а для $k > 4$ они вообще алгоритмически неразрешимы. При получении последнего результата автор существенно использовал работы [8-9].

Литература

1. Wiles A. Modular elliptic curves and Fermat’s Last Theorem // Annals of Mathematics. – V.141 Second series 3 May. – 1995. – p. 445-551.

2. Кочкарев Б.С. Об одном классе алгебраических уравнений, не имеющих рациональных решений //Проблемы современной науки и образования. – 2014. – № 4(22). – С. 9-11.

3. Кочкарев Б.С. Отличительное свойство натуральных чисел в различных геометриях //Проблемы современной науки и образования. – 2015. – № 5(35). – С. 6-9.

4. Кочкарев Б.С. Об одном свойстве натуральных чисел // Проблемы современной науки и образования. – 2014. – № 7(25). – С. 6-7.

5. Kochkarev B.S. About one binary problem in a class of algebraic equations and her communication with the Great Hypothesis of Fermat // International Journal of Current multidisciplinary Studies, October, 2016. – Vol. 2, Issue, 10. – pp. 457-459.

6. Singh S. Fermat’s Last Theorem. – MTSNMO, 2000. – s.288 (in Russian).

7. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Изд. Ф-М литературы, 1962. –С. 432.

8. Кочкарев Б.С. К методу спуска Ферма // Проблемы современной науки и образования. – 2015. – № 11(41). – С. 7-10.

9. Кочкарев Б.С. Проблема близнецов и другие бинарные проблемы // Проблемы современной науки и образования. – 2015. – № 11(41). – С. 10-12.

УДК 372.851

ПРИМЕНЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ ПРИ ПОДГОТОВКЕ ШКОЛЬНИКОВ К ОЛИМПИАДАМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Леонтьева Н.В., кандидат педагогических наук, старший преподаватель кафедры математики и информатики,
ФГБОУ ВО «Глазовский государственный педагогический институт имени В.Г. Короленко»,
г. Глазов
leonteva-natalia-0812@yandex.ru

Ворожцова В.М., преподаватель кафедры математики и информатики,
ФГБОУ ВО «Глазовский государственный педагогический институт имени В.Г. Короленко»,
г. Глазов
vorozhtsova.vera@gmail.com

Аннотация. В статье рассматриваются особенности подготовки школьников к олимпиадам по линии уравнений с использованием классических неравенств. Применение последних расширяет совокупность методов, которые можно использовать для решения уравнений, способствует развитию логического мышления и математической культуры учащихся.

Ключевые слова. Олимпиадные задачи, классические неравенства, обучение решению задач.

CLASSIC INEQUALITY USING DURING LEARNERS TRAINING FOR MATHEMATICAL COMPETITION

N.V. Leonteva, candidat of pedagogical science, assistant of chair of mathematic and informatics,
Glazov State Pedagogical Institut by V.G. Korolenko, Glazov
leonteva-natalia-0812@yandex.ru

V.M. Vorozhtsova, assistant of chair of mathematic and informatics,
Glazov State Pedagogical Institut by V.G. Korolenko, Glazov
vorozhtsova.vera@gmail.com

Abstract. In the article the learners training particularity to mathematical competition on the line of equation with using classical inequality are considered. Their application expand the method variety for equation solving, contribute learners logical mind and mathematical culture development.

Keywords: competitive task, classical inequality, task solution learning.

Математическая подготовка школьников может осуществляться в различных направлениях. Одним из них является участие учеников в олимпиадах самого различного уровня. Организация занятий для подготовки к олимпиадам накладывает особые требования как к содержанию изучаемого материала, так и методике их проведения. В данной статье авторы свое внимание фиксируют на вопросе отбора заданий для таких занятий.

Тематика олимпиадных задач достаточно обширна и включает в себя самые различные классы задач – от логических до геометрических. Среди них можно выделить линию уравнений. Данная линия является одной из центральных в курсе математики, поскольку к уравнениям сводятся многие другие типы задач. При решении олимпиадных заданий достаточно часто используются не только стандартные методы решения, такие как метод замены переменных, метод элементарных преобразований и другие, но и нестандартные методы. К их числу можно отнести метод, основанный на применении классических неравенств. Выделим отдельные, с помощью которых можно найти корни уравнений некоторых классов.

В качестве первого рассмотрим неравенство Коши $A \geq G$, где A – среднее арифметическое, G – среднее геометрическое неотрицательных величин [1, с. 5]. В общем случае возможен переход как к среднему арифметическому, так и к среднему геометрическому. Рассмотрим случай перехода от среднего геометрического к среднему арифметическому.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{2x-x^2}+\sqrt{3x^2+2x-1}+\sqrt{5x^2-4x}=5x-1$.

Найдем область определения уравнения, которая может быть описана с помощью следующей системы неравенств: $\begin{cases} 2x-x^2\geq 0, \\ 3x^2+2x-1\geq 0, \\ 5x^2-4x\geq 0, \\ 5x-1\geq 0. \end{cases}$ Множеством решений данной системы является промежуток $x\in\left[\frac{4}{5};2\right]$. Разложим выражения под знаком каждого корня на множители. Можно показать, что на области определения уравнения все сомножители будут только неотрицательными. Тогда к каждому из корней можно применить оценку посредством неравенства Коши. В результате левая часть исходного уравнения может быть оценена так:

$$\sqrt{(2-x)x}+\sqrt{(3x-1)(x+1)}+\sqrt{(5x-4)x}\leq\frac{2-x+x}{2}+\frac{3x-1+x+x}{2}+\frac{5x-4+x}{2}=5x-1.$$

Правая часть неравенства после преобразований совпадает с правой частью рассматриваемого уравнения. Таким образом, на области определения его левая часть не больше правой части. Равенство возможно только при выполнении следующих условий $\begin{cases} x=2-x, \\ 3x-1=x+1, \\ 5x-4=x. \end{cases}$ Записанная система имеет единственное решение $x=1$. Найденное значение принадлежит области определения исходного уравнения, а следовательно, является его решением.

Классическим методом решения иррациональных уравнений является возведение их левой и правой частей в степень. Если обсуждаемое уравнение решать таким методом, то после всех преобразований мы получим уравнение восьмой степени. Подбором можно установить, что $x=1$ является корнем этого уравнения кратности 2. Далее требуется найти корни многочлена шестой степени или доказать, что их нет, причем рациональных корней он не имеет. Таким образом, решение данного уравнения путем последовательного возведения в степень позволяет найти его корень. Однако без использования других методов весьма затруднительно доказать тот факт, что других корней данное уравнение не имеет. Таким образом, применение неравенства Коши позволяет обнаружить решение быстрее и проще.

Другим неравенством, дающим возможность эффективно решать некоторые виды уравнений, является неравенство Бернулли. Фактически упоминаемое неравенство представляют два неравенства, определяемых значением входящего в него параметра. Они таковы:

$$(1+x)^p\geq 1+px, x>-1, p\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty),$$

$$(1+x)^p\leq 1+px, x>-1, p\in(0;1).$$

Равенство в приведенных неравенствах Бернулли выполняется только для $x=0$ [1, с. 24].

В качестве примера рассмотрим следующее уравнение.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt[4]{1+x}=\left(1+\frac{x}{16}\right)^4$. При решении классическим способом путем возведения в четвертую степень получаем уравнение шестнадцатой степени, корни которого найти не просто. Перепишем уравнение в следующем виде $\sqrt[4]{1+x}-\left(1+\frac{x}{16}\right)^4=0$. Область определения уравнения представляет собой неравенство $x\geq -1$. Применим к выражению $\sqrt[4]{1+x}$ неравенство Бернулли, в результате получаем оценку

$$(1+x)^{\frac{1}{4}}\leq 1+\frac{x}{4}, \tag{1}$$

которая выполняется на всей области определения. Выражение $\left(1+\frac{x}{16}\right)^4$ с помощью неравенства Бернулли можно оценить следующим образом

$$\left(1+\frac{x}{16}\right)^4\geq 1+\frac{x}{4}. \tag{2}$$

Оценка справедлива при условии $x\geq -16$. Соответственно на области определения исходного уравнения выполняются оценки (1) и (2). Умножим неравенство (2) на –1, тогда справедливо неравенство

$\sqrt[4]{1+x}-\left(1+\frac{x}{16}\right)^4 \le 1+\frac{x}{4}-1-\frac{x}{4}$, что позволяет найти оценку левой части уравнения. Она такова $\sqrt[4]{1+x}-\left(1+\frac{x}{16}\right)^4 \le 0$. Полученное неравенство выполняется для любых значений x из области определения исходного уравнения. Равенство возможно только при выполнении следующих условий $\begin{cases} x=0, \\ \frac{x}{16}=0. \end{cases}$ Уравнение имеет решение $x=0$.

Еще одним классическим неравенством, позволяющим достаточно эффективно решать уравнения отдельных видов, является неравенство Иенсена для выпуклых функций. Можно показать, что для выпуклой на промежутке функции $f(x)$ справедливо неравенство

$$f(\lambda_1 x_1+\dots+\lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1)+\dots+\lambda_n f(x_n),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – положительные числа, удовлетворяющие условию $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=1$, а $x_1, x_2, \dots, x_n$ принадлежат данному промежутку [1, с. 34]. Для вогнутой функции неравенство Иенсена принимает вид

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\dots+\lambda_n x_n) \ge \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\dots+\lambda_n f(x_n),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \ge 0$ и $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=1$. Рассмотрим следующую задачу, демонстрирующую применение неравенства Иенсена.

Пример 3. Решите уравнение $6\ln\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{1+x}+4\sqrt[4]{3+x}}{6}=\ln(3+x)+\ln\sqrt{2(x+x^2)}$.

Область определения уравнения можно описать следующей системой неравенств $\begin{cases} 2x \ge 0, \\ x+1 \ge 0, \\ 3+x \ge 0, \\ x+x^2 > 0, \\ 3+x > 0. \end{cases}$

Ее решениями являются все $x > 0$. Приведем исходное уравнение к следующему виду:

$$\ln\left(\frac{1}{6}\sqrt{2x}+\frac{1}{6}\sqrt{1+x}+\frac{4}{6}\sqrt[4]{3+x}\right)=\frac{4}{6}\ln\sqrt[4]{3+x}+\frac{1}{6}\ln\sqrt{2x}+\frac{1}{6}\ln\sqrt{1+x}.$$

Функция $y=\ln x$ является вогнутой на интервале $(0;\ +\infty)$. Обозначим коэффициенты уравнения так: $\lambda_1=\frac{1}{6}, \lambda_2=\frac{1}{6}, \lambda_3=\frac{4}{6}$. Очевидно, что $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$. Применим неравенство Иенсена к левой части уравнения, справедлива оценка

$$\ln\left(\frac{1}{6}\sqrt{2x}+\frac{1}{6}\sqrt{1+x}+\frac{4}{6}\sqrt[4]{3+x}\right) \ge \frac{4}{6}\ln\sqrt[4]{3+x}+\frac{1}{6}\ln\sqrt{2x}+\frac{1}{6}\ln\sqrt{1+x}.$$

Равенство достигается лишь при выполнении условия $\sqrt{2x}=\sqrt{x+1}=\sqrt[4]{3+x}$. Отсюда находим единственный корень уравнения $x=1$.

Применение неравенств к решению уравнений позволяет рассматривать те случаи, когда нахождение корней уравнения стандартными методами приводит к громоздким выкладкам. Таким образом, применение различных классических неравенств к решению уравнений позволяет в ряде случаев более просто прийти к их решению, способствует развитию математического и логического мышления, а также расширяет представления о методах решения уравнений.

Литература

1. Калинин С.И. Метод неравенств решения уравнений. Учебное пособие по элективному курсу для классов физико-математического профиля. / С. И. Калинин. – М.: Изд–во «Московский лицей», 2013. – 112 с.

УДК 372

ОБУЧЕНИЕ МЕТОДУ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ И ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СИСТЕМЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Лобанова Н.И.,
муниципальное учреждение дополнительного образования
«Центр внешкольной работы г. Зеленокумска Советского района», г. Зеленокумск
lobantchik@yandex.ru

Аннотация. В статье показана целесообразность обучения элементам теории дифференциальных уравнений, которые являются естественным продолжением одной из основных содержательных линий школьного курса математики – линии уравнений. Рассмотрены задачи на геометрический и физический смыслы производной, сводящиеся к дифференциальным уравнениям, структура метода математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений, формирование действий, составляющих этот метод, а именно, обучение поиску пути решения задачи, применению метода математического моделирования, способам решения полученного дифференциального уравнения определённого вида, критическому анализу и осмыслению полученного результата.

Ключевые слова: дополнительное образование, старший подросток, метод математического моделирование, дифференциальные уравнения.

TRAINING TO THE METHOD OF MATHEMATICAL MODELING IN DECISION OF GEOMETRIC AND PHYSICAL PROBLEMS WITH DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE SYSTEM OF ADDITIONAL EDUCATION

N.I. Lobanova,
municipal institution of additional education
«Center for extracurricular activities in Zelenokumsk, Sovetskiy district», Zelenokumsk
lobantchik@yandex.ru

Abstract. The article shows the expediency of teaching elements of the theory of differential equations, which are a natural extension of one of the main content lines of the school course of mathematics - the line of equations. The problems on the geometric and physical meanings of the derivative, reducible to differential equations, the structure of the method of mathematical modeling with the help of differential equations, the formation of the actions making up this method, namely, the learning to find the way of solving the problem, the application of the method of mathematical modeling, the methods for solving the resulting differential equation of a certain type, critical analysis and comprehension of the result obtained.

Keywords: additional education, senior teenager, method of mathematical modeling, differential equations.

Возросшая роль математики и связанных с ней прикладных дисциплин в функционировании технически сложноорганизованного современного человеческого общества, использование методов математического моделирования не только в познании законов природы, но и в развитии различных областей человеческой деятельности, предъявляют повышенные требования к математической культуре мышления каждого человека [1, с.230].

Таким образом, одной из целей современного школьного математического образования должно стать формирование прикладного математического мышления старших школьников, которое можно обеспечить посредством «приобретения и совершенствования опыта построения и исследования математических моделей для описания и решения прикладных задач» [11].

Цель занятий школьников по математике в дополнительном образовании состоит в развитии способностей и навыков учащихся в сочетании с общеобразовательной подготовкой, зарождении интереса к математике на первичном уровне, поддерживании его до познавательного уровня. Взаимосвязь обязательного обучения математике в общеобразовательной школе и занятий по математике в рамках дополнительного образования выступает как средство осуществления принципа непрерывности и преемственности [8, с.1].

Предметная система обучения математике, позволяет повысить качество знаний за счёт цельности содержания каждого раздела и определения его оптимального объёма, выверенного практическим опытом. Важную роль при этом играет органическое взаимодействие всех разделов, понятий, методов, правил, теорем на протяжении всего времени изучения предмета. Всё это способствует углублению и упрочению знаний учащегося, что приводит действительно к не формальным, осмысленным, глубоким и прочным знаниям.

С элементами теории дифференциальных уравнений учащиеся старших классов неявно сталкиваются, например, в курсе физики. А именно, с результатами интегрирования дифференциального уравнения школьники встречаются уже в 9-м классе при рассмотрении равноускоренного движения [8, с. 1]. Анализируя задачи, связанные с решением уравнений в школьном курсе математики, академик Д.В. Аносов [4, с. 7] отметил, что «Вероятно, наиболее важные и наиболее распространенные задачи такого рода – это дифференциальные уравнения. В школьном курсе математики о них речи нет, но простейшие примеры дифференциальных уравнений нелегально фигурируют в школьном курсе физики». Элементы теории дифференциальных уравнений вполне доступны для понимания учащимся 11-х классов. «Самое сложное, что здесь требуется – это понимание смысла понятия производной и начальное умение дифференцировать» [4, с. 7].

Элементы дифференциального и интегрального исчислений, начала которых изучаются в старших классах общеобразовательной школы, настолько тесно связаны с дифференциальными уравнениями, являющимися естественным продолжением школьной дисциплины «Алгебра и начала анализа», что не случайно начальные сведения о дифференциальных уравнениях и их приложениях представлены во многих широко известных учебниках алгебры и начал анализа для старшеклассников, авторы которых: Ш. А. Алимов [2, с. 309–312], Ю. М. Колягин [7, с. 150–152], А. Н. Колмогоров [6, с. 263–267] и С. М. Никольский [9, с. 206–211].

С целью обучения старших школьников в системе дополнительного образования решению задач с помощью дифференциальных уравнений, необходимо использовать практико-ориентированный подход, который позволяет значительно повысить эффективность обучения. Этому способствует система отбора содержания учебного материала, помогающая учащимся оценивать значимость, практическую востребованность приобретаемых знаний и умений [8, с.2].

При решении практико-ориентированных задач используется один из основных методов исследования реальных ситуаций – метод математического моделирования, который включает три основных этапа:

1) перевода предложенной задачи с естественного языка на язык математических терминов, т. е. построение математической модели; примером математической модели является уравнение;

2) решения задачи средствами математики внутри модели;

3) интерпретации полученного решения, т. е. перевода полученного результата на язык, на котором была сформулирована исходная задача.

Задача способствует формированию определенных форм мышления, необходимых для освоения окружающей нас действительности, так как изучает понятия, введенные путем абстрагирования от явлений реального мира [12] .

Математическое моделирование настолько широко применяется для изучения реального мира, что создание у учащихся представления о его сущности, подведение их к овладению каждым из этапов должно стать предметом постоянных забот учителя, в том числе, и педагога дополнительного образования [3, с.27] .

Математическое моделирование возникает тогда, когда объект-оригинал замещается математическим объектом и информация об оригинале извлекается с помощью математического исследования модели. Таким образом, математическим моделированием принято называть описание реальных физических, химических, технологических, биологических, социологических, экономических и других процессов с помощью математического инструментария, например, уравнений и неравенств [1, с.231].

Предлагаем учащимся задачи на физический и геометрический смыслы производной, которые могут заинтересовать каждого любознательного школьника. Решения этих задач сводятся к простейшим дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными, которые интегрируются непосредственно методом разделения переменных.

При решении физических задач удобно воспользоваться следующим алгоритмом действий:

1. установить изменяющиеся в данном явлении величины, выявить физические законы, которые связывают их;
2. выбрать независимую переменную и функцию этой переменной, которую необходимо найти;
3. по условию задачи определить начальные или краевые условия;
4. выразить все фигурирующие в условии задачи величины через независимую переменную, искомую функцию и ее производные;
5. составить дифференциальное уравнение по условию задачи и физическому закону;
6. найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения;
7. найти частное решение;
8. исследовать полученное решение [5, с.38].

Задача 1. Катер двигался по озеру со скоростью 32 км/ч и через 1 минуту, после того как был выключен двигатель, его скорость стала равной 8 км/ч. Чему будет равна скорость катера через 2 минуты после остановки двигателя, если сопротивление воды пропорционально скорости движения катера.

Решение. Анализируя условие задачи, старшеклассники делают вывод: необходимо найти какова будет скорость катера через 2 минуты после остановки двигателя, при условии, что сопротивление воды пропорционально скорости движения катера. На первом этапе предлагается ученикам составить математическую модель задачи.

Обозначим v – скорость движения катера, а k – коэффициент пропорциональности. На движущийся катер действует сила $F=-k\cdot v,$ исходя из условия задачи. С другой стороны, по второму закону Ньютона, эта сила $F=m\cdot\frac{dv}{dt}$, где m – масса, а $\frac{dv}{dt}$ – ускорение. Следовательно,

$$m\cdot\frac{dv}{dt}=-k\cdot v \qquad (1.1)$$

есть дифференциальное уравнение, то есть старшие подростки составили математическая модель, описывающую движение катера.

Следуя второму этапу метода математического моделирования (уточняют составленную модель, переходят от одной модели к другой) старшеклассники решают дифференциальное уравнение методом разделения переменных.

Разделяя переменные и затем интегрируя из (1.1), получим

$$\frac{dv}{v}=-\frac{k}{m}\cdot dt\,,$$

$$\ln|v|=\ln e^{-\frac{k}{m}t}+\ln C\,.$$

Значит, общее решение дифференциального уравнения (1.1) имеет вид:

$$v=C\cdot e^{-\frac{k}{m}t}\,. \qquad (1.2)$$

Так как в момент времени $t=0$ сек скорость катера была $v=32$ км/ч, а через одну минуту, т.е. при $t=1\text{мин}=\frac{1}{60}$ч она была $v=8$ км/ч, то из общего решения (1.2), получаем:

$$32=C \quad \text{и} \quad 8=C\cdot e^{-\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{60}}.$$

Значит,

$$C=32 \quad \text{и} \quad 8=32\cdot e^{-\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{60}}, \text{ т.е. } 4^{-1}=e^{-\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{60}} \quad \text{или} \quad e^{-\frac{k}{m}}=4^{-60}.$$

Подставив в (1.2), имеем

$$v=32\cdot 4^{-60t}\,. \qquad (1.3)$$

При $t=2\text{ мин}=\frac{1}{30}$ч, из (1.3) получим

$$v=32\cdot 4^{-60\cdot\frac{1}{30}}=32\cdot 4^{-2}=2\,.$$

Третий этап – перевод результатов решения математической задачи на язык данной задачи. Старшие школьники делают вывод: скорость катера через 2 минуты после остановки двигателя будет равна 2 км/ч.

Ответ: 2 км/ч.

Много задач геометрии требуют отыскания кривых по заданным свойствам их касательных. Составление дифференциальных уравнений, к которым приводят такие задачи, связано, как правило, с использованием геометрического смысла производной как углового коэффициента касательной.

При решении геометрических задач на составление дифференциальных уравнений применяется, как правило, следующий алгоритм. Во-первых: исходя из условий задачи, делаем сначала чертеж, обозначив через $y = f(x)$ искомую кривую, а через $P\,(x, y)$ – произвольную точку этой кривой; во-вторых: все величины входящие в задачу выражаем через x, y и y' и используя условия задачи, записываем зависимость между ними в виде уравнения: $F(x, y, y' = 0)$ то есть составляем математическую модель. Используем геометрический смысл производной $y' = tg\alpha$, где α есть угол, образованный касательной к кривой в точке $P(x, y)$ с положительным направлением к оси Ox. В-третьих, решаем полученное дифференциальное уравнение одним из методов, с которыми знакомы старшие школьники, то есть ищется кривая по свойству ее касательной, общему для всех точек этой кривой. Делается вывод.

Задача 2. Какова должна быть форма отражающей поверхности, чтобы параллельный пучок света любой ширины собирался строго в одной точке [10, с.30]?

Решение. Решаем задачу со старшими подростками в соответствии с выделенными этапами. На первом этапе старшеклассники делают рисунок и составляют математическую модель (дифференциальное уравнение). Будем считать, что пучок параллелен оси абсцисс, а точка, через которую проходят отраженные лучи, совпадает с началом координат $O(0,0)$ плоскости xOy. Найдем уравнение линии $Г$, что в любой точке P этой кривой угол между касательной к кривой и положительным направлением оси абсцисс равняется углу между касательной и прямой, что соединяет начало координат с точкой P.

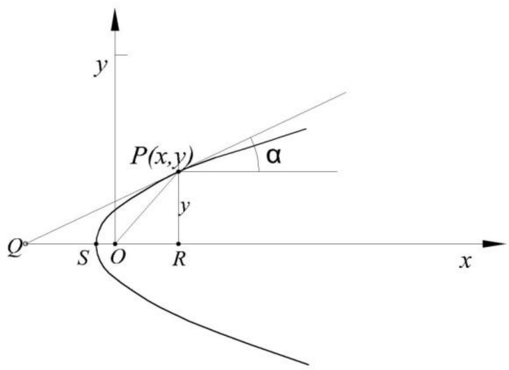


Рисунок. График – парабола

Пусть $P\,(x, y)\in Г$ – любая точка. Проведем через точку Р касательную к кривой Г (см. рис). Обозначим через α угол, образованный касательной в точке $P\,(x, y)\in Г$ с положительным направлением оси Ox.

Из прямоугольного треугольника $\Delta\, PRQ$ получаем:

$$tg\alpha = \frac{|PR|}{|QR|};\; tg\alpha = \frac{|PR|}{|QO|+|OR|}. \tag{2.1}$$

Далее старшеклассники выражают величины, входящие в (2.1), через x, y и y'.

Имеем (см. рис.): $|OR|=x$, $|PR|=y$, $y' = tg\alpha$ (в силу геометрического смысла производной).

Так как угол падения α равен углу отражения, как известно из оптики, то $\angle OPQ = \alpha$ и $\angle PQO = \alpha$. Следовательно, Δ OPQ равнобедренный. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника $\Delta\, OPR$

имеем: $$|OP|=|OQ|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

На втором этапе (решения задачи средствами математики внутри модели) старшеклассники решают дифференциальное уравнение.

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x} = \frac{y\cdot(\sqrt{x^2+y^2}-x)}{y^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y};$$

$y \cdot y' = \sqrt{x^2+y^2} - x$ или $\frac{x+y\cdot y\prime}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1.$

Замечая, что первообразной левой части является $\sqrt{x^2+y^2}$, а правой части x, обучающиеся, интегрируя, получают

$$\sqrt{x^2+y^2} = x + C \text{ или } y^2 = 2Cx + C^2, \quad (2.2)$$

где C есть произвольная постоянная.

Из равенства (2.2) следует, что линия Γ есть парабола. Значит, форма отражающей поверхности должна иметь форму параболоида, получающегося в результате вращения линии Г вокруг оси Ox.

На завершающем этапе старшие школьники делают вывод, согласно условию и записывают ответ.

Ответ. Форма отражающей поверхности должна иметь форму параболоида.

Далее учащимся можно предложить найти вершину и фокус параболы Γ.

Таким образом, обучение методу математического моделирования в системе дополнительного образования на основе решения геометрических и физических задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям, способствует не только освоению важнейших элементов, составляющих этот метод, но и углублению и упрочению знаний обучающихся, что приводит к действительно не формальным, осмысленным, глубоким и прочным знаниям.

Литература

1. Абатурова В.С. Формирование прикладного математического мышления школьников // Сибирский педагогический журнал. 2007. №6. С. 230-241.
2. Алимов А.Ш, Колягин Ю.М. и др. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. Учебник (базовый уровень) 18-е изд. - М.: Просвещение, 2012. – 464 с.
3. Аммосова Н.В., Лобанова Н.И. Решение неопределенных уравнений первой степени с двумя неизвестными в системе дополнительного образования // Сибирский педагогический журнал. 2016. № 2. С. 24–34.
4. Аносов Д.В. Дифференциальные уравнения: то решаем, то рисуем. – М.: МЦНМО, 2008. – 200 с.
5. Виленкин Н.Я., Доброхотова М.А., Сафонов А.Н. Дифференциальные уравнения: учебное пособие. М.: Просвещение, 1984. – 102 с.
6. Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. Учебник (базовый уровень) 17-е изд. - М.: Просвещение, 2008. – 384 с.
7. Колягин Ю. М., Оганесян В.А., Саннинский В.Я., Луканин Г.Л. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Ю. М. Колягин. – М.: Просвещение, 1977. – 480 с.
8. Лобанова Н.И. Элементы теории дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования // Интернет-журнал «Мир науки» 2016, Том 4, номер 6 http://mir-nauki.com/PDF/32PDMN616.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.
9. Никольский С.М., Потапова М.К., Решетникова Н.Н., Шевкина А.В. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник (базовый профильный уровни) 8-е изд. - М.: Просвещение, 2009. – 464 с.
10. Паршаков, А.Н. Принципы и практика решения задач по общей физике. Ч. 3: Оптика. Квантовая физика: учеб. пособие / А.Н. Паршаков. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2011. – 268 с. ISBN 978-5-398-00665-0
11. Федеральный компонент государственного стандарта общего образования. Часть II. Среднее (полное) общее образование / Министерство образования Российской Федерации. - М. 2004.
12. Burden P.R., Byrd D.M. Methods for Effective Teaching. – 2nd ed. – Boston-London: Allyn and Bacon, 1999. – 418 p.

УДК 372

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ МЕТОД В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛЕ

Луконина С.Ю., учитель математики,
МБОУ «Гимназия №96», г. Казань
lukoninasveta@yandex.ru

Аннотация. Эффективным средством, позволяющим развитие познавательной и исследовательской компетентности является творческая деятельность. Чтобы ученик начал «действовать», необходимы определенные мотивы. На уроке необходимо создавать проблемные ситуации, где ученик проявляет умение комбинировать элементы для решения проблемы. Проблемную ситуацию и творческую деятельность объединяет в себе исследовательский подход.

Ключевые слова: исследование, задача, проблема, поисковая деятельность, творческая задача.

RESEARCH METHOD IN TEACHING MATHEMATICS AT SCHOOL

S.Yu. Lukonina, mathematic teacher,
MBEI «Gymnasium №96», Kazan
lukoninasveta@yandex.ru

Abstract. Effective tool for the development of educational and research competence is creativity. The student began to "act", requires certain motives. The lesson you need to create the problem situation where the student shows the ability to combine elements to solve the problem. The problem situation and creative activity combines the research approach.

Keywords: research, objective, problem, search activity, creative task.

1. Введение

«Если человек в школе не научится творить,
то и в жизни он будет только подражать и копировать».

Л.Н.Толстой.

Исследовательская деятельность - это форма организации работы, которая связана с решением учащимися исследовательской задачи с неизвестным заранее решением. Использование исследовательского подхода в обучении опирается на опыт учащихся, а также его увеличение в поисковой и творческой деятельности. [1]

По мнению А. Шацкого [2] учебно-исследовательская деятельность учащихся - *это такая форма организации учебно-воспитательной работы, которая связана с решением учащимися творческой, исследовательской задачи с заранее неизвестным результатом и предполагающая наличие основных этапов, характерных для научного исследования:*

- *постановку проблемы;*
- *ознакомление с литературой по данной проблеме;*
- *овладение методикой исследования;*
- *сбор собственного материала;*
- *анализ;*
- *обобщение;*
- *выводы.*

Творческая деятельность является эффективным методом в выявлении и увеличении исследовательского и познавательного потенциала учащихся. Чтобы школьник начал «действовать», необходима определенная мотивация. На уроке создаются проблемные ситуации, в которых школьник учится решать их и проявлять умение взаимосвязывать различные пути решения.

При формировании многих качеств, необходимых успешному современному человеку, может большую роль сыграть такая наука как математика.

Наиболее прогрессивный способ изучения математики – это исследовательская работа на уроке, а также одна из эффективных форм внеклассной работы по предмету. Приобщение учащихся к такому виду деятельности способствует самореализации и самосовершенствованию личности учащегося.

Сегодня при введении новых стандартов обучения очень актуально звучат слова В.П. Вахтерова о том, что образован не тот, кто много знает, а тот, кто хочет много знать, и умеет добывать эти знания.

В 5, 6 классах исследовательскую работу можно осуществить через лабораторно - практическую деятельность учеников на уроке. Простые знания, умения и навыки учащиеся приобретут в ходе такой работы, чтобы в дальнейшем применить это при выполнении исследования. Развивается нестандартное мышление, умение самостоятельно работать и искать информацию. Учащиеся выступают с сообщениями, рефератами о происхождении того или иного математического термина, о жизни и деятельности ученых - математиков, об истории математических открытий, о практическом применении знаний, полученных при изучении темы. Написание математических сказок, составление математических кроссвордов требуют от учащихся большой самостоятельности и творческого подхода.

В 7-9 классах исследовательская работа переходит на более высокий уровень. Появляется такая наука как геометрия, которая дает нам большой выбор тем на использование исследовательского метода в обучении. Нахождение суммы углов треугольника, изучение свойств медиан, изучение свойств хорд в окружности и многое другое можно предоставить учащимся на изучение исследовательским методом.

В 10 и 11 классах ученики, конечно же, будучи наученными приёмами исследования в основной школе, работают самостоятельно, можно только консультировать школьника при выполнении такого вида работы.

2. Технология исследовательской деятельности

Предлагаю фрагмент урока в 9 классе, на котором используется исследовательский метод.

Тема: «Метод координат». Тип урока: Закрепление знаний.

Класс делится на 4-5 групп. Вся деятельность учащихся отражается в оценочных листах.

Задание	**Баллы**	**Max балл**
Формулы		9
Устные задачи		7
Практическая работа		6
Исследовательская работа		5
Итог		27

1. Организационный момент.
2. Актуализация знаний (основные формулы).
3. Устный счет (работа с устными задачами на использование основных формул).
4. **Практическая работа**

4.1. Даны точки **A(2; 0)** и **B(-2; 6)**. Напишите уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB.

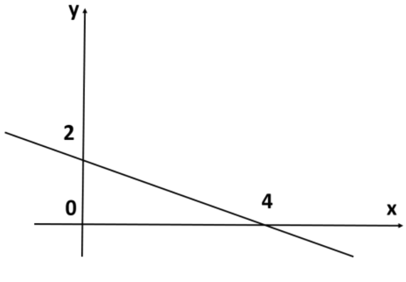
4.2. Составьте уравнение прямой.

Найдите точку пересечения прямых, заданных уравнениями

$3x - y - 2 = 0$ и $2x + y - 8 = 0$.

5. **Исследовательская работа**

Постройте параллелограмм на координатной плоскости, вершины которого находятся в II и III четвертях.



Сравните сумму квадратов всех сторон параллелограмма и сумму квадратов его диагоналей. Сделайте вывод.

1) *Чертеж*
2) *Решение*
3) *Вывод*

6. Все работы по исследовательской деятельности учащиеся вывешивают на доске и обсуждают. В ходе обсуждения и выявляется правильное решение и соответственно правильный ответ.

7. Итог урока.

3 Заключение

В результате применения исследовательского подхода в обучении учащиеся приобретают определённые качества личности, такие как:

• адаптируются в меняющихся жизненных ситуациях, самостоятельно приобретая необходимые знания, умело применяют их на практике для решения проблем;

• учатся самостоятельно, критически мыслить, видеть возникающие в реальном мире трудности и искать пути рационального их преодоления;

• грамотно и правильно работают с информацией;

• коммуникабельны, контактны в различных социальных группах, умеют работать вместе, предотвращая конфликтные ситуации и умеют выходить из них;

• могут самостоятельно трудиться над развитием собственной нравственности, интеллекта, культурного уровня.

Литература

1. Поддьяков А.Н. Исследовательское поведение, интеллект и творчество // Исследовательская работа школьников. – 2002. – №2.

2. Савенков А.И. Исследовательское обучение и проектирование в современном образовании // Исследовательская работа школьников. – 2004. – №1.

УДК 372.851
378.142

ТЕХНОЛОГИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ МАСТЕРСКОЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Макеева О.В., кандидат физико-математических наук,
Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н.Ульянова, г. Ульяновск
mov_ulspu@mail.ru
Фолиадова Е.В., кандидат физико-математических наук,
Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н.Ульянова, г. Ульяновск
ef1961@gmail.com

Аннотация. Анализируется опыт применения технологии педагогической мастерской при организации освоения дисциплины «Теория функций комплексного переменного» бакалаврами профиля «Математика» (с дополнительным профилем «Информатика» или «Иностранный язык») направления подготовки «Педагогическое образование» в УлГПУ им. И.Н. Ульянова.

Ключевые слова: профессиональное педагогическое образование, математическое образование, интерактивные педагогические технологии, фасилитация.

THE PEDAGOGICAL WORKSHOP TECHNOLOGY IN MATH EDUCATION FOR FUTURE TEACHERS OF MATHEMATICS

O.V. Makeeva, candidate of physical and mathematical sciences,
Ulyanovsk state pedagogical university, Ulyanovsk
mov_ulspu@mail.ru

E.V. Foliadova, candidate of physical and mathematical sciences,
Ulyanovsk state pedagogical university, Ulyanovsk
ef1961@gmail.com

Abstract. An experience with the pedagogical workshop technology is assessed in the framework of mastering a course on function theory of complex variable by students following the Bachelor of Mathematics Edu-

cation programmer (with additional computer science or foreign language specialization) in Ulyanovsk State Pedagogical University.

Keywords: teachers training, mathematics education, interactive educational technologies, facilitation.

Человеческая сущность должна преобладать над технологией.

А. Эйнштейн

Странная судьба складывается у педагогических технологий в практике отечественного образования. С одной стороны, трудно найти учителя, который бы не слышал о них, не имеет о них представления, а с другой – столь же трудно найти педагога, систематически использующего какую-нибудь технологию в своих профессиональных буднях. В большинстве случаев преподавателями не осознаются различия между методикой и технологией и реально применяются лишь элементы какой-нибудь технологии, а, следовательно, реализуется некоторая педагогическая методика. Но даже в таком урезанном варианте, в качестве элементов методики обучения, педагогические технологии предлагают интересные, разноплановые возможности по конструированию и совершенствованию учебного процесса, реализации и развитию творческого потенциала личности педагога и обучающегося.

В соответствии с требованиями, предъявляемыми к российскому педагогическому образованию, будущий учитель ещё в стенах вуза должен освоить современные педагогические технологии (не познакомиться, не просто изучить особенности, а именно освоить). Очевидно, это может происходить только в процессе самостоятельной педагогической деятельности. Чтобы не формально, а реально понять сущность технологии, её возможности и достоинства, недостатки и трудоёмкость, технологию должно применить в некоторой образовательной ситуации. Однако объём педагогической практики студентов бакалавриата недостаточен для организации такой работы. Решение проблемы многие видят в увеличении доли практики в учебных планах и, как следствие, в понижении доли теоретического, в том числе предметного обучения. Но это может привести к формальному применению изученных технологических приёмов без опоры на содержательные особенности материала. Авторы считают такой подход неприемлемым.

Несомненно, освоение субъектом любой технологии может происходить только в деятельности. Обратим, однако, внимание на то, что в образовательной практике присутствуют как минимум два субъекта: учитель и ученик, и что согласно современным представлениям активность учащегося в построении учебного процесса должна быть не ниже активности преподавателя. С нашей точки зрения, это означает, что образовательные технологии должны осваиваться будущими учителями из двух позиций: из позиции ученика, который объективно познаёт новое, и только затем – из позиции учителя, организующего этот процесс. При этом опыт обоих состояний должен аккумулироваться, пропускаться через призму профессионального сознания. Иными словами, чтобы учить по-новому, студент сначала должен сам учиться по-новому – в рамках всех дисциплин образовательной программы и во внеаудиторной деятельности [1].

Авторы статьи предприняли попытку встроить фрагмент освоения педагогической технологии в процесс изучения математической дисциплины в педагогическом вузе. Выбрана была технология педагогической мастерской [5], при этом для студентов проектировалась дуальная ситуация. Во-первых, нахождение в позиции учащегося, что открывает возможности осмыслить воздействие элементов технологии изнутри, в качестве субъекта, на которого направлена технология, «прочувствовать» механизмы её работы. Во-вторых, включенность в процесс применения элементов педагогических технологий в роли учителя и, следовательно, возможность осознать особенности построения учебного процесса в соответствии с технологией, принципы управления обучением, которые создаёт технология, возможность «проникнуться её духом».

Отличительными чертами технологии педагогической мастерской с точки зрения авторов являются:

– ориентация на усвоение, прежде всего, способа действий, а не информации;

– скрытый стиль управления учебным процессом, когда учитель-мастер выступает в роли фасилитатора, а не осуществляет пооперационное руководство, при этом не только не даёт указаний, но даже не предлагает вопросов-подсказок;

– свободный стиль общения и расположения участников мастерской в пространстве аудитории;

– наличие результатов работы в виде готового продукта (в данном случае педагогического).

Организация учебного процесса в режиме мастерской предполагает высокую самостоятельность и интеллектуальную активность учащихся. Очевидно, что технологии, ориентированные на поиск и исследование, студентам особенно сложно моделировать на уже известном материале. Для того чтобы спроектировать деятельность ученика в проблемной ситуации, нужно себя поставить на его место, то есть в дискомфортную ситуацию выбора, неопределённости. Сделать это естественнее при освоении содержания новой математической дисциплины, причём лучше на третьем курсе, когда уже накоплен некоторый математический багаж, рассмотрены методы обучения, сформировалась профессиональная позиция.

Согласно учебному плану УлГПУ для бакалавров педагогического образования по профилю «Математика», дисциплина «Теория функций комплексного переменного» – это обязательная дисциплина вариативной части (6 семестр). Авторы полагают, что содержание предмета должно соответствовать педагогической направленности образования и, как следствие, широта диапазона рассматриваемых вопросов должна уступить место систематизирующему характеру изучаемого материала. Это с одной стороны развитие базовых идей математического анализа и овладение ими на более высоком теоретическом уровне, а с другой – освоение нового аппарата, причём в процессе решения уже рассмотренных ранее проблем и задач анализа и школьной математики.

Особенности содержания и «миссия» дисциплины создают интересные возможности для педагогических исследований по проектированию процесса обучения и образовательного пространства в целом [3]. Ранее был апробирован приём создания интерактивной образовательной площадки в формате учебного сайта [4, 6]. Опыт можно считать вполне удачным, так как идея создания обучающей среды и электронного средства обучения получила не формальное, а реальное воплощение. Однако значительная трудоёмкость процесса и отсутствие ресурсов времени не позволили завершить разработку программного продукта в том объёме, как он был задуман. В следующем учебном году идея конструирования образовательного пространства была локализована до размеров одного занятия в формате педагогической мастерской. Это была итоговая аудиторная работа после всех лекционных и практических занятий для студентов трёх учебных групп направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование с двумя профилями («Математика и информатика», «Математика и иностранный язык»). Эксперимент, а именно так воспринимается ситуация авторами, был проведён впервые.

Цель занятия – систематизировать представления обучающихся о способах применения комплексного анализа для решения задач различных разделов математики, развивать понимание единства математического знания, формировать умение выявлять дидактические возможности задач.

Предполагаемые образовательные результаты занятия.

1) *Предметные:* повторение и закрепление знаний о вариантах представления комплексных чисел и линий на комплексной плоскости, о свойствах операций на множестве комплексных чисел и на множестве функций комплексной переменной; углубление умений по использованию аппарата комплексного анализа для решения алгебраических и геометрических задач.

2) *Метапредметные:*

a) *с позиций математического образования:* углубление представлений о взаимосвязи аналитического и геометрического подходов к получению математических результатов; освоение эвристических приёмов, в том числе по переформулированию задачи;

b) *с позиций педагогического образования:* получение практического опыта применения различных методов обучения на дидактическом материале принципиально нового для студентов математического содержания.

3) *Личностные:* получение опыта активного освоения математического знания и опыта учебной рефлексии; создание прецедента соединения двух мыследеятельностных позиций: «учитель - ученик» и перехода из одной позиции в другую в процессе математического (со)творчества.

Основное содержание занятия. Краткосрочный проект: решение предложенных задач в студиях - микрогруппах; представление решения в виде фрагмента занятия или обучающей презентации; самооценка и взаимооценка полученных продуктов.

Продолжительность занятия: 90 минут (два академических часа).

Этапы занятия.

1) *Ориентировочный этап* (10 минут). Формирование студий, получение заданий и информационных материалов (дайджест-1: основные идеи применения комплексных чисел при решении алгебраических и геометрических задач; дайджест-2: краткое описание основных методов обучения, различающихся по степени познавательной активности обучающихся).

2) *Этап погружения* (20 минут). Решение задач предложенными способами (с применением аппарата элементарной геометрии или комплексного анализа). Представление черновых вариантов решения жюри. Корректировка решения с учётом пожеланий жюри (при необходимости).

3) *Конструктивный этап* (20 минут). Разработка фрагмента занятия (контактная форма) или обучающей презентации (дистанционная форма) по решению задачи с использованием предписанного метода обучения (исследовательского, объяснительно-иллюстративного, частично-поискового, метода проблемного изложения).

4) *Презентационный этап* (25 минут). Проведение разработанных фрагментов занятий.

5) *Этап рефлексии* (15 минут). Самооценка и взаимооценка деятельности групп в соответствии с заданными критериями. Комментарии к занятию в целом.

Раздаточные материалы.

Задание 1. Решите задачу. Подготовьте и представьте решение задачи согласно требованиям, изложенным в таблице.

Задание 2. Оцените работу студий мастерской по предложенным критериям.

Студия	Форма обучения	Метод обучения	Математический аппарат	Решение задачи	Представление материала				Сумма баллов
					Соответствие методу обучения	Уровень математической грамотности	Эстетика представления материала	Увлекательность изложения	
α	контактная	исследовательский	элементарная геометрия						
γ	дистанционная	объяснительно-иллюстративный	комплексный анализ						
…									

Для организации работы педагогической мастерской были выбраны две задачи. В качестве критериев для их отбора послужили следующие соображения:

– формулировка задачи не должна в явном виде указывать на необходимость применения аппарата комплексного анализа;

– задача должна допускать решения с использованием ресурсов различных разделов математики, но при этом решение средствами комплексного анализа должно обладать некоторым преимуществом;

– задача должна создавать возможности для применения разнообразных методов обучения, различающихся по степени активности познавательной деятельности;

– сложность задачи должна соответствовать уровню математических компетенций учащихся профильных математических классов, а её трудоёмкость временному диапазону работы мастерской.

Ещё одним фактором, который определял выбор задач, было желание продемонстрировать плодотворность взаимодействия геометрических и аналитических подходов в математической практике. Таким образом, были сформулированы следующие задачи:

1. Правильный шестиугольник вписан в единичную окружность. Найдите произведение расстояний от одной из его вершин до всех остальных.

2. На гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4 вне треугольника построен квадрат. Найдите расстояние от вершины прямого угла до центра квадрата.

Работа педагогической мастерской «Пространство комплексных возможностей» была организована в рамках недели науки на факультете физико-математического и технологического образования. Подводя итоги, следует отметить, что двух академических часов явно недостаточно для реализации такого содержательного проекта. Кроме того, очевидно, что аудиторный фонд классического вуза не приспособлен к организации «свободного» образовательного пространства. Авторы осознавали эти трудности, но посчитали возможным воплотить принципиальные идеи эксперимента.

Попытку предложить новый стиль учебного процесса можно считать вполне успешной: студентами было замечено и одобрено его отличие от традиционного варианта. Однако продемонстрировать реальную готовность к свободе: в поиске нового знания, в его трансформации в педагогический продукт – они, к сожалению, не смогли. Трудности возникли уже на этапе погружения – при решении математических задач, так как у студентов недостаточно сформирован навык работы с задачей, явно не привязанной к конкретной теме. При проектировании фрагмента занятия не все студии смогли качественно реализовать предписанный метод обучения (хотя и были уверены в успехе). Наиболее сложными оказались метод проблемного изложения и исследовательский метод, с которыми, по-видимому, студенты реже всего встречаются в собственной учебной практике. Приходится отметить, что сформированная у студентов профессиональная позиция не подкреплена умением соотносить известные им положения дидактики математики с содержательными особенностями учебного материала.

Проблемы, выявленные в результате работы мастерской, очевидно, не принадлежат только к сфере учения. Не в меньшей степени они затрагивают процесс преподавания. В ходе разработки, организации и проведения занятия авторы столкнулись с необходимостью основательного пересмотра собственных профессиональных позиций и освоения нового педагогического инструментария; при этом ощутили большой потенциал технологии для личностно-профессионального роста всех участников мастерской.

Одним из важнейших аспектов развития учителя-математика авторы считают формирование речевой профессиональной культуры, которая напрямую связана с культурой мышления [2]. Педагогическая ситуация мастерской естественным образом стимулирует студентов к использованию яркой, выразительной, эмоционально окрашенной речи, способствует формированию необходимой потребности в самоконтроле.

Эксперимент выявил интересные психологические особенности совмещения ролевых позиций в рамках одного учебного занятия: студенты легко переходили от одной роли к другой, воспроизводя при этом в каждой из них соответствующий стереотип («школярство» или «менторский тон»), хотя это и кажется несовместимым.

Авторы полагают, что регулярное применение технологии педагогической мастерской в рамках изучения дисциплин математического цикла имеет значительный методический потенциал, эффективно способствует ломке устоявшихся негативных клише, в значительной мере помогает рождению свободного диалога между преподавателем и студентами как коллегами.

Литература

1. Волкова Н.А. О метапредметном компоненте внеаудиторной самостоятельной работы педагогического бакалавриата математического профиля / Н.А. Волкова, О.В. Макеева, Е.В. Фолиадова // Концепция развития математического образования: проблемы и пути реализации: Материалы XXXIV научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов (25-27 сентября 2015года, Калуга, Россия). – Москва: Издательство: ООО «ТРП», 2015. - С. 272-275.
2. Макеева О.В. О формировании речевой культуры педагогов в процессе математического образования / О.В. Макеева // Гуманизация и гуманитаризация образования 21 века: Проблемы современного образования: Материалы 12-й Международной научно-методической конференции памяти И.Н. Ульянова «Гуманизация и гуманитаризация образования 21 века» (19-20 октября 2011 г., Ульяновск) / Под общей редакцией Л.И. Петриевой. Ульяновск: УлГПУ, 2011. – С. 203-205.
3. Макеева О.В. О проектировании образовательного процесса по математической дисциплине / О.В. Макеева // Гуманизация и гуманитаризация образования 21 века: Проблемы современного образования: Материалы 13-й Международной научно-методической конференции памяти И.Н. Ульянова «Гуманизация и гуманитаризация образования 21 века» (18-19 октября 2012 г., Ульяновск) / Под общей редакцией Л.И. Петриевой. Ульяновск: УлГПУ, 2012. – С 203-206.
4. Макеева О.В. Из опыта преподавания и организации информационной поддержки дисциплины «Теория функций комплексного переменного» / О.В. Макеева, Е.В. Фолиадова // Бюллетень лаборатории математического, естественнонаучного образования и информатизации: материалы Международной научно-практической конференции «Математическое, естественнонаучное образование и информатизация». – Самара; М.: Самарский филиал МПГУ, 2015. – С. 290-296.
5. Селевко Г.К. Энциклопедия образовательных технологий. В 2-х т. / Г.К. Селевко. Т. 1. – М.:Народное образование, 2005. – С.420-426.
6. TerraComplexa: [учебный сайт]. URL: https://sites.google.com/site/terracomplexa/home

УДК 372.851

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ШКОЛЬНИКОВ КАК ОДНО ИЗ НАПРАВЛЕНИЙ КОНЦЕПЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Мирошниченко С.Л. , кандидат педагогических наук, учитель математики,
МБОУ «Средняя школа имени Д.И. Коротчаева», г. Новый Уренгой
lanolar@rambler.ru

Аннотация. В статье рассмотрены некоторые проблемы организации исследовательской деятельности в школе и возможные пути их решения.

Ключевые слова: концепция математического образования, научная деятельность, математика, исследование, школа.

THE RESEARCH ACTIVITIES OF SCHOOL CHILDREN AS PART OF THE CONCEPT OF MATHEMATICAL EDUCATION

S.L. Miroshnichenko, teacher of mathematics,
Secondary school named after D.I. Korotchayeva, Novy Urengoy
lanolar@rambler.ru

Abstract. This article examines some of the challenges the Organization of research activities in the school and their possible solutions

Keywords: the concept of mathematical education, scholarly activity, math, study, school.

В своем выступлении на Петербургском международном экономическом форуме (пленарное заседание ПМЭФ) российский президент Владимир Путин сказал, что образование является главным, на что мы должны обратить внимание в ближайшие годы, т.к. конкурентоспособность страны, достижения в области экономики невозможны без таланта исследователя. Во многих документах, принятых в области образования, в частности Концепции математического образования [1], исследовательская деятельность обучающихся определяются одним из приоритетных направлений. К основным задачам математического образования в документе относят:

- отбор одаренных школьников и развитие их способностей к точным наукам;
- подготовка обучающихся к поступлению в вузы и обеспечение возможности успешного обучения в них;
- ликвидация несоответствия школьного стандарта знаний и вузовских требований;
- ранняя профориентация обучающихся;
- повышение квалификации учителей.

Рассмотрим основные проблемы, не дающие возможности эффективно осуществлять научную деятельность в школе, предложим их возможные решения.

1. Многие предметы и учебные курсы не подкрепляются практическими занятиями, потому что отсутствует необходимая экспериментальная база. В настоящее время многие научные центры взаимодействуют со школами в данном направлении, и такая интеграция образовательных систем способна помочь в решении возникшей проблемы.

2. Использование традиционных методов преподавания школьных дисциплин мешает при организации исследовательской работы с учащимися. Формирование универсальных умений ставить и самостоятельно решать проблемы, творческой инициативы, навыка работы с различными источниками невозможно без использования технологий, способствующих индивидуальному развитию личности.

3. Желание учащихся заниматься исследовательской деятельностью падает к старшим классам. Именно учитель организует и руководит исследованиями, несет ответственность за результаты работы. Наряду с тем, что педагог должен создавать атмосферу заинтересованности среди школьников, необхо-

димо и наличие обучающихся способных к данному виду деятельности. По данным исследований, публикуемых в Интернет - источниках, только 16% населения способны к научной работе.

4. Сложность выбора темы исследования по математике снижает количество работ, выставляемых на различных конкурсах. Часто работы по математике, физике и информатике объединяют в одну секцию. В основном, представлены прикладные исследования, методические работы, создание интерактивного продукта.

Последние два года нами были проведены исследования по темам «Некоторые замечательные кривые и их применение для создания декоративных узоров» ученицей 8 класса, «Математические задачи с региональным и историческим содержанием района Коротчаева города Новый Уренгой» учеником 5 класса. В первой работе нашла подтверждение гипотеза о том, что изучение замечательных кривых и их свойств способствует не только познанию окружающего мира, но и созданию узоров, имеющих эстетическую ценность. Ученица для наглядного исполнения замечательных кривых создала узоры и изобразила их витражными красками на стекле.

Вторая работа представлена на IX окружном заочном соревновании юных исследователей «Шаг в будущее. Юниор». Для того чтобы составить задачи, была проведена кропотливая работа по изучению исторического материала в школьном музее, собирались интересные факты о поселке с помощью литературы и материалов Интернет. Каждая задачи имеет математическое содержание, определены зависимости между числами. Примеры задач и их решение на различные темы, связанные с событиями, происходящими в поселке, иллюстрируются фотографиями. Рассмотрим каким образом представлены задачи в исследовании.

Дается историческая справка: «Коротча́ево - бывший посёлок городского типа в Пуровском районе Ямало-Ненецкого автономного округа, ныне микрорайон города Новый Уренгой. Микрорайон расположен недалеко от левого берега реки Пур напротив впадения в него реки Большой Хадырьях и недалеко от впадения в него реки Ямсовей. Находится в пограничной зоне. 23 августа 1983 года передан в административное подчинение Новоуренгойскому горсовету. Посёлок назван в честь Дмитрия Ивановича Коротчаева, Героя Социалистического Труда»

Затем предлагаются фотографии (рис.1) и задача.

Рис. 1

Задача. В 1977 году на 576 км строящейся железной дороги Сургут-Новый Уренгой возник первый населенный пункт. Известно, что 20 декабря 1982 года он получил статус рабочего посёлка в составе Пуровского района. Сколько прошло лет со дня регистрации поселка?

Решение: 2016 – 1982 = 34

Ответ: в 2016 г. будет 34 года со дня регистрации поселка Коротчаево.

Оба юных исследователя стали победителями в городском конкурсе, в региональном туре учащиеся были награждены дипломами в номинации «Прикладная математика».

5. Требования к оформлению исследовательской работы сопоставимы с теми, которые характерны для дипломных работ студентов. Предлагаем критерии оценки исследовательских работ в Положение о XI городской научно-исследовательской конференции учащихся и студентов «Шаг в будущее».

1) Тема: соответствие темы исследуемой проблемы
2) Цель: соответствие цели исследования его теме
3) Объект: правильность описания объекта исследования
4) Актуальность: убедительность раскрытия значимости исследования на данную тему

5) Гипотеза: ее целесообразность – раскрытие характера предполагаемой связи между объектом и проблемой исследования

6) Задачи: соответствие поставленных задач цели исследования

7) Методы исследования: пригодность методов исследования для получения требуемых данных о свойстве объекта

8) Оборудование: соответствие оборудования и материалов методике проведения исследования

9) Полнота представления наглядности: наглядность представления результатов исследования

10) Выводы: соответствие выводов результатам и задачам исследования

Для того чтобы работа соответствовала всем критериям необходимо умение школьника владением навыками соответствующего описания своего исследования. Деятельность подобного рода требует от педагогов специальных дополнительных знаний и опыта в научной деятельности, поэтому многие сталкиваются с определенными трудностями.

Сегодня исследовательская работа стала неотъемлемой частью образовательного процесса, юные исследователи реализуют интеллектуальные способности, понимают ценность приобретаемого опыта в публичных выступлениях. Происходит формирование творческой личности, которая способна нести ответственность за полученные результаты.

Литература

1. Концепция развития российского математического образования.
2. Концепции математического образования в Ямало-Ненецком автономном округе.

УДК 372.851

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ РАБОТА НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ЕГЭ

Назипов Р.Г., учитель математики первой квалификационной категории,
МБОУ «Вечерняя (сменная) школа» Кукморского муниципального района
Республики Татарстан
nazipov.rifnur@mail.ru

Аннотация. В данной статье раскрыта роль и значение индивидуальной работы с обучающимися на уроках математики в вечерней школе при подготовке к ЕГЭ. Выделены узловые темы программы по математике. Рассмотрены преимущества такой работы. Приводятся примеры из опыта работы – использование карт индивидуального развития и самоконтроля, разработка плана индивидуальной работы с обучающимися.

Ключевые слова: индивидуальная работа, единый государственный экзамен, программа, карта индивидуального развития, карта самоконтроля, план индивидуальной работы, качество знаний.

INDIVIDUAL WORK IN MATHEMATICS LESSONS IN PREPARATION FOR THE UNIFIED STATE EXAM

R.G. Nazipov, mathematics teacher of the first qualifying category,
municipal budgetary general establishment «Evening (shift) school»
Kukmor municipal district of the Republic of Tatarstan
nazipov.rifnur@mail.ru

Abstract. This presentation deals with the role and importance of individual work with students on mathematics lessons at night school in preparation for the exam. It highlights the nodal themes of the program in mathematics. The advantages of such work. Examples from experience – use maps of individual development and self-control, development of a plan of individual work with students.

Keywords: individual work, the unified state exam, program, the map of individual development, map of self-control, the plan of individual work, the quality of knowledge.

В Кукморской вечерней (сменной) школе контингент обучающихся весьма разнообразный как по возрасту, социальному происхождению, так и по уровню педагогической запущенности. В связи с этим в обучении и воспитании таких подростков требуется особый, индивидуальный подход. Это касается и при подготовке выпускников к сдаче ЕГЭ.

В вечернюю (сменную) школу в основном поступают учащиеся, исключённые из других школ за слабую успеваемость, плохое поведение. У большинства из них низкий, даже очень слабый уровень основных математических знаний, не сформированы основные учебные умения и навыки. Поэтому при подготовке к ЕГЭ необходимо осуществлять индивидуальный подход к каждому обучающемуся, учитывать его индивидуальные способности и те базовые знания, которыми он владеет.

Подготовка к ЕГЭ начинается с 10 класса. В 10 и 11 классах 1 раз в четверть проводятся диагностические и тренировочные работы, промежуточная аттестация в форме ЕГЭ. Но здесь возникают определённые сложности, затруднения в связи с нестабильным контингентом обучающихся: в течение учебного года кто-то убывает из школы или поступают новые обучающиеся. Поэтому основной упор, большее внимание при подготовке к ЕГЭ уделяется в последний год обучения, в 12 классе.

Перед началом нового учебного года я выбираю из программы по математике наиболее важные, главные и узловые темы, и составляю программу для подготовки к ЕГЭ. Она включает следующие темы:

5 класс

1. Арифметические действия над натуральными числами.
2. Обыкновенная дробь. Основное свойство дроби.
3. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.
4. Нахождение части от целого и целого по его части.
5. Десятичная дробь. Сравнение десятичных дробей.
6. Арифметические действия с десятичными дробями.
7. Представление десятичной дроби в виде обыкновенной дроби и обыкновенной в виде десятичной.
8. Проценты. Нахождение процента от величины, величины по её проценту.

6 класс

1. Делимость натуральных чисел. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9 и 10.
2. Простые и составные числа. Разложение натурального числа на простые множители.
3. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.
4. Модуль (абсолютная величина) числа.
5. Сравнение рациональных чисел. Арифметические действия с рациональными числами.
6. Числовые выражения, порядок действий в них, использование скобок.
7. Законы арифметических действий: переместительный, сочетательный, распределительный.
8. Отношение, выражение отношения в процентах.
9. Пропорции. Пропорциональная и обратно пропорциональная зависимости.
10. Изображение чисел точками на числовой прямой.

7 класс

1. Формулы сокращённого умножения. Решение простейших линейных уравнений.
2. Линейная функция, её график, геометрический смысл коэффициентов.
3. Действия со степенями.
4. Угол. Прямой угол. Острые и тупые углы. Вертикальные и смежные углы.
5. Биссектриса угла и её свойства.
6. Равнобедренные и равносторонние треугольники, свойства и признаки равнобедренного треугольника. Признаки равенства треугольников.
7. Прямоугольный треугольник. Высота, медиана, биссектриса, средняя линия треугольника.
8. Сумма углов треугольника. Внешние углы треугольника.
9. Параллельные и пересекающиеся прямые. Перпендикулярность прямых. Теоремы о параллельности и перпендикулярности прямых.

8 класс

1. Алгебраическая дробь. Сокращение дробей. Действия с алгебраическими дробями.
2. Квадратный корень из числа. Свойства квадратных корней и их применение в вычислениях.
3. Свойства степеней с целым показателем.
4. Квадратное уравнение: формула корней квадратного уравнения.

5. Решение рациональных уравнений.
6. Линейные неравенства с одной переменной. Квадратные неравенства.
7. Функции, описывающие прямую и обратную пропорциональную зависимости, их графики. Гипербола.
8. Теорема Пифагора. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Решение прямоугольных треугольников.
9. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника и углов от 0° до 180°; приведение к острому углу.
10. Четырёхугольники и их свойства.
11. Сумма углов выпуклого многоугольника. Вписанные, описанные и правильные многоугольники.
12. Центральный, вписанный угол, величина вписанного угла.
13. Окружность, вписанная в треугольник и окружность, описанная около треугольника.
14. Касательная и секущая к окружности; равенство касательных, проведённых из одной точки.
15. Вписанные и описанные окружности правильного многоугольника.
16. Площади многоугольников, круга и сектора.

9 класс

1. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формулы общего члена и суммы первых нескольких членов арифметической и геометрической прогрессий.
2. Квадратичная функция, её график, парабола. Координаты вершины параболы.
3. Степенные функции с натуральным показателем, их графики.
4. Теоремы косинусов и синусов; примеры их применения для вычисления элементов треугольника. Длина окружности, число π; длина дуги.
5. Величина угла. Градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности.
6. Теорема Фалеса. Подобие треугольников, коэффициент подобия.
7. Признаки подобия треугольников.
8. Формулы, выражающие площадь треугольника: через 2 стороны и угол между ними, через периметр и радиус вписанной окружности. Формула Герона.
9. Площадь четырёхугольника. Связь между площадями подобных фигур.

10 класс

1. Основные тригонометрические формулы.
2. Тригонометрические функции, их свойства и графики; периодичность, основной период.
3. Преобразования простейших тригонометрических выражений.
4. Арксинус, арккосинус и арктангенс числа.
5. Простейшие тригонометрические уравнения.
6. Понятие о производной функции, её физический и геометрический смысл.
7. Теорема о трёх перпендикулярах.
8. Параллельность и перпендикулярность прямой и плоскости, 2-х плоскостей; признаки и свойства.
9. Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью.
10. Многогранники, их сечения. Правильные многогранники.
11. Двугранный угол, линейный угол двугранного угла.

11 класс

1. Корень n-й степени и его свойства.
2. Степень с рациональным и действительным показателями, их свойства.
3. Логарифм и его свойства. Логарифмическая и показательная функции, их свойства и графики.
4. Преобразования простейших выражений, включающих операцию возведения в степень и логарифмирования.
5. Решение простейших показательных и логарифмических уравнений и неравенств, иррациональных и рациональных уравнений.
6. Тела и поверхности вращения, их сечения.
7. Формулы объёмов многогранников, тел вращений и площадей их поверхностей.
8. Отношение объёмов подобных тел.
9. Решение простейших задач по теории вероятности.

В 12 классе для подготовки к ЕГЭ, кроме уроков, в расписании выделяется 1 урок в неделю для проведения консультаций, 1 урок – для проведения индивидуальных и групповых занятий. У большинства обучающихся очень слабый уровень знаний, 2 раза в неделю организую дополнительную, индивидуальную работу до уроков.

В сентябре для каждого обучающегося составляю карту индивидуального развития.

Карта индивидуального развития обучающихся								
№ п/п	Ф.И.О	Контрольная работа (по пятибалльной шкале)			Пробное ЕГЭ школьный уровень (по шкале базового ЕГЭ)			Пробное ЕГЭ муниципальный уровень (по шкале базового ЕГЭ)
		сентябрь	…. .	май	сентябрь		май	
.	Якупов И.Т.	3		33	10		110	10

Эта карта заполняется в течение учебного года по мере проведения контрольных работ и пробных ЕГЭ школьного и муниципального уровней.

В начале сентября провожу первую, входную диагностическую работу в форме ЕГЭ. По результатам этой работы для каждого обучающегося составляю план индивидуальной работы.

План индивидуальной работы с обучающимся 12 класса Якуповым И.Т.		
Западающие темы	Тематика занятий	
	Проценты. Решение задач на проценты.	
	Показательные и логарифмические уравнения и неравенства.	
	Задачи по теории вероятности	
	Задачи по стереометрии	
Индивидуальные дополнительные задания	Дидактический материал	
	Сборник задач по математике. А.Г. Мордкович	
	Открытый банк заданий ЕГЭ	
Дифференцированные задания на уроке	Карточки с разноуровневыми заданиями	
	Компьютерные тесты с заданиями ЕГЭ	
Дифференцированные домашние задания	Индивидуальные задания по карточкам	
	Варианты ЕГЭ, составленные учителем	
Проверочные самостоятельные работы	Темы	Сроки
	Действия с дробями и со степенями	октябрь
	Преобразования тригонометрических выражений	декабрь
	Решение задач на выбор оптимального варианта	февраль
	Решение задач по планиметрии	апрель
Контрольные работы	Темы	Сроки
	Действия с обыкновенными и десятичными дробями	сентябрь
	Многоугольники и их площади	ноябрь
	Уравнения и неравенства	январь
	Многогранники и тела вращения, их объёмы и площади поверхностей	март
Работа с тетрадью обучающихся	Проверка рабочих тетрадей и тетрадей для подготовки к ЕГЭ	

При подготовке к ЕГЭ использую карточки самоконтроля

Карточка самоконтроля обучающегося 12 класса Якупова И.Т.																					
Дата выполнения задания	Номер задания и баллы за выполнение																				Ввсего баллов
	11	22	33	44	55	66	77	78	89	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	220	
29.09.16	11	10	11	10	10	11	21	00	11	01	ё0	ё0	11	ё1	10	11	ё0	Ё1	00	00	110

В последнюю неделю каждого месяца провожу пробное ЕГЭ. После проверки, по известным результатам обучающиеся самостоятельно заполняют эти карточки и хранят эти карточки у себя. Таким образом, они могут проследить свою динамику продвижения или отставания, увидеть результаты своего труда. Такой мониторинг позволяет в течение учебного года прослеживать качество знаний и успеваемость обучающихся, уровень их подготовки к сдаче ЕГЭ и в конце учебного года выявить тех, кто не допускается к сдаче ЕГЭ. Обучающиеся, которые в течение учебного года пропускают занятия без уважительных причин и показывают плохие результаты на пробных ЕГЭ школьного и муниципального уровней, оставляются на повторный год обучения.

Индивидуальная работа с обучающимися при подготовке к ЕГЭ позволяет:

1. Ликвидировать пробелы в знаниях обучающихся;
2. Развивать их познавательную активность и прививать навыки самостоятельной работы;
3. Повысить мотивацию учебной деятельности;
4. Психологически подготовить обучающихся к сдаче ЕГЭ;
5. Работать в тесном контакте и во взаимном сотрудничестве с родителями.

Индивидуальную работу при подготовке к ЕГЭ особенно эффективна и полезна проводить в заочных классах, где обучающиеся посещают занятия 1 раз в неделю, получают теоретические знания, выполняют индивидуальные задания и получают индивидуальные консультации. Здесь же обучающиеся выполняют задания ЕГЭ, получают индивидуальные консультации по подготовке к ЕГЭ.

Использование индивидуальной формы работы при подготовке к ЕГЭ позволило улучшить результаты ЕГЭ по математике (базовый уровень) за последние три года

Учебный год	Качество знаний	успеваемость	Средний балл ЕГЭ
2014/15	30%	80%	3,2
2015/16	25%	100%	3,25
2016/17	60%	100%	3,6

Литература

1. Голубев А., Спасская Т. Пособие по математике для подготовки к ЕГЭ 2017: учебное пособие. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2017. – 124 с.
2. Кочагин В. ЕГЭ 2017. Математика. Тематические тренировочные задания / В.Кочагин, М. Кочагина. – М.:ЭКСМО, 2016. – 208 с.
3. Сиротюк А. Психофизиологические основы обучения школьников: учебное пособие. – М.: ТЦ Сфера, 2007. – 224 с.
4. Сиротюк А. Психофизиологические основы дифференцированного обучения школьников: учебное пособие / А. Сиротюк. – М.: Директ-Медиа, 2014. – 292 с.

УДК 511

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОБУЧЕНИЮ МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Ожегова А.В., кандидат физико-математических наук, доцент,
Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань
ozhegovaalla@gmail.com

Хайруллина Л.Э., кандидат физико-математических наук, доцент,
Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань
lxayrullina@yandex.ru

Аннотация. В работе излагается один из подходов к чтению дисциплины «Методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода» для студентов, обучающихся по направлениям «Математика» и «Математика и компьютерные науки». В основу данного специального курса положены результаты научных исследований Казанской школы математиков под руководством Габдулхаева Б.Г., в том числе и авторов.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение первого рода, корректность задачи, аппроксимативный метод.

ON ONE APPROACH TO TEACHING METHODS OF SOLVING SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND

A.V. Ozhegova, PhD, associate professor,
Kazan Federal University, Kazan
ozhegovaalla@gmail.com

L.E. Khairullina, PhD, associate professor,
Kazan Federal University, Kazan
lxayrullina@yandex.ru

Abstract. In this paper one of the approaches to reading the discipline "Methods for Solving Singular Integral Equations of the First Kind" is presented for students studying in the fields "Mathematics" and "Mathematics and Computer Science". This special course is based on the results of scientific research of the Kazan School of Mathematics headed by Gabdulkhayev B.G., including authors.

Keywords: singular integral equation of the first kind, correctness of the problem, approximate method.

Многочисленные задачи электродинамики, электростатики, теории упругости, аэрогидромеханики и других разделов физики, механики и математической физики приводят к различным классам сингулярных интегральных уравнений первого рода с интегралами, понимаемыми либо как несобственные, либо в смысле главного значения по Коши (см., напр., библ. в [1]). Точно они, как правило, решаются в редких случаях, поэтому их приходится решать приближенно.

В монографиях, посвященных методам решения некорректно поставленных задач (см., напр., [4]) одним из первых примеров таких задач рассматривается интегральное уравнение первого рода. Это связано с вполне непрерывностью интегрального оператора в известных функциональных пространствах, следовательно, неограниченностью обратного к нему, что ведет в свою очередь к нарушению устойчивости решения этого уравнения. В этом случае для решения указанных уравнений применяются методы решения некорректно поставленных задач, и чаще всего метод регуляризации.

Однако, когда ядра интегрального уравнения имеют слабую особенность или являются ядрами Коши или Гильберта, то, оказывается, удается отыскать корректную постановку задач решения таких уравнений путем специального выбора пространств искомых элементов и правых частей [1, 3, 5]. В этом случае к рассматриваемым уравнениям возможно применение аппроксимативных методов и последующее теоретическое обоснование с установлением эффективных оценок погрешностей. Именно на таком подходе к использованию аппроксимативных методов для решения слабосингулярных и сингулярных интегральных уравнений основан указанный выше спецкурс.

Сначала рассматриваются понятия несобственного интеграла и сингулярного интеграла, понимаемого в смысле главного значения по Коши и их свойства, а также свойства операторов, определяемых с их помощью в известных функциональных пространствах. На основании этих свойств показывается некорректность задачи решения уравнений вида

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right| x(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma = y(t), \qquad 1)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \ln\frac{1}{|t-\tau|}\frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} g(t,\tau)\frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau = f(t),\ \ |t| \le 1, \qquad 2)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} g(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t),\ \ |t| < 1, \qquad 3)$$

где $h(s,\sigma), y(t), g(t,\tau), f(t)$ – известные функции в своих областях определения, $x(\sigma), \varphi(\tau)$ – искомые функции.

Далее для каждого из уравнений (1) – (3) вводятся соответственно пары пространств искомых элементов X и правых частей Y, в которых устанавливается корректность задачи.

Например, для уравнения (1) в качестве таких пар предлагаются следующие: $(L_2, W_1^2), (V, V^1)$, где $L_2 = L_2[0,2\pi]$ – пространство квадратично суммируемых 2π –периодических функций, $W_2^1 = \{x(s) \in L_2 : \exists\ \varphi'(s) \in L_2\}$ с нормами соответственно

$$\|x\|_{L_2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(s)^2 ds\right)^{1/2},$$

$$\|x\|_{W_2^1} = \|x\|_{L_2} + \|x'\|_{L_2}.$$

Пространство $V = V[0,2\pi]$ – пространство непрерывных 2π –периодических функций, для которых сингулярный интеграл с ядром Гильберта

$$Jx \equiv J(x;s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma,$$

понимаемый в смысле главного значения по Коши, является непрерывной функцией. $V^1 = V^1[0,2\pi]$ – линейное пространство непрерывных 2π –периодических функций, имеющих первые производные из пространства $V[0,2\pi]$. Нормы в этих пространствах определяются следующим образом:

$$\|x\|_V = \|x\|_{\tilde{C}} + \|Jx\|_{\tilde{C}},$$

$$\|y\|_{V^1} = \|y\|_{\tilde{C}} + \|y'\|_V,$$

где $\tilde{C}$ – пространство непрерывных 2π –периодических функций с обычной нормой.

Далее, к интегральному уравнению с логарифмической особенностью (1) применяют известные численные методы: коллокации, Галеркина, метод механических квадратур, наименьших квадратов, строятся вычислительные схемы, проводится их теоретическое обоснование на основе общей теории приближенных методов [2] и студентам предлагаются модельные примеры для численной реализации.

По этому же алгоритму изучаются аппроксимативные методы решения и уравнений (2) – (3). В заключении перед студентами ставятся новые задачи в области численных методов для других классов сингулярных уравнений.

Литература

1. Габдулхаев Б.Г. Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений I рода. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1994. – 285 с.

2. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач / Б.Г. Габдулхаев. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.
3. Ожегова А.В. Равномерные приближения решений слабо сингулярных интегральных уравнений первого рода: дисс… канд. физ.-мат. наук. – Казань, 1996. – 96 с.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
5. Хайруллина Л.Э. Равномерная сходимость приближенных решений сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши: дисс… канд. физ.-мат.наук. – Казань, 2011 – 103 с.

УДК 372.851

МЕТАПРЕДМЕТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛЕ

Павлова П.А., аспирант,
Елабужский институт Казанского (Приволжского) федерального университета, Елабуга
polina8.82@mail.ru

Аннотация. В работе описываются некоторые методы и средства, направленные на формирование метапредметных результатов обучения математике.

Ключевые слова: обучение математике, метапредметные результаты обучения, метапредметные проблемные ситуации, метапредметная образовательная деятельность.

METASUBJECT RESULTS OF LEARNING MATHEMATICS IN SCHOOL

P.A. Pavlova, postgraduate,
Elabuga Institute of Kazan (Volga Region) Federal University, Elabuga
polina8.82@mail.ru

Abstract. This paper describes some of the methods and means aimed at the formation of metasubject results of training in mathematics.

Keywords: learning math, metasubject results of training, metasubject problematic situations, metasubject educational activities.

В 2011 году все российские школы перешли на новые образовательные стандарты второго поколения. Необходимость такого перехода связана с проблемными ситуациями, с которыми вчерашний школьник сталкивается в своей дальнейшей образовательной и профессиональной деятельности. В связи с этим, Федеральный государственный образовательный стандарт устанавливает новые требования к результатам освоения обучающимися основной образовательной программы. К ним относятся предметные, личностные, метапредметные результаты обучения [2-4].

Структура метапредметных результатов обучения, формируемых средствами математики, а также соответствующая методическая система ещё не разработана. Хотя научно-методические исследования по этой тематике проводятся [1, 5].

Метапредметные результаты – результаты, включающие освоенные обучающимися межпредметные понятия и универсальные учебные действия (регулятивные, познавательные, коммуникативные), способность их использования в учебной, познавательной и социальной практике, самостоятельность планирования и осуществления учебной деятельности и организации учебного сотрудничества с педагогами и сверстниками, построение индивидуальной образовательной траектории [3, С.5] Хотя метапредметные результаты обучения в виде универсальных учебных действий (УУД) выделены в стандарте, но их список носит слишком общий характер. Как список, так и состав УУД нуждаются в конкретизации и пополнении.

Установленные стандартом новые требования к результатам обучения вызывают необходимость в изменении содержания обучения на основе принципов метапредметности как условия достижения необходимого качества образования.

Использование метапредметной технологии в преподавании математики дает возможность развивать и менять структуру мышления у всех учеников. Суть такого подхода заключается в создании учителем особых условий, в которых дети могут самостоятельно, но под руководством учителя найти решение задачи, вести поиск выхода из учебных ситуаций. При этом педагог объясняет ребятам понимание сути задачи, построение эффективных моделей. Ученики могут выдвигать способы решения зачастую методом проб и ошибок. Это не усложнение, а увеличение эффективности работы учащихся, причем многократное. Метапредметные умения учащийся может применить к любой области знаний и в различных жизненных ситуациях. Это очень важно сегодня, когда от выпускника школы требуются мобильность, креативность, способность применять свои знания на практике, умение мыслить нестандартно. Поэтому учитель должен стать конструктором новых педагогических ситуаций, новых заданий, направленных на использование обобщенных способов деятельности и создание учащимися собственных продуктов в освоении знаний.

Рассмотрим пример метапредметной проблемной ситуации на уроке математике. Перед изучением темы «Сложение десятичных дробей» учащимся предлагается решить задачу такого типа:

«В швейной мастерской сшили костюм и плащ. На костюм израсходовали 2,67 м ткани, а на плащ 3,5м. Сколько ткани израсходовали на плащ и костюм?»

Ученики предлагают варианты ответа, учитель их записывает на доске (среди них есть как верный, так и неверные).

Далее состоится диалог с учащимися:

– Задание было одно? (Одно.)

– А какие получились результаты? (Разные.)

– Как вы думаете, почему? (Один из вариантов ответа: «Возможно, мы чего-то ещё не знаем».)

– Какова же цель нашей работы на уроке? (Узнать, как сложить десятичные дроби.)

– Для чего нам это необходимо? (Чтобы правильно считать, например, в магазине.)

В результате создания проблемной ситуации и ведения проблемного диалога, учащиеся сами сформулировали образовательную цель урока. Таким образом, учащиеся приобретают навыки целеполагания и планирования дальнейшей деятельности.

Примеры метапредметных проблемных ситуаций приведены в нижеследующей таблице.

№	Метапредметные проблемные ситуации в обучении математике:	Примеры
1	ситуации неопределенности	Задача: Привести примеры фигур, которые соответствуют данному определению: «Параллелограммом называется четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны». Ясно, что такой фигурой может быть трапеция, ясна и причина возможного несоответствия.
2	ситуации неожиданности	В качестве практического задания по теме «Окружность. Длина окружности» предлагается с помощью линейки и мерной ленты измерить длину окружности и диаметр некоторых тел с круглым сечением, и найти отношение длины окружности к ее диаметру. У детей эта ситуация вызывает удивление, т.к. отношение длины окружности к ее диаметру окажется примерно одно и то же.
3	ситуации конфликта	Задача: Один рубль не равен 100 копейкам. 1) 1 руб.=100 коп. – это верное утверждение. 2) 10 руб.=1000 коп. 3) Умножим обе части этих верных равенств, получим: 10р=100000 коп, откуда следует: 1р=10000 коп. Ответ: Здесь нарушены правила действий с именованными величинами. Применение этого софизма является также пропедевтикой использования именованных величин при решении физических задач.

4	ситуации опровержения	Пусть школьник написал или сказал: «Два уравнения называются равносильными, если корни одного являются корнями другого». Посмотрел в учебник, а там дополнительно еще два слова: «и обратно». Чтобы осмыслить значение этих слов, надо подобрать два уравнения так, чтобы корни одного были корнями второго, но корни второго не были бы корнями первого, т.е. чтобы не выполнялось второе требование. Например, $x-2=0$ (1) $x^2-4=0$. (2) Очевидно, что число 2 является корнем и первого, и второго уравнения, а – 2, являясь корнем второго уравнения, корнем первого не является. По «определению» школьника эти уравнения, тем не менее, равносильны, а на самом деле – нет.
5	ситуации предположения	Можно выдвинуть предположение о сумме внутренних углов треугольника. Уместным будет и провокационный вопрос: «В каком треугольнике сумма внутренних углов больше – в остроугольном или тупоугольном?», и проверить всё на практике.

Достижение метапредметных образовательных результатов предполагает, что у обучающихся будут развиты и использованы на практике умения и навыки в различных видах познавательной деятельности, применение основных методов познания для изучения различных сторон окружающий действительности; использование основных интеллектуальных операций: формирование гипотез, анализ и синтез, сравнение, обобщение, систематизация, выявление причинно-следственных связей, поиск аналогов; умение генерировать идеи и определять средства, необходимые для их реализации; умение определять цели и задачи деятельности, выбирать средства реализации цели и применять их на практике.

Итак, изучение математики в основной школе направлено на достижение следующих целей в метапредметном направлении:

• формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, о значимости математики в развитии цивилизации и современного общества;

• развитие представлений о математике как форме описания и методе познания действительности, создание условий для приобретения первоначального опыта математического моделирования;

• формирование общих способов интеллектуальной деятельности, характерных для математики и являющихся основой познавательной культуры, значимой для различных сфер человеческой деятельности.

Литература

1. Тестов В.А. О некоторых видах метапредметных результатов обучения математике // Образование и наука. – 2016. – №1(130). – С. 4-20.

2. Федеральный государственный образовательный стандарт начального общего образования. – М.: Просвещение, 2010. – 31 с.

3. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. – М.: Просвещение, 2011. – 48с.

4. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. – М.: Просвещение, 2013. – 63 с.

5. Хуторской А.В. Работа с метапредметным компонентом нового образовательного стандарта. Практический аспект // Народное образование. – 2013. – №4. – С. 157-164.

УДК 372.851

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НЕРАВЕНСТВ В РЕАЛИЗАЦИИ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ

Панкратова Л.В., кандидат педагогических наук,
Вятский государственный университет, г. Киров
pankratovalarisa19@rambler.ru

Аннотация. В работе представлены направления использования неравенств при обучении студентов ведению учебных и научных исследований.

Ключевые слова: исследовательская деятельность, неравенство.

REVISITING THE USE OF INEQUALITIES IN IMPLEMENTING RESEARCH TRAINING OF STUDENTS

L.V. Pankratova, candidate of pedagogic sciences,
Vyatka State University, Kirov
pankratovalarisa19@rambler.ru

Abstract. The paper outlines the uses of inequalities in teaching students academic and scientific forms of research.

Keywords: research work, inequality.

Увеличение внеаудиторной нагрузки в вузе согласно ФГОС ВПО необходимо влечет приобщение студентов к исследовательской деятельности и включает (см. [5, с. 36]):

– *методологическую подготовку*, вооружающую студентов методами и приемами познания;

– *специальную подготовку*, направленную на формирование знаний о методах и приемах исследовательской деятельности, об алгоритме исследовательского поиска;

– *самостоятельную исследовательскую практику*, реализующую как учебные исследования (написание рефератов, курсовых и выпускных квалификационных работ), так и систематическую научно-исследовательскую работу.

Имеются различные формы реализации обозначенных направлений деятельности, причем теория неравенств позволяет произвести содержательное наполнение многих из них.

Во-первых, к понятию неравенства так или иначе обращаются все разделы математики, в связи с чем актуально использование элементов теории неравенств на учебных занятиях. Приведем пример.

Ряд опытов привел к n различным значениям $x_1, x_2, ..., x_n$ *для исследуемой величины A. Часто принимают в качестве A такое x, что сумма квадратов отклонений его от* $x_1, x_2, ..., x_n$ *имеет наименьшее значение. Найти x, удовлетворяющее этому требованию* [1, с. 96, №1245].

Наряду с применением производной для отыскания наименьшего значения функции $F(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + ... + (x - x_n)^2$ в соответствующем промежутке можно воспользоваться неравенством между средним квадратичным и средним арифметическим и свойствами модуля:

$$\sqrt{\frac{(x-x_1)^2 + ... + (x-x_n)^2}{n}} \geq \frac{|x-x_1| + ... + |x-x_n|}{n} \geq \left| x - \frac{x_1 + ... + x_n}{n} \right|.$$

Данный способ решения указывает значение экстремума и сразу определяет его характер (минимум). Условия же задачи позволяют демонстрировать внутрипредметные связи математики, поскольку нацеливают на беседу о методе наименьших квадратов, применяемом в корреляционно-регрессионном анализе. Кроме того, подобный подход при проектировании занятий усиливает интерактивный компонент обучения.

Во-вторых, развитию умений исследовательской деятельности эффективно способствует систематическая работа студентов в рамках научного объединения, участники которого регулярно обмениваются информацией, приобретают опыт публичных выступлений, ведения дискуссий и самостоятельного оценивания полученных результатов. Ведение исследований в рамках теории неравенств является продуктивным направлением работы студенческого научного семинара. Подобный опыт описан, к примеру, в [3, с. 316–326].

Теория неравенств обнаруживает множество перспектив при написании студентами научных рефератов, которые могут быть посвящены анализу и систематизации подходов к доказательству классических соотношений, открытию новых неравенств или установлению авторства ранее известных, изучению точности оценки и степени применимости неравенства. Подобная деятельность влечет обращение к различным источникам информации, может потребовать архивных изысканий, применения средств ИКТ, перевода иностранных текстов, а представленная работа вполне может быть признана научной.

В-третьих, глубоко раскрыть аспекты теории неравенств можно на спецкурсах для студентов. Такие спецкурсы О. А. Иванов, к примеру, называет *интегративными*, поскольку изложение материала в них «группируется вокруг определенных понятий, математических идей и утверждений» [2, с. 50–51].

Одно из упражнений, сформулированных в [2, с. 61–62], заключается в доказательстве существования и вычислении предела последовательности с общим членом $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$, $x_1 = 2$. Решение данной задачи опирается на теорему о пределе монотонной ограниченной последовательности. При доказательстве ограниченности последовательности «хорошо работает» неравенство Коши: $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{2}{x_n}} = \sqrt{2}$. Монотонное убывание последовательности определяет соотношение $x_{n+1} \leq x_n$, вытекающее из полученной ранее оценки $x_n \geq \sqrt{2}$. Вычисление значения предела $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}\right)$ также не составляет труда.

При этом задача допускает несколько сценариев дальнейшей работы:

– можно ли изменить заданное значение первого члена последовательности? Можно ли сделать его произвольным? *(Вообще говоря, первый член последовательности должен принимать положительное значение).*

– Измените рекуррентную формулу общего члена последовательности так, чтобы для решения задачи можно было применить неравенство Коши *(например,* $x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{M}{x_n^2}\right), x_1 = M\ , M > 0$*).*

– Предложите различные способы решения задачи и сравните их.

– Составьте аналогичную задачу, ориентированную на применение другого неравенства в ее решении *(например, исследование последовательности* $x_{n+1} = \left(\frac{2x_n + \frac{M}{x_n^2}}{3}\right)^2 \cdot \frac{3}{\frac{2}{x_n} + \frac{x_n^2}{M}}$, $x_1 = M\ , M > 0$ *влечет использование неравенства Серпинского, см.* [4]*).*

О.А. Иванов [2, с. 62] связывает исходную задачу с рациональными приближениями иррациональных чисел, методом касательных Ньютона приближенного вычисления корней уравнений, теоремой Банаха о неподвижной точке сжимающего отображения полного метрического пространства. Это позволяет демонстрировать ее новые интерпретации и формулировать вопросы и задания для студентов:

– убедитесь, что члены последовательности $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$, $x_1 = 2$ есть рациональные приближения числа $\sqrt{2}$;

– проверьте, что при решении уравнения $x - \frac{2}{x} = 0$ на промежутке (0; 2] методом касательных Ньютона получается та же последовательность приближений;

– используя соответствующую метрику пространства **R**, покажите, что отображение $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ при $x > 0$ является сжимающим.

Таким образом, интегративные спецкурсы, восходящие к изучению неравенств, нацеливают студентов на понимание фундаментальности понятия неравенства. Проектирование подобных спецкурсов способствует реализации концепции фундаментального образования в области элементарной математики.

Литература

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – СПб., «Профессия», 2001. – 432 с.
2. Иванов О.А. Теоретические основы построения системы математической и методической подготовки преподавателей профильных школ / О. А. Иванов. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1997. – 76 с.
3. Калинин С.И. Обучение студентов математическому анализу в условиях фундаментализации высшего педагогического образования / С. И. Калинин. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2008. – 353 с.
4. Панкратова Л.В. Уточнения оценок для среднего геометрического и их применения / Л. В. Панкратова // В мире научных открытий. Проблемы науки и образования. – Красноярск: НИЦ – 2011. –№ 5.1. – С. 469–483.
5. Середенко П.В. Пути и формы подготовки будущих педагогов к осуществлению исследовательского подхода к обучению / П. В. Середенко. – Южно-Сахалинск: СахГУ, 2010. – 140 с.

УДК 372.851

УЧЕБНИКИ ПРОШЛЫХ ЛЕТ КАК ОСНОВА ОРГАНИЗАЦИИ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЫ УЧАЩИХСЯ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

Потеха В.В., магистрант,
Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского, г. Брянск
grishenkova.viktoria@yandex.ru

Аннотация. В статье раскрывается потенциал учебников прошлых лет, способствующий организации исследовательской деятельности учащихся по тригонометрии.

Ключевые слова: учебники прошлых лет, организация исследовательской деятельности учащихся, тригонометрия.

THE TEXTBOOKS OF PREVIOUS YEARS AS THE BASIS ORGANIZATION OF RESEARCH WORK OF STUDENTS IN TRIGONOMETRY

V.V. Potekha, undergraduate,
Bryansk State Academician I.G. Petrovski University, Bryansk
grishenkova.viktoria@yandex.ru

Abstract. The article reveals the potential of textbooks of previous years that contributes to the organization of research activity of students in trigonometry.

Keywords: textbooks of previous years, the organization research activity of students, trigonometry.

Учение о тригонометрии как отдельной дисциплине имеет длительную историю. Хотя название науки возникло сравнительно недавно, многие относимые сейчас к тригонометрии понятия и факты были известны ещё две тысячи лет назад.

Существуют различные подходы к изучению данной темы. Рассмотрим какое значение предавалось изучению тригонометрии и попытаемся доказать, что старые учебники обладают важным потенциалом, способствующим организации исследовательской работы учащихся.

Для углубленного изучения рассматриваемой темы проведён ретроспективный анализ учебной литературы по проблеме изучения тригонометрии следующих авторов: В.А. Крогиус [1], Н.А. Рыбкин [3].

Проведённый анализ учебников прошлых лет позволил сделать следующие выводы.

1. Математика, представленная в старых учебниках, непосредственно связана с жизнью.

Так, в учебном пособии [1] В.А. Крогиус при изучении темы «Основные соотношения между функциями острого угла» рассматривает использование тригонометрии в строительстве, при измерении расстояния между точками на местности, при определении ширины реки. В параграфе «О проекциях на плоскости» использование тригонометрического материала рассматривается на примерах нахождения высоты предмета, вычисления наступления затмений и др.

В учебном пособии [3] Н.А. Рыбкин при изучении темы «Тригонометрические функции углов» рассматривает использование левой руки для запоминания значений углов. В теме «О решении треугольников» автор предлагает на рассмотрение ряд примеров: нахождение площадей; измерение высоты предмета и др.

2. Учебники прошлых лет имеют ориентирующие учащихся образы.

Помимо жизненного опыта, который перенесён из теории, представленной в учебниках, на практику, книги старых лет обладают запасом ориентировочных основ действия.

Так, в учебном пособии [1] В.А. Крогиус показывает изображение значений тригонометрических функций некоторого угла, используя построения на числовой окружности. В параграфе «Графики тригонометрических функций» автор демонстрирует чтение «имён» графиков синуса и косинуса через начало отсчёта, выделяя жирным цветом некоторый промежуток графика, изображённый на координатной плоскости, и, подписывая необходимую символику.

В учебном пособии [3] Н.А. Рыбкин при изучении темы «Тригонометрические функции углов» представляет удобный и практичный способ запоминания значений «хороших» углов: используется левая рука, каждому пальцу именуется так называемый «хороший» угол (мизинец – 0°, безымянный – 30°, средний – 45°, указательный – 60°, большой – 90°). Учащимся необходимо помнить только то, что любая функция – это отношение. Поэтому для вычисления углов тригонометрических функции автор использует формулы: синус некоторого угла есть отношение корня квадратного «до» к двум; косинус некоторого угла есть отношение корня квадратного «после» к двум и т.д., где «до» – количество пальцев, находящееся ниже выбранного угла, «после» – количество пальцев, находящееся выше выбранного угла.

Также в старых учебниках теоретический материал представлен с использованием методических особенностей изложения тригонометрического материала.

В учебном пособии [1] В.А. Крогиус при изучении темы «О синусе острого угла» рассматривает приближённые численные значения синусов острых углов с помощью построения на миллиметровой бумаге прямоугольных треугольников. Для решения прямоугольных треугольников в параграфе «Решение прямоугольных и равнобедренных треугольников и правильных многоугольников» автор демонстрирует использование логарифмических таблиц тригонометрических функций.

В учебном пособии [3] Н.А. Рыбкин в теме «Тригонометрические таблицы» демонстрирует нахождение приближённых значений тригонометрических функций, используя таблицы В. Брадиса «Четырёхзначные математические таблицы» и устройство таблиц Пржевальского.

Представленные материалы являются методическими рекомендациями, направленными на:

1) развитие познавательных процессов учащихся;
2) создание образов для изучаемых понятий, формул, теорем и т. д.;
3) развитие умения обобщать и структурировать материал.

3. Учебники прошлых лет являются основой организации исследовательской работы учащихся по тригонометрии.

На сегодняшний день организации исследовательской работе учащихся уделяется внимание как в педагогической науке, так и на практике. В настоящее время обучению как естественным, так и гуманитарным наукам широко применяется обучение, основанное на исследовании.

В статье О.В. Лебедевой [2] обращается внимание, что большая значимость в формировании универсальных учебных действий (УУД) ФГОС отводится организации исследовательской деятельности учащихся. Автор статьи [2] отмечает, что «на ступени основного общего образования программа развития УУД должна быть направлена на формирование у обучающихся основ культуры исследовательской деятельности, а в старшей школе результатом учебного процесса должно стать формирование у обучающихся системных представлений и опыта применения методов, технологий и форм организации исследовательской деятельности».

Возникает вопрос: как можно организовать исследовательскую работу учащихся по тригонометрии с использованием учебников прошлых лет, чтобы она была успешной и соответствовала требованиям ФГОС?

Попытаемся ответить на поставленный вопрос, рассмотрев ряд исследовательских работ, связанных с тригонометрическим материалом.

Как было сказано выше, в учебных пособиях [1] В.А. Крогиуса и [3] Н.А. Рыбкина рассматривается использование тригонометрии, непосредственно связанной с жизнью.

Для проведения исследовательской работы группе учащихся была предложена тема «Тригонометрия вокруг нас». Задание для выполнения работы звучало следующим образом: выяснить, почему знания тригонометрии так важны для современного человека. Было рекомендовано использовать учебные пособия [1] и [3].

Учащимися были продемонстрированы примеры использования тригонометрического материала практически во всех сферах жизни: в астрономии – вычисление наступления затмения, на местности – измерение расстояния между точками на местности, нахождение высоты фундамента дома, нахождение ширины реки, в природе – почему лето теплее, чем зимой и т.д.

Интересна исследовательская работа учащихся по теме «Численные значения тригонометрических функций». Учащимся было предложено задание: найти численные значения основных тригонометрических функций.

В результате исследовательской работы с пособием [1] учащимися обнаружен материал нахождения приближенных численных значений синусов острых углов, используя построения на миллиметровой бумаге прямоугольных треугольников.

Таким образом, можно сделать вывод, что учебники прошлых лет обладают широким спектром неизведанного материала, который может быть использован учащимися в качестве основы их организации исследовательской работы по тригонометрии.

Литература

1. Крогиус В.А. Прямолинейная тригонометрия / В.А. Крогиус. – М.: Москва, 1928 – 124 с.

2. Лебедева О.В. ФГОС школьного образования: проектирование и организация исследовательской деятельности в учебном процессе / О.В. Лебедева // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2013. – № 5 (2). – С. 106-112.

3. Рыбкин Н. А. Прямолинейная тригонометрия. Учеб. для сред. школы / Н. А. Рыбкин – Изд.: Москва, 1933. – 99 с.

УДК 372.8

РАЗВИТИЕ ИНТЕРЕСА УЧАЩИХСЯ К ГЕОМЕТРИИ ПОСРЕДСТВОМ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ИСТОРИИ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

Ризванов З.З., студент 2 курса магистратуры,
Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань
rizvanov.zemfir@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается вопрос о формировании интереса учащихся к процессу обучения геометрии с использованием элементов истории геометрии.

Ключевые слова: геометрия, история, обучение, исторические сведения.

THE DEVELOPMENT OF INTEREST OF PUPILS TO GEOMETRY THROUGH THE USE OF HISTORY ELEMENTS IN THE LEARNING PROCESS

Z.Z. Rizvanov, second-year graduate student,
Kazan Federal University, Kazan
rizvanov.zemfir@mail.ru

Abstract. The article discusses the formation of students ' interest in learning geometry using the elements history of geometry.

Keywords: geometry, history, learning, historical information.

Знаменитый французский математик Жюль Анри Пуанкаре отмечал, что при выборе методов преподавания, история науки должна быть главным проводником, и любое обучение станет для всех ярче и богаче от каждого соприкосновения с историей предмета.

Желание учиться и интерес к новым знаниям естественная черта для любого человека. Как только изучение нового материала вызовет заинтересованность учеников, так обучение станет интересным и привлекательным. Для формирования интереса учащихся к изучению геометрии способствует использование элементов истории геометрии

Знакомство учеников с происхождением геометрии; с подъемом научных школ и яркими биографиями создателей математики; с именами ученых, которые сформулировали и решили великие геометрические задачи – способствует интеллектуальному воспитанию учеников в изучении геометрии; общей культуры; позволяет лучше понять роль математики в современном обществе.

Уроки с историческими повествованиями вызывают интерес, придавая учащимся яркое и устойчивое эмоциональное отношение к предмету, и, как известно из психологии, связь эмоциональной сферы в процессе обучения способствует более глубокому и прочному овладению изучаемым предметом.

Анализируя учебно-методические литературу, мы видим, что многие авторы заинтересованы в проблеме внедрения исторических экскурсов в учебный процесс. Вопрос о значении использования элементов истории математики в процессе обучения рассматривали В. Д. Чистяков, К. А. Рыбников, М. В. Остроградский, Г. И. Глейзер и др.

С недавних пор исторические экскурсы на уроках геометрии стали актуальными для современной школы. Но почему многие учебные заведения не уделяют достаточного внимания использованию на уроках геометрии исторических повествований, с помощью которых можно комплексно развить учащихся? Если школа и представляет эту форму работы, то она не обновляет ее содержание. Из года в год учителя практикуют то же самое, что написано в учебниках, и часто исторические повествования уходят для домашнего чтения. Причиной тому также является отсутствие литературы по данной теме, и многие учителя не желают тратить время на занятиях на "ненужную информацию". Несмотря на все трудности, учитель чувствует, что использование элементов истории расширяет кругозор и интерес учащихся к предмету.

Проблема формирования познавательного интереса имеет большое значение для учебного процесса, так как школе необходимо привить ученику стремление к постоянному пополнению своих знаний с помощью самообразования, содействовать вере, расширять свой общий кругозор.

Поэтому на уроках геометрии нужно вводить исторические сведения, и они должны предъявляться в занимательной форме, в виде органически связанных с программным материалом:

- **кратких бесед:**

Н.И. Лобачевский. Вся творческая жизнь выдающегося соотечественника была связана с Казанским университетом, где он учился, а позже был профессором, а с 1828 года – ректором университета. Он очень рано начал увлекаться геометрией, и как и многие его предшественники, пытался доказать пятый постулат Евклида. В результате исследований он сделал замечательный вывод: можно построить другую геометрию, отличную от геометрии Евклида. И такую геометрию он построил, которую называлась геометрией Лобачевского. Сообщение об открытии новой геометрии было сделано Лобачевским в 1826 году.

- **лаконичных справок:**

Евклид (365-300 г. до н.э.) – древнегреческий ученый, автор сочинения "Начала". Некоторые аксиомы Евклида (некоторые из них он назвал постулатами) и теперь используются в курсах геометрии, а геометрия, описанная в "Началах", называется "***евклидовой геометрией***".

- **геометрических софизмов:**

Геометрические софизмы основаны на ошибках связанных с геометрическими фигурами и действиями над ними.

Спичка вдвое длиннее телеграфного столба.

Доказательство:

Пусть a длина спички и b дм – длина столба. Разность между b и a обозначим через c.

Имеем $b-a=c$, $b=a+c$. Перемножаем два эти равенства по частям, находим: $b^2-ab=ca+c^2$. Вычтем из обеих частей bc. Получим $b^2-ab-bc=ca+c^2-bc$, или $b(b-a-c)=-c(b-a-c)$, откуда $b=-c$, но $c=b-a$, поэтому $b=a-b$, или $a=2b$.

Ошибка: ошибка заключается в том, что в выражении

$b(b-a-c)=-c(b-a-c)$

производится деление на 0.

- **старинных математических игр**:

С помощью игры "***Математический архив***" ученики узнают о великих математиках. Каждому ученику дается лист с портретами великих математиков. При знакомстве с ученым вырезает его портрет, наклеивает в тетрадь, пишет его высказывания. И хотя полностью не в состоянии понять их смысл (нужно объяснить каждое выражение, доступное ученику до этого момента, математическим языком), он запоминает эти мысли. Если он увидел портрет математика не "бежит" по нему небрежными глазами, а останавливает ум, заинтересованно смотрит и говорит, к чему он причастен, и это вызывает интерес, любопытство. Для того чтобы познакомиться с великими математиками, ученик получает доступ к книгам. Эту игру можно проводить как в средних классах, так и в старших.

Имена великих математиков

1. Нильс Абель. 2. Мухаммед Бен Муса Аль-Хорезми. 3. Архимед. 4. Бернард Больцано. 5. Карл Вейерштрасс. 6. Франсуа Виет. 7. Эварист Галуа. 8. Карл Гаусс. 9. Рене Декарт. 10. Петр Дирихле. 11. Евклид. 12. Алексей Николаевич Крылов. 13. Сергей Алексеевич Лебедев. 14. Готфрид Вильгельм Лейбниц. 15. Николай Иванович Лобачевский.16. Исаак Ньютон. 17. Пифагор. 18. Клавдий Птолемей. 19. Пьер Ферма. 20. Леонард Эйлер.

- **решений старинных математических задач:**

Эффективным средством развития интереса учащихся к предмету математики, которая имеет познавательное и воспитательное значение, является решение старинных задач на уроках и во внеурочной деятельности. Их решение требует не только математических знаний, но и интеллекта, креативности, способности мыслить логически, желания находить нестандартные решения.

1. За длину окружности вавилоняне принимали периметр вписанного в эту окружность правильного шестиугольника. Найти приближения для π, которым пользовались вавилоняне.

Решение: Сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равняется радиусу, следовательно,

$2\pi R=6R$

откуда

$$\pi=\frac{6R}{2R}=3.$$

2. Для определения площади четырехугольника вавилоняне брали произведение полусумм противоположных сторон. Выяснить, для каких четырехугольников эта формула точно определяет площадь.

Решение: Согласно условиям задачи площадь четырехугольника

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2},$$

где a, b, c, d – две пары противоположных сторон. Положим, $a=b$ и $c=d$, тогда четырехугольник превращается в прямоугольник и площадь его $S=ac$.

3. *Задача Архимеда (из трактата «Леммы»).* Если круг описан около квадрата, а другой в него вписан, то описанный круг вдвое больше вписанного.

Решение: $S_{\text{опис}}=\pi R^2$; $S_{\text{впис}}=\pi r^2$; $r=\frac{a}{2}$; $R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, где a – сторона квадрата.

$$S_{\text{опис}}=\frac{\pi a^2}{2};\ S_{\text{впис}}=\frac{\pi a^2}{4}$$

Следовательно, $S_{\text{опис}}=2S_{\text{впис}}$, что и требовалось доказать.

- **познавательных заданий исторического характера:**

Их использование приводит к положительным результатам при систематической формулировке задач; постепенной и последовательной их экспозиции; осознании учащимися роли и значимости задач для развития их познавательного интереса; максимальное приближение задач к потребностям и основным тенденциям интеллектуального развития учащихся.

Возьмем русские пословицы и поговорки, связанные с различными русскими мерами и объясним их смысл.

• *На три аршина в землю видит – о внимательном, прозорливом человеке, от которого ничего невозможно утаить.*

• *Полено к полену – сажень – о накоплении запасов, богатства путём экономии.*

Выполни действия так, как бы это сделали древние египтяне (способом удвоения). Проверь себя традиционным способом: 34*5, 15*16, 170:34, 240:16.

- **использования небольших исторических экскурсов в старые учебники математики:**

Предоставляет возможность оценить современные учебники математики, учитывая классику педагогики начального образования, наследие выдающихся российских педагогов.

- **знакомств с историями измерительных инструментов и геометрических фигур:**

История линейки. В 2014 году линейке исполнилось 225 лет. Однако линейка использовалась и в средневековые времена. В средневековье, например, немецкие монахи для разметки линий на листках пергамента использовали тонкие свинцовые пластины. И в некоторых странах Европы, в том числе и в Древней Руси для этих целей использовали железные прутья. Они назывались "шильцами". В разных странах одно и то же расстояние измеряли по-разному. Это было очень неудобно. Наконец, во Франции в 1789 году, было принято решение ввести единую систему мер. В Париже производились платиновые линейки с делениями, которые стали образцами мерок для всего мира. По их образцу изготовили деревянные линейки для остальных. В России линейка появилась после войны 1812 года в качестве военного трофея. С линейкой мы пользуемся до сих пор.

- **коротких сообщений учеников на заданную тему:**

Очень важно, чтобы дети активно участвовали в подготовке уроков математики и готовили краткие сообщения и доклады, знакомились с историческими материалами в справочниках и энциклопедиях и делились им со своими друзьями и одноклассниками, потому что познавательный интерес, как и всякая черта личности школьника, развивается и формируется в деятельности.

Развитие интереса учащихся к геометрии способствует развитию потребности учащихся в знаниях, желание учиться, стремление к знаниям, получение удовлетворения от преодоления трудностей. Получение знаний для учащихся имеет большое значение.

Литература

1. Глейзер Г.И. История математики в школе. IX-X кл. Пос. для учителей. – 1983. – 351с.
2. Рыбников К.А. Возникновение и развитие математической науки. Книга для учителя. –Москва: Издательство «Просвещение», 1987. – 342с.
3. Чистяков В.Д. Сборник старинных задач по элементарной математике с историческими экскурсами и подробными решениями. – Минск, 1962.
4. Шакирова Л.Р. Историзация математического образования в школе и вузе / Шакирова Л.Р. // Математическое образование в школе и вузе: теория и практика (MATHEDU - 2016): материалы VI Международной научно-практической конференции (Казань, 25-26 ноября 2016 г.). – С. 297-307.

УДК 372.851

К ВОПРОСУ О ФОРМИРОВАНИИ ЛОГИЧЕСКИХ УМЕНИЙ ШКОЛЬНИКОВ

Сергеева И.Е., кандидат педагогических наук,
Московский педагогический государственный университет, г. Москва
ie.sergeeva@mpgu.edu

Аннотация. В данной статье рассмотрен один из способов формирования логических умений у учащихся при обучении школьному курсу математики. Указано, какие логико-языковые умения необходимо формировать у школьников. Рассмотрены примеры логико-языковых ошибок.

Ключевые слова. Логико-языковые умения, логико-ориентированные задачи, школьный курс математики, Вводный курс математики в педвузе.

ON THE QUESTION OF FORMING THE LOGICAL SKILLS OF SCHOOLBOYS

I.E. Sergeeva, candidate of pedagogical sciences,
Moscow state pedagogical university, Moscow
ie.sergeeva@mpgu.edu

Abstract. In this article is considered one of method of forming logical skills in studying the school course of mathematics. It is indicated, what logical-language skills must be formed for schoolchildren. The examples of logical-language errors are considered.

Keywords: logical-language skills, logical-oriented tasks, school course of mathematics, Introductory course of mathematics at pedagogical university.

Изучение школьного курса математики для многих современных школьников представляет собой трудное, а иногда просто непосильное занятие (независимо от ступени обучения). На этом пути школьники допускают значительное количество ошибок, многие из которых вызваны непониманием, а нередко, просто незнанием материала логического характера, отсутствием опыта логико-ориентированной деятельности с математическим материалом. Приведем примеры таких логико-языковых ошибок.

1. Считают верным предложение «Если функция не является возрастающей, то она является убывающей» (неверно преобразовано отрицание определяющего условия определения).

2. Обратным к предложению «В равнобедренном треугольнике углы при основании равны» считают предложение «Углы при основании треугольника равны, если этот треугольник равнобедренный» (неверно построено обратное предложение).

3. Считают формулировкой определения четного числа следующее: «Целое число n называется четным, если $n = 2k$, где $k \in \mathbf{Z}$» (неверная формулировка определения).

Как и чем помочь школьникам в преодолении таких ошибок? К сожалению, курса, при изучении которого целенаправленно формировались бы логические умения, в школе в настоящее время нет, а ведь его изучение могло бы не только облегчить учащимся изучение самой математики, но и помочь учащимся осознать, как они рассуждают, помочь научиться рассуждать правильно, не делать логических ошибок. Согласно ФГОС ООО, в курс математики введен раздел «Логика», который не предполагает дополнительных часов на изучение и материал которого встраивается в различные темы курсов математики и информатики и предваряется ознакомлением с элементами теории множеств [5, с. 343]. Приведем содержание этого раздела [там же].

Множества и отношения между ними. Множество, *характеристическое свойство множества,* элемент множества, *пустое, конечное, бесконечное множество*. Подмножество. Отношение принадлежности, включения, равенства. Элементы множества, способы задания множеств, *распознавание подмножеств и элементов подмножеств с использованием кругов Эйлера*.

Операции над множествами. Пересечение и объединение множеств. *Разность множеств, дополнение множества. Интерпретация операций над множествами с помощью кругов Эйлера*.

Элементы логики. Определение. Утверждения. Аксиомы и теоремы. Доказательство. Доказательство от противного. Теорема, обратная данной. Пример и контрпример.

Высказывания. Истинность и ложность высказывания. *Сложные и простые высказывания. Операции над высказываниями с использованием логических связок: и, или, не. Условные высказывания (импликации)*.

Раздел «Логика», как отмечено выше, не предполагает дополнительных часов на его изучение. Значит, надо по мере необходимости и при любом удобном случае встраивать элементы его содержания в содержание школьного курса математики. Однако остается не вполне ясным, как именно встраивать элементы логики в школьный курс математики и когда это делать. В данной статье попытаемся дать ответ на этот вопрос.

Отметим, что в некоторых школьных учебниках по математике (например, [1], [2], [3]) материал логического характера присутствует явно. В основном рассматриваются следующие вопросы: высказывания и высказывательные формы (предложения с переменными), следование и равносильность, употребление логических связок. Однако такие вопросы, как кванторные слова, отрицание предложений (особенно с кванторными словами), обратное предложение, необходимое условие, достаточное условие и некоторые другие вопросы логического характера остаются или для дополнительного изучения, или вообще не рассматриваются авторами учебников. Считаем, что рассмотрению этих вопросов должно быть уделено значительное внимание при обучении математике в школе.

Принято считать, что необходимые логические знания и умения формируются у учащихся по ходу изучения математики, однако это далеко не так. Даже студенты первого курса математического факультета МПГУ демонстрируют незнание и непонимание материала логического характера, что значительно затрудняет нормальное изучение высшей математики.

Приведем примеры задач из стартовой диагностической работы (которую мы предлагаем студентам в рамках Вводного курса математики или в рамках адаптационного модуля) и процент студентов, справившихся с каждой из задач.

1. (25%) Известно: неверно, что некоторые студенты данной группы решили все задачи. Выберите предложение, которое равносильно данному предложению:

○Некоторые студенты данной группы не решили ни одной задачи.

○Некоторые студенты данной группы не решили хотя бы одну задачу.

○Каждый студент данной группы не решил ни одной задачи.

○Каждый студент данной группы не решил хотя бы одну задачу.

2. (29%) Из следующих вариантов выберите тот, который является определением *скрещивающихся прямых*:

○Две прямые в пространстве являются скрещивающимися, если они лежат в разных плоскостях.

○Две прямые в пространстве называются скрещивающимися, если они лежат в разных плоскостях.

○Две прямые в пространстве являются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

○Две прямые в пространстве называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

3. (17%) Запишите предложение, обратное теореме «Диагонали *любого* ромба взаимно перпендикулярны», не опуская слово «любой».

В МПГУ на математическом факультете на первом курсе изучается Вводный курс математики [6], в рамках которого происходит целенаправленная логическая адаптация студентов к изучению высшей математики, язык которой отличается от языка школьной математики богатством (но и сложностью) логических конструкций. Однако не во всех учебных планах этот курс присутствует явно, в некоторых потоках логическое введение в математику изучается в рамках адаптационного модуля по математике. Это обучение осуществляется преподавателями кафедры математического анализа, являющимися авторами логико-ориентированного Вводного курса математики [6].

В данной статье остановимся на том, какие именно логико-языковые умения нужно формировать у школьников при обучении математике и как это можно сделать. Считаем, что у школьников к концу обучения в средней общеобразовательной школе должны быть сформированы следующие универсальные логико-языковые умения, необходимые им для успешного изучения как школьной, так и высшей математики [7]:

1) умение логически грамотно конструировать математические выражения и предложения;

2) умение строить предложение, равносильное данному (в том числе, преобразовывать отрицание предложения);

3) умение строить для данного предложения обратное, противоположное, контрапозитивное ему предложения;

4) умение перейти от одной формы теоремы к другой;

5) умение логически грамотно формулировать определения знакомых математических понятий.

Полагаем, что на базовом уровне эти умения можно сформировать у школьников при обучении математике, соблюдая следующие *рекомендации*:

- встраивать материал логического характера в изучаемый математический материал;
- не пропускать у учащихся ошибки логического характера, акцентировать на них внимание и исправлять их;
- задавать учащимся вопросы, ответы на которые требуют осознанного владения материалом логического характера;
- при каждом возможном случае просить учащихся аргументировать свой ответ.

Раскроем, к примеру, первую рекомендацию. Встраивание материала логического характера в изучаемый математический материал предполагает:

- устраивать логические минутки, посвященные материалу логического характера;
- материал логического характера вводить там, где это уместно и целесообразно;
- «посмотреть» на математический материал с логической стороны;
- материал логического характера вводить на примерах, кратко приводя теоретический материал;
- формировать логические умения поэтапно.

Как можно реализовать эти рекомендации?

Прежде всего, следует не упускать удобные моменты для разговора о логическом материале.

1. Так, при изучении теорем (для лучшего понимания их формулировок) рекомендуется вместе с учащимися переходить от безусловной формы теоремы (если она дана в такой форме) к условной, явно выделяя посылку и заключение теоремы. Кроме того, при изучении теорем предлагать учащимся формулировать обратное предложение. Именно здесь и удобно поговорить с учащимися о том, что такое обратное предложение, как его построить (хотя бы в простейших случаях). Ведь затруднения учащихся при работе с обратными предложениями вызваны, прежде всего, тем, что они просто не знают, что такое обратное предложение, как его построить. После того, как построено обратное предложение, естественно задать вопрос, а верно ли оно? Для обоснования отрицательного ответа необходимо привести контрпример. А здесь уместно рассказать учащимся об отрицании предложений, о том, как преобразовать отрицание предложений в условной форме (особенно, с кванторными словами). Также при изучении теорем и обратных предложений целесообразно, на наш взгляд, провести важный разговор о необходимых и достаточных условиях.

2. При изучении математических определений, помимо примеров объектов, удовлетворяющих определяющему условию определения, необходимо (для лучшего усвоения определения) предлагать учащимся для распознавания и примеры объектов, этому условию не удовлетворяющих. Еще один удобный момент для разговора об отрицании предложений (определяющего условия определения).

3. При решении систем и совокупностей уравнений / неравенств уместно поговорить с учащимися о конъюнкции и дизъюнкции предложений. Сами решения рекомендуем оформлять в виде цепочки равносильных предложений (удобный момент поговорить об отношении равносильности и следования).

4. При доказательстве теорем уместно и весьма полезно обращать внимание учащихся на используемые логические методы доказательства: от противного, разбором случаев и др. Все это приведет к более осознанному овладению учащимися математическим материалом, позволит отойти от столь традиционного, к сожалению, «заучивания» доказательств теорем.

Конечно же, этот список «удобных моментов» можно при желании продолжить.

Кроме того, для успешного формирования логико-языковых умений необходимо, по нашему мнению, помимо традиционных задач, присутствующих в школьных учебниках математики, предлагать учащимся специальные логико-ориентированные задачи. *Логико-ориентированными* задачами мы называем задачи, которые акцентируют внимание на логической составляющей математического материала и направлены на формирование логических знаний и умений учащихся, позволяющих повысить эффективность усвоения этого материала [8]. Например, можно предложить такую задачу:

Задача 1. Восстановите пропущенные слова в формулировке определения возрастающей функции:

«Функцию f … возрастающей на множестве, если для … двух значений ее аргумента x_1 и x_2 из этого множества, … $x_1 > x_2$, … $f(x_1) > f(x_2)$».

Приведем ожидаемый ответ. «Функцию f <u>называют</u> возрастающей на множестве, если для <u>любых</u> двух значений ее аргумента x_1 и x_2 из этого множества, <u>если</u> $x_1 > x_2$, <u>то</u> $f(x_1) > f(x_2)$».

При выполнении подобных задач у учащихся будет формироваться умение логически грамотно формулировать определения знакомых математических понятий. Кроме того, такая задача позволит учащимся научиться выявлять логическую структуру определения.

В учебном пособии [6] представлены, в том числе, логико-ориентированные задачи, которые можно предложить школьникам при обучении математике.

Отметим, что некоторые задачи школьного курса математики можно переформулировать, добавить логический акцент и получить логико-ориентированную задачу. Приведем примеры.

Задача 2а (задача из учебника [4, с. 88]). Приведите примеры последовательностей:

а) возрастающих и ограниченных сверху;

б) возрастающих и не ограниченных сверху.

Задача 2б (логико-ориентированная задача). Выясните, верны ли следующие высказывания. Ответ обоснуйте.

а) всякая возрастающая последовательность не ограничена сверху;

б) всякая возрастающая последовательность ограничена сверху.

На примере задачи 2б мы продемонстрировали, как можно установить более прочные связи между изучаемыми математическими понятиями; предложить учащимся аргументировать свой ответ. Правда, возможно, кто-то подумает, что мы тем самым усложнили задачу, во-первых, сделали ее исследовательской (требуется выяснить, а не привести пример), во-вторых, поставили учащихся в ситуацию необходимости привести контрпример для обоснования отрицательного ответа, т.е. поставили учащихся перед необходимостью преобразовать отрицание предложения. Считаем, что вторая формулировка задачи будет полезнее для учащихся: кроме знания примеров таких последовательностей у учащихся расширятся знания свойств последовательностей, а также сформируются соответствующие логические умения.

Задача 3а (задача из учебника [3, с. 101]). Выясните, сколько корней имеет уравнение:

в) $3x - 21 = 16 + 3x$; г) $5(x+9) = 5x + 45$; е) $x^2 + x - 5 = 0$.

Задача 3б (логико-ориентированная задача). Для каждой высказывательной формы укажите ее множество истинности и, если оно является конечным, укажите число его элементов:

в) $3x - 21 = 16 + 3x$; г) $5(x+9) = 5x + 45$; е) $x^2 + x - 5 = 0$.

На примере задачи 3а мы продемонстрировали, как можно «посмотреть» на математический материал с логической стороны; разумеется, мы не призываем делать это в каждой такой задаче. Однако учащиеся должны понимать, что уравнение – частный случай высказывательной формы (предложения с переменными), что имеются тождественно истинные высказывательные формы, тождественно ложные высказывательные формы (множество истинности – пустое), что корень уравнения – это элемент множества всех таких значений переменной, которые обращают данное равенство с переменной в верное числовое равенство.

Итак, при изучении школьного курса математики открываются широкие возможности для формирования у школьников универсальных логико-языковых умений, для формирования у них опыта логико-ориентированной деятельности с математическими теоремами и определениями. Сформированность этих умений у школьников будет способствовать более сознательному усвоению математического материала и повышению уровня логической грамотности в целом. Невнимание же учителей математики к материалу логического характера, на наш взгляд, существенно снижает ценность математической подготовки школьников (в ее логическом плане) и делает ее весьма затруднительной.

Литература

1. Башмаков М.И. Алгебра. 8 класс. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2014. – 256 с.
2. Дорофеев Г.В. Математика. 6 кл. Ч. 1, 2, 3. / Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г. – Изд. 2-е, перераб. – М.: Издательство «Ювента», 2010. – 112 с.
3. Козлов В.В. Математика: алгебра и геометрия. 7 класс / Козлов В.В., Никитин А.А., Белоносов В.С. и др. – М.: ООО «Русское слово», 2013. – 384 с.
4. Мордкович А.Г. и др. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: Задачник для общеобразоват. учреждений. – М.: Мнемозина, 2000. – 315 с.
5. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://mosmetod.ru/files/dokumenty/primernaja-osnovnaja-obrazovatelnaja-programma-osnovogo-obshchego-obrazovanija.pdf.
6. Тимофеева И.Л. Вводный курс математики: учеб. пособие для студентов учреждений высш. пед. проф. образования / И.Л. Тимофеева, И.Е. Сергеева, Е.В. Лукьянова – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 240 с.
7. Тимофеева И.Л. Об универсальных логико-языковых умениях студентов – будущих учителей математики / И.Л. Тимофеева, И.Е. Сергеева // Проблемы теории и практики обучения математике: Сборник научных работ, представленных на Международную научную конференцию «68 Герценовские чтения» / Под ред. В.В. Орлова. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2015. – С. 19-20.
8. Тимофеева И.Л. Комплекс логико-ориентированных задач как средство формирования логической грамотности будущих учителей математики / И.Л. Тимофеева, И.Е. Сергеева // Ярославский педагогический вестник. – 2010. – № 1. – С. 69-72.

УДК 519

ЗНАЧЕНИЕ КОМБИНАТОРИКИ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ НАВЫКОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Стребков Е. В., кандидат физико-математических наук, доцент,
Казанский федеральный университет, г. Казань
str9050258629@yandex.ru

Аннотация. Предлагается методика изучения комбинаторных методов для формирования навыков математического моделирования на основе построения адекватных комбинаторных моделей для реальных задач.

Ключевые слова: методика обучения, комбинаторные методы математическое моделирование.

THE SIGNIFICANCE OF COMBINATORICS FOR DEVELOPING SKILLS OF MATHEMATICAL MODELING

E.V. Strebkov, PhD, associate professor,
Kazan Federal University, Kazan
str9050258629@yandex.ru

Abstract. The paper suggests combinatorial principles research method for developing skills of mathematical modeling based on construction of appropriate combinatorial models for real-world problems.

Keywords: teaching method, combinatorial principles, mathematical modeling.

По многим специальностям вузов в курсе «Теория вероятностей и математическая статистика» при решении вероятностных задач требуется осознанное применение комбинаторных формул, что вызывает у студентов определенные затруднения.

Опыт преподавания позволил автору для обучения комбинаторным методам разработать методику, основанную на следующих принципах.

1. Изложение теоретического материала ведется раздельно по способам построения комбинаторных моделей. Сначала рассматривается схема случайного выбора без возвращения и, следовательно, изучаются размещения, сочетания, перестановки без повторений. Затем рассматривается схема случайного выбора с возвращением и, следовательно, изучаются размещения, сочетания, перестановки с повторениями.

2. При определении размещений и сочетаний приводятся одновременно по два варианта (по способу построения и по их основным свойствам), что позволяет всесторонне изучить рассматриваемые понятия и использовать их в предлагаемом алгоритме решения задач.

Например, размещение без повторений по k элементов из n определяется одновременно в двух вариантах.

Вариант 1 (по способу построения). В качестве упорядоченного набора по k элементов из исходного множества X, состоящего из n различных элементов.

Вариант 2 (по свойствам набора). В качестве набора по k элементов из n со следующими свойствами:

1) $k \le n$;

2) важен порядок расположения элементов;

3) все элементы в наборе являются различными.

Алгоритм решения комбинаторных задач часто состоит из двух этапов.

Этап 1. На первом этапе необходимо построить математическую модель реальной задачи: выяснить какой набор элементов соответствует изучаемому объекту; из какого множества X этот набор элементов выбирается; по какой схеме (модели) этот набор элементов (соединение) выбирается из множества X (либо по схеме случайного выбора без возвращения, либо по схеме случайного выбора с возвращением). В результате на первом этапе получаем соединение, которое соответствует изучаемому объекту реальной задачи.

Этап 2. На втором этапе необходимо определить, исходя из условий реальной задачи, свойства полученного соединения: важен или не важен порядок расположения элементов; возможность повторения элементов или все элементы различные. В зависимости от этих свойств соединение согласно Таблице 1 относится к одному из 4 видов:

1) размещение без повторений;
2) размещение с повторениями;
3) сочетание без повторений;
4) сочетание с повторениями.

В Таблице 1 приведены также формулы для вычисления количества соединений в зависимости от вида соединения, где n - число элементов в исходном множестве X, k – длина построенного соединения, $C_n^k = n!/k!\,(n-k)!$.

Таблица 1

Свойства	Порядок важен	Порядок не важен
Все элементы различные	Размещение без повторений по k из n, их число: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	Сочетание без повторений по k из n, их число: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$
Элементы могут повторяться	Размещение с повторениями по k из n, их число: $\tilde{A}_n^k = n^k$	Сочетание с повторениями по k из n, их число: $\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

Применение предлагаемой методики проиллюстрируем на конкретной задаче.

Задача. Сколько существует различных вариантов доставки на 5 этажей стройки 6 ящиков различных материалов?

Решение проведём по этапам согласно изложенного алгоритма моделирования комбинаторной задачи.

Этап 1. Математической моделью данной задачи является схема случайного выбора с возвращением. Из множества этажей $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ последовательно наугад выбирается этаж и закрепляется соответственно за первым ящиком, а затем номер этажа возвращается назад во множество X, т.к. на данный этаж могут быть доставлены и другие ящики. После 6 таких извлечений этажей с возвращением получим соединение длины 6 соответствующее распределению по этажам

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) \tag{1}$$

Этап 2. Определим вид полученного соединения (1) руководствуясь Таблицей 1. Согласно условию задачи в соединении (1) важен порядок расположения элементов (ящики являются различными) и элементы могут повторяться. Поэтому полученное соединение (1) является размещением с повторениями по 6 элементов из 5. Число таких размещений равно $\tilde{A}_5^6 = 5^6 = 15625$.

Следовательно, существует 15625 вариантов доставки 6 ящиков различных материалов по 5 этажам стройки.

Предлагаемая методика изучения комбинаторики показала свою эффективность и изложена в учебном пособии [1], в котором приведено достаточно подробное и наглядное изложение основных фактов комбинаторики, а также рассмотрены с решениями 90 комбинаторных задач, что позволяет его успешно применять при подготовке учителей математики и информатики. Учителя школ могут использовать [1] при подготовке школьников к олимпиадам по математике.

Необходимой составляющей подготовки современного учителя математики является формирование навыков математического моделирования, которое включает следующие основные этапы:

1) анализ содержания практической задачи;
2) математическую формулировку (модель) реальной задачи;
3) выбор адекватного метода и решение соответствующей математической задачи;
4) практическую интерпретацию полученного математического результата.

На этапе 1 алгоритма решения комбинаторной задачи осуществляются этапы 1) – 2) математического моделирования по анализу содержания реальной задачи и обоснованному выбору адекватной математической модели из двух возможных схем построения соединения, соответствующего рассматриваемой задаче.

На этапе 2 алгоритма решения комбинаторной задачи реализуется этап 3) математического моделирования, т.е. по свойствам полученного соединения определяется его вид и, следовательно, формула вычисления числа таких соединений.

Алгоритм математического моделирования для комбинаторных задач является достаточно наглядным и успешно осваивается учащимися. Комбинаторика применима для широких классов реальных задач, что демонстрирует прикладной характер математики и стимулирует познавательный интерес.

Для формирования навыков математического моделирования комбинаторные методы обладают следующими преимуществами:

1) не требуют дополнительных знаний по математике и иным дисциплинам;
2) теоретический материал является достаточно компактным и наглядным;
3) демонстрируют основные этапы математического моделирования;
4) позволяют рассматривать широкий класс разнообразных реальных задач.

Прикладной характер комбинаторных методов играет достаточно уникальную роль в развитии у учащихся познавательного интереса и аналитического мышления, в частности, формирование навыков математического моделирования.

Литература

1. Стребков Е. В. Комбинаторика: учебное пособие. / Е. В. Стребков, В. С. Желтухин, И. А. Бородаев. – Казань: Казан.ун-т, 2013. – 104 с.

УДК 511

ПРИЕМУЩЕСТВА НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Стребков Е.В., кандидат физико-математических наук, доцент,
Казанский Федеральный Университет, г. Казань
str9050258629@yandex.ru

Пашкин А.В., студент,
Казанский Федеральный Университет, г. Казань

Симаков Н.Е., студент,
Казанский Федеральный Университет, г. Казань

Журавлева М.И., магистрант,
Казанский Федеральный Университет, г. Казань

Аннотация. В данной статье рассматриваются рекомендации по применению ранговых методов корреляционного и факторного анализа.

Ключевые слова: аналитическая статистика; корреляционный анализ, факторный анализ; ранговые методы.

THE ADVANTAGES OF NONPARAMETRIC STATISTICAL PRINCIPLES

E.V. Strebkov, PhD, associate professor,
Kazan Federal University, Kazan
str9050258629@yandex.ru
A.V. Pashkin, student,
Kazan Federal University, Kazan
N.E. Simakov, student,
Kazan Federal University, Kazan
M.I. Zhuravliova, master,
Kazan Federal University, Kazan

Abstract. This paper reviews recommendations on efficient application of ranking methods of correlation and factor analysis.

Keywords: analytical statistics; correlation analysis, factor analysis; ranking methods.

Необходимой частью подготовки современных специалистов является изучение методов математической статистики, которые востребованы для многих специальностей, например, физико-математического, информационного, медико-биологического, социально-экономического, психолого-педагогического профилей.

Многообразие и особенности применения статистических методов обуславливают затруднение при их изучении. Поэтому актуальна задача выделения достаточно универсальных и эффективных статистических методов, доступных для применения широким кругом специальностей. В данной статье рассматривается преимущества непараметрических (ранговых) методов для корреляционного и факторного анализа.

В отличие от параметрических методов аналитической статистики непараметрические методы являются более универсальными, т.к. применимы для количественных и качественных признаков без ограничений на законы распределения изучаемых признаков и не требуют сложных вычислений выборочных параметров. Суть ранговых методов состоит в анализе отношений «больше - меньше» между реальными показателями изучаемых признаков. Эффективность непараметрических методов проиллюстрируем на примерах из корреляционного и факторного анализа.

Одним из востребованных является рангово-бисериальный коэффициент корреляции для задач, когда один признак измеряется в дихотомической шкале (признак X), а другой в ранговой шкале (признак Y), применение которого продемонстрируем на примере 1 [2].

Таблица 1

X пол	1	0	1	1	0	1	0	0	1
Y = IQ	101	108	86	91	105	78	93	102	103
Ранги	5	9	2	3	8	1	4	6	7

Пример 1. Исследуется возможность гендерного различия в показателях интеллекта (коэффициент умственных способностей IQ) на примере подростков разного пола. Результаты обследования приведены в Таблице 1.

В Таблице 1 дихотомический признак X = {пол} принимает значения 1 для юношей и 0 для девушек, объем выборки $n = 9$,признак Y = {значение коэффициента IQ} является количественным, значения которого проранжированы в порядке возрастания.

Рассмотрим поэтапный алгоритм с параллельными вычислениями для примера 1.

Этап 1. Определяются средние ранги:

1) для юношей при $X = 1$ $\overline{x_1} = (1 + 2 + 3 + 5 + 7) / 5 = 3{,}6;$

2) для девушек при $X = 0$ $\overline{x_0} = (4 + 6 + 8 + 9) / 4 = 6{,}75.$

Этап 2. Вычисляется выборочное значение рангово-бисериального коэффициента корреляции:
$\bar{r} = \frac{2*(\overline{x_1} - \overline{x_0})}{n} = \frac{2*(3{,}6-6{,}75)}{9} = -0{,}7.$

Этап 3.С целью проверки значимости коэффициента корреляции рассматриваются гипотезы:
нулевая гипотеза $H_0 = \{\text{коэффициент } \bar{r} \text{ значимо не отличается от нуля}\};$
альтернативная гипотеза $H_0 = \{\text{коэффициент } \bar{r} \text{ значимо отличается от нуля}\}$.

Этап 4. Вычисляется фактическое значение критерия:

$$T = \overline{|r|}\sqrt{\frac{n-2}{1-(\bar{r})^2}} = 0{,}7\sqrt{\frac{7}{1-(0{,}7)^2}} = 2{,}59.$$

Коэффициент $\bar{r}$ изменяется в диапазоне от -1 до +1, его знак для интерпретации результатов не имеет значение в силу равноправия значений $X = 0$ и $X = 1$.

Этап 5. Исследователем задается уровень значимости q, т.е. вероятность отклонения гипотезы H_0 при ее справедливости. Согласно уровня значимости q и числу степеней свободы $k = n - 2$ по таблице критических значений критерия Стьюдента находят $T_{кр}$ [1]. Если $T > T_{кр}$, то принимается гипотеза H_1.

Для примера 1 при $q = 0{,}05$ и $k = n - 2 = 7$ $T_{кр} = 2{,}36$. Таким образом, $T = 2{,}59 > T_{кр} = 2{,}36$ и принимается H_1 о значимом отличии рангово-бисериального коэффициента корреляции $\bar{r} = 0{,}7$ от нуля, т.е. на данной выборке подростков выявлено значимое гендерное различие по показателю коэффициента IQ.

Далее рассматривается особенности однофакторного дисперсионного анализа, который применяется, чтобы установить оказывает ли на изучаемый (результирующий) признак X существенное влияние на некоторый качественный фактор F, имеющий несколько уровней.

Применение обычного (параметрического) дисперсионного анализа имеет существенные ограничения [1]:

1) при каждом уровне фактора F изучаемый признак X должен иметь нормальный закон распределения с постоянной для различных уровней генеральной дисперсией;

2) необходимость достаточно трудоемких вычислений выборочных дисперсий.

Преимущества рангового подхода проиллюстрируем на примере однофакторного непараметрического метода на основе критерия Краскала – Уоллеса [2].

Пример 2. Анализируется влияние фактора F= {величина торговой площади в квадратных метрах} с тремя k = 3 уровнями F_1= {площадь до 100 $м^2$}, F_2= {площадь от 100 $м^2$ до 150 $м^2$}, F_3= {площадь более 150 $м^2$} на показатели результирующего признака X = {количество единиц реализованного товара в течении недели} по 3 видам товаром. Результаты обследования приведены в Таблице 1, где x_{ij} – значение признака X для уровня F_i фактора F и j-того вида товара, n_i и n – суммарное количества товаров соответственно для уровня F_i и всего фактора F, т.е. $n = n_1 + n_2 + n_3 = 3 + 3 + 3 = 9$.

Рассмотрим поэтапный алгоритм метода с параллельными вычислениями для примера 2.

Этап 1. Формулируется основная гипотеза H_0= {расхождение наблюдений для различных уровней фактора F обусловлено случайными причинами}, альтернативные гипотезы H_1 могут быть произвольными.

Таблица 2

Номер товара	Уровень F_1	Уровень F_2	Уровень F_3
1	$x_{11} = 105$	$x_{21} = 97$	$x_{31} = 120$
2	$x_{12} = 162$	$x_{22} = 171$	$x_{32} = 183$
3	$x_{13} = 194$	$x_{23} = 206$	$x_{33} = 192$
n_i	$n_1 = 3$	$n_2 = 3$	$n_3 = 3$

Этап 2. В Таблице 2 заменим наблюдения x_{ij} их соответствующими рангами r_{ij}, упорядочивая всю совокупность наблюдений в порядке возрастания. В результате получим Таблицу 3, где среднее всех рангов R =(n+1)/2= 5 и средние ранги для уровня F_i равны R_i =($r_{i1} + r_{i2} + r_{i3}$)/n_i .

Таблица 3

Номер товара	Уровень F_1	Уровень F_2	Уровень F_3
1	$r_{11} = 2$	$r_{21} = 1$	$r_{31} = 3$
2	$r_{12} = 4$	$r_{22} = 5$	$r_{32} = 6$
3	$r_{13} = 8$	$r_{23} = 9$	$r_{33} = 7$
R_i	$R_1 = 4{,}66$	$R_2 = 5$	$R_3 = 5{,}33$

Этап 3. Вычисляется наблюдаемое значение критерия

$$H = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{3} n_i (R_i - \frac{n+1}{2})^2 = \frac{12}{9*10} \sum_{i=1}^{3} 3 * (R_i - 5)^2 = 0{,}09 .$$

Этап 4. Задается уровень значимости q, т.е. вероятность отклонения гипотезы H_0 при ее справедливости. Согласно уровню значимости q и числу степеней свободы $(\text{k}-1)$ по таблице критических значений распределения хи-квадрат [1] выбираем критическое значение $\chi^2_{\text{кр}}$, k – число уровней F.

Суть факторного метода состоит в сравнении общего среднего ранга R со средними рангами R_i по факторам F_i. При $H > x^2_{\text{кр}}$ гипотеза H_0 отклоняется на уровне значимости q, т.е. влияние фактора F считается значимым.

Для примера 2 при $q = 0{,}05$ и числа степеней свободы $(k-1) = 2$ критическое значение $x^2_{\text{кр}} = 6{,}0$ и наблюдаемое значение $H = 0{,}09$. Следовательно, $H = 0{,}09 < x^2_{\text{кр}} = 6{,}0$ и гипотеза H_0 принимается, таким образом, фактор $F = \{\textbf{величина торговой площади}\}$ не оказывает влияние на объем продаж.

По сравнению с параметрическими методами статистики непараметрические (ранговые) методы обладают существенными преимуществами:

1) применимы для значительного числа классов прикладных задач из различных областей знаний;
2) являются универсальными для анализа количественных и качественных признаков;
3) не ограничены жесткими требованиями о законе распределения изучаемых признаков;
4) не опирается на углубленные знания по теории вероятностей о свойствах случайных величин;
5) обладают наглядностью и простотой алгоритмов реализации;
6) не требуют трудоемких вычислений;

Использование непараметрических методов при обучении аналитической статистике способствуют эффективному формированию у учащихся необходимых компетенций для анализа прикладных задач, актуальных для соответствующих специальностей.

Литература

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 2003. – 479 с.

2. Холлендер М. Непараметрические методы статистики / М. Холлендер, Д. Вульф. – М: Финансы и статистика, 1983. – 518с.

УДК 372.851

О ФОРМИРОВАНИИ УМЕНИЯ ПРАВИЛЬНО РАССУЖДАТЬ У УЧАЩИХСЯ 9 КЛАССА НА КУРСЕ ПО ВЫБОРУ

Тимофеева И.Л., доктор педагогических наук, профессор,
Московский педагогический государственный университет, г. Москва
iltimofeeva@mail.ru

Попадьина Е.А., учитель математики,
ГБОУ Школа № 1416, г. Москва,
popadina.evgeniya@bk.ru

Аннотация. В статье предложен один из методов формирования умения правильно рассуждать у учащихся 9 класса на курсе по выбору. Этот метод основан на использовании средств математической логики при решении задач на распознавание правильных рассуждений. Приведен пример решения задачи на распознавание следствий с использованием средств математической логики.

Ключевые слова: математика, курс по выбору, правильное (дедуктивное) рассуждение, логическая структура рассуждения, распознавание следствий, средства математической логики.

ABOUT LOGICAL CORRECT REASONING SKILL FORMATION FOR 9TH CLASS PUPILS AT ELECTIVE COURSE

I.L. Timofeeva, doctor of pedagogic sciences, professor,
Moscow State Pedagogical University, Moscow
iltimofeeva@mail.ru

E.A. Popadina, mathematics teacher,
SFEI School № 1416, Moscow
popadina.evgeniya@bk.ru

Abstract. One method of forming logical correct reasoning skills on the secondary school elective course was proposed. This method based on using of math logic tools. The example of task solution on logical corollaries recognition using math logic tools was given.

Keywords: mathematics, elective course, logical correct (deductive) reasoning, logical structure of reasoning, corollaries recognition, math logic tools.

1. Одной из важнейших задач математического образования является воспитание у учащихся способности логично рассуждать. В ФГОС ООО [6] и ФГОС СОО [7] отмечено, что учащиеся должны проводить логические обоснования математических утверждений, точно и грамотно выражать свои мысли. Умение правильно рассуждать необходимо учащимся при изучении всех школьных предметов и в повседневной жизни [2]. Существует ошибочное мнение, что это умение формируется само по себе при изучении математики. В силу специфики предмета обучение математике предоставляет огромные возможности для формирования у учащихся этого умения. Но в то же время при обучении математике не уделяется должного внимания формированию умения логически правильно рассуждать. Если не уделять особого внимания формированию умения рассуждать логически правильно (т.е. рассуждать в соответствии с законами и правилами логики), то спонтанное формирование этого умения не даст должного результата.

В настоящее время в общеобразовательных школах большую роль играют курсы по выбору, поэтому актуальной является разработка учебно-методических материалов для курсов по выбору различной тематики. Для интенсивного формирования у учащихся умения правильно рассуждать целесообразно использовать именно эту форму обучения. Существуют различные разработки курсов логической тематики, но посвящённых именно формированию умения правильно рассуждать нами не было найдено.

С 2014 г. в ЕГЭ по математике базового уровня появились задачи логического характера. Чтобы подготовить учащихся к выполнению этих задач, необходимы соответствующие учебно-методические материалы для учащихся и учителей. Однако таких материалов в настоящее время явно не хватает.

В этой статье отражены некоторые результаты разработки методики формирования умения правильно рассуждать у учащихся 9 класса на курсе по выбору "Дедуктивные рассуждения в математике".

2. Основная цель курса по выбору "Дедуктивные рассуждения в математике": формирование у учащихся умения правильно рассуждать. Этот курс разработан для учащихся 9 класса, планирующих продолжить обучение в 10 классе, где одним из профилирующих предметов является математика. Однако считаем, что этот курс будет полезен всем учащимся 9 класса, так как он направлен на развитие логического мышления.

В результате изучения курса учащиеся должны *знать*: термины и понятия логического характера (предложения без переменных (высказывания) и с переменными; логические операции над предложениями; обратное, противоположное и обратное к противоположному предложения для данного предложения; логически равносильные предложения; логическое следствие; правильное (дедуктивное) рассуждение); законы и правила логики; свойства логической равносильности и логического следования.

В результате изучения курса учащиеся должны *уметь*: переходить от предложения в безусловной форме к предложению с тем же смыслом в условной форме; выявлять логическую структуру предложений и рассуждений; записывать символически предложения и рассуждения; для данного условного предложения распознавать предложения: обратное исходному, противоположное исходному и обратное к противоположному для исходного; распознавать/выводить следствия данного предложения; распознавать правильные и неправильные рассуждения; проводить правильные рассуждения.

Программа курса по выбору, рассчитанного на 16 уч. часов, содержит следующие *разделы*:

I. Логические операции над предложениями. Равносильность и следование.

1. Логические операции над предложениями.
2. Логическая структура предложения.
3. Обратное, противоположное и обратное к противоположному предложения для данного предложения.
4. Равносильность и следование.

II. Дедуктивные рассуждения.

1. Индуктивные и дедуктивные рассуждения.
2. Логическая структура рассуждения. Схема рассуждений.
3. Правильные рассуждения. Правила логики.
4. Задачи на распознавание следствий и на выбор предложений, верных при данных условиях.
5. Задачи на распознавание правильных и неправильных рассуждений.

Комментарий. Основными объектами изучения на курсе по выбору "Дедуктивные рассуждения в математике" являются дедуктивные (правильные) рассуждения, т.е. рассуждения, построенные по законам и правилам логики. Основной раздел курса – второй, посвящён правильным (дедуктивным) рассуждениям. Не менее важным является и первый раздел, в котором представлен необходимый теоретический материал, изучение которого направлено на формирование умений выявлять логическую структуру предложений и записывать их символически, на усвоение логических законов и правил. После овладения этим материалом (теоретической базой) и соответствующими умениями, учащийся готов к обучению распознавать правильные и неправильные рассуждения с использованием средств логики.

3. Разработанная нами методика формирования у школьников умения правильно рассуждать основана на использовании средств математической логики. Объясним, зачем это нужно.

Задачи на распознавание следствий (из данного предложения) по существу сводятся к задачам на распознавание правильных и неправильных рассуждений. Задачи на распознавание следствий представлены в ЕГЭ по математике базового уровня (см. [1], [3]). Каждая из таких задач имеет следующий вид: предложены исходное предложение, которое может быть представлено как в условной форме, так и в безусловной форме, и четыре предложения, из которых необходимо выбрать предложения, являющиеся следствиями исходного предложения. В качестве предложений на выбор приводятся предложения следующего вида: обратное исходному, противоположное исходному, обратное к противоположному для исходного (контрапозитивное), а также сводящиеся к ним.

Решение каждой задачи на распознавание следствий как единичной, без подведения учащихся к пониманию того общего, что между ними есть, имеет малую ценность. А этим общим для всех предлагаемых на ЕГЭ задач является логическая структура рассуждений, точнее, логическая структура исходного предложения и предложений, предлагаемых на выбор. Содержание этих предложений, различное в разных задачах, не влияет на ход решения. Выявление общего в задачах позволяет предложить общий метод их решения, что существенно повышает ценность обучения. Выявить общее в структуре (форме) предложений позволяет использование средств математической логики, а именно – запись предложений с использованием логических символов. На это было обращено внимание и в статье [5]. Именно поэтому предлагаемая нами методика обучения решению таких задач основана на использовании средств математической логики.

Кроме того, отметим, что в задачах логического характера из ЕГЭ по математике на распознавание следствий обоснование ответа не требуется, достаточно только указать правильный ответ (выбрать предложения из списка). Считаем, что обучение учащихся решать такие задачи обязательно должно предусматривать обоснование ответа. Обосновать ответ проще, если учащиеся освоили общий метод решения таких задач.

Придерживаясь этой позиции, мы разработали следующие *методические рекомендации* по обучению распознаванию правильных и неправильных рассуждений:

1. Обучение распознаванию правильных (дедуктивных) рассуждений рекомендуем начать с наиболее простого случая – распознавания следствий (из данного предложения).
2. При решении задач на распознавание правильных / неправильных рассуждений недопустимо ограничиваться лишь ответом, необходимо обучать обосновывать ответ.

3. Для распознавания, является ли правильным рассуждение, рекомендуем выявить его логическую структуру.

4. Для наглядного отражения логической структуры рассуждения рекомендуем использовать запись предложений при помощи логических символов.

5. Понятия логической равносильности и логического следования использовать можно, но без определения этих понятий, а лишь поясняя их на примерах.

Поскольку задачи на распознавание следствий являются наиболее простым случаем задач на распознавание правильных и неправильных рассуждений, изучение рассуждений мы начинаем именно с задач на распознавание следствий, уделяя им немалое внимание.

При обучении школьников решению задач на распознавание следствий рекомендуем действовать следующим образом:

I. Выявить логическую структуру исходного предложения и перейти к условной форме (если исходное было в безусловной форме).

II. Ввести обозначения элементарных предложений.

III. Выявить логическую структуру всех предложений на выбор.

IV. Записать символически все предложения (исходное и из списка на выбор).

V. Сопоставить пары полученных символических записей предложений (исходного и из списка на выбор) с законами и правилами логики, а также свойствами логического следования.

VI. Сделать выбор на основании шага V: указать, какие из данных на выбор предложений являются следствиями исходного предложения.

Заметим, что рекомендация V пригодна только для известного по структуре списка предложений на выбор, который мы имеем, например, в задачах ЕГЭ на данный момент. Как уже отмечено, в этих задачах каждое предложение на выбор является или обратным исходному, или противоположным исходному, или обратным к противоположному для исходного.

4. Приведём пример решения задачи на распознавание следствий из ЕГЭ в соответствии с этими рекомендациями.

Задача [3]. Учитель математики Иван Петрович обязательно отключает свой телефон, когда ведёт урок.

Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных.

(1) Если телефон Ивана Петровича включён, значит, он не ведёт урок.

(2) Если телефон Ивана Петровича выключен, значит, он ведёт урок.

(3) Если Иван Петрович проводит контрольную работу по математике, значит, его телефон выключен.

(4) Если Иван Петрович не ведёт урок, значит, его телефон включён.

Решение. На занятиях результаты каждого этапа решения рекомендуем представлять по шагам. Шаги I-IV можно отразить в таблице.

I шаг. Перейдём от данного предложения к условному предложению с тем же смыслом: "*Если* учитель математики Иван Петрович (И.П.) ведёт урок, *то* он отключает свой телефон".

II шаг. Обозначим буквой A предложение "Учитель математики И.П. ведёт урок", буквой B – "И.П. отключает свой телефон" ("Телефон И.П. выключен"), буквой C – "И.П. проводит контрольную работу по математике". Очевидно, верно предложение $C \to A$ (*).

Для краткости объединим шаги III и IV.

III-IV шаги. Выявим форму всех предложений (исходного и предложенных на выбор).

(0) Если учитель математики И.П. ведёт урок, то он отключает свой телефон.

Предложение (0) символически запишем так: $A \to B$.

Оно является исходным предложением в условной форме.

(1) Если телефон И.П. включён, значит, он не ведёт урок.

Предложение (1) символически запишем так: $\neg B \to \neg A$.

Оно является предложением, обратным к противоположному для предложения $A \to B$.

(2) Если телефон И.П. выключен, значит, он ведёт урок.

Предложение (2) символически запишем так: $B \to A$.

Оно является предложением, обратным исходному предложению $A \to B$.

(3) Если И.П. проводит контрольную работу по математике, значит, его телефон выключен.

Предложение (3) запишем символически так: $C \to B$.

(4) Если И.П. не ведёт урок, значит, его телефон включён.

Предложение (4) символически запишем так: $\neg A \to \neg B$.

Оно является предложением, противоположным исходному предложению $A \to B$.

Результаты этой части решения представим в таблице 1.

Таблица 1

Символическая запись предложений

№	*Предложение*	*Логическая характеристика предложения*	*Символическая запись предложения*
0	Если учитель математики И.П. ведёт урок, то он отключает свой телефон	условная форма исходного	$A \to B$
1	Если телефон И.П. включён, значит, он не ведёт урок	обратное к противоположному для исходного	$\neg B \to \neg A$
2	Если телефон И.П. выключен, значит, он ведёт урок	обратное исходному	$B \to A$
3	Если И.П. проводит контрольную работу по математике, значит, его телефон выключен	усиление посылки в исходном	$C \to B$
4	Если И.П. не ведёт урок, значит, его телефон включён	противоположное исходному	$\neg A \to \neg B$
*	Если И.П. проводит контрольную работу по математике, то он ведёт урок	вспомогательное предложение	$C \to A$

V-VI шаги. Сопоставим пары полученных символических записей предложений (исходного и из списка на выбор) с законами и правилами логики, а также учтем свойства логического следования. По результатам сопоставления сделаем выводы.

1. Правило контрапозиции: $A \to B \Rightarrow \neg B \to \neg A$.

Предложение $\neg B \to \neg A$ является предложением, обратным к противоположному (контрапозитивным) для предложения $A \to B$. Таким образом, предложение (1) логически следует из исходного предложения в силу правила контрапозиции.

2. Свойство логического следования: $A \to B \not\Rightarrow B \to A$.

Предложение $B \to A$ является предложением, обратным исходному предложению $A \to B$. Но обратное предложение не является логическим следствием исходного предложения. Таким образом, предложение (2) не следует из исходного предложения.

3. Правило силлогизма: $C \to A,\ A \to B \Rightarrow C \to B$.

Согласно (*) предложение $C \to A$ является верным. Из предложений $C \to A$ и $A \to B$ следует предложение $C \to B$. Таким образом, предложение (3) следует из исходного предложения.

4. Свойство логического следования: $A \to B \not\Rightarrow \neg A \to \neg B$.

Предложение $\neg A \to \neg B$ является предложением, противоположным исходному предложению $A \to B$. Но противоположное предложение не является логическим следствием исходного предложения. Таким образом, предложение (4) не следует из исходного предложения.

Ответ: 1, 3.

5. Рекомендации по решению задач на распознавание правильных и неправильных элементарных рассуждений несколько отличаются от рекомендаций по обучению распознаванию следствий. В общем случае рекомендуем действовать следующим образом:

I. Выявить логическую структуру посылок и заключения данного рассуждения и перейти к условной форме (если они были сформулированы в безусловной форме).

II. Ввести обозначения элементарных предложений.

III. Записать символически посылки и заключение данного рассуждения.

IV. Записать схему рассуждения.

V. Сопоставить полученную схему с основными правилами логики и свойствами логического следования.

VI. Высказать гипотезу на основании шага V: является данное рассуждение правильным или неправильным. Для обоснования ответа, что данное рассуждение не является правильным, необходимо привести контрпример. Обосновать, что рассуждение является правильным, можно ссылкой на соответствующее известное правило логики или на комбинацию этих правил.

Разумеется, шаги IV-VI являются наиболее сложным, но подробнее раскрыть их в рамках этой статьи не представляется возможным. Вариант, как это можно сделать, предложен в [4].

6. Разработанные нами методические материалы были частично опробованы в 2017 г. в ГБОУ Школа № 1359 г. Москвы. Было проведено несколько занятий с учащимися 9 класса и две проверочные работы: одна – до проведения занятий, другая – после.

Результаты этого обучения дают основание полагать, что разработанные материалы доступны и интересны учащимся, а методика обучения распознаванию следствий с использованием средств математической логики эффективна: у учащихся в результате обучения повысилась способность решать задачи на распознавание следствий, а также появилась возможность обосновывать своё решение, а значит, и в целом повысилась способность правильно рассуждать.

Литература

1. Открытый банк задач ЕГЭ по математике базового уровня [Электронный ресурс] / Официальный сайт. – Режим доступа: http://base.mathege.ru.

2. Примерная образовательная программа среднего общего образования [Электронный ресурс] / Городской методический центр. – Режим доступа: http://mosmetod.ru/metodicheskoe-prostranstvo/documenti/primernaya-osnovnaya-obraz-programa-srednego-obshego-obrazov.html.

3. РЕШУ ЕГЭ. МАТЕМАТИКА базовый уровень [Электронный ресурс] / Образовательный портал для подготовки к экзаменам. – Режим доступа: https://mathb-ege.sdamgia.ru/test?theme=222.

4. Тимофеева И.Л. Вводный курс математики: учеб. пособие для студентов учреждений высш. пед. проф. образования / И.Л. Тимофеева, И.Е. Сергеева, Е.В. Лукьянова. – М.: Издательский центр «Академия», 2011. – 240 с.

5. Тимофеева И.Л. О подготовке учащихся к решению задач на распознавание следствий / И.Л. Тимофеева // Проблемы теории и практики обучения математике: Сборник научных работ, представленных на Международную научную конференцию «70-е Герценовские чтения» / Под. ред. В.В. Орлова. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2017. – С. 127-129.

6. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования // Министерство образования и науки Российской Федерации [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/938.

7. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования // Министерство образования и науки Российской Федерации [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/2365.

УДК 372.851

ЗАДАЧИ О РОДНОМ КРАЕ КАК СРЕДСТВО ВОСПИТАНИЯ ГРАЖДАНСКИХ КАЧЕСТВ УЧАЩИХСЯ

Томилова А.Е., кандидат педагогических наук, доцент,
Северный (Арктический) университет имени М.В. Ломоносова, г. Архангельск
a.tomilova@narfu.ru

Аннотация. В статье раскрывается роль краеведческих математических задач, составленных участниками конкурса «Архангельская область в математических задачах», в воспитании гражданских качеств учащихся. Включение учащихся в деятельность по анализу не только математического, но и краеведческого материала, включенного в сюжет задач, способствует воспитанию любви к Родине, ответственности за её судьбу, уважения её прошлого, настоящего, будущего, чувства национальной гордости и патриотизма.

Ключевые слова: краеведческие математические задачи, гражданские качества учащихся, этапы работы с краеведческой задачей.

TASKS ABOUT NATIVE LAND AS A MEANS OF EDUCTION CIVIL QUALITIES OF SCHOOLCHILDREN

A.E. Tomilova, candidate of pedagogical sciences, associate professor,
Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk
a.tomilova@narfu.ru

Abstract. The article reveals the role of local history mathematical tasks created by participants of the contest "Arkhangelsk region in mathematical tasks," in the education of civil qualities of schoolchildren. Involvement of schoolchildren in activity of analyzing not only of math but also of local content that is included in the plot of tasks fosters a love to the Motherland, the responsibility for its destiny, respect of its past, present and future, feeling of national pride and patriotism.

Key words: local history mathematical tasks, civil quality of schoolchildren, stages in working with local lore tasks

В ФГОС ООО отмечается, что программа образовательной организации должна осуществляться на основе базовых национальных ценностей российского общества, таких, как патриотизм, социальная солидарность, гражданственность. Программа также должна быть направлена «на развитие и воспитание компетентного гражданина России, принимающего судьбу Отечества как свою личную, осознающего ответственность за настоящее и будущее своей страны…». [3, с. 39]

Переход на новые ФГОС потребовал от педагогов не только осмысления понятий “гражданственность”, “гражданское воспитание”, “результат гражданского воспитания”, но также и пересмотр всех прежних приемов, способов, инструментов, которыми они пользовались в течении своей педагогической практики. Важно понимать, что содержит под собой понятие “гражданственность”.

Под гражданственностью мы будем понимать интегративное качество личности, характеризующее взаимоотношение личности и государства, позволяющее человеку чувствовать себя юридически, социально, нравственно, психологически дееспособным гражданином.

Под гражданским воспитанием исследователи понимают поэтапный динамичный процесс целенаправленного и систематического влияния субъектов воспитания на сознание и чувства личности с целью формирования у них глубоких и устойчивых гражданских представлений, убеждений и чувств, привития им высокой гражданственности привычек активного гражданского поведения, готовности к защите интересов России. Результат гражданского воспитания – гражданственность как совокупность гражданских качеств личности, развитие которых рассматривается в социально-правовом, морально-нравственном, социально-психологическом, педагогическом аспекте. [2]

Основными элементами гражданственности являются:

1) нравственность и правовая культура, которая в свою очередь определяет чувство собственного достоинства;

2) внутренняя свобода личности;

3) знание не только своих прав, но и обязанностей, уважение прав других людей;

4) любовь к Родине, уважение ее прошлого, настоящего и будущего и, вместе с тем, осознание своей принадлежности к мировому сообществу;

5) наличие независимой, самостоятельной точки зрения на актуальные политические события и культурно-исторические процессы, происходящие в обществе;

6) готовность внести свой вклад в построение правового государства и гражданского общества.

Все эти качества формируются в школьные годы. Большую роль в их формировании играют гуманитарные предметы. Но и при обучении математики формирование гражданских качеств может осуществляться с помощью текстовых задач. Необходимо создавать такие условия, которые бы при решении задач способствовали возбуждению и побуждению чувств учащихся и побуждали бы их к развитию гражданственности и патриотизма.

Основным средством при ознакомлении учащихся с основными понятиями и категориями, в том числе и патриотической и гражданской направленности, являются тексты. Поскольку в школьных учебниках математики отсутствуют специальные разделы, посвященные формированию патриотических и гражданских представлений учащихся, поэтому сюжетные задачи должны использоваться на уроках так, чтобы появилась возможность формировать патриотические ценности. Это можно осуществить, если при обучении математике использовать текстовые математические задачи, содержащие сведения об истории, географии и экономике родного края, о выдающихся людях, памятниках и явлениях культуры региона. Мы называем такие задачи краеведческими.

В краеведческой математической задаче описан жизненный сюжет, содержащий исторический, патриотический уклон. Содержание такой задачи и ее решение даёт школьнику сведения об окружающем мире, истории и географии своего края, культуре и традициях коренных народов, производстве и профессиях региона, его экологических проблемах. Таким образом, использование краеведческого материала в значительной степени обогащает процесс обучения, делая его живым, доступным, стимулируя и повышая активность и самостоятельность учащихся.

Задачи краеведческого содержания способствуют достижению сразу нескольких развивающих целей математического образования: повышение мотивации к учебной деятельности, реализация деятельностного подхода к обучению, социализация личности. В краеведческих задачах помимо математического содержания содержатся сведения познавательного характера. Задача обычно сопровождается краткой справкой с включением в неё интересных фактов, вопросов для обсуждения, что в свою очередь предполагает дальнейшее обсуждение содержания задачи с одноклассниками во внеурочное время и с родителями в домашних условиях.

Решая подобные задачи на уроках математики, учащиеся сталкиваются с новыми, неизвестными, поражающими их воображение удивительными фактами из жизни выдающихся земляков, сведениями о крае, в котором они живут. Всё это способствует возбуждению чувства любви к родному Отечеству, активизации жизненной позиции обучаемых, формирует чувство гордости за свой край, необходимости бережного отношения к природе, расширяет их общую культуру.

Но таких задач в школьных учебниках недостаточно. Поэтому уже пять лет, начиная с 2013 года, в целях повышения интереса учащихся к математике, традициям, культуре и истории родного края, воспитания патриотизма, развития научно-исследовательской, краеведческой, этнографической деятельности, активизации внеклассной и внешкольной работы по математике в регионе проводится конкурс по составлению краеведческих математических задач «Архангельская область в математических задачах». За время его проведения расширилась как география конкурса, так и состав участников. В 2017 году в конкурсе приняли участие более двухсот учащихся первых – одиннадцатых классов почти из всех городов и районов области, а также Ненецкого автономного округа. [1]

Работы участников конкурса оценивались по шести номинациям:

1) задачи об Архангельской области в годы Великой Отечественной войны;
2) задачи о Кенозерском национальном парке и национальном парке «Онежское Поморье»;
3) задачи о храмах и монастырях Северной земли;
4) задачи о людях, прославивших Архангельскую землю;
5) задачи о тайнах и красотах Северной земли;
6) задачи об истории освоения Арктики. [1]

Задачи победителей и призёров конкурса обычно публикуются в сборнике материалов ежегодной научной конференции «Научно-исследовательская деятельность школьников в области математики, прикладной математики и информатики».

Приведём примеры задач по нескольким номинациям.

Первая номинация: «Задачи об Архангельской области в годы Великой Отечественной войны». Мы считаем, что при решении задач из данной номинации развиваются гражданские качества – ответственность за судьбу страны, уважение её прошлого, потому что данные задачи рассказывают не только о подвигах людей на фронте, но и о подвигах людей в тылу. Эти задачи показывают учащимся, что каждый человек проявил небывалую стойкость во время войны, и готовность отдать свою жизнь за судьбу страны. Приведем пример задачи на тему «Проценты»

Задача «В фонд обороны Родины» (*Литвиненко Д.*)

За годы войны жители Ленского района активно участвовали в перечислении средств в фонд обороны Родины. В 1941 году было перечислено 15% общей суммы, в 1942 году – 52%, в 1944 году – 4%, в 1945 году – 0,6%. Сколько всего средств поступило за годы войны с 1941 по 1945 годы, если в 1942 году средств поступило на 407 тыс. руб. больше, чем в 1941 году? Постройте круговую диаграмму, иллюстрирующую поступление средств с 1941 по 1945 годы.

Вторая номинация: «задачи о Кенозерском национальном парке и национальном парке «Онежское поморье» и пятая номинация: «Задачи о тайнах и красотах Северной земли». Использование задач этих номинаций направлено на формирование гражданских качеств: любовь к Родине, бережное отношение к природе. Многие учащиеся мало знают о природе своего родного края, о её особенностях и уникальности. А незнание ведет к безразличию. Поэтому мы считаем, что узнав про свой край, учащиеся будут ценить, оберегать природу своего родного края, страны.

Приведен пример задачи на тему «Действия с десятичными дробями».

Задача «Пинежские пещеры» *(Волков Д.)*

Пинежские пещеры – сказочное царство льда, скрытое от человеческих глаз глубоко под землёй. Проточенные водой ходы тянутся в недра земли на многие километры. Застывшие струи, фигурные сосульки и ледяные потолки гротов покрыты мягкими и хрупкими снежинками. Зимой пещеры превращаются в изумительный по красоте хрустальный дворец. Подземные карстовые гроты и системы пещер Пинежья – самые протяжённые и многочисленные на европейской части России. Возраст пещер – от 8 до 16 тысяч лет.

Длина пещер Северный Сифон и Сабуровская составляет 5,721 км, а длина пещер Ленинградская и Сабуровская 4,074 км. Чему равна длина каждой из этих пещер, если их общая длина 8,691 км? Решите задачу двумя способами.

Третья номинация: «задачи о храмах и монастырях Северной земли». Задачи данной номинации направлены на воспитание бережного отношения к национальным богатствам страны, языку, культуре, традициям родного края.

«Ремонт иконостаса в храме Богоявления в Ошевенске» *(Патракеев В.)*

В Ошевенске наличие церкви фиксируется документально в 1648 году. Богоявленский храм Ошевенска был построен в 1787 году на месте сгоревшей церкви 17 века. Внутри храма находится четырехъярусный резной иконостас. В 1890 годах ошевенцы решили начать ремонт иконостаса, который затянулся на несколько лет. В 1901 г. они собрали на 57 рублей 62½ копейки меньше, чем в 1900 г. В 1899 г. дважды постольку, как в 1901 г. и ещё 25 рублей. В 1897 г. в 2 раза больше, чем за 1900 и 1899 года вместе, с недоимкой в 3 рубля 8 копеек и на 199 рублей 54½ копейки больше, чем за последующие четыре года. Сколько денег было потрачено на ремонт иконостаса, если после ремонта осталось 87 рублей 54½ копейки?

Шестая номинация: «задачи об истории освоения Арктики». Задачи этой номинации способствуют воспитанию чувства национальной гордости и патриотизма. Данные задачи познакомят учащихся с историей освоении Арктики, с людьми, начавшими её освоение. Приведем пример задачи по теме «Приближенное значение чисел. Округление».

Задача «Героический дрейф ледокола «Георгий Седов» *(Ядовина В.)*

Осенью 1937 года ледокол «Георгий Седов», а также пароходы «Садко» и «Малыгин» оказались зажатыми во льдах Северного Ледовитом океана. В ледовом плену оказались 217 человек. В апреле было организовано три авиаэкспедиции по спасению людей. Вторая смогла вывезти на 61 человека больше чем первая, а третья на 4 меньше чем вторая. После этого на кораблях осталось на 11 членов экипажей больше, чем вывез первый рейс. Лишь 28 августа ледокол «Ермак» вывел суда «Садко» и «Малыгин» из льдов. На них ушло в 1,2 раза больше человек, чем осталось дрейфовать на «Георгии Седове» до 1940 года. Сколько человек было эвакуировано самолётами? Сколько осталось на «Георгии Седове», превращенном в плавающую полярную станцию?

Краеведческие математические задачи можно использовать на различных этапах уроков, во внеклассной работе, на занятиях кружка, факультатива, комбинированных уроках.

Мы выделяем следующие этапы работы с краеведческой математической задачей:

1) изучение содержания задачи, поиск значений неизвестных слов или специальных терминов;
2) проведение анализа краеведческого материала, включенного в сюжет задачи;
3) проведение анализ задачи и нахождение возможных путей решения;
4) составление плана решения задачи;
5) решение задачи по составленному плану;
6) проведение анализа решения;
7) проведение исследования задачи с целью нахождения других возможных вариантов решения данной задачи;
8) запись ответа;

9) рефлексия.

Первые два этапа являются наиболее значимыми для нас.

Рассмотрим их реализацию на конкретном примере задачи из номинации «Архангельская область в годы Великой Отечественной войны»:

25 августа 1942 года, выполняя очередной рейс, ледокольный пароход «А. Сибиряков» встретил в Карском море, недалеко от острова Белуха, немецкий крейсер "Шеер", который бы направлен для уничтожения караванов судов. Капитан парохода вступил в бой, надеясь задержать крейсер, насколько удастся дольше, чтобы дать возможность уйти в безопасное место транспортному каравану, находившемуся неподалёку. Бой был недолгим, наши моряки мужественно сражались. Современный крейсер "Шеер" имел 28 орудий различного калибра, а старый грузовой пароход - всего 4 пушки. По количеству орудий ледокол сильно уступал хорошо вооружённому крейсеру. Кроме того, скорость немецкого крейсера была на 13 узлов больше, чем у нашего парохода. Пароход "А. Сибиряков" был разбит и затоплен, часть команды погибла, другая - взята в плен. Планы немецкого крейсера были сорваны, транспортный караван был спасён ценой жизни бесстрашных моряков.

Сколько километров в час составляла скорость "А. Сибирякова", если скорость сближения судов была 39 узлов. Результат округлить до единиц. (Узел - единица измерения скорости корабля, 1 узел = 1,852 км/ч).

Анализ данной задачи – вопросы, которые может задать учитель.

1. О чем идет речь в данной задачи? Есть ли в данной задаче неизвестные выражения, понятия?
2. Слышали ли Вы о данном событии? Почему силы были не равны? Почему капитан принял решение вступить в бой, а не сдаться?

Анализ данной задачи

Данная задача рассказывает о подвиге ледокольного парохода " А. Сибиряков". Несмотря на превосходящие силы противника, команда парохода приняла решение вступить в бой и удерживать противника как можно дольше, чтобы транспортный караван ушел как можно дальше. Моряки понимали, что их пароход не сможет выиграть данный бой и что для них это сражение будет последним, но все равно приняли бой, так как знали, что только они смогут не дать крейсеру затопить караван. Это задача ярко показывает, что каждый человек понимал свою ответственность за судьбу страны, что нужно бороться до конца превозмогая страх. Они отдали свою жизнь за жизнь других, за судьбу Родины.

В современной школе больше внимание уделяется решению готовых задач и почти не осуществляется деятельность по их составлению. Можно выделить сразу несколько положительных сторон от привлечения учащихся к составлению задач с краеведческим содержанием, перечислим их:

1) в процессе составления краеведческой математической задачи учащийся получает возможность выбрать тот краеведческий материал, который ему более интересен (история своего города или села, своих предков, культуры, фольклора родного края);

2) до того, как перейти к процессу составления математической краеведческой задачи, учащийся концентрируется на той области, к которой испытывает непосредственный интерес, проводит научный поиск, удовлетворяет познавательный интерес, после чего переходит к непосредственному составлению математической задачи с краеведческим содержанием;

3) составленная краеведческая задача является авторским продуктом творческого труда учащегося. Следовательно, учащийся может не только показать свою задачу родителям и одноклассникам, предоставить задачу учителю для проверки на предмет правильности ее составления, но и опубликовать в сборнике задач, отправить на конкурс краеведческих задач или использовать в качестве социальной рекламы для привлечения внимания общественности к математическому образованию и т. д.

Воспитание гражданских качеств учащихся при решении краеведческих математических задач будет более эффективным, если учитель будет использовать следующие интерактивные методы организации деятельности учащихся: работа в парах, групповая работа, метод проектов, дидактические игры и др.

Литература

1. Региональный конкурс краеведческих математических задач «Архангельская область в математических задачах» [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://itprojects.narfu.ru/arhkonk/
2. Савельев В.К. Гражданское воспитание курсантов как фактор обеспечения безопасности России: автореферат дис. … канд. пед. наук: 13.00.01 /В.К. Савельев – Кемерово, 2004.
3. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. – М.: Просвещение, 2016. – 61 с.

УДК 378

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ТРИ-ТКАНЕЙ В ПОДГОТОВКЕ БАКАЛАВРОВ К ПОПУЛЯРИЗАЦИИ МАТЕМАТИКИ

Уткина Т.И., доктор педагогических наук, профессор,
Орский гуманитарно-технологический институт (филиал)
Оренбургского государственного университета, г. Орск
UtkinaTI@yandex.ru

Уткин А.А., кандидат физико-математических наук, доцент,
Орский гуманитарно-технологический институт (филиал)
Оренбургского государственного университета, г. Орск
UtkinAA@yandex.ru

Аннотация. Работа посвящена возможности использования дисциплин из вариативной части образовательной программы в подготовке бакалавров к культурно-просветительской деятельности относительно популяризации математики.

Ключевые слова: три-ткань, популяризация математики, культурно-просветительские программы

QUESTIONS OF THE THEORY OF THREE-WEBS IN TRAINING OF BACHELORS TO THE POPULARIZATION OF MATHEMATICS

T.I. Utkina, doctor of pedagogics, professor,
Orsk humanitarian technological institute(branch)of Orenburg state university, Orsk
UtkinaTI@yandex.ru

A.A. Utkin, candidate of physics and mathematical sciences, docent,
Orsk humanitarian technological institute(branch)of Orenburg state university, Orsk
UtkinAA@yandex.ru

Abstract. The work is devoted to the possible use of disciplines of variable part of educational programs in training of bachelors to the cultural and educational activities concerning the popularization of mathematics.

Keywords: three-webs, popularization of mathematics, cultural and educational programs

Актуальность вопроса подготовки бакалавров педагогического образования к проведению работ по математическому просвещению и популяризации математики обусловлена требованиями Концепции развития математического образования в Российской Федерации [1], профессиональным стандартом «Педагог» [3], Концепцией Федеральной целевой программы развития образования на 2016 - 2020 годы [2].

Исследование, проведённое на базе Орского гуманитарно-технологический института, позволило выявить и апробировать эффективную технологию подготовки студентов к организации работ по популяризации математики, которая ориентирована на формирование профессиональной компетентности будущего бакалавра педагогического образования относительно способности разрабатывать и реализовывать культурно-просветительские программы в условиях изучения дисциплины «Вопросы теории три-тканей» из вариативной части образовательных программ по направлению подготовки Педагогическое образование (с одним и двумя профилями подготовки «Математика» и «Математика», «Физика»). Суть технологии состоит в овладении студентами методологическими знаниями по проектированию, планированию и организации работ по математическому просвещению и популяризации математики. Технология строится на основе компетентностного, процессного, интегративного, деятельностного и личностного подходов. В основу положены принципы важности математического образования для будущего страны, связи математики с жизнью и производственной практикой, преемственности и систематичности, гордости за достижение российских ученых, сочетания управления с развитием самостоятельности, согласованности требований ФГОС общего и высшего образования. Структура технологии состоит из следующих компонентов и связей с ними: ознакомление студентов с теоретическими основами популяризации математики; формирование компетенций по планированию и проектированию научно-популярных лекций; публичное предъявление научно-популярных лекций (на семинарских занятиях, в общеразвивающих и предпрофессиональных программах в организациях среднего общего образования).

Общая трудоёмкость курса «Вопросы теории три-тканей» составляет 3 зачетных единицы (108 академических часов) и включают три раздела: квазигруппы и лупы (32 часа, из них 4 лекций, 8 практических занятий и 20 самостоятельная работа), общие вопросы теории три-тканей (48 часов , из них 4 лекций, 10 практических занятий и 34 самостоятельная работа) , математические модели (28 часов , из них 4 лекций, 4 практических занятий и 20 самостоятельная работа). Методическим средством формирования готовности студентов к проведению работ по популяризации математики выступает комплекс специальных учебно-методических задач, выполняемых в условиях выполнения планируемой самостоятельной работы (курсовые работы, научно-популярные лекции, выпускные квалификационные работы) по этому курсу.

Понятие три-ткани позволяет естественным образом интегрировать различные математические структуры, изучаемые студентами в дисциплинах вариативной части образовательной программы. Три-ткань – математическая структура, можно сказать, универсального уровня, позволяющая выявить подход, направленный на формирование целостного представления о математических структурах и их практических приложениях, в том числе и в работе по математическому просвещению и популяризации математики.

Три-ткань, рассматриваемая с точностью до локальных диффеоморфизмов, однозначно определяется своим уравнением $z = f(x,y)$, где f – произвольная гладкая функция. Поэтому теория тканей имеет разнообразные приложения в разных разделах математики и физики. Но геометрия тканей тесно связана и с многими другими «классическими» областями математики. В первую очередь можно выделить: вопросы аксиоматического обоснования элементарной и проективной геометрий; алгебраическую теорию групп и теорию непрерывных групп Ли; проективную и алгебраическую геометрии; классическую дифференциальную геометрию Гаусса; проективную дифференциальную геометрию; риманову геометрию и ее обобщения; вариационное исчисление; теорию функций; формы Пфаффа и дифференциальные уравнения; теорию расслоенных пространств; теорию квазигрупп и луп, конформную геометрию.

Сущностные характеристики понятия три-ткани связаны с криволинейной тканью и методом внешних форм. Криволинейная ткань рассматривается как совокупность нескольких семейств гладких кривых, заданных на плоскости, на поверхности однородного пространства или на некотором гладком двумерном многообразии. Через каждую точку области определения проходит по одной линии из каждого семейства, линии ткани в каждой точке трансверсальны, и у каждой точки есть окрестность, в которой каждое из семейств образует слоение. Криволинейные ткани различают по количеству семейств кривых, их составляющих (2-ткани или сети, три-ткани, d-ткани), и по отношению эквивалентности (локальных диффеоморфизмов), сохраняющего трансверсальность слоев. Основной геометрический образ в дифференциально-топологической теории тканей – конфигурации, образованные слоениями ткани. При локальных диффеоморфизмах сохраняется свойство конфигураций быть замкнутыми.

Заметим, что в дифференциально-топологической теории тканей не имеет смысла рассматривать сети (2-ткани), поскольку подходящим локальным диффеоморфизмом всякую сеть можно отобразить (локально) на декартову сеть. Но три-ткани уже представляют собой нетривиальный объект, так как не существует, вообще говоря, локального диффеоморфизма, который все три семейства отображает на три семейства параллельных прямых.

Поскольку два семейства линий произвольной три-ткани W всегда можно «выпрямить» и принять за декартову сеть, то в некоторой окрестности ее (т.е. три-ткань) можно задать уравнением $z = f(x, y)$, причем линии третьего семейства суть линии уровня функции f. Ограничение на функцию $f(x, y)$ минимально: уравнение ткани должно быть однозначно разрешимо (локально) относительно каждой из переменных x и y. Последнее обстоятельство делает теорию тканей приложимой к любой теории, где объектом изучения является гладкая функция двух переменных. Это, например, некоторые физические законы, двусторонне разрешимые бинарные операции (квазигруппы и лупы), дифференциальные уравнения.

В основу подхода формирования понятия три-ткани у будущего учителя математики положен метод внешних форм. В курсе предусматриваются задания на исследование относительных инвариантов кривизны три-ткани, определяемой дифференциальным уравнением.

Следует заметить, что три-ткани могут выступать инструментом классификации дифференциальных уравнений с точностью до изотопических преобразований, в чем и сказывается их универсальность.

Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = F(x, y)$ определяет три-ткань состоящую из семейств линий $x = const$, $y = const$, $f(x, y) = const$ причем последнее семейство состоит из интегральных кривых уравнения $y' = F(x, y)$. Обратно, каждая криволинейная три-ткань W эквивалентна некоторой три-ткани $\widetilde{W}$, состоящей из трех вышеуказанных семейств, причем слои третьего слоения ткани $\widetilde{W}$ являются интегральными кривыми некоторого обыкновенного дифференциального уравнения $f_x dx + f_y dy = 0$.

Уравнение три-ткани $z = f(x, y)$ определено с точностью до изотопических преобразований, то есть локальных диффеоморфизмов вида $x = \alpha(\tilde{x}),\quad y = \beta(\tilde{y}),\quad z = \gamma(\tilde{z}),$ определяющих замену параметров на слоях ткани. Для рассматриваемых три-тканей параметром в третьем слоении является постоянная интегрирования. Таким образом, уравнение $y' = F(x, y)$ определено с точностью до замен вида $x = \alpha(\tilde{x}),\quad y = \beta(\tilde{y}),$ переводящих декартову сеть $x = const$, $y = const$ снова в декартову сеть. Таким образом, можно классифицировать обыкновенные дифференциальные уравнения с точностью до изотопических преобразований при помощи дифференциально-геометрических инвариантов соответствующей три-ткани. Здесь, в качестве примера, рассмотрим случаи, когда три-ткань W определяется линейным дифференциальным уравнением первого порядка, уравнением Риккати и уравнением Абеля первого рода.

1. Пусть три-ткань W определяется линейным дифференциальным уравнением первого порядка

$y' = f(x)\, y + g(x)$. (1) Уравнение (1) с помощью изотопического преобразования

$f(x)dx = d\tilde{x}$ приводится к виду $dy + (y + \tilde{g}(\tilde{x}))d\tilde{x} = 0.$ (2)

Опустив тильду, обозначим $\omega_1 = (y + g(x))dx,\quad \omega_2 = dy.$ (3)

Определим слоения три-ткани W уравнениями Пфаффа $\omega_1 = 0,\quad \omega_2 = 0,\quad \omega_1 + \omega_2 = 0$ (4)

соответственно. Формы ω_1 и ω_2 удовлетворяют структурным уравнениям три-ткани

$d\omega_1 = \omega_1 \wedge \omega,\qquad d\omega_2 = \omega_2 \wedge \omega,$ (5) $\qquad d\omega = b\,\omega_1 \wedge \omega_2.$ (6)

Так как $d\omega_2 = 0$, то из (4) следует $\omega = \lambda\omega_2$. (7)

Дифференцируя (3) с учетом уравнений структуры (5) и (6), находим $\omega = -\dfrac{\omega_2}{y + g(x)}$. (8)

Дифференцируя (8) внешним образом, получаем $b = \dfrac{g'}{(y+g)^3}$. (9)

Итак, получена кривизна b три-ткани, задаваемой линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Из (9) находим ковариантные производные кривизны

$$b_1 = \frac{g''}{(y+g)^4} - \frac{3(g')^2}{(y+g)^5},\qquad b_2 = -\frac{g'}{(y+g)^4}. \tag{10}$$

Вторые ковариантные производные имеют вид:

$$b_{21} = -\frac{g''}{(y+g)^5} + \frac{4g'^2}{(y+g)^6},\qquad b_{22} = \frac{g'}{(y+g)^5}. \tag{11}$$

Исключая из уравнений (9) – (11) переменные g, g' и т.д. получим соотношения, связывающие относительные инварианты три-ткани: $bb_{22} - (b_2)^2 = 0,\qquad bb_{21} - b_1 b_2 - b^3 = 0.$ (12)

Верно и обратное утверждение, т.е. три-ткань, для которой выполняются соотношения (12), соответствует дифференциальное уравнение первого порядка [2] .

Итак, инварианты три-тканей, определяемых линейным дифференциальным уравнением, и только таких три-тканей удовлетворяют соотношениям (12).

2. Пусть три-ткань W задается дифференциальным уравнением Риккати

$$y' = f(x)\, y^2 + g(x)\, y + h(x). \tag{13}$$

С помощью изотопических преобразований это уравнение может быть приведено к виду

$$dy + (y^2 + g(x)\, y + h(x))dx = 0. \tag{14}$$

Введем обозначения $\omega_1 = (y^2 + g(x)\, y + h(x))dx,\qquad \omega_2 = dy.$ (15)

В результате уравнение, определяющее третье слоение, примет вид $\omega_1 + \omega_2 = 0$, а это означает, что структурные уравнения данной три-ткани W должны иметь вид (5), (6). Поступая как в первом случае, получаем

$$\omega = \lambda\omega_2, \qquad \Rightarrow \qquad \omega = -\frac{2y+g}{y+g(x)}\omega_2, \qquad (16) \qquad b = \frac{g'y^2+2h'y+h'g-hg'}{(y^2+gy+h)^3}, \qquad (17)$$

$$b_2 = -\frac{(-2h'+gg')y^2+2(2g'h-gh')y+2hh'-g^2h'+gg'h}{(y^2+gy+h)^4} \qquad (18)$$

$$b_{22} = \frac{(g^2-4h)(g'y^2+2h'y+h'g-hg')}{(y^2+gy+h)^5} \qquad (19)$$

$$b_{222} = \frac{[(gg'-2h')y^2+2(2g'h-gh')y+2hh'-g^2h'+gg'h](g^2-4h)}{(y^2+gy+h)^6} \qquad (20)$$

Исключая из уравнений (17) – (20) переменные g, h и т.д., придем к соотношению $b_{222}b - b_{22}b_2 = 0$. (21)

Верно и обратное утверждение, т.е. три-ткани, для которой выполняются соотношения (21), соответствует дифференциальное уравнение Риккати [3].

Итак, инварианты три-тканей, определяемых дифференциальным уравнением Риккати, и только таких три-тканей удовлетворяют соотношениям (21).

3. Пусть три-ткань определяется дифференциальным уравнением Абеля первого рода $y' = y^3 + f(x)\,y^2 + g(x)\,y + h(x)$. Формы ω_1 и ω_2 такой три-ткани имеют вид

$$\omega_1 = (y^3 + f(x)\,y^2 + g(x)\,y + h(x))dx, \qquad \omega_2 = dy, \qquad (22)$$

а уравнение третьего слоения $\omega_1 + \omega_2 = 0$ и так же выполняются соотношения (5) и(6).

Рассмотрим следующие три частных случая уравнения Абеля.

а) Случай $g(x) = 0$, $h(x) = 0$. Дифференцируя уравнения (22) как и в предыдущих случаях получаем

$$b = \frac{f'}{y^2(y+f)^3}, \qquad b_2 = \frac{f'(y+2f)}{y^3(y+f)^4}, \qquad b_{22} = \frac{f'(3y^2+8fy+6f^2)}{y^4(y+f)^5}, \qquad (23)$$

$b_{222} = \dfrac{f'(15y^3+50fy^2+58f^2y+24f^3)}{y^5(y+f)^6}$. Исключение из формул (23) переменных приводит к соотношению $b^2(b_{222}\,b - b_{22}b_2)^2 = 18\,(b_{22}b - b_2^2)^3$. (24)

Итак, относительные инварианты три-ткани, определяемой уравнением Абеля $y' = y^3 + f(x)\,y^2$, удовлетворяют соотношению (24).

б) Случай $f(x) = 0$, $g(x) = 0$. Для данного случая, получаем

$$b = \frac{3h'y^2}{(y^3+h)^3}, \quad b_2 = -\frac{h'(3y^4-6h)}{(y^3+h)^4}, \quad b_{22} = -\frac{h'(3y^6+24hy-6h^2)}{(y^3+h)^5}, \quad b_{222} = -\frac{h'(9y^6+18hy^3+90h^2)y^2}{(y^3+h)^6}. \qquad (25)$$

Исключение из формул (25) переменных приводит к соотношению

$$b^2(b_{222}\,b - b_{22}b_2)^2 = -\,2\,(b_{22}b - b_2^2)^3. \qquad (26)$$

Итак, относительные инварианты три-ткани, определяемой уравнением $y' = y^3 + f(x)$, связаны соотношением (26).

в) Случай $f(x) = 0$, $h(x) = 0$. Уравнение $y' = y^3 + g(x)\,y$ (уравнение Бернулли) подстановками $y = z^{-\frac{1}{2}}$ и $y = z^{\frac{1}{2}}$ сводится к линейному дифференциальному уравнению или к уравнению Риккати. Вследствие этого относительные инварианты ткани должны удовлетворять условиям

$$bb_{22} - (b_2)^2 = 0, \qquad b_{222}b - b_{22}b_2 = 0. \qquad (27)$$

Экспериментально проверено положительное влияние разработанной технологии на развитие у будущих учителей компонентов компетентности к организации работ по математическому просвещению и популяризации математики.

Литература

1. Концепция развития математического образования в Российской Федерации [Электронный ресурс], утвержденная распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р, 2013. – 9 с. - Режим доступа:
http://www.firo.ru/wp-content/uploads/2014/12/Concept_mathematika.pdf

2. Концепция Федеральной целевой программы развития образования на 2016-2020 гг. [Электронный ресурс], утвержденная распоряжением Правительства Российской Федерации от 29 декабря 2014 г. № 2765-р, 2014. - 123 с. - Режим доступа: http://government.ru/media/files/mlorxfXbbCk.pdf

3. Профессиональный стандарт "Педагог (педагогическая деятельность в сфере дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования)(воспитатель, учитель)" [Электронный ресурс], утвержденный приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 18 октября 2013 г. № 544н, 2013. – 24 с. - Режим доступа: http://fgosvo.ru/uploadfiles/profstandart/01.001.pdf

4._Уткин А.А. Три-ткани, определяемые линейным дифференциальным уравнением / А.А. Уткин, А.М. Шелехов // Изв. Вузов. Математика. – 2001. – №11. – С. 54-57.

5. Уткин А.А. Три-ткани, определяемые уравнением Риккати / А.А. Уткин, А.М. Шелехов // Изв. Вузов. Математика. – 2004. – № 11. – С. 87-90.

УДК 372

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Фирстова Н.И., кандидат педагогических наук, доцент,
Московский педагогический государственный университет, г. Москва
steva54@mail.ru

Аннотация. В статье рассмотрен процесс исследования геометрических задач и найденных решений с позиции свойств геометрической ситуации – конфигураций.

Ключевые слова: геометрические задачи, исследование, полнота решения задачи.

THE STUDY OF THE GEOMETRIC TASKS SOLVING

N.I. Firstova, candidate of pedagogic sciences, associate professor,
Moscow state pedagogical University, Moscow
steva54@mail.ru

Abstract. The article considers the process of studying geometry problems and their solutions from the standpoint of the geometric situation properties – configurations properties.

Keywords: geometrical problems, the completeness of the problem solution studying.

На современном этапе образование характеризуется усилением внимания к ученику, к его самопознанию, обращенностью ученика к окружающему миру и к себе, к умению искать и находить свое место в жизни. Образование предполагает формирование в сознании человека образа окружающего мира, который отражается в понятиях, суждениях, умозаключениях. Поэтому важнейшим условием образования человека является создание и усвоение им системы научных знаний. Умственное развитие заключается в способности переосмысливать старые и формировать новые понятия. Суть получения хорошего образования в том, что человек не просто усвоил систему понятий, суждений и умозаключений, но и овладел методикой научного поиска, стал способным к творческой деятельности. И математика, как никакой другой предмет, создает благоприятные условия для этого.

Основной задачей обучения математике в школе является развитие логического мышления, умения поиска рациональных путей для решения проблем, способности аргументировано отстаивать свои убеждения. В качестве основного средства формирования математической деятельности учащихся выступают задачи.

В решении любой задачи присутствует крупица открытия, а решение задачи собственными силами воодушевляет и мотивирует. Такие эмоции могут пробудить учащихся к умственной работе и на всю жизнь оставить свой отпечаток на уме и характере.

Решение математических задач является наиболее трудной частью деятельности школьников при изучении математики, обучение учащихся этому виду деятельности занимает одно из главных мест в общем процессе обучения. Школьников обучают математике не только лишь затем, чтобы они овладели определенной суммой математических знаний, но главное, чтобы эти знания они могли эффективно использовать в дальнейшей жизни для решения разнообразных задач, возникающих в практической деятельности. Усвоить же математические знания и научиться их применять можно лишь, решая задачи, используя при этом понятия, теоремы, зависимости в различных ситуациях.

В психологии, дидактике известны попытки дать определение задачи. Наиболее приемлемым представляется определение, данное Л.Л.Гуровой: «Задача – объект мыслительной деятельности, содержащий требование некоторого практического преобразования или ответа на теоретический вопрос посредством поиска условий, позволяющих раскрыть связи (отношения) между известными и неизвестными ее элементами».

Согласно Л.М.Фридману по отношению между элементарными условиями и требованиями задачи делятся на такие виды: 1) определенные; 2) недоопределенные; 3) переопределенные.

Далее Фридман Л.М. указывает: «Если в задаче имеется один главный объект, а остальные являются его частями (элементами), то возможны такие случаи: 1) условия задачи определяют единственный объект; 2) условия определяют несколько различных главных объектов; 3) условия определяют бесконечное множество главных объектов; 4) условия задачи не определяют никакого главного объекта».

Как известно процесс решения математических задач состоит из следующих основных этапов: 1. Анализ задачи. 2. Схематическая запись условия. 3. Поиск способа решения задачи. 4. Осуществление способа решения. 5. Проверка найденного решения. 6. Исследование задачи и найденного решения. 7. Формулирование ответа задачи . 8. Учебно-познавательный анализ задачи и ее решения.

Из вышеперечисленных этапов решения Л.М.Фридман обязательными считает 1, 3, 4 и 7-й, а 8 этап называет особенным, который применяется к наиболее важным типовым задачам.

Этап исследования решения задачи (№6) или, как его еще называют, этап исследования полноты решения задачи, достойного внимания в данных комментариях не получил, хотя, как было сказано ранее, условия в определенных задачах могут задавать либо один главный объект, либо несколько главных объектов.

Подчеркнем, что термин “задача, содержащая неопределенность в условии” целесообразно применять вовсе не в каждом случае, когда существует несколько конфигураций удовлетворяющих условию задачи, но именно тогда, когда различны искомые элементы конфигураций. Например, если требуется найти радиус окружности, описанной около треугольника со стороной а и противолежащим углом α , то искомый радиус во всех соответствующих конфигурациях имеет одно и то же значение, радиус определен однозначно, и назвать такую задачу предложенным термином вряд ли естественно. Данный термин нецелесообразно применять к задачам на построение. Заданные в условии задачи на построение элементы конфигурации позволяют описать все множество требуемых конфигураций, а единственность, конечность или бесконечность числа таких конфигураций с точки зрения постановки задачи несущественна.

Таким образом, задачи, содержащие неопределенность в условии могут выступать средством развития исследовательской деятельности ученика. Включение таких задач в спектр геометрических задач школьного курса позволит повысить эффективность обучения математике.

В школьных задачах довольно редко предлагаются такие характеристики фигур, которые порождают неоднозначность их понимания. Характеристики отдельных элементов фигур требуют от учащихся внимательного отношения к условию, так как оно содержит некоторый вид неопределенности.

Вследствие отсутствия некоторых данных в задаче, дать четкий ответ на ее требование нельзя. Кроме того, задачи с неопределенным условием можно разделить на два типа: первые без введения необходимых данных решить нельзя, вторые приводят к неопределенности в ответах (несколько ответов).

Точно указать недостающие данные можно только в том случае, когда учащийся воспринимает формальную структуру задачи, способен установить взаимосвязь всех объектов задачи

Как правило, решение задачи с неопределенным условием завершается неопределенным ответом, в котором искомая величина может принимать значения из некоторого числового множества. Выявление этого множества и должно стать целью решения такой задачи, что достигается благодаря таким этапам решения задачи, как анализ задачи и исследование решения задачи.

Планируемый результат: анализировать условие задачи; опознавать вид задачи; прогнозировать ход решения задачи; устанавливать аналогии, исследовать решение задачи.

Умения, характеризующие достижение этого результата: выделить условие и требование задачи; выделить в задаче все отношения между элементами; выявить и установить характер каждого элемента; выделить достаточные условия для выполнения требования задачи; выполнить исследование решения задачи.

Рассмотрим примеры.

Класс: 7.

Тема: «Окружность».

Задача: Даны две окружности, радиус одной из них 3 см, расстояние между центрами 10 см. Пересекаются ли эти окружности?

Решение: Пусть r_1 см радиус первой окружности, r_2 см – радиус второй окружности. Если $r_1 + r_2 < 10$, то окружности не пересекаются, если $r_1 + r_2 \geq 10$, то окружности пересекаются. Т. о. для решения задачи требуется знать радиус второй окружности.

Класс: 9.

Тема: «Площадь параллелограмма».

Задача: В параллелограмме стороны 4 см и 5 см, а высота 3 см. Найти площадь параллелограмма.

Ответ: 12 см^2 или 15 см^2.

Вывод: В задаче не указано, к какой стороне проведена высота в параллелограмме, однако, для обоих случаев задача имеет решение.

Наиболее типичными случаями неопределенности в задаче могут являться следующие:

1. Если в задаче не указан вид треугольника в зависимости от угла, то ответы для остроугольного, прямоугольного и тупоугольного треугольника могут быть различными.

2. Неопределенность в решении задач может возникнуть при использовании некоторого приема ее решения. Так, например, во многих задачах используется нахождение синуса угла треугольника. Но $\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha)$, то есть нахождение синуса угла еще не позволяет однозначно определить сам угол – он может быть тупым или острым. Значит, возможно рассмотрение нескольких случаев в зависимости от вида треугольника. Изображение центра описанной окружности около треугольника также может привести к неопределенности. В условии задачи говорится о том, что около треугольника описана окружность, но расположение центра описанной окружности относительно данного треугольника не указано. Следовательно, вид треугольника определяет расположение центра:

1) если треугольник остроугольный, то центр – внутри треугольника;

2) если тупоугольный, то центр лежит вне треугольника;

3) если треугольник прямоугольный, то центр описанной окружности лежит на стороне (гипотенузе) треугольника.

В некоторых задачах треугольник задан двумя сторонами и высотой, опущенной на третью сторону, но не указано, где находится основание высоты. В зависимости от места нахождения основания высоты треугольника, вид треугольника определяется неоднозначно.

3. Неоднозначность условия и решения может возникнуть при произвольном выборе углов, удовлетворяющих условию задачи. Так, например, если в треугольнике биссектрисы или медианы образуют с его сторонами углы некоторой величины, то рассмотрению подлежит каждый из образованных углов.

4. Неопределенность условия и решения задачи может возникнуть в связи с произвольным выбором заданных или искомых точек, удовлетворяющих условию задачи. Часто приходится рассматривать случаи, когда точка находится на отрезке или вне отрезка. Точка может принадлежать или не принадлежать некоторой фигуре и т.д.

5. Неопределенность условия и решения задачи может возникнуть при произвольном выборе одноименных линейных элементов, удовлетворяющих условию задачи. Так, например, если в задаче фигурирует диагональ ромба, но не указано, какая конкретно (большая или меньшая), то рассмотрению подлежит каждая из диагоналей, в результате чего можно получить неоднозначность в ответе задачи.

6. Неопределенность решения может возникнуть в связи с различным положением ортогональной проекции на некоторую плоскость одной или нескольких точек заданной фигуры. Например, если плоскости боковых граней тетраэдра составляют с плоскостью основания равные углы, то вершина этого тетраэдра может проектироваться как в центр вписанной в основание окружности, так и в центр вневписанных окружностей.

7. Неопределенность условия и решения могут возникнуть в задачах о нескольких окружностях, сферах, неопределенность может возникнуть в результате различного положения окружностей относительно друг друга. Например, в задаче может говориться о касании двух окружностей, но не указано, каким образом они касаются: внутренним или внешним. Окружности могут пересекаться, но не указано положение их центров относительно общей хорды: либо в одной полуплоскости относительно общей хорды, либо в разных полуплоскостях. Таким образом, в зависимости от конкретной ситуации, расстояние между центрами окружностей определяется неоднозначно.

8. Неопределенность условия и решения может возникнуть из-за произвольного выбора положения заданных фигур. Например, если требуется найти расстояние между заданными точками данных фигур, но не указано положение данных фигур относительно друг друга. Для полноты решения требуется рассмотреть каждый из возможных случаев их расположения.

Литература

1. Гуртовой О.С. Некоторые приемы, облегчающие решение геометрических задач // Математика в школе. – 1996. – №2. – С. 61
2. Дегтянникова И.Н. Построение моделей к задачам с полными и неполными данными // Математика в школе. – 2001. – №2. – С.15
3. Дорофеев Г.В. О существовании конфигурации в геометрических задачах // Математика в школе. – 1987. – № 5. – С.40
4. Игнатенко В.З. Сюрпризы биссектрисы // Математика в школе. – 1998. – №5. – С. 42
5. Изаак Д.Ф. Поиски решения геометрической задачи // Математика в школе. – 1998. – №.6 – С. 30
6. Изаак Д.Ф. Поиски решения, исследование и обобщение задач по геометрии // Математика в школе. – 1998. – №2. – С.83
7. Карелина Т.М. О проблемных ситуациях на уроках геометрии // Математика в школе. – 1999. – №6. – С. 19
8. Кушнир И.А. Об исследовании неопределенности в геометрических задачах // Математика в школе. – 1991. – №3 – С. 69
9. Орлова Л.Э., Столяр А.А. Геометрические ситуации и связанные с ними задачи // Математика в школе. – 1987. – №5. – С. 33
10. Тарасенкова Н.А. «Не верь глазам своим» // Математика в школе. – 1998. – №5. – С. 19
11. Фридман Л.М., Турецкий Е.И. Как научиться решать задачи. Книга для учащихся. – М.: Просвещение, 1989. – 192с.

УДК 372.851

ФУЗИОНИЗМ В ГЕОМЕТРИИ 7-9 КЛАССОВ КАК СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ ЛОГИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ

Ходот Т.Г., доцент кафедры геометрии,
Российский педагогический университет им. А. И. Герцена, г. Санкт-Петербург
tghodot@mail.ru

Аннотация. В предлагаемой статье на задачном материале иллюстрируется расширение возможности развития логического мышления школьников 7-9 классов при включении пространственных объектов в курс планиметрии средней школы.

Ключевые слова: логическое мышление, фузионизм, школьная геометрия, задачи

FUSIONISM IN GEOMETRY FOR GRADES 7-9 AS A METOD FOR DEVELOPMENT OF LOGICAL THINKING IN CHILDREN

T.G. Hodot, department of geometry, docent,
Russian State Pedagogical University of A. I. Herzen, St. Petersburg
tghodot@mail.ru

Abstract. The purpose of this article is to illustrate by example of tasks the possibilities of inclusion of stereometric objects in planimetry courses for the development of schoolchildren's logical thinking in 7-9 grades.

Keywords: fusionism, school geometry, logical thinking, tasks

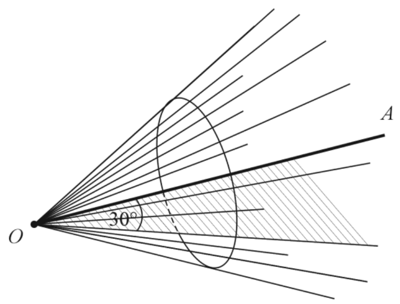
Вопросам фузионизма в геометрии 7-9 классов посвящено немало научных и методических работ (см. например, [3], [6]). Авторы этих работ подробно рассматривают различные педагогические и психологические возможности фузионизма: в формировании пространственных представлений учащихся, в привитии интереса учащихся к изучению геометрии, в развитии их логического мышления и др. Мы не останавливаемся на рассмотрении всех этих вопросов, а предлагаем читателям примеры упражнений, направленных на развитие *логического мышления* школьников при рассмотрении пространственных фигур в курсе планиметрии. Приводятся примеры задач и упражнений, в которых предлагается провести *сравнение* свойств похожих друг на друга плоских и пространственных фигур, рассмотреть пространственные *аналоги* некоторых понятий, входящих в курс планиметрии, понять, верны ли в пространстве сформулированные утверждения, и в случае отрицательного ответа привести соответствующий *контрпример*, а в случае положительного – представить *доказательство* или попытаться объяснить на наглядном уровне свою точку зрения, оставив иногда строгое доказательство до момента систематического изучения стереометрии.

Задачи

Конструируем

Постройте луч *OA* и отложите от него угол, равный 30°. Сколько таких углов вы можете построить? А существуют ли ещё углы, равные 30°, со стороной *OA*, которые вы не можете построить? Какую фигуру образуют стороны всех углов, равных 30°, построенных на луче *OA*?

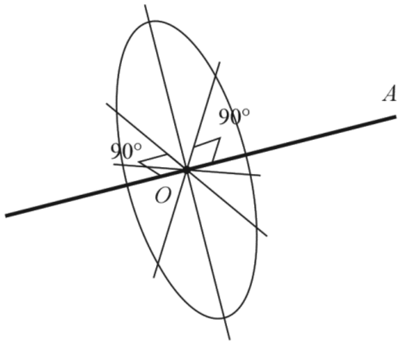
Ответ: см. рисунок

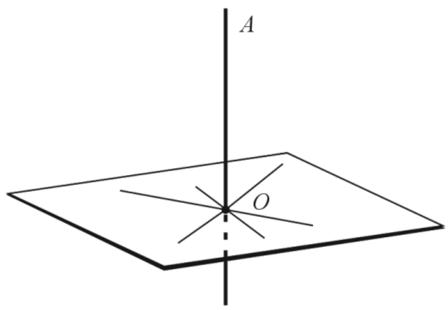


Дополняем теорию

Решите для прямого угла задачу, аналогичную предыдущей.

Ответ: см. рисунок



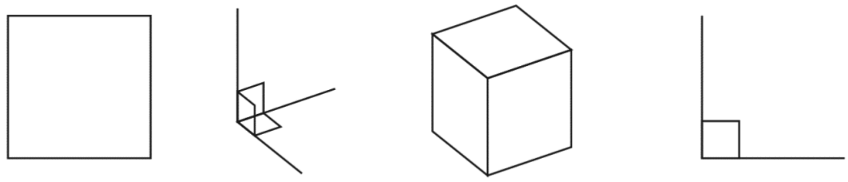


Комментарий: одно и то же утверждение может быть верным и неверным в зависимости от того, на плоскости или в пространстве это утверждение рассматривается. Известно, что на плоскости через каждую точку прямой можно провести только одну прямую, перпендикулярную данной. А в пространстве это не так.

По аналогии с определением высоты треугольника сформулируйте определение высоты пирамиды.

Сравниваем

В какой последовательности было бы правильно, на ваш взгляд, расположить приведённые на рисунке фигуры? Объясните своё мнение.



а *б* *в* *г*

Применяем знания планиметрии

Докажите, что в правильной пирамиде равны между собой: а) высоты всех боковых граней, проведённые из общей вершины, б) медианы всех боковых граней, исходящие из вершин основания пирамиды.

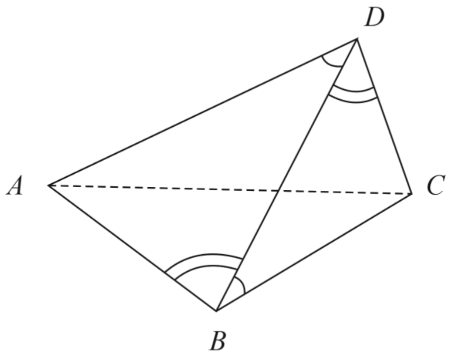
Исследуем

Верно ли утверждение: «Если все точки замкнутой линии одинаково удалены от некоторой точки *O*, то эта линия – окружность с центром в точке *O*»? Обоснуйте свой ответ.

Проверьте себя: нет. Нарисуйте для примера линию на мячике.

Анализируем

Дана треугольная пирамида *SABC* (см. рис.). Равные углы отмечены на чертеже. Вася «доказал», что рёбра *DA* и *BC* этой пирамиды параллельны, т.к. накрест лежащие углы *ADB* и *CBD*, образованные двумя прямыми *DA* и *BC* и секущей *DB*, равны между собой. Оцените это «доказательство».



Проверьте себя. Рассуждения Васи не верны, т.к. признаки параллельности прямых сформулированы и доказаны только для прямых, лежащих в одной плоскости. А в нашем случае прямые *AD* и *BC* скрещиваются (в соответствии с признаком скрещивающихся прямых) и, следовательно, не лежат в одной плоскости.

Рассуждаем

Нарисуйте треугольную призму. Дорисуйте её изображение до изображения параллелепипеда. Сформулируйте планиметрическую задачу, аналогичную данной.

Объясните, почему можно считать, что параллелепипед – это пространственный аналог параллелограмма.

Анализируем

Верно ли, что прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, является касательной к этой окружности?

Ответ. Нет, т.к. касательная к окружности должна лежать с этой окружностью в одной плоскости, а прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку может с ней в одной плоскости не лежать. Сделайте соответствующий рисунок.

Литература

1. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И., Ходот Т.Г. «Геометрия.7». – М.: Просвещение, 2009.
2. Вернер А.Л., Ходот Т.Г. «Стереометрия 7-9». – М.: Просвещение, 2006.
3. Клековкин Г.А. Роль и место фузионизма в школьном геометрическом образовании. // Инновационные проекты и программы в образовании. – 2013. – № 2. – С. 25-31.

4. Ходот Т.Г., Ходот А.Ю. «Наглядная геометрия 5». – М.: Просвещение, 2012.
5. Ходот Т.Г., Ходот А.Ю. «Наглядная геометрия 6». – М.: Просвещение, 2007.
6. Ходот Т.Г. Некоторые возможности фузионизма в геометрии 7-9 классов средней школы. // Стандартизация математического образования: проблемы внедрения и оценки эффективности. Материалы XXXV Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических. – Ульяновск: УлГПУ, 2016. – С. 231-234.

УДК 372

КОМПЛЕКС ЗАДАЧ С ТЕХНИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ КАК СРЕДСТВО РАШИРЕНИЯ ОСВЕДОМЛЕННОСТИ УЧАЩИХСЯ О ПРИНЦИПЕ РАБОТЫ СОВРЕМЕННОЙ ТЕХНИКИ

Чекулаева М.Е., кандидат педагогических наук, доцент
Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова, г. Ульяновск
navsi69@mail.ru

Сидорова Н.В., кандидат педагогических наук, доцент,
Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова, г. Ульяновск

Аннотация. В статье описываются условия подбора задач с техническим содержанием, способствующих повышению мотивации у учащихся к изучению физико-математических дисциплин и профессиональному самоопределению. Предлагаются примеры такого вида задач для учащихся 9-11 классов физико-математического лицея о современных осветительных приборах и конденсаторах.

Ключевые слова: задачи с технических содержанием, структура прикладной задачи, математические методах решения технических задач.

COMPLEX OF TASKS WITH TECHNICAL CONTENT AS A MEANS OF EXTENSION OF AWARENESS OF STUDENTS ON THE PRINCIPLE OF WORK OF MODERN TECHNOLOGY

M.E. Chekulaeva, PhD, associate professor,
Ulyanovsk State Pedagogical University, Ulyanovsk
navsi69@mail.ru

N.V. Sidorova, PhD, associate professor,
Ulyanovsk State Pedagogical University, Ulyanovsk

Abstract. The article describes the conditions for selecting problems with technical content that contribute to increasing the motivation of students to study physical and mathematical disciplines and professional self-determination. Examples of this kind of problems for students of the 9th-11th grades of the physics and mathematics lyceum about modern lighting devices and capacitors are offered.

Keyword: tasks with technical content, the structure of the applied problem, mathematical methods for solving technical problems.

Изучение физики и математики в физико-математическом лицее сопровождается активной работой учащихся по решению задач разной степени трудности, олимпиадных, комбинированных и др. Однако, условия подавляющего количества решаемых задач являются абстрактными, не привязанным с конкретным техническим и жизненным ситуациям. В то же время учащиеся выражают желание познакомиться с современной техникой, в частности с современными осветительными приборами. Написание рефератов и сообщений о современной технике позволяют расширить кругозор учащихся в данном направлении, но не дают возможность о представлении работы инженера по различным техническим расчетам.

Актуальность данной работы обосновывается необходимостью разрешения противоречия между стремлением учащихся узнать как можно больше о современной технике, о физических принципах работы разнообразных устройств и приборов, о математических методах решения технических задач; и недостаточным количеством информации, получаемой из учебников и учебных пособий по физике и математике в средней школе. Результаты опроса и анкетирования учащихся физико-математического лицея позволили сформулировать проблему – как можно научиться решать задачи и в то же время получить необходимую информацию о различных технических устройствах и приборах? Беседы с учащимися 9 - 11 классов позволили определить способ получения технической информации в ходе изучения физики и математики.

Цель работы: разработать комплекс учебных задач с технических содержанием, позволяющих расширить представление учащихся о применении законов физики и математических методов в разработке технических устройств и приборов и, как следствие, влияющие на мотивационно-ценностную ориентировку старшеклассников [1].

На первом этапе исследования осуществлен анализ содержания учебников и задачников по нахождению технического содержания и опрос учащихся о том, какая техника наиболее интересна при изучении электричества и оптики. Многие учащиеся изъявили желание узнать больше о современных осветительных приборах. Это вызвано тем, что в быту стали внедряться сравнительно новые энергосберегающие лампы. Появилась потребность сравнить лампы накаливания, галогенные и другие по техническим характеристикам. Описательная информация не вызывает у учащихся достаточного интереса и не формирует практических умений применять знания в конкретной ситуации. Такая информация, как правило, и не запоминается. В то же время решенная задача с техническим содержанием оставляет в памяти, так называемую, избыточную информацию, которая формирует представление о техническом объекте. В то же время, решение таких задач дает представление о разнообразии функциональных зависимостей многих реальных явлений и процессов.

На втором этапе исследования определялась структура нового типа задач. Традиционная структура учебной задачи (условие-оператор-требование) была принята за основу. Однако, краткое изложение в условии физической ситуации и математических параметров, не позволяет расширить осведомленность учащихся о технических устройствах. С другой стороны, в традиционной формулировке задачи ученику не надо думать какие данные надо использовать, осуществлять их поиск и отбор.

В ходе исследования предложен комплекс задач (на материале о современных осветительных приборах и конденсаторах) который позволяет учащимся овладеть умениями воспринимать, перерабатывать, анализировать и перерабатывать полученную информацию в соответствии с поставленными задачами; расширяет осведомленность о техническом применении физики и математики. Каждая задача состоит из двух взаимосвязанных частей: информационной и практической.

Информационная часть представляет описание и принцип работы технического устройства или прибора. Она довольно краткая и в то же время дает завершенные представления о техническом устройстве, или приборе. Другая особенность данной части – привязка к учебной программе, к тем элементам знаний, которые изучаются в школе. Вторая часть – практическая, представляет серию задач, в которых указаны определенные требования. Дополнительную информацию, необходимую для решения учащийся находит в первой части.

Приведем примеры таких задач.

Задача 1. «Конструкции ламп накаливания разнообразны и зависят от назначения. Общими являются тело накала, колба и токовыводы. Колба защищает тело накала от воздействия атмосферных газов. Нить накала изготовлена из вольфрама. При работе лампы она нагревается до 2300°С. При достижении определенной температуры излучает в световом диапазоне. Биспиральная нить (спираль в спирали) из вольфрама диаметром 40 мкм. Мощность лампы 60 Вт. Напряжение в сети 220В? В среднем светоотдача (отношение мощности излучения в видимом диапазоне ко всей мощности излучения) составляет 4%.

1.Какое количество энергии, выделяется за 1 час работы? Какая энергия в видимом диапазоне выделяется за это время работы лампы?

2. Известна мощность лампы и рабочее напряжение. Вычислить сопротивление нити накала.

3. Зная сопротивление нити накала в рабочем состоянии, температуру нити и ее диаметр вычислить длину нити накала.

4. Известна мощность лампы, рабочее напряжение. Вычислить силу тока в рабочем состоянии.

5. Определите мощность излучения в диапазоне видимого света, если светоотдача 4%

6. Вычислить разность полной энергии, выделяемой при работе лампы за 1 час и энергии, выделяемой в световом диапазоне за это же время.

7. Определить длину волны, на которую приходится максимум излучения.

8. Зависимость количества выделяемой энергии от сопротивления нити накала и времени можно описать уравнением $y = \frac{54}{x}$. Сопротивление X может меняться в пределах от 10 до 100. Определите наибольшее и наименьшее значение функции. Напишите уравнение касательной к функции в точке x_o=50.

9. Зависимость количества световой энергии. Выделяемой за определенный промежуток времени можно выразить функциональной зависимостью $y = 36x^2 + 30x - 20$. Определить угол наклона касательной к функции при x = 20. Написать уравнение касательной к функции в точке x = 50».

Особый интерес для учащихся старших классов представляют задачи о светодиодах, так как они получили широкое применение. Однако, ничего не знают о физическом принципе их работы, математических зависимостях параметров в процессе работы. Интерес же к таким устройствам достаточно высок. Задачи о светодиодах могут дать представление о принципе включения их в сеть, расчете добавочного резистора, составление схемы подключения. Все это формирует у учащихся политехнические знания и некоторые практические умения [3]. В последующих приведенных задачах мы пропускаем информационную часть.

Задача 2. Светодиод рассчитан на силу тока 0,02 А и напряжение 3 В. Напряжение питания 5В. Каково должно быть сопротивление токоограничивающего резистора?

Задача 3. Четыре светодиода с рабочим напряжением 3 В и рабочим током 20 мА надо подключить к источнику напряжения 7 В. Нарисовать схему включения светодиодов и рассчитать токоограничивающие сопротивления.

Задача 4. Светодиод надо включить в сеть переменного тока с номинальным напряжением 220В. Максимальное напряжение в сети 250 В., рабочая сила тока светодиода 14 мА, а напряжение 2 В. При включении светодиода в сеть переменного тока, включают последовательно с ним диод, который пропускает ток только в одном направлении. Какое токоограничивающее сопротивление следует подсоединить?

Задача 5. При включении в цепь светодиода используется токоограничивающее сопротивление 0,1 кОм. Напряжение в цепи 7 В, допустимая сила тока через светодиод 0,02 А. Какое напряжение должно быть на светодиоде?

Задача 6. Надо включить 4 светодиода с рабочим током 20 мА и рабочим напряжением 3 В к источнику 7 В. Начертите схему включения и рассчитайте токоограничивающие резисторы.

Задача 7. Зависимость силы тока от приложенного к светодиоду напряжения приближенно можно описать функцией $y = 37x^2-20x-30$ на интервале [0; 30]. Как быстро меняется значение функции в точке x = 15.

Условие задач, как правило, иллюстрируется рисунками, схемами, графиками, что расширяет осведомленность учащихся об области применения физики и создает наглядное представление учащихся о разных видах устройств или приборов.

На третьем этапе исследования проведена оценка целесообразности разработанного комплекса в учебном процессе. Разработанный комплекс задач предложен учащимся 9 – 11 классов. Показателями эффективности явились следующие: уровень интереса к предмету, умение решать задачи, умение осуществлять поиск и отбор информации для решения задачи. Результатом явилось повышение интереса учащихся к решению задач с техническим содержанием, и желание учащихся самим составлять подобные задачи; повышение успеваемости учащихся при выполнении контрольных работ, сокращение времени на поиск и отбор информации по решаемой проблеме.

Таким образом, предложенный комплекс задач позволяет в определенной мере удовлетворить желание учащихся узнать как можно больше о современной технике, о физических принципах работы разнообразных устройств и приборов, повысить интерес учащихся к изучению физико-математических дисциплин, способствовать профессиональному самоопределению.

Литература

1. Веселовская Ю.А., Кузина Н.Г., Сидорова Н.В. Мотивационно-ценностный критерий как фактор повышения качества формирования интернет культуры // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Информатизация образования. – 2017. – Т. 14. – № 1. – С. 92-99.

2. Никитин С.В., Скворцова О.П., Сидорова Н.В. Формирование мотивации учащихся к изучению математики/ Гуманизация и гуманитаризация образования XXI века: Проблемы современного образова-

ния/ Материалы 14-ой Международной научно-методической конференции памяти И.Н. Ульянова. УлГПУ им. И.Н. Ульянова. – 2013. – С. 56-58.

3. Чекулаева М.Е., Дедушкина Т.П. Реальные профессионально ориентированные математические задачи – средство формирования у обучающихся средних образовательных организаций общих профессиональных компетенций./Труды XIX международного Форума по проблемам науки, техники и образования./Под ред. В.В. Вишневского. – М.: Академия наук о Земле, 2015. – С. 15-16.

УДК 372.851

О РЕАЛИЗАЦИИ КОММУНИКАТИВНЫХ УУД НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Чиспияков С.В., кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии,
Брянский государственный университет, г. Брянск
chispiyakoff@yandex.ru

Аннотация. Работа посвящена практической реализации коммуникативных УУД на уроках математики.

Ключевые слова: коммуникативные УУД, учебное сотрудничество, совместная деятельность, речевые средства

ON THE IMPLEMENTATION OF COMMUNICATIVE UUD IN MATHEMATICS LESSONS

S.V. Chistiakov, PhD, the professor of chair of mathematical analysis, algebra and geometry,
Bryansk state University, Bryansk
chispiyakoff@yandex.ru

Abstract. The work is dedicated to the practical implementation of communicative UUD in mathematics lessons.

Key words: communicative UUD, educational cooperation, joint activities, speech tools

Общество меняется, меняются и требования к выпускникам образовательных учреждений. Задачи, которые стоят или будут стоять перед обществом потребуют от исполнителей не только профессиональных знаний умений и навыков, но и навыки эффективной коллективной работы. Поэтому государство внесло во ФГОС компетенции в области межличностной коммуникации – коммуникативные УУД [1].

Вопросами межличностной коммуникации занимаются психологи. Именно в психологии Т.Гордоном было введено понятие коммуникативной компетенции. Применительно к системе образования можно ввести следующее понятие. Коммуникативная компетентность [2] – способность устанавливать и поддерживать необходимые контакты с другими людьми; система внутренних ресурсов, необходимых для построения эффективной коммуникации в определенном круге ситуаций межличностного взаимодействия, возможность реализовать в общении свою субъективность.

Напомним, что согласно ФГОС коммуникативные УУД – это обобщенные способы учебной деятельности, связанные с установлением контактов с другими учащимися и учителем, с построением эффективной коммуникации, с реализацией в общении своей субъективности.

Другими словами, в образовательном процессе учитель должен помочь учащимся приобрести умение организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками; работать индивидуально и в группе; находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласованных позиций и учёта интересов; формулировать, аргументировать и отстаивать своё мнение.

Умение осознанно использовать речевые средства в соответствии с задачей коммуникации для выражения своих чувств, мыслей и потребностей, планирования и регуляции своей деятельности; владение устной и письменной речью, монологической контекстной речью.

Каким образом, в процессе урока можно реализовать поставленные задачи?

Рассмотрим некоторые способы организации такой работы.

Создание карты:

1. Чему посвящен пункт? (образуем центр карты).
2. На какие вопросы в пункте даны ответы? (образуем ветви карты).
3. Что о каждом вопросе нужно знать (образуем более мелкие ветви или листики).

Создание списка вопросов:

1. Учащиеся составляют вопросы, на которые надо знать ответы о любом соотношении
2. Учащиеся создают единый список вопросов, дополняя друг друга (учитель или лидер)
3. Учащиеся отвечают на вопросы друг друга, меняясь ролями

Метод оценки:

1. Выбор администратора (лидера).
2. Диалог – задачи лидера.
3. Опрос учеников класса лидером: Как вы думаете, что хорошего в ответе…
4. Опрос учеников класса лидером: Как вы думаете, что плохого в ответе…
5. Подведение итога лидера: Итак, как вы думаете, какой оценке…
6. Выставление оценки ученику лидером.
7. Оценка работы администратора учителем: Как вы думаете, насколько хорошо лидер справился со своей задачей?
8. Выставление оценки учителем лидеру.

Подводя итог, можно сказать, что формирование коммуникативных УУД процесс творческий, зависящий не только от подготовленности учителя, но и от микроклимата в коллективе класса, его открытости и желании учеников принимать участие в такой деятельности.

Литература:

1. Приказ от 17 декабря 2010 г. № 1897 «ОБ УТВЕРЖДЕНИИ ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО СТАНДАРТА ОСНОВНОГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ».
2. Gordon Th. Teacher Effectiveness training. N.Y. – 1975.

УДК 372.851

ЭКСПЕРИМЕНТ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ КАК СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ ИНТЕРЕСА УЧАЩИХСЯ К ЕЕ ИЗУЧЕНИЮ

Шакирова Л.Р., доктор педагогических наук, профессор,
Казанский федеральный университет, г. Казань
lilianashakirova1209@gmail.com

Фалилеева М.В., кандидат педагогических наук, доцент,
Казанский федеральный университет, г. Казань
mmwwff@yandex.ru

Аннотация. Статья посвящена исследованию проблемы, связанной с недостаточным использованием в математическом образовании школьников такого элемента учебного исследования как эксперимент. Изучены возможности и опыт организации исследовательской деятельности на основе эксперимента на уроках математики. Проведен педагогический эксперимент по использованию данного метода на уроках геометрии в формате интерактивного обучения учащихся 7-х классов (N = 40). Результаты исследования показали, что уроки с элементами наблюдения и эксперимента благоприятно сказываются на учащихся, создавая положительный эмоциональный фон, обеспечивая понимание геометрических закономерностей и, как результат, повышая их интерес к изучению геометрии.

Ключевые слова: урок математики, геометрия, эксперимент.

EXPERIMENT IN GEOMETRY CLASS
AS MEANS OF INCREASING STUDENTS' INTEREST TO STUDY IT

l.R. Shakirova, ScD in Education, professor,
Kazan Federal University, Kazan
lilianashakirova1209@gmail.com

M.V. Falileeva, PhD in Education, associate professor,
Kazan Federal University, Kazan
mmwwff@yandex.ru

Abstract. The article is devoted to the research of the problem connected with the insufficient use in school mathematics of such an element of educational research as an experiment. The possibilities and experience of organizing research activity on the basis of experiment at mathematics lessons have been studied. A pedagogical experiment on the use of this method at geometry lessons in the format of interactive teaching of students of the 7th grade (N = 40) has been conducted. The results of the research have shown that lessons with elements of observation and experiment favorably affect students, which leads to creating a positive emotional background, providing an understanding of geometric patterns and, as a result, increasing their interest in the study of geometry.

Keywords: mathematics lesson, geometry, experiment.

Одна из задач школьного образования – адаптация выпускников к жизни в динамично развивающемся современном обществе. Для решения этой задачи большое значение имеет обучение школьников геометрии, обладающей прикладной значимостью. Школьная практика, к сожалению, такова, что, несмотря на владение учащимися теоретическими знаниями, они испытывают серьезные затруднения в применении этих знаний к реальным ситуациям. Актуальным является поиск методических средств, предусматривающих развитие самостоятельной познавательной деятельности учащихся на основе деятельностных форм и методов обучения, ставящих ученика в субъектную позицию. Одним из таких средств является применение экспериментальной работы на уроках.

Эксперимент, по мнению В.И. Загвязинского, самый точный метод изучения явлений, фиксирования фактов, слежения за изменением и развитием объекта исследования [1]. В широком смысле эксперимент представляет собой целенаправленное и жестко контролируемое действие исследователя на объект для изучения его различных сторон, связей и отношений. По мнению В.В. Налимова, в любом эксперименте можно выделить следующие этапы:

- подготовительный этап, ориентированный на теоретическое обоснование эксперимента, формулировку гипотезы, его планирование, создание модели, выбор условий и средств исследования;
- этап сбора экспериментальных данных, направленный на работу с моделью, выполнение соответствующих технологических операций, многократный повтор измерений и строгий учёт факторов, влияющих на исследуемый объект;
- этап обработки результатов, содержащий анализ и интерпретацию результатов эксперимента, сопоставление их с гипотезой, установление причинно-следственных связей между заданными условиями и характеристиками исследуемого объекта. [5]

По мнению И.Г. Липатниковой и А.В. Косикова (2013), на всех этапах эксперимента важна мыслительная деятельность экспериментатора, включающая отделение фактов, непосредственно влияющих на объект исследования, искусственное выделение некоторых его свойств, признаков или отношений, которые и являются предметом изучения, что способствует глубокому пониманию сути явлений и процессов [2].

Ученые-методисты справедливо отмечают, что учителя недостаточно практикуют учебные математические исследования на уроках и доказывают эффективность данного метода в обучении математике (В.Р. Майер (2012), Е.В. Мартынова (2012), Е.В. Сайфутдинова и Е.С. Манькова (2016)). Основой учительского труда высокого качества в современных условиях должен стать процесс исследования, в который вовлекается ученик. Формирование исследовательских навыков учащихся в процессе использования эксперимента позволит достичь не только развивающих целей обучения, но и повысит интерес к изучению предмета. В.Р. Майер справедливо отмечает, что «*факты, открытые учащимися самостоятельно, усваиваются ими значительно лучше, чем преподнесенные учителем в готовом виде*» [3]. Эксперимент на уроке способствует формированию исследовательских навыков, основанных на умении наблюдать, видеть проблему, формулировать вопросы, выдвигать предположения, доказывать их, защищать свои идеи или точку зрения группы.

Геометрия – тот раздел школьной математики, который обладает наивысшим экспериментальным потенциалом, ибо большинство фактов геометрии можно подтвердить опытным путем, а обучение этим фактам провести в форме учебного исследования с элементами эксперимента [3]. По мнению О.В. Темняткиной, в основу построения деятельности по осознанному усвоению геометрических понятий учащимися должно быть положено геометрическое действие: от наблюдения, эмпирического и теоретического анализа к выявлению теоретической основы – «клеточки», закона – теоремы, доказательство этой теоремы, или ссылка на нее, если факт уже доказан, применение теоремы к доказательству нового факта [7].

Эксперимент на уроке геометрии может осуществляться с помощью материальных моделей (бумажных, картонных, каркасных, механических и пр.) или компьютерных. Мартынова Е.В. отмечает важность экспериментального характера преподавания геометрии, предлагая использовать в обучении компьютерные программы, в частности, «Живую математику» [4]. Суть применения данной программы состоит в открытии учеником геометрических закономерностей во время проведения компьютерного геометрического эксперимента. Автор доказывает, что ее использование позволяет сделать процесс обучения интересным и наглядным, развивает логическое и абстрактное мышление учащихся.

Опыт учителей математики демонстрирует, что с использованием эксперимента разрешимыми становятся различные математические ситуации. Этому способствует установление причинно-следственных, внутрипредметных и межпредметных связей в процессе проведения эксперимента [6]. В качестве примеров предлагается использование свойств «золотого сечения», старинных мер длины, различных способов измерения высоты, экспериментального вычисления числа π и др.

Недавние исследования подтверждают мысль, что современное образование, в котором особое внимание уделяется системному подходу, проектно-ориентированному обучению, междисциплинарным связям и многокультурным контекстам, может быть обогащено надлежащим воздействием на эмоциональную сферу в процессе обучения (Picard et al., 2004, De Bellis & Goldin, 2006). Исследование Massarwe at al (2010) посвящено использованию культурно значимых геометрических узоров в преподавании геометрии. Это объяснялось необходимостью реалистического подхода к математическому образованию (Alsina, 1998; Gravemeijer & Doorman, 1999). На первом этапе происходило изучение артефактов, культурных и духовных символов, архитектурных и художественных декораций. Далее предусматривалось практическое построение учащимися геометрических орнаментов с анализом каждого этапа, который включал определение основных геометрических объектов, изучение их свойств и написание формальных доказательств. Результаты исследования показали повышение познавательного интереса и мотивации учащихся к изучению геометрии. Ученики воспринимали практику построения геометрических орнаментов и открытия их математических свойств в качестве значимого и приятного опыта обучения. Этот опыт вдохновил эмоции, живой дискурс и мотивацию обучения, показал желание учащихся практически использовать приобретаемые математические знания и осознавать их культурную самобытность [11].

Можно выделить различные виды экспериментальной работы на уроках математики: в рамках самого учебного предмета (без привлечения межпредметных связей) и межпредметный эксперимент (при проведении эксперимента требуются знания физики, биологии и др. предметов). Многие учителя знают, что достаточно трудно организовать экспериментальную работу с межпредметными связями в рамках одного урока, так чтобы он решал цели урока геометрии. Поэтому более актуальными для учителей являются методики организации небольших экспериментов на отдельных этапах урока для повышения мотивации к изучению геометрии и уровня понимания учащимися теоретических знаний, для перевода теоретических знаний в практику осознанного использования при решении геометрических задач. Такие эксперименты не сложно организовать на уроках «открытия» нового знания и при решении задач на продуктивную деятельность учащихся. Можно выделить этапы проведения подобных геометрических экспериментов: 1) изображение геометрического объекта в различных положениях, различных размеров (для этого можно использовать макеты, сделанные из различных материалов и модели геометрических фигур, созданные в различных программах); 2) наблюдение за фигурами, действия с ними; 3) описание свойств фигур (составление таблиц данных); 4) выдвижение гипотезы; 5) доказательство выдвинутого геометрического факта.

Приведем простую форму организации эксперимента при «открытии» теоремы Пифагора: 1) раздать каждому учащемуся по три картонных макета прямоугольных треугольников; 2) измерить стороны треугольников; 3) составить таблицу из столбцов «1-й катет», «2-й катет» и «гипотенуза» и внести данные; 4) выдвинуть возможные соотношения между катетами и гипотенузой треугольника; 5) доказательство теоремы. Приведем пример эксперимента, организованного на уроке общеметодологической направленности (8 класс). Цель урока – систематизация знаний по теме «Замечательные точки треугольника», которые учащиеся путают между собой с заметным постоянством. Раздаем каждому учащемуся картонные макеты остроугольного, прямоугольного и тупоугольного треугольников, просим разместить макет на кончике карандаша так, чтобы найти центр тяжести (точку, в которой фигура находится в равновесии). Просим обвести контуры треугольников в тетради и найти алгоритм нахождения центра тяжести.

Для доказательства эффективности включения эксперимента в урок геометрии была проведена опытно-экспериментальная работа. Студенту выпускного курса, проходившему педагогическую практику в школе, было предложено провести педагогический эксперимент. Нас интересовали следующие вопросы: *Может ли начинающий учитель провести эксперимент на уроке геометрии? Отметит ли он повышение мотивации учащихся и большую продуктивность урока с экспериментом?* Структура эксперимента для студента включала выполнение следующих этапов:

1) Спроектировать одинаковые по структуре и содержанию уроки в соответствии с ФГОС ООО, отличающиеся только наличием экспериментальной работы вместо обычного решения задач.

2) Выделить контрольный и экспериментальный классы, провести оценку уровня успеваемости учащихся по геометрии.

3) Провести запланированные уроки.

4) После проведения уроков провести тестирование учащихся по остаточным знаниям и учебным предметным умениям.

5) Провести сравнительный анализ данных, сделать выводы по эффективности использования наблюдения и эксперимента на уроке математики.

В педагогическом эксперименте (период с 16 февраля по 25 марта 2017 года) приняли участие студент 5-го года обучения педагогического отделения Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского КФУ Небогатиков Никита и ученики МБОУ «СОШ № 1» г. Казани Республики Татарстан. Выбор экспериментального (7В) и контрольного (7Г) классов определялся идентичным в среднем уровнем знаний и умений учащихся (3,7 и 3,9 балла соответственно). Для реализации эксперимента разработаны уроки геометрии по теме «Построение треугольника по трем элементам». План-конспект для экспериментального класса аналогичен уроку в контрольном классе; отличие только в организации учебного эксперимента на уроке. Он включал в себя навыки группового взаимодействия в процессе наблюдения и эксперимента, интерактивные методы обучения, использование раздаточного материала. Созданы специальные условия деятельности; подготовлены оригинальные инструменты (картонные макеты); проводился инструктаж; выдвигались гипотезы и доказывались утверждения. В контрольном классе учащиеся решали задачи на построение треугольников без экспериментальной работы. При этом ставились цели развивать их способность проводить сравнение, оценивать свою работу; способность к самооценке на основе критерия успешности учебной деятельности; умение решать задачи на построение, умение отвечать на вопросы параграфа, умение с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли, умение читать учебные тексты по планиметрии.

На этапе актуализации знаний и умений с целью приведения их в единую систему и практического закрепления и повторения теории о соотношении сторон в треугольнике, о сумме углов треугольника, о признаках равенства треугольников каждый ученик получил раздаточный материал, состоящий из картонных макетов частей треугольника (см. рис. 1).

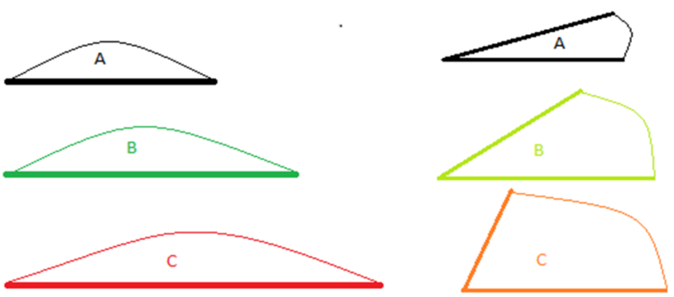


Рис. 1. Макеты элементов треугольника для выполнения построений треугольника (раздаточный материал для каждого школьника экспериментальной группы)

Учащимся задавались вопросы: *Какое минимальное число элементов надо использовать, чтобы собрать треугольник, подобный треугольнику, изображенному на доске? Какое минимальное число элементов необходимо использовать для построения любого треугольника?*

В результате у учащихся должен получиться искомый треугольник (см. рис. 2).

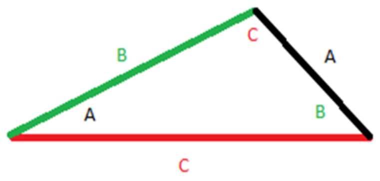


Рис. 2. Искомый треугольник

Учитель задает вопросы: *Можно ли построить треугольник по 3 углам*? *Попробуйте это сделать. Будут ли полученные у вас треугольники равными?* Вывод, который в результате сделали ученики: построить треугольники можно либо по 2 сторонам и углу, либо и 1 стороне и 2 углам, либо по трем сторонам. В результате такого эксперимента у учащихся развивается умение наблюдать и делать выводы из наблюдений, умение ясно и четко формулировать свои мысли с учетом мнений других учеников.

После проведенных уроков студент отметил, что ему понравился урок с экспериментом. На этом уроке учащиеся были более заинтересованными, активными, при общении с учащимися был замечен более высокий уровень понимания материала. Примерно через две недели был проведен тест в классах по остаточным знаниям, результаты которого представлены в таблице 2.

Таблица 2

Результаты тестирования учащихся после эксперимента

Диапазон результатов, в баллах		**Контрольный класс (7Г),** количество учащихся	**Экспериментальный класс (7В),** количество учащихся
Уровень	**Баллы**		
Низкий	0-4	3	2
ниже среднего	5-6	5	2
хороший, средний	7-8	9	13
Высокий	9-10	3	3
Средний балл		**6,25**	**6,6**

Уровень знаний и умений учащихся по решению задач на построение в экспериментальном классе оказался выше (на 0,35 балла).

Рассмотрим результаты тестирования, обращаясь к качеству выполнения теста по каждому заданию. Анализ выполнения заданий учащимися контрольного и экспериментального классов показал, что наибольшие затруднения вызвали задания второй части теста, связанные непосредственно с построением треугольников (табл. 3). С ними справилось 45% учащихся контрольного и 52,5% – экспериментального классов. С первой же частью справилось большинство учащихся (80 и 86% соответственно).

Таблица 3

Результаты выполнения теста учащимися контрольного и экспериментального классов

№ части	**№ задания**	**Количество учащихся, выполнивших задание** в контрольном классе / экспериментальном классе		
		Абсолютное число	**%**	**Средний %**
I	1	17 / 19	85 /95	80 / 86
	2	14 / 18	70 / 90	
	3	16 / 15	80 / 75	
	4	17 / 18	85 / 90	
	5	16 / 16	80 / 80	
II	6	10 / 11	50 / 55	45 / 52,5
	7	8 / 10	40 / 50	

Количество учащихся, выполнивших задания теста, в опытном классе выше, чем в контрольном. Одинаковое количество учащихся в обоих классах показали высокий уровень знаний. Количество учеников, продемонстрировавших средний уровень знаний, в экспериментальном классе выше. В контрольном классе больше учащихся с низким уровнем знаний по теме.

Все это позволяет нам сделать вывод о том, что уроки с элементами наблюдения и эксперимента в интерактивном режиме благоприятно сказываются на учащихся, создавая положительный эмоциональный фон, обеспечивая понимание геометрических закономерностей и, как результат, повышая их интерес к изучению геометрии. Использование небольших экспериментов на отдельных этапах уроков могут эффективно использовать студенты и молодые учителя для проектирования и реализации уроков в соответствии с требованиями новых ФГОС.

Литература

1. Загвязинский В.И. Методология и методы психолого-педагогического исследования: учеб. пособие для студентов пед. вузов. – М.: Академия, 2001. – 202 с.
2. Липатникова И.Г., Косиков А.В. Проведение эксперимента по математике как способ развития индивидуальной проектно-исследовательской деятельности // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 2.
3. Майер В.Р. Компьютерные исследования и эксперименты при обучении геометрии // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2012. №4. URL: http://cyberleninka.ru/article/n/kompyuternye-issledovaniya-i-eksperimenty-pri-obuchenii-geometrii (дата обращения: 17.07.2017).
4. Мартынова Е.В. Информационные технологии в организации геометрического эксперимента // Математика. Компьютер. Образование: сб. трудов XIX международной конференции. Под общей редакцией Г.Ю. Ризниченко, Москва, 2012. URL: http://mce.su/rus/archive/authors/person700/doc151743/ (дата обращения 17.07.2017)
5. Налимов В.В. Теория эксперимента. – М.: Наука, 1971. – 215 с.
6. Сайфутдинова Е.В., Манькова Е.С. Математический эксперимент как средство развития исследовательской компетентности на уроках математики и во внеурочной деятельности по предмету // Математическое образование в школе и вузе: теория и практика (MATHEDU - 2016): материалы VI Международной научно-практической конференции (Казань, 25-26 ноября 2016 г.). – С. 200-207.
7. Темняткина О.В. Формирование ключевых компетенций у школьников в образовательном процессе (на примере преподавания геометрии в 7-9 классах средней школы). Автореф… к.пед.н. – Екатеринбург, 2006. – 22 с.
8. Alsina, C. (1998). Neither a microscope nor a telescope, just a mathscope. In Galbraith P., et al., (eds.), Mathematical Modeling: Teaching and Assessment in a Technology-rich World, pp. 3-10.
9. De Bellis, V. A. & Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solv-ing: A representational perspective. Educational Studies in Mathematics, 63(2), 131–147.
10. Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. Educational Studies in Mathematics, 39(1/3), 112-129.
11. Massarwe K., Verner I. and Bshouty D. (2010). An Ethnomathematics Exercise in Analyzing and Constructing Ornaments in a Geometry Class. Journal of Mathematics & Culture, 5 (1).
12. Picard, R. W., Papert, S., Bender, W., Blumberg, B., Breazeal, C., Cavallo, D., Machover, T., Resnick, M., Roy, D., and Strohecker, C. (2004). Affective learning – a manifesto. BT Technology Journal, 22(4), 253-269.

УДК 510

A NATURAL FEASIBLE ALGORITHM THAT CHECKS SATISFIABILITY OF 2-CNF FORMULAS AND, IF THE FORMULAS IS SATISFIABLE, FINDS A SATISFYING VECTOR

Kosheleva Olga, PhD, associate professor,
University of Texas at El Paso
olgak@utep.edu

Kreinovich Vladik, PhD, professor,
University of Texas at El Paso
vladik@utep.edu

Abstract. One of the main results in Theory of Computation courses is the proof that propositional satisfiability is NP-complete. This means that, unless P = NP (which most computer scientists believe to be impossible), no feasible algorithm is possible for solving propositional satisfiability problems. This result is usually proved on the example of 3-CNF formulas, i.e., formulas of the type C_1 & … & C_m, where each *clause* C_i has the form $a \vee b$ or $a \vee b \vee c$, with no more than three *literals* – i.e., propositional variables v_i or their negations $\sim v_i$. Textbooks usually mention that for 2-CNF formulas – in which every clause has at most 2 literals – the corresponding problem can be solved by a feasible algorithm. From the pedagogical viewpoint, however, the problem with known feasible algorithms for 2-CNF formulas is that they are based on clever tricks. In this paper, we describe a natural feasible algorithm for solving 2-CNF, an algorithm whose ideas are similar to Gauss elimination in linear algebra.

Keywords: propositional satisfiability, 2-CNF, Gauss elimination, feasible algorithm.

Feasible vs. non-feasible algorithms. It is known that some algorithms are practically feasible, while others are not. For example, an algorithm that requires 2^n computational steps on inputs of length n requires, for reasonable size inputs of size n = 300, more computation time than the lifetime of the Universe. It is therefore desirable to formally describe which algorithms are feasible and which are not.

Coming up with a perfect definition of feasible algorithms is still an open problem. The best definition we have now defines an algorithm to be feasible if its computation time is bounded by a polynomial of the length n of the input. In most cases, this definition is adequate, but not always: e.g.,

- according to this definition, an algorithm that requires 10^{100}n steps is feasible, while
- from the practical viewpoint, it is clearly not.

In spite of these limitations, this is the best definition we have, and thus, this definition is used in theoretical computer science as a formal definition of a feasible algorithm.

NP and NP-complete. In most practical problems, once we have a candidate for a solution, we can feasibly check whether this candidate is indeed a solution to our problem. For example:

- In mathematics, we are given a statement x, and we want to find a proof y of either this statement x or of its negation ~x. Coming up with a proof is often very difficult, but once a detailed proof is given, we can check, step-by-step, whether this proof is correct: proof-checking programs are available since the 1960s.
- In physics, we are given a set of observations x, and we need to find a physical law y that explains all these observations (think Ohm's law as an example). Coming up with such a law is difficult, but once this law is described, checking whether each observation is consistent with this law is feasible.
- In engineering, we are given specification x. For example, when we design a bridge, we can specify how much weight it should withstand, how much it should cost, how much wind it should tolerate, etc. The problem is to find a design y that satisfies all these specifications. Coming up with such a design is often difficult, but, once the design is described, we can use known software packages to check whether this design indeed satisfies all the specifications.

Problems of this type – when there is a feasible algorithm for checking whether a candidate for a solution is indeed a solution – are known as problems from the class NP.

Some problems from this class can be solved in feasible (polynomial) time; the class of all such problems is denoted by P. A natural question is: can every problem from the class NP be solved by a feasible algorithm, i.e., is P = NP? This is an open problem; most computer scientists believe that P is different from NP, but no one has proved it yet. What is known is that there are some problems which are the hardest of all problems from the class NP, in the sense that every problem from the class NP can be reduced to this problem. Such problems are known as *NP-complete*.

Propositional satisfiability and 3-CNF formulas. Historically the first problem for which NP-completeness was proven was the following *propositional satisfiability* problem. A propositional formula is any formula that can be obtained from propositional (Boolean, true-false) variables $v_1, \ldots, v_n$, by using propositional connectives & (and), $\vee$ (or), and ~ (not). The problem is:

- given a propositional formula,
- check whether there exists values of the variables v_i that make it true, and
- if yes, find these values.

NP-completeness is usually proven for 3-CNF formulas, i.e., formulas of the type C_1 & … & C_m, where each *clause* C_i has the form a $\vee$ b or a $\vee$ b $\vee$ c, with no more than three *literals* – i.e., propositional variables v_i or their negations $\sim v_i$.

2-CNF formulas. Textbooks usually mention that for 2-CNF formulas, i.e., formulas in which each clause has two literals a $\vee$ b, there exists a feasible algorithm.

The corresponding algorithms, however, rarely appear in the textbooks, since known feasible algorithms are based on clever tricks and do not naturally follow from the problem.

What we do in this paper. In this paper, we describe a natural feasible algorithm for solving 2-CNF formulas. This algorithm is based on the idea of variable elimination – similar to the well-known Gauss elimination in linear algebra.

Main idea behind the proposed algorithm. The main idea behind the proposed algorithm is that a disjunction a $\vee$ b is equivalent to ~b $\rightarrow$ a. Indeed, if either a is true or b is true, and b is false, this means that a should be true.

Computers usually describe true as 1, and false as 0. In this case, as one can easily see, a $\rightarrow$ b is equivalent to a <= b.

Resulting algorithm. Let us use the above idea to come up with an algorithm. Let us select one of the propositional variables, e.g., v_1, and let us show how we can eliminate the variable v_1 from a 2-CNF formula F.

The formula F may contain clauses of the type $v_1 \vee$ b for some b, or of the type $\sim v_1 \vee$ c for some c.

- A clause of the first type is equivalent to ~b <= v_1.
- A clause of the second type is equivalent to v_1 <= c.

By considering all such clauses, we get some lower bounds for v_1 and some upper bounds.

- If such a v_1 exists, then each lower bound must be less than or equal to each upper bound.
- Vice versa, if each lower bound is smaller than or equal to each upper bound, then as v_1, we can take, e.g., the largest of the lower bounds.

Each inequality of the type ~b <= c between a lower bound and an upper bound can be described in the equivalent form of a clause b $\vee$ c. By combing the resulting clauses with original clauses that did not contain v_1, we get a new formula which:

- Has one fewer variable and
- whose satisfiability is equivalent to the satisfiability of the original formula.

From this formula, we can now eliminate the next variable, etc. In n steps, we reduce it to the formula with no variable s at all – and thus, we can decide whether the formula is satisfiable or not. If the formula is satisfiable, then, going back, we can find the values of the variables one by one.

This algorithm is feasible. For n variables, we have 2n possible literals, and thus, no more than $(2n)^2$ possible clauses. So, at each of n stages of the algorithm, we have a formula with a feasible (quadratic) number of clauses – and therefore, the overall time is at most cubic (and hence, feasible).

Example. Let take a formula (a $\vee$ b) & (~a $\vee$ ~c) & (b $\vee$ c) & (~b $\vee$ ~c).

Let us first eliminate the variable a. The clause a $\vee$ b is equivalent to ~b <= a, and the clause ~a $\vee$ ~c is equivalent to a <= ~c. So, in this case, we have:

- one lower bound for a, and

- one upper bound for a.

The requirement that every lower bound should be smaller than equal to every upper bound has the form ~b <= ~c. In terms of a clause, this means b ∨ ~c.

Combining this clause with the original clauses that do not contain a, we get a new formula with one fewer variable: (b ∨ ~c) & (b ∨ c) & (~b ∨ ~c). Let us now eliminate the variable b from this formula. The three clauses containing b take the form c <= b, ~c <= b, and b <= ~c. Here, we have:

- two lower bounds for b and
- one upper bound.

Thus, the requirement that every lower bound be smaller than or equal to every upper bound takes the form c <= ~c and ~c <= ~c.

- The inequality ~c <= ~c is, of course, always true.
- The condition c <= ~c is not satisfied when c = 1, but it is satisfied when c = 0.

Thus, we conclude that c = 0.

These inequalities are satisfiable – and thus, the original formula is satisfaible. Let us now go back one variable at a time and find the values of the variables that make the original formula true.

- Let us first find b. For c = 0 , the inequalities c <= b, ~c <= b, and b <= ~c that contain b take the form 0 <= b, 1 <= b, and b <= 1. Thus, 1 <= b <= 1, so b = 1.
- Let us now find a. Substituting c = 0 and b = 1 into the inequalities ~b <= a and a <= ~c containing a, we conclude that 0 <= a <= 1. Thus, in principle, we can have both values a = 0 and a = 1.

One can easily check that for each of these two values a, we have a satisfying vector – i.e., a set of values that make the original formula true:

- a = 0, b = 1, c = 0 is a satisfying vector, and
- a = 1, b = 1, and c = 0 is also a satisfying vector.

Acknowledgments. This work was supported by the National Science Foundation grant HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence).

The authors are thankful to Dr. Mourat Tchoshanov for his encouragement.

References

1. M. Sipser, *Introduction to the Theory of Computation*, Thomson Course Technology, Boston, Massachusetts, 2012.

УДК 378

SECONDARY SCHOOL MATHEMATICS TEACHERS' DISPOSITION TOWARD MISTAKES: CROSS-CULTURAL MIXED METHODS STUDY

Mariana Alvidrez,
University of Texas at El Paso, USA
malvidrez2@miners.utep.edu
Mourat Tchoshanov,
University of Texas at El Paso, USA
mouratt@utep.edu

Abstract. The reported mixed methods study focused on exploration of mathematics teachers' dispositions toward errors in two countries – Mexico and USA. More specifically, this study addressed borderland secondary teachers' dispositions toward mistakes in teaching and learning mathematics. An explanatory sequential method design was used that involved collecting quantitative data first and then explaining the quantitative results with in-depth qualitative analysis. The instrument - Error Orientation Questionnaire (EOQ) - was used to collect quantitative data on teachers' disposition toward errors in the context of their own learning and their students learning. Following up on EOQ, the semi-structured interview was used to collect qualitative data. Two research questions guided the study. First, we were interested in what dispositions toward mathematical mistakes do secondary teachers in the US and Mexico have. The second question addressed ways the interview aimed at teachers' dispositions toward errors helped to explain the quantitative results.

Keywords: teacher disposition, orientation toward errors, secondary school mathematics, cross-cultural study.

Introduction

There are just a few things that can be stated categorically and one of them is the fact that we all make mistakes; starting from this premise a question immediately arises about why if everybody commits errors, these are usually frowned upon. As the saying goes, we learn from our mistakes. Latin proverb says, by ignorance we mistake, and by mistakes we learn. Or seen from another angle, as the Chinese proverb says, success in the end erases all the mistakes along the way, and, the mistakes of others are good teachers, says the Russian Proverb. All these proverbs and sayings seem to provide a clear understanding of mistake benefit, though doubt still exists as to whether those could be taken with sincerity or are just a way of comfort.

Mistakes are part of life, as such, they are immersed in all human practices. Even though, in some cultures, mistakes are much related to blame, some others cultures use those to improve human activity in all domains. Education is no exception, errors are perceived in different ways, even a same mistake would have a different treatment depending on cultural issues. For example, U.S. and Chinese students produce similar types and quantity of mathematical errors, but teachers' attitudes toward errors are very different.

Learning from mistakes is an essential part of how students learn mathematics (NCTM, 2000; de Estudio, 2011). However, teachers do not always support their students to engage with mistakes productively (Gojak, 2013; Ingram, Pitt, & Baldry, 2015). The way that teachers respond to productive errors can encourage or discourage student thinking and learning (Gojak, 2013). In this sense, research studies have shown that student reactions toward errors are closely related to how teachers handle mistakes during their teaching (Ingram, Pitt, & Baldry, 2015).

Besides, talking about mistakes and how we perceive them makes think about dispositions. The dispositions construct has been recently adopted by education researchers. Hence, disposition as a construct has been modified. At the beginning, dispositions were conceived as tendencies (Splitter, 2003), now a wide range of elements have been incorporated to understand the complexity of this construct. In this regard, Beyers (2011) conceptual framework for students' dispositions with respect to mathematics will serve as a model for defining and categorizing teacher dispositions toward errors. In this sense, mathematics teachers' dispositions toward errors are studied from three different mental functions: cognitive, affective, and conative.

The purpose of this cross-cultural study is to explore mathematics teachers' dispositions toward errors in Mexico and USA using the Error Orientation Questionnaire (EOQ). Thus, this study addresses borderland secondary teachers' dispositions toward mistakes in teaching and learning mathematics. An explanatory sequential mixed methods design was used, since it involved collecting quantitative data first and then explaining the quantitative results with in-depth qualitative data. The research question that guides this mixed methods study are: 1) What dispositions toward mathematical mistakes do secondary teachers in the US and Mexico have? 2) In what ways do the interview data reporting teachers' dispositions toward errors on the context of their own learning and their students learning help to explain the quantitative results about dispositions toward errors reported on the EOQ?

Research on teacher beliefs about errors in mathematics

Mathematics education research has studied errors in general from many different perspectives. On the one hand, some approaches focused on errors and misconceptions with the aim of understanding their sources or causes to prevent or correct them (Tariq, 2008; Tsitsipis, Stamovlasis, & Papageorgiou, 2012). Others addressed errors based on mathematics mistakes/errors diagnosis pattern analysis (e.g., Ayres, 2001; Livy & Vale, 2011; Riccomini, 2005). All these studies are some examples of how quantitative research paradigm has been used to address mathematical errors. Addressing errors using teachers' beliefs as an overarching perspective to understand errors is an emerging topic in mathematics education research. Using a mix methods approach, Tulis (2013) found that teachers' beliefs about errors will be impact their error management in the classroom, which in turn is highly likely to influence students' attitudes towards learning from mistakes. Using a qualitative approach, Borasi (1987) found that mathematics teachers perceive their students' errors as valuable tools and resources for remediation teaching strategies. However, these types of teachers' beliefs and interpretations about errors do not enable students to participate in a process to detect their own error, and even more important to participate also in explaining, analyzing, correcting, and discussing them. Borasi (1994) proposed a group of strategies to help teachers to capitalize on errors to engage their students in their mathematical learning processes. Similarly, Santagata (2005) examines teachers' beliefs about mistakes and their error handling practices and how cultural factors impact both. She states that teachers' mistakes handling activities are influenced by their beliefs and cultural practices. Teacher positive beliefs about errors and appropriate ways of error- handling practices will impact and change their students' attitudes about errors (Bray, 2011; Tulis, 2013). Teachers who perceive and manage errors positively encourage students to move forward to analyze conceptual mistakes instead of mistakes related to accuracy. From this perspective, students and teachers can change their attitudes about errors and improve their analysis skills, stimulate critical reasoning, and increase their enthusiasm by analyzing their erroneous answers (Tsamir, Rasslan, and Dreyfus, 2006).

Teacher Disposition

Since, this study explores teachers' dispositions, it is essential to understand this term. According to Katz (1993) "a disposition is a tendency to exhibit frequently, consciously, and voluntarily a pattern of behavior that is directed to a broad goal." In this regard, some authors state that experiences and environment conditions supports the manifestation of dispositions (Rogoff, Gauvain, and Ellis, 1990). Spliter (2010) makes a disposition definition compilation especially in the education field and we can notice that a common denominator in those definitions are words like "tendencies", "attitudes", "beliefs", "values", "actions", "patterns", and "behaviors"; he focuses his discussion in how some researchers have focused their research efforts on defining dispositions origins, nature, characteristics, and scopes. Also, others focused on discussion of specific types of dispositions. Katz (1993) states that "dispositions are less likely to be acquired through didactic processes than to be modeled by young children as they are around people who exhibit them." Thus, it is important that teacher model productive dispositions to their students. Dewey states from an epistemological perspective that dispositions are not state of possession, but state of performance (as is cited by Dottin, 2008).

Mathematical Disposition

There is a body of literature addressing students' and teachers' dispositions toward mathematics exist in research literature. These studies began to arise when an evaluation standard named as "mathematical disposition was proposed by the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). This concept was released on The Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (1989). In this document, NCTM stated that "disposition refers not simply to attitudes but to a tendency to think and to act in positive ways," adding that "this kind of information is best collected through informal observation" (NCTM 1989, p. 233). In this regard, disposition goes beyond the idea of including attitudes but it includes habits of mind as, interest, curiosity, perseverance, confidence in using mathematics, interest on the role that mathematics play on the society and culture. The National Research Council (in Kilpatrick, Swafford, and Findell [2001]) defines productive disposition as "the tendency to see sense in mathematics, to perceive it as both useful and worthwhile, to believe that steady effort in learning mathematics pays off, and to see oneself as an effective learner and doer of mathematics" (p. 131).

Beyers (2011) argues that there are three different types of dispositions toward mathematics, since they are mental processes. Beyers proposes the following dispositional function types: cognitive, affective, and conative (2011). In this way, Beyers (2011) argues that organizing dispositions toward mathematics by considering those three modes of mental functioning allows us to analyzed students' (teachers') dispositions in a systematic way. This framework not only offers a clear definition of dispositions in regards to mathematics, but it offers a research possibility to understand how dispositional cognitive, affective, and conative functioning can influence their learning in mathematics in regard to different elements, including errors.

To conclude, some of the above studies have analyzed the evolution of research of mathematics education of teachers' beliefs about errors and their strategies to handle them by using quantitative methods. Some others have focused on cultural aspects of educational practices related to mathematics teachers' beliefs about mistakes, while others have studied errors-handling strategies from a student learning perspective. Only a few studies have explored teachers' beliefs about errors and the relationships between beliefs and practices by using qualitative methods. The idea of using the construct of disposition toward mathematics is an emerging topic, which has not been addressed with a specific focus on mistakes. Thus, this research will provide relevant information of teachers' cognitive, affective, and conative dispositions toward errors and the relationships between their beliefs and their instructional practices to analyze the pertinence of using mistakes as part of their instructional approaches.

Methods

Methods and Data Sources

A mixed methods sequential explanatory design (Creswell, Plano Clark, Gutmann, & Hanson, 2003) was used to answer the study research questions. It involved two phases: 1) quantitative and 2) qualitative phase. The methodology and data gathering process for each phase is described below.

In this study, quantitative data contributed to identify the types of teachers' dispositions toward errors, and in this way, the result guide the design of the quantitative data collection instruments. Then, a qualitative multiple case (four cases) was used to explain teachers' dispositions toward errors in their teaching and learning processes. Therefore, the quantitative data provided a general picture about teachers dispositions toward errors, while the qualitative part will explain these dispositions in teachers and their students learning processes. The priority in this study will be given to the qualitative phase, since this study focuses on the in-depth explanation of the results obtain by the EOQ.

Phase I – Quantitative

The purpose of the first phase was to determine secondary mathematics teachers' error orientation in Juarez-El Paso border region, based on teachers' beliefs, as determined by the EOQ. The survey instrument was developed by Rywobiak et al. (1999), and it consists of eight domains on attitudes in dealing with errors at work. All constructs were validated by the authors. The domains comprise "error competence", "learning from errors", "error risk taking", "error strain", "error anticipation", "covering up errors". In a second study, items were added to the domain and two additional domains, "error communication" and "thinking about errors", were included. The EOQ was adapted to a teacher environment.

Data Collection and Analysis.

The pilot study was conducted by using a non-probabilistic convenience sampling procedure for selecting the participants. The EOQ was administrated face-by-face by the researcher to N=164 teachers in US (n=78) and Mexico (n=86). The EOQ was administered in conjunction with demographic questions and open-ended responses in different sites. For the US teachers, the site was the University only. On the contrary, the site in Mexico included four middle schools and three high schools.

Univariate and multivariate statistical procedures were conducted to analyzed data. Demographic information was analyzing using cross tabulations and frequency counts. A table of correlations was constructed with the aim of selecting the qualitative participants.

Phase II – Qualitative

A multiple case study design (n=4) was used. The unit of analysis was disposition toward errors by two teachers from Mexico and two from US. The interview protocol was grounded in the quantitative results that were obtained in the first phase. A total of sixteen open-ended questions were designed.

Data collection and Analysis.

The interviews were conducted with each of the four participants. Each interview was audio recorded and transcribed by using express scribe transcription software. The data analysis was made by using the NVivo-11 software. This software was used on the coding line by line process. Then, those codes were used with the aim of determining the emerging themes that provide the resources for understanding teachers' dispositions.

Preliminary Findings

Results of the Pearson correlation indicated that there was a significant negative association between years of experience and the teacher error orientation scores, (r (76) = -0.58322, p < .001). Whereas, for the case of Mexico, the correlation between teachers' years of experience and the error orientation scores was found to be non-statistically significant, (*r* (82) = .0522, *p* < .001). Some other results show that the correlation between cognitive and affective error orientation domains was found to be statistically significant, r (162) =.173, p <.05. Whereas, the correlation between cognitive and conative was found not statistically significant, r (162) = 0.155, p <.05. As well as, the correlation between affective and conative was found not statistically significant, r (112)= -.0849, p<.05. Also, we found a difference between males and females in regards to error strain domain, more specifically to feel embarrassed when they make a mistake, since we find an average of 71% women versus 48% men.

Conclusion

The main results of the study suggest that there are multiple emerging themes in teacher disposition toward errors such as error competence, learning from errors, error strain, error communication, to name a few. The study also found that there is a gender difference between teachers' affective disposition toward mistakes: female teachers expressed embarrassment toward their own mistakes, whereas male teachers did not. With regard to students' mistakes, however, female teachers demonstrated productive dispositions, considering mistakes learning opportunities. In this same regard, male teachers expressed that when they make a mistake in front of the class they try to joke about it. They feel that making mistakes in teaching mathematics is a way of connecting to student learning.

Regarding students’ mistakes, both male teachers stated that they attempt to connect student mistakes to real life situations. Findings also showed that there is commonality between Mexican and the U.S. teachers’ cognitive dispositions toward errors. Participating teachers reported using students’ mistakes as a pedagogical resource that could support deeper understanding through asking student to debate different ways of thinking. Overall, teachers expressed productive dispositions toward students’ mistakes since they thought that errors could help students to make connections in learning mathematics.

References

1. Barkatsas, A. T., & Malone, J. (2005). A typology of mathematics teachers’ beliefs about teaching and learning mathematics and instructional practices. *Mathematics Education Research Journal*, *17*(2), 69-90.
2. Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the Learning of Mathematics*, 2-8.
3. Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as" springboards for inquiry": A teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 166-208.
4. Bray, W. S. (2011). A collective case study of the influence of teachers' beliefs and knowledge on error-handling practices during class discussion of mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(1), 2-38.
5. Cabello, B., & Burstein, N. D. (1995). Examining teachers' beliefs about teaching in culturally diverse classrooms. *Journal of Teacher Education*, 46(4), 285-294.
6. Dottin, E. S. (2009). Professional judgment and dispositions in teacher education. *Teaching and Teacher Education*, *25*(1), 83-88.
7. Jonasson, C. (2015). Interactional processes of handling errors in vocational school: Students attending to changes in vocational practices. *Vocations and Learning*, *8*(1), 75-93.
8. Leatham, K. R. (2006). Viewing mathematics teachers’ beliefs as sensible systems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*(1), 91-102.
9. Pajares, M. F. (1992). Teachers’ beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, *62*, 307–332.
10. Pajares, F. (1996). Self-efficacy beliefs in academic settings. *Review of EducationalRresearch*, *66*(4), 543-578.
11. Perry, B., Tracey, D., & Howard, P. (1999). Head mathematics teachers’ beliefs about the learning and teaching of mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, *11*(1), 39-53.
12. Santagata, R. (2005). ‘‘Are you Joking or Are You Sleeping?’’ Cultural beliefs and practices in Italian and U.S. teachers’ mistake-handling strategies. *Linguistics and Education*, *15*(1–2), 141–164.
13. Santagata, R. (2005). Practices and beliefs in mistake-handling activities: A video study of Italian and US mathematics lessons. *Teaching and Teacher Education*, *21*(5), 491-508.
14. Schleppenbach, M., Flevares, L. M., Sims, L. M., & Perry, M. (2007). Teachers’ responses to student mistakes in Chinese and US mathematics classrooms. *The Elementary School Journal*, *108*(2), 131-147
15. Schwandt, T. (2007). The pressing need for ethical education: A commentary on the growing IRB controversy. In *Ethical futures in qualitative research: Decolonizing the politics of knowledge*, 85-98.
16. Seidman, I. (2013). *Interviewing as qualitative research: A guide for researchers in the education and the social sciences* (4th ed.). New York: Teachers College Press.
17. Shein, P. P. (2012). Seeing with two eyes: A teacher's use of gestures in questioning and revoicing to engage English language learners in the repair of mathematical errors. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(2), 182-222.
18. Son, J. W., & Sinclair, N. (2010). How preservice teachers interpret and respond to student geometric errors. *School Science and Mathematics*, *110*(1), 31-46.
19. Speer, N. M. (2005). Issues of methods and theory in the study of mathematics teachers’ professed and attributed beliefs. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(3), 361-391.
20. Splitter, L. J. (2010). Dispositions in education: Nonentities worth talking about. *Educational Theory*, *60*(2), 203-230.
21. Stipek, D. J., Givvin, K. B., Salmon, J. M., & MacGyvers, V. L. (2001). Teachers’ beliefs and practices related to mathematics instruction. *Teaching and Teacher Education*, *17*(2), 213-226.
22. Tsamir, P., Rasslan, S., & Dreyfus, T. (2006). Prospective teachers’ reactions to Right-or-Wrong tasks: The case of derivatives of absolute value functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(3), 240-251.
23. Tulis, M. (2013). Error management behavior in classrooms: Teachers' responses to student mistakes. *Teaching and Teacher Education*, *33*, 56-68.

УДК 378

HOW TO TEACH IMPLICATION

Osegueda Escobar Martha, student,
University of Texas at El Paso
mcoseguedaescobar@miners.utep.edu

Kosheleva Olga, PhD, associate professor,
University of Texas at El Paso
olgak@utep.edu

Kreinovich Vladik, PhD, Professor,
University of Texas at El Paso
vladik@utep.edu

Abstract. Logical implication is a somewhat counter-intuitive notion. For students, it is difficult to understand why a false statement implies everything. In this paper, we present a simple pedagogical way to make logical implication more intuitive.

Keywords: implication, formal logic, mathematics education

Logical implication is a difficult topic. One of the most important concepts of mathematical logic is the concept of implication A --> B ("if A then B"). Professional mathematicians are accustomed to the fact that out of four possible combinations of truth values of A and B: (T, T), (T, F), (F, T), and (F, F), implication is true for there of them. The only case when implication is not true is when

- A is true and
- B is false.

The corresponding formal definition of logical implication leads to many statements which are intuitively true: e.g.,

- if a, b, and c are the three sides of a right triangle,
- then $c^2 = a^2 + b^2$.

On the other hand, the same formal implication leads to many statements which are not intuitive at all. For example,

- it is true that if witches exist,
- then 0 = 1.

A natural student's reaction to this "implication" is that it cannot be true -- what do witches have to do with arithmetic?

Because of this non-intuitive character of implication, logical implication is a difficult topic to teach.

What we do in this paper. In this paper, we explain how to make the notion of logical implication more intuitive.

Main implicit assumption. The main implicit assumption behind our examples is that – similarly to "and" and "or" – the truth value of the implication A→ B is uniquely determined by the truth values of the two statements A and B.

Thus, to convince the students that, for example, False always implies False, it is sufficient to come up with one intuitively clear example when

- A is false,
- B is false, and
- the implication A → B is true.

So, what we will do is provide examples of such cases.

First set of examples: let us start with a simple implication which is definitely true. To make the notion of a logical implication more intuitive, let us start with the case in which implication is definitely true. Namely, no matter what values x, y, and z we take, it is definitely true that:

- if x = y,
- then zx = zy.

In this case,

- A is the equality x = y,
- B is the equality zx = zy, and
- the implication A → B is always true.

No one doubts this statement: to conclude that zx = zy, we simply multiply both sides of the equality x = y by the same number z.

Let us enumerate different particular cases of this statement.

Case when x = y = z = 1. Let us first consider the case when x = y = z = 1. In this case, x = y, so the equality A is true. Here, zx = zy, so the equality B is also true. Thus, here,

- A is true,
- B is true, and
- the implication A --> B is a particular case of a general statement which is always true.

Thus, we conclude that if A and B are both true, then the implication A → B is also true.

Case when x = 0 and y = z = 1. Let us now consider the case when x = 0 and y = z = 1. In this case, x =/= y, so the equality A is false. Similarly, since zx = 0 and zy =1, we have zx =/= zy, so the equality B is also false. Thus, here,

- A is false,
- B is false, and
- the implication A --> B is a particular case of a general statement which is always true.

Thus, we conclude that if A and B are both false, then the implication A → B is true.

Case when x = 0, y = 1, and z = 0. Let us consider the case when x = 0, y = 1, and z = 0. In this case, x =/= y, so the equality A is false. Here, zx = zy = 0, so the equality B is true. Thus, here,

- A is false,
- B is true, and
- the implication A --> B is a particular case of a general statement which is always true.

Thus, we conclude that if A is false and B is true, then the implication A → B is true.

Remaining case. Out of four possible cases (T,T), (T, F), (F, T), and (F, F), we showed that the implication is true in three of them: in the cases of (F, F), (F, T), and (T, T). The only remaining case is the case (T, F), when A is true and F is false.

If the implication was true in this case, this would mean that implication holds in all possible cases. But that would mean that this is a vacuous notion, the notion which is always trivially true. Intuitively, it is not true that every statement implies every other statement. There should be cases when implication is not true. Thus, in this remaining case (T, F), the implication should be false.

So, we have our explanation. So, in all four cases, we have an intuitive explanation of the corresponding row in the 4-row truth table of the implication – which is exactly what we wanted to achieve.

Second set of examples. Let us now move from mathematics to everyday life. Let us consider a simple implication, i.e., a simple if-then rule that everyone understands. For example, we can consider the following rule regarding cars that approach an intersection at which the traffic light is red. The red light means that the car should not continue going.

Thus,

- if a police officer sees the car going straight in spite of the red light,
- then he or she should issue a fine to the violating driver.

Here:

- A is “the car continues going straight in spite of the red light”, and
- B is “the police officer issues a fine”.

If this rule is satisfied, the police officer is doing his/her job. It could be that at some moment, the police officer is inattentive and misses a violating car. In this case, the officer has not followed the desired rule – and this officer will be reprimanded by his/her superior if the superior happens to be around.

So far, so good. Let us consider all possible situations.

Case when a car goes straight on red and gets a fine. Let us consider the simplest case:

- a car continue going straight on red light, and
- the police officer sees this violation and issues a fine.

Clearly, the officer is doing his/her job, so the rule A → B is satisfied. In this case:

- the statement A is true,
- the statement B is also true, and
- the implication A → B is true.

Thus, if A is true and B is true, the implication A → B should be true.

Case when a car goes straight and does not get a fine. If the car continues to go straight on red and the police officer does not issue a fine, this clearly means that the police officer is not doing his/her job. In this case:

- the statement A is true,
- the statement B is false, and
- the implication A → B is false.

Thus, if A is true and B is false, the implication A → B should be false.

Case when a car stops and does not get a fine. What if the car obediently stops at the red light and does not get a fine? In this case, if the police officer's superior is present, the superior will not find any fault with the police officer who is clearly doing his job. This means that in this case, there is no violation of the if-then (implication) rule that describes the desired behavior of the police officer – in other words, the if-then rule is true. Here:

- the statement A is false,
- the statement B is false, and
- the implication A → B is true.

Thus, if A is false and B is false, the implication A → B should be true.

Case when a car stops but still get a fine. Let us now consider the final case when the car stops at the red light, but – dues to some other violation – still get a fine. For example, we are at night, when the cars should use their lights, but in this particular case, one of the car's front lights is broken.

In this case, the police officer did not violate the original if-then rule and thus, this if-then rule is true. Here:

- the statement A is false,
- the statement B is true, and
- the implication A → B is true.

Thus, if A is false and B is true, the implication A → B should be true.

So, we again have our explanation. So, in this set of examples as well, in all four possible cases, we have an intuitive explanation of the corresponding row in the 4-row truth table of the implication – which is exactly what we wanted to achieve.

УДК 378

MAYBE THE USUAL STUDENTS' PRACTICE OF CRAMMING FOR A TEST MAKES SENSE: A MATHEMATICAL ANALYSIS

Zapata Francisco, PhD, instructor,
University of Texas at El Paso
fazg74@gmail.com

Kosheleva Olga, PhD, associate professor,
University of Texas at El Paso
olgak@utep.edu

Kreinovich Vladik, PhD, professor,
University of Texas at El Paso
vladik@utep.edu

Abstract. We always teach students that cramming for a test is a bad idea, that they should study at the same speed throughout the semester – but many still cram. We ourselves are not that different: when we prepare papers for a conference, we often "cram" in the last days before the deadline instead of working with a regular speed for the whole time before the conference. The ubiquity of cramming makes us think that maybe it is not necessarily always a bad idea. And indeed, a simple model of a study process shows that an optimal solution of-

ten involve some cramming – to be more precise, a study schedule, in which in some periods we study much more intensely than in other periods, is often more efficient than studying at the same speed.

Keywords: cramming, optimal study schedule, mathematical model of a study schedule, regular speed vs. bursts

How we teach students to study. From elementary school to PhD, we always teach students that the best way to study is to study with a regular speed:

- if we need to prepare a homework, we should start working on it when it was assigned (and not a few days before it is due);
- when we need to study for a test, we should study this material at a regular speed throughout the semester – and not a few days before the test, etc.

But do students listen to us? Some do, but, in our experience, the majority of students ignore our suggestions and study the old-fashioned way:

- first, a rather slow period, t
- then a period of very intensive cramming.

Do we ourselves follow our suggestions? Not really.

- Conference organizers know that most abstracts arrive at the last minute, and usually, many of them are clearly finalized at the last minute – since they often have silly typos that could have been easily caught if they were prepared based on a regular-speed schedule.
- Granting agencies know that most proposals are submitted at the last minute.

So maybe there is something in cramming? The ubiquity of such behavior, shown both

- by not-very-experience students and
- by their well-experienced instructors,

shows that maybe there is some advantage in cramming.

Maybe our advice to follow a regular study schedule is not always a good idea.

Let us analyze this problem. To analyze this problem, let us formulate it in precise terms. Let us denote the overall study period, between the moment when the task is assigned and the moment when the task is due, by n. During this period, there is a certain overall amount of time T that we can devote to this particular study task.

- This amount can distributed equally between different days – so that, as we always recommend, a student studies for the same time T/n during all n days.
- This amount can also be distributed unequally – so that some days, the students study less, and some days, they study much more.

Which is the best study schedule?

What does "the best" mean? First thing we need to do is to understand what "the best" means. In general, this may be a difficult task, but for studying, this is easy to describe – at least in the first approximation: we want to maximize the overall amount of the material learned by a student. This amount can be described by adding the amounts of material that a student learns during each of n days.

Each study schedule can be characterized by the amounts of time t(1), …, t(n) that the student takes of each of the n days. These amounts should add up to the overall time T allocated for the study: t(1) + … + t(n) = T. Let m(t) denote the amount of material that a student learns during a day when he/she studies for time t. Then,

- in the first day, the student learns the amount m(t(1)),
- in the second day, the student learns the amount m(t(2)), etc.

Overall, the amount of the material that the student have learned in n days is equal to the sum m(t(1)) + … + m(t(n)).

In these terms, the problem of selecting the best study schedule takes the following form:

- given the numbers n and T and the function m(t), f
- find the values t(1), …, t(n) for which the sum

m(t(1)) + … + m(t(n))

attains the largest possible value under the constraint that

t(1) + … + t(n) = T.

At first glance, it may look like the function m(t) is simple, but it is not. What is the function m(t)? At first glance, the situation looks straightforward: the more we study, the more we learn. So, it seems like the amount m(t) that we learn during time t should be simply proportional to the study time: m(t) = c * t for some constant c. In this simplified description, the ratio m(t)/t is the same for all t.

In reality, the situation is not so straightforward.

- First, when a student sits down to study, he or she does not immediately start learning at the same speed – the students need some time to switch to the study mode.
- So, for small t, the relative productivity m(t)/t is low.
- After a certain time, the productivity increases – but only up to a certain point, because for large values t, the student gets tired and his/her productivity drops again.

In other words, in real life, the ratio m(t)/t is not constant:

- first, it is small, close to 0,
- then it increases and t
- then it start decreasing again.

So what is the optimal study schedule: analysis of the problem. The ratio m(t)/t starts at a small value for small t, then increases and then starts decreasing again. Thus, for a certain value t = s, this ratio attains its largest possible value; let us denote it by M = m(s)/s.

For every other time-per-day t, the ratio m(t)/t does not exceed M. Thus, for each i-th day, the amount of material learned during this day does not exceed the product M * t(i). By adding up all the amounts of material m(t(1)) + … + m(t(n)) learned during all these days, we conclude that the overall amount of material learned does not exceed the product M * (t(1) + … + t(n)), i.e., does not exceed the value M * T.

On the other hand, if every day in which we actually study, we spend the "optimal" time s on studying, we learn exactly the amount M * s = M * t(i), and thus, the overall amount of material learned is equal exactly to the sum M* (t(1) + … + t(n)) = M * T.

Thus, we arrive at the following conclusion.

Optimal study schedule: conclusion. The optimal study schedule means that:

- on some days, we practically do not study at all, while
- on the days on which we do study, we spend the same amount of time s on studying.

Discussion. The above result means that the regular-speed study schedule – when we study the same amount of material every day – is indeed not the optimal way to prepare for the test. A better way is to allocate a few days for an intensive study.

Of course, this does not mean that cramming for the test is always a good idea. When students cram, it is not because they select – as we suggest – the optimal time-per-day, but because they:

- do not plan well,
- run out of time, and
- start studying all day long.

This improvised schedule, with the amount t(i) close to 24 hours, may not be optimal for the students – and, as the experience of many students show, is often not optimal indeed.

This idea can be applied to other activities as well. Our main interest is to analyze studying, but the same analysis can be applied to other activities. Instead of studying, we can take any other task that requires intensive many-days activity, be it

- working on a thesis or dissertation,
- working on a project at work, or
- writing a paper or a book.

Many writers tried their best to follow a regular schedule. Many articles and books giving advice to graduate students recommend to study regularly. Many business articles emphasize the need for regular work and regular planning. This is the ideal we all strive to, but this is not how many of us work. Inevitably:

- A graduate student working on a thesis or a dissertation works much more intensively at the end, when the deadline is approaching.
- Researchers working on a paper for a conference usually work much more intensively a few weeks (or even a few days) before the deadline.
- Even at work, many of us tend to work less intensively at first, and much more intensively when the deadline is approaching.

Our analysis shows that this may be more efficient than working at a regular speed. From this viewpoint, the way to increase productivity is:

- *not* to work more regularly, but rather
- to find a time-per-day when your per-hour productivity is the largest
- and work that amount every day allocated for this task.

The number of such days can be determined by dividing the overall amount of time allocated for this time by this optimal amount s.

This way, we may succeed even more.

Acknowledgments. This work was supported in part:

- by the US National Science Foundation grants HRD-0734825, HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center) and DUE-0926721, and
- by an award from Prudential Foundation.

The authors are thankful to Dr. Mourat Tchoshanov for his encouragement.

References

1. Ambrose, S. A., Bridges, M. W., DiPietro, M., Lovett, M. C., and Norman, M. K. How Learning Works: Seven Research-Based Principles for Smart Teaching, Jossey-Bass/Wiley, San Francisco, 2010.
2. Gillen-O'Neal, C., Huynh, V. W., and Fuligni, A. J. To study or to sleep? The academic costs of extra studying at the expense of sleep, Child Development 84(1) 133–142, 2013.

УДК 372.851: 371.212.3: 37.02

ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ ОДАРЕННЫХ УЧАЩИХСЯ В ГИМНАЗИЯХ ГЕРМАНИИ

Кочагина М.Н., кандидат педагогических наук, доцент,
Московский городской педагогический университет, г. Москва
KochaginaMN@yandex.ru

Аннотация. В статье описывается понимание феномена одаренности в Германии, раскрываются особенности обучения одаренных учащихся в немецких гимназиях, проводятся сравнения с практикой работы российских школ.

Ключевые слова: обучение математике, обучение в немецких гимназиях, поддержка одаренности.

LEARNING OF MATHEMATICS OF GIFTED STUDENTS IN THE GYMNASIUMS OF GERMANY

M.N. Kochagina, candidate of pedagogik sciences, docent,
Moscow City University of Education, Moscow
KochaginaMN@yandex.ru

Abstract. The article describes the understanding of the phenomenon of giftedness in Germany, specifics of education of gifted student in the German gymnasiums, conducted comparisons with the practice of Russian schools.

Keywords: the teaching of mathematics, learning in the German gymnasiums, support for gifted.

Внимание к проблеме одаренности детей в Европе имеет давние традиции. Более ста лет назад появились научные работы по определению феномена одаренности, исследованию диагностики одаренности, видов одаренности. В 1916 году в Германии были открыты первые школы для одаренных детей. Тем не менее, в 60-х годах XX века стало очевидным, что поддержка и сопровождение одаренности детей в Германии осуществляется лишь в области филологии и языка [2, с. 4]. В области сопровождения и поддержки одаренности в математике успехов не было.

С 90-х годов XX века в Германии работают три исследовательских центра по изучения и содействию одаренности детей (в Марбурге, в Хильдесхайме и Дрездене, в Мюнстере) [2, с. 5-6]. Считается, что около 2 % детей в Германии обладают IQ>130, ещё 7 % имеют IQ в пределах 120-130.

Высокий уровень IQ (130±10) учащегося считается важным показателем его одаренности и указывает на его потенциал, который в будущем при соответствующей поддержке и развитии индивидуальных способностей позволит добиться успеха в выбранной им сфере деятельности. Для выявления высокоодаренных детей используются тесты на интеллект (IQ test), а также другие тесты и признаки (детальность мышления, необычный для возраста словарный запас, быстрое установление причинно-следственных связей, нелюбовь к рутинным заданиям и т.д.). Тренировка интеллекта и решение усложняющихся заданий позволяет поддерживать одаренность детей, и занятия математикой с этой целью приводит к хорошим результатам.

Тип школы также влияет на развитие интеллекта детей. В Германии обычно выделяют 3 типа школ: основная школа (Hauptschule), реальная школа (Realschule) и гимназия (Gymnasium). Разделение учащихся по типам школ осуществляется после окончания начальной школы (Grundschule). Исследования в области одаренности [2, с. 7] показывают, что обучение одаренных школьников в реальной и основной школе снижает IQ, в то время, как их обучение в гимназии повышает.

Дифференциация учащихся, развивающие программы, подготовка учителей для работы с одаренными учащимися, предоставление учащимся свободы и помощи в выборе дальнейшего пути, индивидуальное консультирование учащихся и их родителей – это те меры, которые применяются в Германии для выявления и сопровождения одаренных учащихся.

В настоящее время в Германии финансируются государством 4 школы (гимназии) для одаренных детей (в Саксонии-Анхальт, Саксонии, Гессене и Ваден-Вюртенберге). Их целями является содействие интеллектуальному и социальному развитию своих учащихся. Они предоставляют индивидуальный подход учащимся с умственной одаренностью, чего трудно достичь в рамках обычной школы. В немецких гимназиях и школах для одаренных детей обязательно есть кабинеты (центры) психологической службы. Повышенное внимание уделяется социализации одаренных учащихся, поэтому считается возможным обучение таких учащихся не только в гимназиях и специализированных школах, но и в остальных типах школ.

При желании родителей и высоком уровне IQ (>120) учащийся имеет право зачисления в единственную в Германии гимназию-интернат для одаренных детей (Швебиш-Гмюнд). В этой гимназии-интернате также обязательны социальные проекты и практики, выбор кружков различной направленности (от 5 до 10 кружков в год). Ученики 11 дней учатся и 3 дня отдыхают. В этой гимназии ученикам дается большая доля свободы и самостоятельности, так, например, учащиеся 9 классов могут вести кружковые занятия у учеников 7 классов. Одаренным школьникам разрешается "перескакивать" математические курсы по результатам экзаменов, проводимых в начале семестра. Как и в остальных школах Германии, ученики гимназии-интерната имеют 4 контрольные работы по математике за год, бывают короткие самостоятельные работы. Развивать свои интересы в математике одаренные учащиеся могут, участвуя в научно-исследовательских конкурсах и проектах, таких как «Молодежь экспериментирует. Молодежь исследует», «Математическая летняя академия», математико-языковой обмен, федеральные конкурсы по математике, «Кенгуру».

В России сложилась традиция с обучением учащихся, имеющих индивидуальные способности и мотивацию к изучению определенных предметов, в том числе к математике, в отдельных классах (школах), по специальным учебникам, с увеличением числа уроков данного предмета в неделю [4, 5]. Понимание феномена одаренности в Германии иное, что дает возможность поддерживать общую одаренность детей, создавать условия для ее реализации. Изучение математики в школе является инструментом поддержки одаренности детей. Интересный факт, но при обучении одаренных детей количество уроков математики в неделю может сокращаться, а не увеличиваться. Если по учебному плану обычно на математику выделяется 4 часа, то одаренным детям хватает 3 часов для изучения того же материала. Оставшееся время тратится на дополнительные курсы, которые ученики выбирают самостоятельно (из опыта работы гимназии-интерната для одаренных детей).

Следует сказать, что в Германии существуют школы (гимназии) с углубленным изучением отдельных предметов. Обычно выделяют классические гимназии, естественно-математические (углубленное изучение математики, физики, химии, биологии) и гимназии современных языков.

Гимназии дают школьникам широкое и углублённое общее образование. Одной из их задач является развитие общих способностей к обучению в высшей школе у тех школьников, которые имеют соответствующие намерения и наклонности. Гимназии предназначены, прежде всего, для способных к языкам детей, с выраженной склонностью к логически-абстрактному мышлению и стремлением к углубленному общему образованию. Цель гимназий – раскрыть потенциал и индивидуальные потребности ребенка. В гимназии доводятся до совершенства теоретические знания, взаимоотношения между дисциплинами. В последнее время популярность гимназий растет среди родителей, но все еще остается низкой. Постепенно расширяется количество профилей гимназий [7, с. 119]. В Германии около 16% гимназистов. После окончания начальной школы направление на учебу в гимназии дает школа (учитывается мнение учителей и психолога). Родители прислушиваются к мнению педагогов, так как обучение в гимназии может быть сложным для ребенка. Успешное окончание гимназии дает возможность обучения в университете, окончание других типов школ не дает такое право, требуется дополнительное обучение.

Показательным является сравнение количества уроков математики в неделю и общего количества часов учебного времени в неделю в разных школах Германии и России (таблица 1).

Таблица 1

Количество уроков математики и общего количества недельных учебных часов в школах Германии и России (по материалам, предоставленным математической гимназией им. Мартина Андерсена (Дрезден))

	5		6		7		8		9		10		11		12	
	а	*б*	*а*	*б*	*а*	*б*	*а*	*б*	*а*	*б*	*а*	*б*	*а*	*б*	*а*	*б*
Германия	6 (33)	5 (31)	5 (33)	4 (32)	5 (33)	4 (33)	5 (34)	4 (34)	5 (34)	4 (34)	5 (35)	4 (35)	4 (35)	4 (35)	4	4
Россия	5-6 (32)	5 (28/31)	5-6 (32)	5 (29/32)	5-6 (32)	5 (31/34)	8 (35)	5 (32/35)	8 (35)	5 (32/35)	6-9 (36)	4 (35)	6-9 (36)	4 (35)	-	-

а) число часов, выделяемых на математику при углубленном (повышенном) или профильном изучении математики, в скобках указано допустимое число учебных часов в неделю в каждом классе (при пятидневной/шестидневной неделе).

б) число часов, выделяемых на математику (в гимназиях) при изучении математики в классах, где математика является базовым (непрофильным) предметом, в скобках указано допустимое число учебных часов в неделю в каждом классе (при пятидневной/шестидневной неделе). В школах Германии более низкого уровня общее количество уроков в неделю примерно на 3 меньше.

В немецких гимназиях на математику при углубленном ее изучении обычно выделяется на один час больше, чем в остальных типах школ. При углубленном изучении математики в российских школах на математику отводится значительно больше уроков математики в неделю (на 1-5 уроков).

В гимназических классах Германии обучается около 24 учащихся. Чем старше класс и чем более глубоко изучается математика, тем меньше человек в классе. Так, например, в 11 классе математической гимназии в классе может быть 10 учащихся. Содержание математики в старших классах немецких и российских гимназий, дающее углубленную подготовку по математике, схоже. Изучаются теория множеств, отношения и функции, уравнения, степени, корни, логарифмы, геометрические понятия, подобие, векторы, гомотетия, стереометрия, тригонометрия, дифференциальное и интегральное исчисление, линейная алгебра, статистика и вероятностные вычисления. Различия касаются более позднего изучения одного и того же содержания, по сравнению с российскими школьниками, используемых математических методов (например, широкого использования метода аналитической геометрии), серьезной научной работы учащихся (научные проекты с 7 класса, научная работа под руководством сотрудников университетов), а также свободы выбора курсов.

Никакой специальной организационной и мотивирующей деятельности учителя гимназий в Германии не осуществляют. Причины этого, видимо, кроются в правильном распределении детей по школам и возможности перевода детей из гимназий в более простые школы. При этом на каждом уроке у всех учащихся что-то обязательно должно получиться, достигается ситуация успеха. Психологической стороне обучения уделяется много внимания. Кроме специфических математических компетенций, у учащихся должны быть сформированы надпредметные компетенции, в формирование которых вносят вклад все учебные предметы, в том числе и математика (умение учиться, рассуждать, решать задачи и коммуникация) [1, с. 43].

В Германии не существует открытых электронных образовательных ресурсов по математике. Учителя математики, владеющие русским языком, используют русскоязычные сайты [6]. Для подготовки учащихся к экзаменам (Abitur*)* по математике издаются пособия, которые можно приобрести только в книжном магазине. На уроках используются кодоскопы и научные калькуляторы. Обучению работе с калькуляторами отводится отдельное время на уроке и отдельное место в учебнике. Калькуляторы покупают школьнику родители в 5 классе (школа рекомендует определенную марку и модель, обычно “Casio”).

Школьников привлекает большое количество технических музеев в крупных и маленьких городах Германии (Мюнхен, Дрезден, Гиссен и т.д.), в которых обязательно открыты математические выставки. Посещение выставок и музеев обычно организуют учителя. Такой вид школьного образовательного туризма востребован по всей Германии, и музеи не пустуют. Посещение музеев и проведение занятий в музеях является продолжением учебного процесса [3].

Понимая одаренность как потенциал ребенка, который при определенном сопровождении может показать в будущем высокие результаты в некоторой области, в Германии выстраивают систему обучения одаренных учащихся. Обучение математике здесь является средством поддержки и развития одаренности, а так же формирования ответственности будущей элиты демократического общества.

Литература

1. Брюстле Г. Математика в гимназиях Баден-Вюртенберга / Г. Брюстле // Математика. – 2012. – № 6. – С. 42-45.

2. Грауманн О. Исследование проблем детской одаренности в Германии / О. Грауманн // Непрерывное образование: XXI век. – 2014. – выпуск 3 (7). – С. 1-14.

3. Кочагина М.Н. Обучение будущих учителей математики в условиях введения профессионального стандарта педагога / М.Н. Кочагина // Материалы XXXIV Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов «Концепция развития математического образования: проблемы и пути реализации». – Москва, 2015. – С. 370-372.

4. Кочагина М.Н. Углубленное изучение геометрии в современной старшей школе. Учебно-методическое пособие для студентов /М.Н. Кочагина. – М.: Изд-во МГПУ, 2004. – 44 с.

5. Кочагина М.Н. Учет психологических особенностей учащихся математических классов как фактор эффективного обучения математике / М.Н. Кочагина // Сборник научных трудов математического факультета. – МГПУ, 2005. – с. 139-143.

6. Кочагина М.Н. Электронные образовательные ресурсы в работе учителя математики / М.Н. Кочагина // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия: Педагогика и психология. – 2007. – № 2. – С. 156-162.

7. Писарева Л.И. Трансформация системы образования Германии в контексте мировых тенденций развития / Л.И. Писарева // Отечественная и зарубежная педагогика. – 2012. – № 1. – С. 114-125.

УДК 372.851

НЕМЕЦКИЕ СТАНДАРТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Сафуанов И.С., доктор педагогических наук, профессор,
Московский городской педагогический университет, г. Москва
ngpis@rambler.ru

Аннотация. Рассматриваются федеральные стандарты математического образования, введённые в Германии в 2003 году и обновлённые в 2012 году. Обсуждены также стандарты подготовки учителей математики в Германии.

Ключевые слова: образовательные стандарты, зарубежное математическое образование, образование в Германии, компетентностный подход

GERMAN STANDARDS OF MATHEMATICAL EDUCATION

I.S. Safuanov, doctor of pedagogical sciences, professor
Moscow City University, Moscow
ngpis@rambler.ru

Abstract. Federal standards of mathematical education established in Germany in 21th century are considered. The standards of mathematics teacher preparation in Germany are discussed, too.

Keywords: educational standards, foreign mathematical education, Germany education, competency-based approach

На протяжении по меньшей мере двух столетий – девятнадцатого и двадцатого. немецкое образование вообще и математическое образование, в частности, считались едва ли не лучшими в мире и служили образцом для постановки систем образования в других странах. Например, именно из Германии в другие страны перенесены такие типы образовательных учреждений, как гимназии, реальные училища, которые позднее стали основой для современных общеобразовательных средних школ. В Германии были заложены основы и профессионально-технического образования для рабочих профессий.

Однако послевоенное развитие образования в немецких государствах (ФРГ и ГДР) по разным причинам (увеличение доли мигрантов среди учащихся в ФРГ, доли возрастных учителей и др.) привело к снижению уровня обучения, особенно математическим дисциплинам. Тем не менее, для немецкой общественности были шоком результаты международных исследований достижений учащихся по математике, особенно PISA 2000 года. Немецкие школьники показали результаты ниже среднего уровня, что вызвало дискуссии среди учёных, учителей, политиков, представителей общественных организаций и родителей. Исследование выявило недостатки немецкой системы образования, например, следующие.

Школы не обладали автономией и делились на три типа (школы общего типа, реальные школы и гимназии, причём только гимназии давали право поступления в университеты). Это усиливало различие в учебных достижениях учащихся и их социально-экономическое неравенство. Школьное образование в Германии находится в ведении федеральных земель, то есть управляется более чем полутора десятком разных, довольно независимых систем. Не было единых программ, требований к выпускникам. В результате, например, легче было поступить в ведущие университеты выпускникам гимназий из Баварии, чем из других земель [10].

После интенсивной работы специально созданных групп учёных и практиков образования, с учётом теории математического образования и опыта других стран (например, США) было начато реформирование математического (и не только) образования в Германии. В основу реформы и введения новых образовательных стандартов был положен ряд принципов, в числе которых:

1) В основе управления образовательным процессом должен лежать не *ввод* (информации для усвоения обучающимися), а *вывод* (результатов обучения). Важнее ставить цели и задачи, чем разрабатывать конкретные учебные материалы и программы.

2) Школам должна предоставляться более широкая *автономия* (ранее образовательные министерства органы не только диктовали учебные программы, но и назначали учителей в школы).

3) Нужна большая *прозрачность* и *ответственность* в образовательном процессе, для чего должны проводиться исследования и оценки достижений учащихся, необходимо участвовать в международных исследованиях PISA, TIMSS и т. п.

4) В основу стандартов необходимо положить *компетентностный подход* ([8], [9], [11]) и результаты исследований по методике, дидактике, психологии обучения,

Главным мероприятием в реформировании математического образования в Федеративной Республике Германии стало введение в 2003 году на конференции министров просвещения всех земель (KMK – Kultusministerkonferenz) единых федеральных стандартов обучения математике на всех школьных уровнях школьного обучения ([3], [4], [6]). Эти стандарты подвергались и дальнейшему критическому обсуждению и были обновлены на очередной конференции KMK в 2012 году. Структура компетенций в этих стандартах состоит из двух дополняющих друг друга наборов:

Общие:

1) Математически аргументировать
2) Математически решать задачи

3) Математически моделировать
4) Использовать математические представления
5) Обращаться с символьными, формальными и техническими элементами математики
6) Математически коммуницировать.

Второй набор компетенций составляют «ведущие идеи» (Leitideen):

1) Алгоритмы и числа
2) Измерения
3) Пространство и форма
4) Функциональная зависимость
5) Данные и случайность.

Образовательные стандарты по уровням образования.

Начальная школа.

Выпускники 4 класса должны иметь знания по разделам:

Числа и операции (четыре основных арифметических операций, устный счет и письменные алгоритмы, уметь проверить результат на правдоподобие, решать текстовые задачи и т.п.);

простые комбинаторные задачи;

Пространство и форма (распознавать пространственные отношения, описывать и использовать узлы, маршруты, планы, двух- и трехмерные представления объектов, их взаимное расположение, простые чертежи, измерение площади и периметра, элементы симметрии, закономерности и узоры);

Закономерности и структуры (распознавать структурированные представления, таблицы, закономерности, простейшие функциональные зависимости в практических ситуациях знать, словесно описывать, представлять в таблицах, решать задачи на пропорции)

Величины и измерение (понятие о величине, стандартные денежные единицы, Длины, время и вес, объем, сравнение размеров, измерение и оценка, измерительные приборы)

Данные, частота и вероятность (собирать данные и представлять их в наблюдениях, исследованиях и экспериментах данные, структурировать в виде таблиц, графиков и диаграмм).

Основная школа:

Предполагаются следующие знания выпускников (по "ведущим идеям"):

Числа:

хорошее понимание рациональных чисел, особенно натуральных, целых и дробных чисел, вычислительные навыки, оценки и прикидки, округление, проценты и начисление процентов,

взаимосвязь между арифметическими операциями и их обратными, вычислительные алгоритмы,

проверка и интерпретация результатов в практических ситуациях.

Мера и измерения:

использовать основные принципы измерения, особенно длин, площадей и объемов измерений, в т.ч. других предметах (физике и т.п.),

Выбор единиц измерения, соответствующих ситуации (времени, массы, денег, длины, площади, объема и угла)

вычисление площади и периметра прямоугольника, треугольника и круга, объема и площади поверхности призмы, пирамиды, цилиндра, конуса и сферы, длины отрезка, величины углов, также используя тригонометрические отношения и соотношения подобия и т.п.

Пространство и форма.

Выявление и описание геометрических структур в окружающей среде, - действовать осмысленно с линиями, поверхностями и телами,

Представление геометрических фигур в декартовой системе координат,

Анализ и классификация геометрических объектов на плоскости и в пространстве,

Особенности и отношения геометрических объектов (например, симметрия, конгруэнтность, подобие, взаимное расположение) и - Применение плоской геометрии в построениях, решениях и доказательствах, в частности, теорем Пифагора и Фалеса,

Построение геометрических фигуры, используя соответствующие инструменты, такие как циркуль, линейка, транспортир или с помощью программного обеспечения динамической геометрии и т.п.

Функциональная зависимость.

Использование функции в качестве средства для описания количественных соотношений, распознавание и описание функциональных отношений, представление в устной, табличной или графической форме, умение анализировать, интерпретировать и сравнивать различные представления функциональных зависимостей (например, линейной, пропорциональной и обратно пропорциональной);

решение практических проблем, связанных с линейными, пропорциональной функциями, умение

интерпретировать системы линейных уравнений графически,

решать уравнения и системы линейных уравнений, в том числе с использованием соответствующего программного обеспечения, вопросы разрешимости и решения различных линейных и квадратных уравнений и систем линейных уравнений и сформулировать этой связи заявления

исследование и графики функций (в частности, линейные и квадратичные функции и показательные функции) и т.п.

Данные и случайность.

Анализ графиков и таблиц статистических обследований,

План статистических обследований;

Умение систематически собирать данные, которые отображаются в таблицах, и представить их в графическом виде, а также с помощью соответствующих инструментов (например, программного обеспечение), интерпретировать данные с помощью переменных,

оценивать аргументы на основе анализа данных,

описывать случайные явления в повседневных ситуациях,

определение вероятностей случайных экспериментов.

Таким образом, второй набор компетенций связан с предметными результатами обучения.

Кроме того, компетенции распределяются по 3 областям требований (различающимся глубиной овладения компетенцией). Хотя эти области охватывают и общие компетенции, и ведущие идеи, описываются также 2 уровня овладения математическим содержанием, распределённым в соответствии с «ведущими идеями»: базовый и повышенный.

Можно заметить, что общие компетенции в немецких стандартах отражают требования, в частности, и к метапредметным результатам обучения.

Касаясь подробнее предметного содержания, отметим, какие знания у выпускников гимназий (готовых к поступлению в университет) предполагают «ведущие идеи» (т.е. линии) школьной математики.

Например, в линии «**Алгоритмы и числа**» выпускники должны быть знакомы с основами математического анализа и линейной алгебры вплоть до умножения матриц и вычисления обратных матриц и применения этих операций для описания математических процессов. НА повышенном уровне выпускники должны уметь применять степени матриц, вычислять собственные векторы.

В линии «Измерения» задействованы методы и анализа бесконечно малых, и аналитической геометрии и даже теории вероятностей. Сюда входят измерения длин и углов в трехмерном пространстве, в том числе с помощью скалярного произведения, измерения скоростей изменения величин, измерение площадей областей, ограниченных графиками функций, измерения математического ожидания и стандартного отклонения случайных величин и т.п.

На повышенном уровне учащиеся должны и уметь измерять расстояния между точками, прямыми и плоскостями, а также объемы тел вращения.

В линии «**Пространство и форма**» предлагается использовать также соответствующее программное обеспечение. Ученики должны владеть координатным методом, знать понятия коллинеарности, геометрического скалярного произведения векторов, уметь использовать векторы в работе с многогранниками, владеть методами аналитической геометрии.

На повышенном уровне должны уметь исследовать взаимное расположение прямых и плоскостей.

В линии «**Функциональная зависимость**» рассматриваются также вероятностные контексты, методы анализа бесконечно малых и соответствующее программное обеспечение.

На повышенном уровне учащиеся, например, должны понимать линейную интерполяцию, цепное правило, а также знать производную и обратную функции для логарифмической функции.

Довольно высоки требования и в линии «**Данные и случайность**».

Таким образом, содержание обучения в старшей школе, а также планируемые результаты значительно объёмнее и сложнее, чем в нашей стране.

В 2008 году приняты требования к компетенциям учителей математики (предметным и дидактическим, общепедагогическим):

Общие компетенции математического профиля:

Выпускники способны связывать математические и дидактические знания, что позволяет им целенаправленно руководить процессами обучения и воспитания в области математики и самостоятельно развивать и привносить инновации для обучения и развития школ.

Они

математические понятия могут адекватно письменно и передавать математическое предметное содержание структуры областей, структурировать математические темы с помощью наводящих вопросов, понимают связи математической науки с другими науками, а также со школьной математикой и её развитием,

могут при формулировке и доказательстве математических утверждений проверять аргументы собеседников, строить собственные линии рассуждений, применять математические способы мышления для решения внутриматематических и практических задач (математизировать), показывать решение задач с помощью информационных технологий, рефлектировать и коммуницировать

могут объяснить значение математического содержания и методов, обосновывать социальную важность математики и объяснять это в контексте целей и содержания преподавания математики,

могут использовать методические концепции и эмпирические данные, полученные в исследованиях теории математического образования, для анализа представлений, способов мышления и типичных ошибок учащихся, оценивания их успехов и способностей, для того, чтобы мотивировать учащихся к изучению математики, отслеживать их пути обучения, поощрять и оценивать продвижение,

на основе методических теорий могут анализировать и планировать дифференцированное обучение математике, на основе рефлексии своего опыта совершенствовать эту деятельность,

могут на основе их предметно-специфических знаний с точки зрения планирования и проектирования инклюзивное образование с учителями специального образования и других приемлемых сотрудничать педагогических кадров и вместе с ними профессиональные возможности для обучения развиваться.

Кроме того, скорректированы программы предметной подготовки по математическим дисциплинам для будущих учителей по уровням школьного обучения – отдельно для начальной, основной и старшей школы.

В результате проведённых реформ уже в 2006 году и поступательно в 2009, 2012, 2015 годах значительно улучшались результаты немецких учащихся в международных исследованиях PISA и TIMSS. Тем не менее, исследователь отмечают, что многие аспекты немецкого математического образования всё ещё требуют улучшения, например: требуют дальнейшей проработки компетентностные модели и способы оценки компетенций; есть тревоги из-за увеличения часов обучения при уменьшении лет обучения; есть также проблема развития креативности, обучения решению задач, в том числе нестандартных, связанных с реальной жизнью, задач открытого характера ([1], [2], [5], [7], [10]).

Литература

1. Сафуанов И. С. Теория и практика преподавания математических дисциплин в педагогических институтах / И. С. Сафуанов // Уфа: Магрифат, 1999. – 107 с.
2. Сафуанов И.С. Открытый подход к обучению математике / И. С. Сафуанов // Университеты в системе поиска и поддержки математически одаренных детей и молодежи Материалы I Всероссийской научно-практической конференции. – 2015. – С. 126-130.
3. Blum W. Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen / Blum W., Drüke-Noe C., Hartung R., Köller O. (Hrsg.). – Berlin, 2006.
4. Klieme, E. Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards / Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M., Reiss, K., RIquarts, K., Rost, J., Tenorth, H.-E., Vollmer, H. – Eine Expertise // BMBF (Hrsg.): Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. – Bonn, 2003. – S. 7–174.
5. Klieme, E. Introduction of educational standards in German-speaking countries / Klieme, E., & Maag-Merki, K. // J. Hartig, E. Klieme, & D. Leutner (Eds.). Assessment of Competencies in Educational Contexts. – Göttingen: Hogrefe & Huber Publishers, 2008. – P. 305-314.
6. KMK. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. – Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 04.12.2003. – Berlin, 2004.
7. Neumann, K. From PISA to educational standards: The impact of large-scale assessments on science education in Germany / Neumann, K., Fischer, H., & Kauertz, A. // International Journal of Science and Mathematics Education. – 2010. – V.8. – P.545-563.

8. Rychen, D. S. Defining and Selecting Key Competencies / Rychen, D. S., & Salganik, L. H. (eds.). – Seattle: Hogrefe & Huber Publishers, 2001.

9. Rychen, D. S. Key Competencies for a Successful Life and Well-Funktioning Society / Rychen, D. S., Salganik, L. H. (eds). – Seattle: Hogrefe & Huber Publishers 2003.

10. Tucker, M. Germany: Once Weak International Standing Prompts Nationwide Reforms for Rapid Improvement / Tucker, M., and Brown Ruzzi, B. // Lessons from PISA for the United States: Strong Performers and Successful Reformers in Education. – OECD Publishing, 2011. – P. 201–220.

11. Weinert, F. E. Concept of Competence: A Conceptual Clarification / F. E. Weinert // D. S. Rychen & L. H. Salganik (eds), Defining and Selecting Key Competencies. Seattle, Bern: Hogrefe & Huber Publishers, 2001, pp. 45-65.

УДК 378.147

ОБ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ БУДУЩИХ БАКАЛАВРОВ НА ЗАНЯТИЯХ ПО КОМПЬЮТЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Букушева А.В., кандидат педагогических наук,
ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского», г. Саратов
bukusheva@list.ru

Аннотация. Рассматривается проблема приобщения будущих бакалавров, обучающихся по направлению 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», к исследовательской деятельности на занятиях по дисциплине «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование».

Ключевые слова: методика обучения, компьютерная геометрия, исследовательская деятельность.

ABOUT RESEARCH ACTIVITY OF FUTURE BACHELORS IN COMPUTER GEOMETRY CLASSES

A.V. Bukusheva, candidate of pedagogical sciences,
National Research Saratov State University named after G.N. Chernyshevsky, Saratov
bukusheva@list.ru

Abstract. The question of engaging future Bachelors studying `Mathematics and Computer Science` 02.03.01 in experimental research activity during the classes of Computer Geometry and Geometric Modeling is examined in the paper.

Keywords: method of teaching, computer geometry, research activity.

Идея исследовательского обучения математике в России зародилась в середине XVIII века как идея сближения обучения с чертами научного исследования [7]. Под исследовательской деятельностью понимается деятельность, которая связана с решением задачи с заранее неизвестным ответом и предполагает наличие основных этапов, характерных для исследования в научной сфере: постановку проблемы, изучение теории, связанной с выбранной темой, подбор методик исследования и практическое овладение ими, сбор собственного материала, анализ и выводы.

В рамках высшего образования занятие исследовательской деятельностью становится обязательным условием освоения основной образовательной программы. В «Концепции развития математического образования в Российской Федерации» определяется одно из главных условий развития системы высшего образования – вовлеченность преподавателей и студентов в фундаментальные и прикладные исследования. Студенты, изучающие математику, включая информационные технологии, должны решать творческие учебные и исследовательские задачи [6, С. 7].

Под учебно-исследовательской деятельностью обучающихся понимается учебная деятельность по приобретению практических и теоретических знаний с преимущественно самостоятельным применением научных методов познания, что является условием и средством развития у обучающихся творческих исследовательских умений. Учебно-исследовательская работа направлена на получение студентом «нового для себя» знания. Структуру учебно-исследовательской деятельности определяют следующие компоненты: учебно-исследовательская задача, учебно-исследовательские действия и операции, действия контроля и оценки [5, С. 69]. Учебно-исследовательская задача занимает промежуточное положение между учебной задачей, алгоритм решения которой неизвестен только студенту, и научно-исследовательской задачей, которая формулируется самим исследователем, способ решения которой, чаще всего, неизвестен, а её решение дает объективно новые знания. Учебно-исследовательские задачи могут выступать в учебном процессе вуза определенным аналогом исследовательских задач в науке. Использование информационных и коммуникационных технологий в образовательной деятельности позволяет рассматривать на занятиях задачи, которые ранее не решались в связи с их сложностью.

Появление компьютеров привело к распространению в математике экспериментального подхода. Большую роль в математических исследованиях играют компьютерные эксперименты: они могут или дать иллюстрацию утверждения, или опровергнуть его, или натолкнуть какую-либо (в том числе новую) идею. Методы экспериментальной математики меняют характер математического исследования, получение результатов и способы проведения доказательств находят применение в обучении математике (С. Гроздев, С.Г. Иванов, В.Н. Дубровский, А.В. Середа, Т.Ф. Сергеева, В.И. Рыжик, И.С. Храповицкий, М.В. Шабанова, Г. Шуман, А.В. Ястребов и др.). Возможность для реализации экспериментально-исследовательского подхода к изучению математики представляет компьютерная геометрия. Так, в частности,

1) в процессе изучения геометрии у студента появляется возможность использовать уже сформированные интуитивные представления о реальных образах геометрических объектов;

2) использование компьютерных программ делает возможным визуализацию геометрических конструкций;

3) экспериментальные исследования в геометрии способствуют развитию образного мышления студентов;

4) использование информационных и коммуникационных технологий в изучении геометрии позволяет студенту осознать междисциплинарный характер математики вообще и геометрии в частности.

В подготовке будущих бакалавров, обучающихся по направлению «Математика и компьютерные науки» в Саратовском государственном университете, можно выделить следующие геометрические дисциплины: «Аналитическая геометрия», «Дифференциальная геометрия и топология», «Гладкие многообразия и управляемые системы», «Дополнительные главы геометрии и алгебры», «Симплектическая геометрия и гамильтоновы системы», «Группы и алгебры Ли», «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование».

Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование изучается будущими бакалаврами на четвертом курсе. Основными программными средствами выбраны: система Wolfram Mathematica, а также Maxima, GeoGebra. На лабораторных занятиях студенты решают не только задачи по дифференциальной геометрии, вычислительной геометрии, что является традиционном для данного курса, но и задачи по тем дисциплинам, которые определяются научными исследованиями кафедры, реализующей компьютерную геометрию. Некоторые междисциплинарные связи компьютерной геометрии с геометрическими дисциплинами и ее роль в подготовке бакалавров проанализированы в [4]. Приведем пример исследовательской задачи по симплектической и компьютерной геометрии.

Рассмотрим центральную проблему курса «Симплектическая геометрия и гамильтоновы системы» - проблему интегрирования гамильтоновых систем дифференциальных уравнений. Нахождение первых интегралов гамильтоновых систем представляет важную задачу не только математики, но и естествознания в целом. На занятиях по симплектической геометрии и гамильтоновым системам студенты знакомятся с геометрическим вариантом теоремы Нетер, позволяющей находить первые интегралы гамильтоновых систем. Понимание теоремы Нетер требует от студента умения работы с многомерными геометрическими пространствами. Теорема Нетер позволяет находить первые интегралы гамильтоновых систем, используя свойства векторных полей, возникающих на кокасательном расслоении гладких многообразий. В общей теории отсутствует универсальный способ построения нужных векторных полей. На занятиях по компьютерной геометрии студентам предлагается с помощью прикладных программ определять векторные поля с использованием параметров, а затем находить нужные значения параметров так, чтобы построенные векторные поля удовлетворяли критериям теоремы Нетер.

Экспериментально-исследовательский подход при решении данной задачи реализуется следующим образом:

1) приступая к заданию векторного поля, обладающего нужными свойствами, студент опирается на уже сформированные у него представления о геометрических свойствах и способах визуализации векторных полей;

2) визуализация интегральных кривых заданных студентом векторных полей позволяет проследить зависимость свойств векторного поля от исходных параметров;

3) необходимость обращаться в своей исследовательской работе к изучению многомерных пространств, требует от студента развитого образного мышления. Развитию образного мышления способствует практика визуализация продолжения векторного поля с многообразия в его кокасательное расслоение;

4) решение задачи нахождения первых интегралов гамильтоновых систем требует от студента знание геометрии, математического анализа и дифференциальных уравнений.

Для организации самостоятельной работы и подготовки к занятиям студентам рекомендуется использовать Интернет-ресурсы [1]. Принципы методической системы обучения дисциплины «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование» и условия их реализации рассмотрены в работе [2]. Примеры учебно-исследовательских задач по компьютерной геометрии приведены в [3].

Литература

1. Букушева А.В. Организация самостоятельной работы студентов при изучении компьютерной геометрии в LMS MOODLE / А.В. Букушева // Азимут научных исследований: педагогика и психология. – 2016. – Т. 5. – № 3 (16). – С. 30-34.

2. Букушева А.В. Принципы методической системы обучения компьютерной геометрии / А.В. Букушева // Балтийский гуманитарный журнал. – 2016. – Т. 5. – № 3(16). – С. 95-98.

3. Букушева А.В. Учебно-исследовательские задачи в подготовке бакалавров-математиков / А.В. Букушева // Вестник Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета. Серия «Информационные компьютерные технологии в образовании». – 2015. – Вып. 11. – С. 85-93.

4. Букушева А.В. Место компьютерной геометрии в подготовке бакалавров-математиков / А.В. Букушева // Современные информационные технологии и ИТ-образование. Сборник научных трудов X Юбилейной международной научно-практической конференции / под ред. В.А. Сухомлина. – Москва: МГУ. – 2015. – С. 291-294.

5. Далингер В.А. Информационно-коммуникационные технологии в учебно-познавательных исследованиях студентов // Высшее образование сегодня. – 2012. – №11. – С. 67-72.

6. Концепция развития математического образования в РФ [Электронный ресурс] // Министерство образования и науки Российской Федерации – Режим доступа: минобрнауки.рф/документы/3894.

7. Шабанова М.В. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение: коллективная монография. / Шабанова М.В., Овчинникова Р.П., Ястребов А.В. и др. – М.: Издательский дом Академии Естествознания, 2016. – 300 с.

УДК 51-37

ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА MATHCAD В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН

Воронцова В.Л., кандидат физико-математических наук, доцент,
Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань
milen99@yandex.ru
Багоутдинова А.Г., кандидат технических наук, доцент
Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань
bagoutdinova@rambler.ru

Аннотация. В настоящее время для научно-технических расчетов на компьютерах все чаще и чаще используются не традиционные языки программирования и не электронные таблицы, а специальные математические программы типа Mathematica, MatLab, Maple, Mathcad, Gauss, Reduce, Eureka и др.

Математические пакеты, в особенности Mathcad —наиболее популярный пакет из вышеперечисленного списка, — позволяют специалистам из разных научно-технических областей ++быстро освоить работу на компьютере и реализовать на них математические модели, не вдаваясь в тонкости программирования на традиционных языках (Fortran, С, Pascal, BASIC и др.).

Ключевые слова: математические пакеты, математические программы.

APPLICATION OF THE MATHCAD PACKAGE IN TEACHING MATHEMATICAL DISCIPLINES

V.L. Vorontsova, PhD, associate professor,
Kazan Federal University, Kazan
milen99@yandex.ru

A.G. Bagoutdinova, PhD, associate professor,
Kazan Federal University, Kazan
bagoutdinova@rambler.ru

Abstract. Currently, for scientific and technical computer calculations, more and more often, not traditional programming languages and not spreadsheets are used, but special mathematical programs like Mathematica, MatLab, Maple, Mathcad, Gauss, Reduce, Eureka, etc.

Mathematical packages, especially Mathcad - the most popular package from the list above, - allow specialists in a specific scientific and technical field to master computer work very quickly and implement mathematical models on them, without going into the subtleties of programming in traditional languages (Fortran, C, Pascal , BASIC, etc.).

Keywords: mathematical packages, mathematical programs.

Пакет Mathcad – одна из систем программирования, которая ориентирована на проведение математических вычислений. Пакет удобно использовать. В нем можно изображать на экране компьютера формулы в их стандартном виде, как будто мы пишем их на доске или читаем в учебнике. Формулы можно не только записывать, но и решать довольно сложные математические задачи в символьном или численном виде. При этом текст можно размещать где угодно, вокруг уравнений, что помогает упорядочить процесс решения. Кроме того можно рисовать двумерные и трехмерные графики.

Пакет Mathcad позволяет соединить в одном рабочем документе текст, графику и математические выкладки. Он помогает лучше понять сложные вычисления. Его применяют для проверки вычислений в курсах математических дисциплин, таких как математический анализ, линейная алгебра, теория вероятностей и математическая статистика.

В пакете Mathcad есть собственная справочная система. С помощью этой справочной системы можно подбирать необходимые функции для проведения сложных вычислений. Рабочие документы можно отправлять на печать в таком же виде, как они выглядят на экране. Mathcad облегчает аккуратную запись хода работ.

В Mathcad есть операторы для вычисления пределов. Пределы могут быть вычислены только символьно (рис.1,2.3).

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{3\cdot x+6} \to \frac{1}{3};$$

Рис.1

$$\lim_{x \to a^+} \frac{3\cdot x+b}{x^2} \to \frac{(3\cdot a+b)}{a^2};$$

Рис.2

$$\lim_{x \to -1^-} \left(x + \frac{x+1}{|x+1|}\right) \to -2.$$

Рис.3

Производную можно вычислить с помощью оператора производной (рис.4):

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{asin(x)}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}\right) \to \frac{1}{\left(1-x^2\right)}+\frac{asin(x)}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot x+\frac{1}{2\cdot ln\left[\frac{(1-x)}{(x+1)}\right]^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\left[\frac{-1}{(x+1)}-\frac{(1-x)}{(x+1)^2}\right]}{(1-x)}\cdot(x+1)$$

Рис. 4

Для вычисления интегралов используют символьные операторы вычисления неопределенных и определенных интегралов (рис.5,6,7):

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{3\cdot x+1}-1}\,dx \to \frac{1}{3}\cdot ln(x)+(3\cdot x+1)^{\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}\cdot ln\left[(3\cdot x+1)^{\frac{1}{3}}-1\right]-\frac{1}{3}\cdot ln\left[1+(3\cdot x+1)^{\frac{1}{3}}+(3\cdot x+1)^{\frac{2}{3}}\right]+\frac{1}{2}\cdot(3\cdot x+1)^{\frac{2}{3}}$$

Рис. 5

$$\int_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx \to \frac{1}{6}\cdot\pi-ln(2)$$

Рис. 6

$$\int_0^\infty x\cdot e^{-x^2}\,dx \to \frac{1}{2}$$

Рис. 7

Можно вычислить сумму ряда (рис.8):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\,(n+4)} \to \frac{13}{36}$$

Рис. 8

В символьных преобразованиях есть функция series, которая позволяет разложить функцию в ряд Маклорена.

Пример применения функции series к разложению функции *ln* (*x*+1) в ряд Маклорена (рис.9):

$$1\cdot x-\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{3}\cdot x^3-\frac{1}{4}\cdot x^4+\frac{1}{5}\cdot x^5+O\left(x^6\right)$$

Рис.9

В Mathcad можно решать дифференциальные уравнения.

Пример решения дифференциального уравнения. Найти решение уравнения $y'=-y^2+x$ с начальным условием y(0)=1 в 50 точках на отрезке [0;10 (рис.10)].

$$y_0 := 1$$

$$D(x, y) := -\left(y_0\right)^2 + x$$

$$z := rkfixed(y, 0, 10, 50, D)$$

$$i := 0..50$$

Рис.10

Как результат выводится матрица, имеющая два столбца:

- точки, в которых осуществляется поиск решения дифференциального уравнения, находятся в первом столбце;

- значения решения в соответствующих точках находятся во втором столбце.

В Mathcad есть функции для вычисления статистических оценок случайных совокупностей. Здесь m и n – это число строк и столбцов рассматриваемых массивов.

mean(A) – возвращает среднее значение элементов массива A размерности mxn согласно формуле:

median(A) - возвращает медиану элементов mxn массива A.

$$mean(A) = \frac{1}{mn}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1} A_{i,j}$$

var(A) – возвращает дисперсию элементов массива A размерности mxn согласно формуле:

$$\mathrm{var}(A) = \frac{1}{mn}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left|A_{i,j} - mean(A)\right|^2$$

stdev(A) – возвращает среднеквадратическое отклонение (квадратный корень из дисперсии) элементов mxn массива A:

$$stdev(A) = \sqrt{\mathrm{var}(A)}$$

Mathcad использует несколько функций для работы с распространенными плотностями вероятности. Эти функции распадаются на три класса:

- Плотности распределения вероятности: вероятность того, что случайная величина будет находиться в окрестности определенной точки, пропорциональна плотности распределения вероятности случайной величины в этой точке.

- Функции распределения вероятности: они дают вероятность того, что случайная величина будет принимать значение, меньшее или равное определенной величине.

- Обращения функций распределения: они позволяют по заданной вероятности вычислить такое значение, что вероятность того, что случайная величина будет меньше или равна этому значению, будет равна вероятности, заданной в качестве аргумента.

Рассмотрим плотности распределения вероятности, изучаемые в курсе теории вероятностей.

$\boldsymbol{dnorm(x,\mu,\sigma)}$ - возвращает плотность вероятности нормального распределения: в котором μ и σ есть среднее значение и среднеквадратичное отклонение. σ >0.

$\boldsymbol{dpois(k,\lambda)}$ - возвращает плотность вероятности, когда случайная величина X имеет распределение Пуассона, в котором λ>0, а *k* является неотрицательным целым числом.

***dt*(*x*,*d*)** - вычисляет плотность вероятности t- распределения Стьюдента, в котором *d* является числом степеней свободы, *d*>0, а *x* есть вещественное число.

***dunif* (*x*,*a*,*b*)** – вычисляет плотность вероятности равномерного распределения, в котором *a* и *b* являются граничными точками интервала, *a*<*b* и $a \le x \le b$.

dbinom(k,n,p)- возвращает P(X=k), когда случайная величина X имеет биномиальное распределение, в котором *n* и *k* являются целыми числами, удовлетворяющими условию $0 \le \boldsymbol{k} \le \boldsymbol{n}$, *p* удовлетворяет $0 \le \boldsymbol{p} \le 1$.

pnorm(x,μ,σ) - возвращает функцию нормального распределения со средним μ и среднеквадратичным отклонением σ, $\sigma>0$.
ppois(k, λ)- возвращает функцию распределения Пуассона, $\lambda > 0$
pt(x,d) – возвращает функцию t- распределения Стьюдента,
d есть число степеней свободы, *d*>0, а *x* есть вещественное число.
punif (x,a,b) –возвращает функцию равномерного распределения, в котором *a* и *b* являются граничными точками интервала, *a<b и* $a \le x \le b$.
pbinom(k,n,p)- возвращает функцию биномиального распределения для *k* успехов в *n* испытаниях. *n* – натуральное число, *p*- вероятность события, $0 \le p \le 1$.

В Mathcad существует много разных функций для работы с матрицами.
rows(A)-число строк в массиве A. Если A-скаляр, возвращает 0.
cols(A)- число столбцов в массиве A. Если A-скаляр, возвращает 0.
length(V)- число элементов в векторе V.
tr(A)- сумма диагональных элементов, называемая следом матрицы A.
rank(A)- ранг вещественной матрицы A.
identity(n)- единичная матрица размера nxn.
jeninv(A)- левая обратная к A матрица L такая, что L*A=E, где E- единичная матрица, имеющая то же самое число, что и A. Матрица A- mxn вещественная матрица, где $m \ge n$.
rref(A)- ступенчатая форма матрицы A.
augment(A,B)- массив, сформированный расположением A и B бок о бок. Массивы A и B должны иметь одинаковое число строк.
stack(A,B)- массив, сформированный расположением A над B. Массивы A и B должны иметь одинаковое число столбцов.
submatrix(A,ir,jr,ic,jc)- субматрица, состоящая из всех элементов, содержащихся в строках с ir по jr и в столбцах с ic по jc. $(ir \le jr; ic \le jc)$.

На рис.11 приведены примеры использования этих функций:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 12 \end{pmatrix} \qquad rref(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$rows(A) = 3 \qquad geninv(A) = \begin{pmatrix} 0.035 & 0.275 & -0.169 \\ 0.02 & 0.086 & -0.025 \\ 5.051 \times 10^{-3} & -0.104 & 0.119 \end{pmatrix}$$

$$cols(A) = 3$$

$$tr(A) = 19 \qquad median(A) = 5$$

$$rank(A) = 2 \qquad mean(A) = 5.333 \qquad var(A) = 8.222$$

$$stdev(A) = 2.867$$

$$V := \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad length(V) = 4$$

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -7 \\ -4 & -9 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{stack}(A,B)=\begin{pmatrix}-1&-2\\-3&-7\\-4&-9\\1&2\\3&7\\4&9\end{pmatrix}\qquad \mathrm{augment}(M,A)=\begin{pmatrix}1&7&1&-1&-2\\5&8&2&-3&-7\\6&9&3&-4&-9\end{pmatrix}$$

$$N:=\begin{pmatrix}1&7&1&4&4\\-5&-8&-2&3&3\\-6&-9&-3&2&3\\1&2&3&4&3\\4&5&5&6&8\end{pmatrix}\qquad \mathrm{submatrix}(N,1,2,0,2)=\begin{pmatrix}-5&-8&-2\\-6&-9&-3\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{submatrix}(N,2,4,1,3)=\begin{pmatrix}-9&-3&2\\2&3&4\\5&5&6\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{submatrix}(N,1,4,2,4)=\begin{pmatrix}-2&3&3\\-3&2&3\\3&4&3\\5&6&8\end{pmatrix}$$

Рис. 11

Mathcad содержит функции для обычных в линейной алгебре действий с массивами (рис.12).

$$C:=\begin{pmatrix}1&4&7\\8&9&3\\5&2&6\end{pmatrix}\qquad D:=\begin{pmatrix}4&3&2\\7&11&5\\12&1&8\end{pmatrix}\qquad C+D=\begin{pmatrix}5&7&9\\15&20&8\\17&3&14\end{pmatrix}$$

$$(C+D)^{-1}=\begin{pmatrix}-0.135&0.038&0.066\\0.039&0.044&-0.05\\0.156&-0.055&2.641\times10^{-3}\end{pmatrix}$$

$$A:=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&2&-3\\1&1&6\end{pmatrix}\qquad (C+D)^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}-0.167&5.283\times10^{-3}&-0.125\\0.072&0.077&-0.315\\0.259&0.049&0.648\end{pmatrix}$$

$$C*X=D\qquad X:=C^{-1}\cdot D$$

$$X=\begin{pmatrix}1.707&0.059&1.261\\-1.049&1.272&-0.742\\0.927&-0.307&0.53\end{pmatrix}$$

Рис.12

По сравнению с другими математическими пакетами Mathcad имеет ряд преимуществ. Он имеет интерфейс со свободной формой записи, подобно классной доске. Есть возможность комбинирования текста, математических выкладок и графики в любом месте экрана. В этом пакете есть возможность редактировать математические выкладки графически, подобно тому, как они редактируются на обычной доске. Существует возможность слежения за ошибками: сообщение об ошибке отмечает формулу, в которой находится ошибка. Кроме того пакет Mathcad полностью совместим с Windows: он позволяет изменять размеры окон, открывать много окон. Результат печати полученного документа полностью совпадает с видом экрана – Вы получаете то, что видите.

Литература

1. Черняк А. Высшая математика на базе Mathcad общий курс./ А.Черняк, Ж.Черняк, Ю.Доманова. – БХВ-Петербург, 2004. – 608 с.

2. Mathcad 6.0 Plus. Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows 95./ Перевод с англ. – М.: Информационно-издательский дом «Филин», 1996. – 712 с.

УДК 372.851

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МУЛЬТИМЕДИА ТЕХНОЛОГИЙ И СИСТЕМ ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Гайнутдинова Т.Ю., кандидат технических наук, доцент,
Казанский федеральный университет, г. Казань
tgainut@mail.ru

Денисова М.Ю., кандидат физико-математических наук, доцент,
Казанский федеральный университет, г. Казань
denisova_mar@mail.ru

Широкова О.А., кандидат физико-математических наук, доцент,
Казанский федеральный университет, г. Казань
shirokova2602@mail.ru

Аннотация. В работе предлагается методика, связанная с систематическим использованием математических пакетов в процессе обучения высшей математике. В статье представлены решения задач по теме «Определенный интеграл» с использованием графических возможностей математических пакетов.

Ключевые слова: определенный интеграл, математический пакет, принцип наглядности.

THE USE OF MULTIMEDIA OF TECHNOLOGIES AND DYNAMIC GEOMETRY SYSTEMS IN TEACHING MATHEMATICAL ANALYSIS

T.Yu. Gainutdinova, PhD,
Kazan Federal University, Kazan
tgainut@mail.ru

M.Yu. Denisova, PhD,
Kazan Federal University, Kazan
denisova_mar@mail.ru

O.A. Shirokova, PhD,
Kazan Federal University, Kazan
shirokova2602@mail.ru

Abstract. The study proposes a technique associated with the systematic use of mathematical software in the process of teaching higher mathematics. The article presents solutions to problems on the topic «Definite integral» using the graphic capabilities of mathematical software.

Keywords: Definite integral, mathematical software, principle of visualization.

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования, утвержденный приказом Министерства образования и науки России, предъявляет к результатам обучения новые требования, связанные с применением современных вычислительных систем [4]. В связи с этим в настоящее время российское высшее образование вступает на качественно новый уровень: решается задача массового использования компьютерных и информационных технологий в общем и профессиональном образовании.

Преподавание математики в современных условиях стало подвергаться большим изменениям в сторону уменьшения уделяемого количества часов, поскольку развитие науки заставляет вводить в процесс обучения новые дисциплины. Это приводит к сокращению и более поверхностному изложению материала основных математических курсов. При этом образовательные средства в математике практически не меняются. Возникает проблема: как сделать математическое образование более эффективным. Для ее решения необходимо уделять серьезное внимание методике преподавания математических дисциплин с использованием информационных технологий.

Использование мультимедиа технологий и систем компьютерной математики (СКМ) дает возможность включить в образовательный процесс широкий изобразительный ряд, активизируя тем самым образное мышление обучающихся и помогая им целостно воспринимать предлагаемый материал. У преподавателя появляется возможность совмещать изложение теоретических сведений с показом демонстрационного материала. Применение мультимедийных технологий позволяет преподавателю намного эффективнее управлять демонстрацией визуального материала.

Особенно актуальным стало использование в высшей школе специализированных пакетов программ при изучении различных дисциплин [2,3,5,7], которые основаны на принципе наглядности. В соответствии с этим принципом в обучении применяются конкретные геометрические построения, визуализация которых позволяет легко решить поставленные задачи.

В данной работе предлагается методика преподавания раздела математического анализа, связанного с приложениями определенных интегралов при вычислении объемов тел с использованием информационных технологий.

Восприятие данного материала упрощается при разумном использовании визуальных возможностей, предоставляемых информационными технологиями. Исследуемые объекты демонстрируются с использованием средств мультимедиа технологий и систем компьютерной математики, что позволяет преподавателю наполнить материал динамическим видеорядом. Этому есть простое и логичное объяснение – средства, которые предоставляет компьютер для демонстрации информации, превосходят любые печатные издания. Ни в каком учебнике вы не сможете представить объект в динамике. При таких возможностях сам собой возникает вопрос об использовании видеоматериалов.

Сложность пространственного представления и отсутствие иллюстративных элементов не позволяет видеть исследуемые объекты целиком и делает затруднительным изучение приложений определенных интегралов. Известно, что программные системы Dynamic Geometry (DGS) могут быть полезными инструментами в изучении данного раздела, например, DGS GeoGebra предоставляет возможность пошагового просмотра решения задачи и визуализации доказательств теорем.

В связи с вышесказанным методика преподавания, основанная на использовании DGS GeoGebra и мультимедиа технологий, может включать:

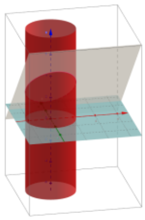
- изложение теоретического материала;
- пошаговое построение искомого тела;
- вычисление объема тела по площадям параллельных сечений.

Изложение теоретического материала [6] может быть основано на использовании презентаций, видеороликов, динамических видеорядов и т.д.

Пошаговое построение искомого тела предполагает использование систем компьютерной математики, позволяющих осуществлять динамический просмотр решения задачи. Рассмотрим применение данной методики на примере решения следующих задач [1].

Пример. Найти объем тела, ограниченного цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = 5$ и плоскостями: $z = 0$ и $y + z = 3$.

Решение. С помощью DGS GeoGebra построим плоскости $z = 0$, $y + z = 3$ и цилиндрическую поверхность $x^2 + y^2 = 5$. Найдем их пересечение (рис.1) и построим искомое тело (рис.2).



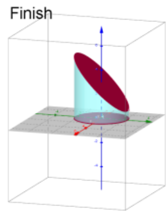
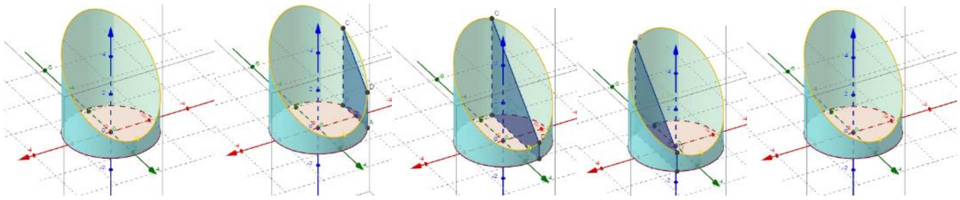


Рис.1 **Рис.2**

Отметим, что для пошагового просмотра решения задачи и динамической визуализации построения искомого тела необходимо создать ползунок и определить условия отображения составляющих тело объектов при различных значениях ползунка. Например, создадим ползунок i с интервалом от 0 до 12 (шаг 1). В диалоговом окне ползунка «Свойства объекта» зададим поведение анимации: скорость -1; повтор – увеличить (один раз).

При вычислении объема тела по площадям параллельных сечений используем динамическую визуализацию, которая реализуется введением в рассмотрение ползунка *t* с интервалом от $-\sqrt{5}$ до $\sqrt{5}$ с шагом 0.1. Для движения сечения по оси *Ox* необходимо связать координату *x* со значением ползунка *t*. Зададим сечение тела (рис.3). В данном примере сечение – многоугольник, поэтому удобно построить его, задав координаты вершин параметрически:

$$A(t,\sqrt{5-t^2},0);\ B(t,-\sqrt{5-t^2},0);\ C(t,-\sqrt{5-t^2},3+\sqrt{5-t^2});\ D(t,\sqrt{5-t^2},3-\sqrt{5-t^2})$$



a)*t=-2.24* b) *t=-1.94* c) *t=-0.64* d) *t=1.04* e) *t=2.24*

Рис. 3. Динамическая визуализация сечений

Используя результаты построения, находим объем с помощью интеграла.

$$V = 4\int_0^{\sqrt{5}} dx \int_0^{\sqrt{5-x^2}} (3-y)dy = 15\pi$$

От того, как организован учебный процесс, на что нацелен, существенно зависит эффективность восприятия учебного материала. Именно поэтому необходимо уделять серьезное внимание методике преподавания математических дисциплин с использованием информационных технологий.

Представленная методика основана на систематическом использовании информационных технологий в процессе обучения высшей математике. Удачным выбором преподавателя в этом отношении являются математические пакеты, включающие динамическую геометрическую среду – программные системы Dynamic Geometry (DGS). Они сочетают в себе как инструменты мультимедиа, так и программирования, тем самым обеспечивают информатизацию образовательного процесса.

В ходе исследования были получены результаты:

- использование мультимедиа технологий способствует повышению уровня усвоения материала сложных разделов высшей математики,

- системы Dynamic Geometry позволяют провести геометрические построения исследуемых объектов, визуализация которых облегчает решение поставленных задач, и не только визуализировать заданные объекты, но и рассматривать их в динамике;

- использование мультимедиа технологий и систем компьютерной математики позволяют оптимизировать учебный процесс, более рационально используя время на различных этапах обучения;

- методика, основанная на систематическом использовании информационных технологий, способствует глубокому пониманию предмета и развитию заинтересованности в его изучении.

Введение данной методики рекомендуется в связи с современным уровнем развития информатики, а также с проблемами, связанными с использованием визуализации пространственного моделирования объектов. Именно использование средств мультимедиа технологий позволяет преподавателю разнообразить изучаемый материал новыми видами деятельности, насытить его наглядной информацией, повысить мотивацию обучающихся, их интерес к предмету. Студенты активно участвуют в процессе обучения, приучаются мыслить самостоятельно, выдвигать свои точки зрения, моделировать реальные математические объекты.

Создание и развитие методик, основанных на систематическом использовании информационных технологий, является необходимым и своевременным шагом на пути повышения результативности математического образования.

Литература

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: уч. пособие. – 22-е изд., перераб. – СПб., Изд. «Профессия», 2005. – 432 с.

2. Гайнутдинова Т.Ю., Денисова М.Ю., Широкова О.А. Использование инновационных методов обучения при формировании профессиональных компетенций будущих учителей математики / Т.Ю. Гайнутдинова, О.А. Широкова //Педагогическое образование в изменяющемся мире: Сборник научных трудов III Международного форума по педагогическому образованию: ч.1. – Казань: Отечество, 2017. – С. 147-156.

3. Гайнутдинова Т.Ю., Широкова О.А. Особенности профессиональной подготовки по программированию будущего учителя информатики / Т.Ю. Гайнутдинова, О.А. Широкова //Программа и тезисы II Международного форума по педагогическому образованию (МФПО-2016). – Казань: Казанский университет. – С. 231-232.

4. Государственная программа Российской Федерации «Развитие образования» на 2013–2020 годы. Правительство Российской Федерации. Постановление от 15 апреля 2014года №295.

5. Денисова М.Ю. Применение интерактивной среды GeoGebra при изучении определенного интеграла / М.Ю. Денисова // Материалы VI Международной науч.-практ. конф. "Матем. образование в школе и вузе: теория и практика (MATHEDU-2016)", 25-26 ноября 2016 г. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2016. – С. 218-220.

6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1978 – Т.1. – 456 с.

7. Gainutdinova T.U., Shirokova O.A. Features of Professional Teachers Training of Informatics in a Programming Course / T.U. Gainutdinova, O.A. Shirokova, // Сборник IFTE 2016 Volume XII, Pages 1- 451 (July 2016) The European Proceedings of Social & Behavioural Sciences EpSBS – Международный Форум по Педагогическому Образованию. – Казань, 2016. – С. 30-37.

УДК 378.147

ДИДАКТИЧЕСКАЯ ИГРА КАК ОДИН ИЗ МЕТОДОВ ИНТЕРАКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ВУЗЕ

Знаенко Н.С., доцент,
Ульяновский институт гражданской авиации им. Гл. маршала авиации Б.П. Бугаева,
г. Ульяновск
znaenns@mail.ru

Коноплева И.В., кандидат физико-математических, доцент,
Ульяновский институт гражданской авиации им. Гл. маршала авиации Б.П. Бугаева,
г. Ульяновск
irinakonopleva2014@yandex.ru

Аннотация. Представлен обзор компьютерных дидактических игр, созданных и используемых авторами в процессе обучения математике в вузе. Рассмотрено значение этих интерактивных методов для активизации учебного процесса и мыслительной деятельности студентов.

Ключевые слова: интерактивное обучение, обучающие игры, викторина.

DIDACTIC GAME AS ONE OF INTERACTIVE TRAINING METHODS MATHEMATICS AT A HIGH SCHOOL

N.S. Znaenko, docent,
Ulyanovsk Institute of Civil Aviation after Chief Marshal of Aviation B.P. Bugaev, Ulyanovsk
znaenns@mail.ru

I.V. Konopleva, PhD in mathematics, docent,
Ulyanovsk Institute of Civil Aviation after Chief Marshal of Aviation B.P. Bugaev, Ulyanovsk
irinakonopleva2014@yandex.ru

Abstract. The review of computer didactic games developed by the authors and used in the process of learning mathematics at a high school is presented. The importance of such interactive computer methods for activation and intensification of the educational process and intellectual activity of students is indicated.

Keywords: interactive learning, educational (learning) games, quiz.

Современная педагогика в контексте компетентностного подхода радикально меняет технологию обучения, назначение которой активизировать познавательную деятельность студентов, развивать самостоятельность в овладении знаниями, мышлении и деятельности. Она предполагает переход от обучения «фактам» к овладению смыслом событий, формированию навыков применения накопленных знаний и умений в жизни. Для достижения поставленной цели используются активные и интерактивные методы обучения. Термин «интерактивный» («inter» - взаимный, «act» - действовать) означает взаимодействовать, находиться в режиме диалога, беседы, то есть это обучение, основанное на общении и совместной деятельности. Интерактивные методы обучения ориентированы на взаимодействие не столько преподавателя и студентов, сколько на взаимодействие студентов между собой под руководством преподавателя, при этом опыт и знания самих обучаемых служат источником их взаимообучения и взаимообогащения [1, 2]. В отличие от традиционного обучения, когда общение осуществляется «по вертикали», а преподаватель полностью определяет направление работы студентов, при использовании интерактивных методов отношения между участниками процесса обучения развиваются преимущественно по «горизонтали» и преподавателю отводится роль «сценариста», координатора.

Одним из методов интерактивного обучения является дидактическая игра, так как она позволяет погрузить студентов в активное контролируемое общение, при котором, взаимодействуя друг с другом, они могут оценить свои возможности и сопоставить их с возможностями других участников игры. «Игра – это вид деятельности в условиях ситуаций, направленных на воссоздание и усвоение общественного опыта, в котором складывается и совершенствуется самоуправление поведением» [4]. Дидактическая игра в вузе занимает особое место среди средств активизации процесса обучения и имеет много разновидностей. Это может быть ролевая игра и имитация, деловая игра и моделирование, образовательная игра. Все виды дидактических игр должно объединять наличие четко поставленной цели и соответствующего ей результата обучения. «С образовательной точки зрения игра – это способ группового диалогичного исследования возможной действительности в контексте личностных интересов» [3]. С технологической точки зрения дидактическая игра – это один из способов управления учебно-познавательной деятельности.

Цели использования игровых форм:

1) стимулирование мотивации и интереса к предмету, в рамках которого проходит игра;

2) осознание значения полученной ранее информации и формирование умений применять её для решения задач различной степени сложности;

3) развитие способностей анализировать ситуацию, сравнивать, сопоставлять, выделять характерные особенности явлений и предметов, принимать решение;

4) развитие коммуникативных способностей, умений рассуждать, свободно высказывать и обосновывать свою точку зрения.

Основой дидактической игры, обеспечивающей воспитательную и обучающую ценности, является игровая проблема, создающая проблемную ситуацию и служащая источником развития. «Во время игры каждый участник сам делает ошибки и сам находит удачные решения, обогащая свой личный опыт, который не забывается, потому что «ЭТО БЫЛО СО МНОЙ» [3].

Разновидностью игры являются предметные викторины, которые целесообразно проводить после изучения темы и во внеурочное время, они позволяют систематизировать и углубить полученные знания. Опыт показывает, что интереснее проходит игра, когда происходит работа в малых группах по два-три человека, когда в ходе обсуждения студенты спорят, подсказывают друг другу, коллективно ищут ответ на поставленный вопрос. Именно дух соревнования способствует всплеску интеллектуальной активности. Роль преподавателя сводится к наблюдению и своевременному регулированию через проблемные вопросы и направлению в нужное русло возникшей дискуссии.

Приведем пример викторины по теме «Ряды», проводимой с помощью браузерной игры, программное обеспечение к ней было написано студентом. Интерфейс игры представляет собой игровое поле (рис. 1.), в правой части которого находится вращающийся кубик.

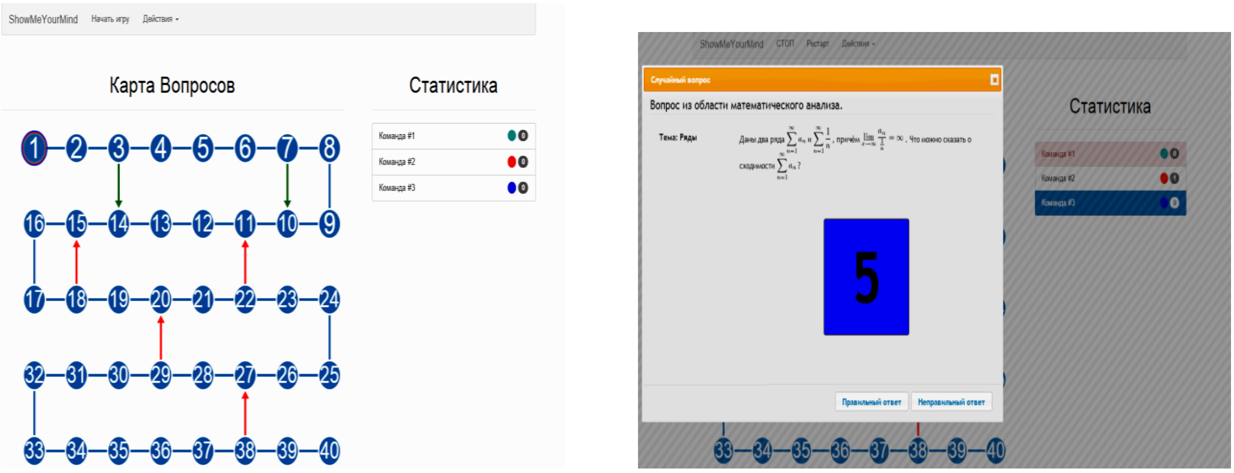


Рис. 1. Игровое поле, рандомный выбор вопроса

После ввода названий команд и выбора их цветовых обозначений, с помощью кнопки "начать игру" осуществляется переход к началу игры. Всплывает диалоговое окно с вопросом. Ход и количество шагов определяются случайно за счет виртуального кубика. Возможны два варианта исхода событий: либо команда дает верный ответ и переходит на определенное количество шагов вперед, либо остается на месте, если ответ был неверным. Статистика с правого края подсчитывает количество правильных ответов. На поле представлены два вида стрелок-переходов: красные и зеленые, красные отправляют команду назад, зеленые - вперед. Команда, набравшая большее количество правильных ответов, либо продвинувшаяся максимально далеко за определенный промежуток времени считается победителем. При создании игры были использованы языки программирования: Java script, язык html ,css, фреймворки: jquery, bootstrap, canvas engine и библиотеки:dialog.js, colorpicker.js.

Другой пример викторины «Что? Где? Когда?» по теме «Теория вероятностей», проводимой также с помощью браузерной игры. Для начала создается несколько команд по два-три человека. С помощью жеребьевки выбирается команда, которая первой получит право выбрать категорию вопроса, а затем сам вопрос из этой категории. Интерфейс игры представляет собой круг с секторами из 3-х категорий (рис. 2.)

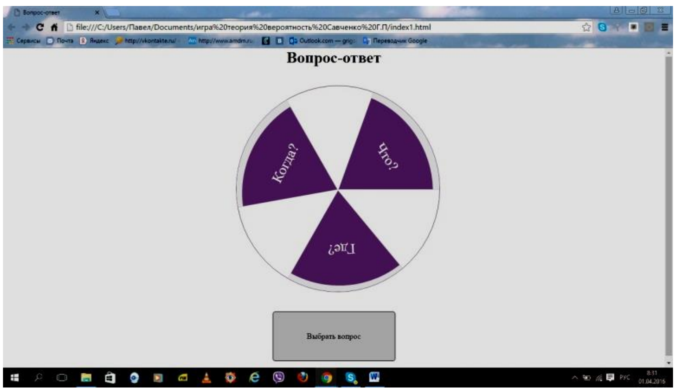


Рис. 2. Игровое поле, рандомный выбор категории вопроса

С помощью нажатия кнопки "Выбрать вопрос" осуществляется переход к началу игры (новому сектору с 8-ю делениями, рис.3)

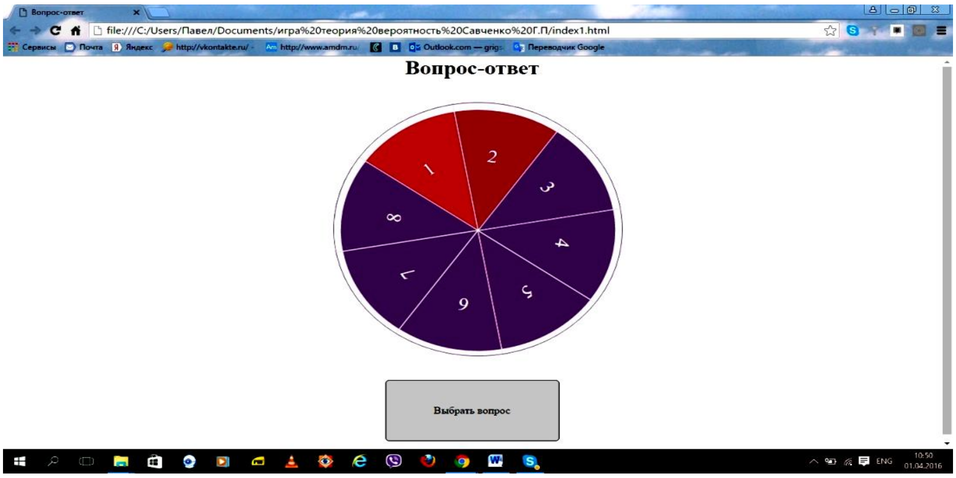


Рис 3. Рандомный выбор вопроса из сектора вопросов одной из категорий

После выбора сектора с номером вопроса всплывает диалоговое окно с самим вопросом. Команда, ответившая на большее количество вопросов различных категорий, объявляется победителем данной игры. Программа к сценарию викторины была написана также студентом через визуальный редактор «Notepad++». Использовались следующие языки web-программирования: HTML (версии 5 и 4 (для совместимости со старыми браузерами, такими как IE 5 и другими), CSS3, javascript-2.0 и PHP5. Для ускорения процесса создания использовалась готовая javascript-библиотека jquery-1.9.1. Разработанные программы браузерных игр совместимы с любыми операционными системами.

Также большой интерес у студентов вызывают викторины с условным названием «Своя игра». Были разработаны подобного рода викторины по темам «Дифференциальные уравнения» и «Ряды». Категории вопросов, содержание и цена представлены в виде презентаций, созданных студентами по сценарию преподавателей. Ниже приведены категории вопросов и примеры вопросов каждой категории.

Таблица 1

Викторина по теме «Дифференциальные уравнения», 1 раунд.

Категории	Цена вопроса			
Общие понятия	10	20	30	40
Уравнения с разделяющимися переменными	10	20	30	40
Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	10	20	30	40
Ассорти	10	20	30	40

<u>«Общие понятия»:</u>

10 – Чем отличается общее решение дифференциального уравнения первого порядка от его общего интеграла?

<u>«Уравнения с разделяющимися переменными»:</u>

20 – Может ли решение уравнения $y' = y$, ($y \neq 0$) иметь точки экстремума, ответ обосновать.

<u>«Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами»:</u>

30 – При каких значениях *b* все решения уравнения *b* $y'' + by' + 4y = 0$ являются периодическими функциями?

<u>«Ассорти»</u>

40 – Найти такие $p(x)$ и $q(x)$, чтобы функции $y = 1$ и $y = x^3 + 1$ являлись решениями уравнения $y' + p(x)y = q(x)$.

Таблица 2

Викторина по теме «Ряды», 2 раунд.

Категории	Цена вопроса			
История математики	50	60	70	80
Применение теории рядов	50	60	70	80
Теоретические обоснования	50	60	70	80

<u>История математики.</u>

50 – Сформулировать теорему, автором которой является французский математик, механик, философ, живший в 1717-1783 гг, работавший вместе с Р. Дидро над созданием первой энциклопедии и отвечавший за раздел естественных наук.

<u>Применение теории рядов.</u>

60 – Найти $f^{(6)}(0)$ функции $f(x) = x \cdot arctg\ x$, не находя непосредственно производную функции $f(x)$.

<u>Теоретические обоснования.</u>

70 – Сформулировать интегральный признак сходимости знакоположительного числового ряда. Перечислить определения и теоремы, которые используются при его доказательстве.

Использование игровых форм в процессе обучения математике позволяет студенту иначе взглянуть на предмет, получить удовольствие от самого процесса познания, открывает новую размерность мышления. Работая в малых группах, обмениваясь идеями, мыслями, догадками студенты активизируют мышление друг друга, создается атмосфера коллективного размышления. При этом сохраняется высокий уровень работоспособности и концентрации внимания на протяжении всего времени прохождения занятия.

Литература

1. Знаенко Н.С. Реализация компетентностного подхода посредством использования интерактивных методов при изучении математики в вузе / Н.С. Знаенко // Образование и информационная культура: теория и практика: Материалы Международной заочной научно-практической конференции. – Ульяновск: УлГПУ, 2015. – С. 8-13.
2. Знаенко Н.С. Формирование элементов базовых компетентностей на основе игровых технологий обучения математике / Н.С. Знаенко, М.Б. Николотов // Технолого-экономическое образование: достижения, инновации, перспективы: Материалы XII Международной научно-практической конференции. – Тула: ТГПУ, 2011. − С. 213-217.
3. Кавтарадзе Д.Н. Обучение и игра. Введение в активные методы обучения / Д.Н. Кавтарадзе. – М.: Флинта, 1998. – 192 с.
4. Педагогические технологии: уч. пособие для студентов педагогических специальностей / Под ред. В.С. Кукушкина. – Ростов н/Д: Март, 2002. – 320с.

УДК 372.851

КОНЦЕПЦИЯ ПОСТРОЕНИЯ МУЛЬТИМЕДИЙНОГО КОНТЕНТА ЭЛЕКТРОННОЙ ФОРМЫ УЧЕБНИКА МАТЕМАТИКИ

Зубарева И.И., кандидат педагогических наук, доцент,
Московский городской педагогический университет, г. Москва
i_zubareva@mail.ru

Аннотация. Требования к содержанию электронной формы учебника, разработанные МОиН, не учитывают особенностей организации обучения в различных предметных областях. В докладе представлена концепция построения мультимедийного контента ЭФУ, разработанная с учётом особенностей организации процесса обучения математике в школе.

Ключевые слова: электронная форма учебника, математика, операционная наглядность, организация самоконтроля.

CONCEPT OF CONSTRUCTION OF MULTIMEDIA CONTENT ELECTRONIC FORM OF A TEXTBOOK OF MATHEMATICS

I.I. Zubareva, the candidate of pedagogical Sciences,
Moscow city pedagogical University, Moscow
i_zubareva@mail.ru

Abstract. Requirements to the contents of the electronic form of the textbook developed by the Ministry of education and science does not take into account the features of organization of training in various subject areas. The report presents the concept of building the content of the EFT, tailored to the peculiarities of the organization of process of teaching mathematics in school.

Keywords: electronic form of the textbook, mathematics, operational presentation, organization of self-control.

В настоящее время абсолютное большинство материалов ЭФУ по математике представляют собой статичные тексты, изображения, схемы или таблицы, т.е. всё то, что с тем же (если не с большим) успехом может быть размещено на бумаге. Структура этих учебников полностью отвечает требованиям МОиН, однако временные рамки, в которые были поставлены разработчики, не позволили создать ресурсы в полной мере использующие возможности цифровых технологий. Вместе с тем, при грамотном использовании, эти технологии могут в значительной степени способствовать повышению эффективности процесса обучения математике. В частности, это обеспечение:

- высокого уровня наглядности при введении новых понятий и алгоритмов, в частности, структурной наглядности, т.е. представления теоретического материала в виде схемы, таблицы или правила, в записи которого расставлены смысловые акценты;

- реализации действенной (операционной) наглядности при демонстрации примеров применения алгоритмов, что позволяет увидеть процесс применения алгоритма в динамике (в бумажном учебнике – полностью готовое решение, в электронном – решение может появляется постепенно, что позволяет расставить смысловые и логические акценты, продемонстрировать логику рассуждений с помощью всплывающих комментариев);

- осуществления самоконтроля после самостоятельного выполнения заданий на применение новых знаний, новых алгоритмов, правил, свойств (в бумажном учебнике, как правило, даётся только ответ, в электронном учебнике можно дать полное решение, где в процессе анимации показана логика рассуждений, что позволит определить момент, когда допущена ошибка, её характер и причины).

Таким мультимедийным контентом (МК) могут быть обеспечены все параграфы учебника математики, и **для мультимедийного контента, привязанного к конкретному параграфу, мы предлагаем следующую структуру**:

1) изложение теоретического материала в форме ярких наглядных схем с использованием анимации, в которых выделены существенные логические моменты;

2) примеры применения теоретического материала, разработанные с использованием возможностей цифровых технологий (различные виды анимации, в частности, появление и исчезновение, перемещение, гиперссылки и т.п.);

3) задания для самоконтроля с возможностью проверить правильность своего решения.

Подобное наполнение МК позволит расширить возможности использования ЭФУ, например, в плане:

- самостоятельного изучения материала дома в случае проблем с посещением занятий в школе, таких, как неблагоприятные погодные условия, болезнь, инвалидность, участие в соревнованиях, конкурсах и т.п.;

- организации дистанционного обучения из-за отмены занятий в связи с эпидемией гриппа и т.п.;

- самостоятельной работы с электронным учебником дома по заданию учителя с целью повторения и закрепления нового материала – это изучение материала из раздела, содержащего вопросы теории, с целью повторения пройденного на уроке, просмотр образцов применения алгоритмов, изученных на уроке, решение упражнений из заданий для самоконтроля перед выполнением домашнего задания;

- знакомства, по заданию учителя, с содержанием параграфа учебника и соответствующего ему МК накануне его изучения в классе – это изучение контента ресурсов, содержащих теоретический материал, просмотр образцов применения алгоритмов, выполнение заданий для самоконтроля;

- организации фронтальной работы в классе, например, на этапе введения теоретических знаний в процессе подведения итогов анализа результатов решения учебно-познавательных задач, на этапе демонстрации прямого применения изученных алгоритмов, для осуществления самоконтроля при самостоятельном применении новых знаний.

Материалы с таким содержанием уже разработаны к учебнику Зубаревой И.И., Мордковича А.Г. «Математика. 5 класс» издательства Мнемозина, и в настоящее время проходят экспериментальную проверку. Первые результаты показали свою высокую эффективность.

Литература

1. Давыдов В.В. Теория развивающего обучения / В.В. Давыдов. – М.: ИНТОР, 1996.– 541 с.

2. Зубарева И.И. Математика. 5-6 кл.: метод. пособие для учителя / И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович.– 4-е изд.– М.: Мнемозина, 2014.– 120 с.: ил.

3. Зубарева И.И. Математика. 5 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений/ И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович.– М.: Мнемозина, 2015.– 293 с.: ил.

4. Сухов В.П. Системно-деятельностный подход в развивающем обучении школьников: монография / В.П. Сухов. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2004.– 155 с.

5. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования / – М.: Просвещение, 2011. – 48 с.

УДК 378.16.2

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО УЧЕБНИКА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В ВОЕННОМ ВУЗЕ

Зубкова Ю.А., кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры общепрофессиональных дисциплин,
Филиал военной академии материально-технического обеспечения
им. генерала армии А.В. Хрулева, г. Пенза
yul.zubkova.86@mail.ru

Рузляева Ю.С., кандидат педагогических наук,
преподаватель кафедры общепрофессиональных дисциплин,
Филиал военной академии материально-технического обеспечения
им. генерала армии А.В. Хрулева, г. Пенза
zgila@yandex.ru

Кабина С.В., преподаватель кафедры общепрофессиональных дисциплин,
Филиал военной академии материально-технического обеспечения
им. генерала армии А.В. Хрулева, г. Пенза
kabina210777@mail.ru

Аннотация. В работе рассматриваются возможности применения электронного учебника по высшей математике на базе военного вуза. Подробно рассмотрена возможная структура учебника, ее преимущества перед традиционными пособиями. Электронный учебник по высшей математике представляет собой не просто текст книги в электронном исполнении и не просто программу контроля полученных знаний - это качественно новое средство, дающее процессу обучения новые возможности.

Ключевые слова: средства мультимедиа, электронный учебник, учебный процесс, военный вуз.

USE THE ELECTRONIC TEXTBOOK FOR STUDYING HIGHER MATHEMATICS IN THE MILITARY HIGH SCHOOL

Yu.A. Zubkova, candidate of mathematical and physical sciences,
teacher of the department of general professional disciplines,
Federal State – Owned «Logistic Military Educational Institution
named after general A.V. Khrulov» of the Ministry of Defense of the Russian Federation, Penza
yul.zubkova.86@mail.ru

Yu.S. Ruzlaeva, candidate of pedagogical sciences, teacher of the department
of general professional disciplines,
Federal State – Owned «Logistic Military Educational Institution
named after general A.V. Khrulov» of the Ministry of Defense of the Russian Federation, Penza
zgila@yandex.ru

S.V. Kabina, teacher of the department of general professional disciplines,
Federal State – Owned «Logistic Military Educational Institution named
after general A.V. Khrulov» of the Ministry of Defense of the Russian Federation, Penza
kabina210777@mail.ru

Abstract. The paper discusses the possibility of using an electronic textbook on higher mathematics on the basis of a military Academy. Considered in detail the possible structure of the textbook, its advantages over traditional materials. Electronic textbook on higher mathematics is not just text books in electronic version and not just the program of control of knowledge is a qualitatively new tool for learning new features.

Keywords: media, e-textbook, educational process, military higher education institution.

Современного общество предъявляет новые требования к профессиональной подготовке будущих его членов, в том числе и к подготовке офицера. На данном этапе необходима подготовка специалистов, способных использовать полученные ими базовые знания, применить их при решении военно-технических задач. В данном контексте возникает потребность в овладении новейшими информационными технологиями.

Особенности обучения в военном вузе, такие как регламентированный рабочий день, ограниченность времени, отводимого на самостоятельное изучение материала, являются теми факторами, которые стимулируют внедрение новых форм обучения, процессы модернизации и информатизации обучения курсантов, позволяющие повысить заинтересованность обучающихся и степень усвоения ими материала, в том числе и по высшей математике.

Электронные учебники относятся к обучающим программным средствам, которые ориентированы на учебный процесс, его организацию и проведение. Электронный учебник представляет собой программно-методический комплекс, который дает возможность освоения всей учебной дисциплины или её раздела самостоятельно. Сценарий электронного учебника – это покадровое распределение содержания учебной дисциплины и его процессуальной части в рамках программных структур разного уровня и назначения. Процессуальная часть включает в себя все то, что необходимо представить на экране монитора для раскрытия и демонстрации содержательной части[4].

Электронный учебник по дисциплине «Высшая математика», разработанный преподавательским составом предметно-методической комиссии «Математика» (ПАИИ), состоит из информационной (для предъявления учебной информации), практической (для выполнения заданий, с помощью которых закрепление материала) и контролирующей (для оценки знаний) частей.

Учебник содержит аппарат ориентировки (оглавление, заголовки разделов, параграфов, именные и предметные указатели). Обучающемуся предлагаются и видеофрагменты, иллюстрирующие те или иные процессы, и традиционное изложение текста со статичными рисунками и схемами. Для управления материалом учебника создана система гиперссылок, позволяющая открывать вложенные тексты и видеоматериалы на любом этапе прочтения основного материала.

Использование электронного учебника возможно при проведении лекционных занятий. Он может служить средством наглядности за счет преподнесения излагаемого материала в различных формах (символьной, табличной и графической), а также дает возможность лектору уделить больше внимания систематизации и обобщению материала [2]. Огромную поддержку электронный учебник оказывает не только при проведении лекции, но и при ее подготовке.

Практические занятия способствуют формированию умения обучающихся применять полученные в ходе лекционного занятия и самообучения теоретические знания, таким образом, обеспечивая связь теории и практики, помогают освоить приемы решения практических задач, овладеть навыками выполнения расчетов, графического представления математической информации, а также формируют мотивацию к самообучению, саморазвитию и самоконтролю. Такого рода занятия являются неотъемлемой частью образовательного процесса, более того являются наиболее значимой частью учебной нагрузки.

Для проведения практического занятия по высшей математике с использованием электронного учебника обязательным требованием является наличие специализированного компьютерного класса. Причем каждый курсант учебного отделения присутствующий на практическом занятии должен быть обеспечен индивидуальным компьютером (рабочее место).

Таблица 1

Преимущества электронных учебных пособий

Лекционные занятия	Практические занятия
- позволяют использовать интерактивные презентации с возможностью перехода в любой фрагмент и возврата к кадру, из которого был произведен переход; - позволяют просматривать анимационные и видеофрагменты; - появляется возможность прерывания демонстрации в любом месте и запуска с любого фрагмента электронного учебника; - позволяет демонстрировать графические изображения на весь экран; - появляется возможность предварительного отбора материала в соответствии с программой лекции; - появляется режим самостоятельного изучения материала, то есть режим автоматического представления материала. При этом программа полностью заменяет лектора, и курсант может только приостановить изложение или повторить необходимый фрагмент.	- позволяет решить большее количество задач; - освобождает время для анализа полученных решений и их графической интерпретации; - позволяет преподавателю проводить занятие в форме самостоятельной работы за компьютерами, оставляя за собой роль руководителя и консультанта; - позволяет преподавателю с помощью компьютера быстро и эффективно контролировать знания курсантов, задавать содержание и уровень сложности контрольного мероприятия [1].

Не стоит все занятия проводить только в компьютерном классе в течении всего семестра, но курсанты всех учебных отделений должны иметь равную эвентуальность для получения 3–4 занятий в компьютерном классе согласно сетки расписания.

В соответствии с программами каждое занятие должно быть оснащено:

- планом занятия, не зависящим от того проходит ли занятие в компьютерном или обычном классе (изменяется лишь корреляция задач и вопросов, которые рассмотрены на занятии, и заданных на самостоятельное изучение);

- методической рекомендацией, в которой указывается детальная информация о наличии, содержании и возможностях компьютерных пакетов учебного назначения по их использованию в классе, при выдаче заданий на самоподготовку и проведении контрольных мероприятий.

Практическое занятие по высшей математике начинается с проведения опроса лекционного материала (фронтальный опрос теории, индивидуальная работа по карточкам). При использовании электронного учебника по дисциплине «Высшая математика» возможно проведение моментальных проверок (раздел «контрольные вопросы по теории»), в которых повторяемость вариантов и погрешность оценки минимальны. На экране компьютера преподаватель может собрать статистику выполнения заданий, что позволит учесть разницу выполнения заданий во времени курсантами. Таким образом, у преподавателя сложится целостная картина и об успеваемости курсантов, и об усвояемости материала. Электронный учебник обязательно должен содержать большое количество заданий, чтобы преподаватель, если это необходимо, мог дать дополнительные и повторные задания по выбранной теме.

Далее преподаватель демонстрирует решения типовых задач. Введение в практическое занятие «примеров решения задач» (раздел является практическим компонентом электронного учебника) на этапе демонстрации решения типовых задач и во время самостоятельной работы позволяет обеспечить курсанта достаточным количеством времени для формирования в процессе учебной деятельности профессиональных умений и навыков.

Преподаватель ведет занятие, сам за компьютер не садится. Компьютеры служат лишь помощником, позволяющим экономить время и делать более эффективной работу: увеличить количество решенных задач (тем самым, уменьшив задание на самоподготовку), анализировать результаты, пользоваться графическими возможностями компьютера.

Заметим, что на практическом занятии, при необходимости, у курсанта есть возможность обратиться к структурному компоненту «лекции» (раздел «теоретическое ядро») для ознакомления с теоретическим материалом или уточнения содержания некоторых понятий, необходимых для выполнения учебных заданий из раздела «задачи для самостоятельного решения». Так как в процессе обучения может возникнуть необходимость провести работу с обучающимися без использования ими теоретического материала, в электронном учебнике должна быть предусмотрена возможность отключения доступа к лекционным материалам [2].

В дополнении к «контрольным вопросам» в качестве контрольного компонента электронного учебника существует система контрольного тестирования. Качественное усвоение теоретического материала и уровень сформированности умений и навыков определяется преподавателем по результатам выполнения курсантами контрольных работ, или/и контрольных тестов.

Неоспоримым фактом является преимущества проведения контрольных работ в компьютерном классе, такие как экономия времени, которое курсанты тратят на решение задач с помощью компьютера, а также за счет моментальной проверки и выдачи результата контроля.

Очень важно, что преподаватель сам вызывает нужную ему контрольную работу в необходимом количестве вариантов и выбирает уровень ее сложности (отделение также можно разделить по уровню подготовки). Особенно такое деление актуально для учебных отделений специального факультета, в которых собраны курсанты из разных государств с разным уровнем знаний материала по высшей математике.

Компьютерная поддержка позволяет индивидуализировать работу с курсантами особенно в части, касающейся заданий на самостоятельное изучение и контрольных мероприятий, таким образом, чтобы каждый курсант ощущал, что задания ему по силам, и он продвигается от успеха к успеху. Таким образом, при использовании электронного учебника реализуется принцип посильности обучения. Это стимулирует интерес к предмету и делает учебу осмысленной и эффективной.

Современный компетентностный подход к образованию нацелен на формирование творчески активной личности. Поэтому так важно не просто получить правильный ответ при решении задачи, а прирастить базу знаний, применить полученный знания в ситуации, несходной с первоначальной, проявив при этом элементы творчества.

Обучающийся должен не механически и бездумно подставлять цифры в формулы, стараясь получить ответ, а превратить решение каждой задачи в глубокий мыслительный процесс.

Педагогический опыт показывает, что на практических занятиях по высшей математике нельзя ограничиваться только лишь выработкой практических навыков и умений решения задач, построения графиков и т. п. Ведущая идея курса высшей математики должна быть всегда видна курсантам, ее взаимосвязь с будущей профессиональной деятельностью военнослужащего. В таких условиях обязанность преподавателя военного вуза состоит в том, чтобы больше показывать курсантам практическую значимость ведущих научных идей и принципиальных основополагающих научных концепций и положений [2].

Таким образом, структурные компоненты электронного учебника и система контрольного тестирования позволяют организовать автоматизированный контроль знаний курсанта на всех этапах учебного процесса и обеспечить интерактивную обратную связь с последующей коррекцией полученных результатов. Деятельность преподавателя на этапе контроля знаний ограничивается проведением консультации по работе с предлагаемым структурным компонентом.

Все-таки возможности электронного учебника по дисциплине «Высшая математика» в военном вузе в большей степени раскрываются при работе курсантов самостоятельно. Здесь будут востребованными все мультимедийные функции: видео и анимация, интерактивные компоненты, которые вовлекают обучающегося в учебный процесс и не дают ему отвлекаться, голос диктора и соответствующее музыкальное сопровождение, и компьютерная поисковая система со всеми своими возможностями. Обязательное требование – это наличие специализированного компьютерного класса (индивидуального компьютерного места). Особенно это актуально для курсантов, пропустивших занятия по высшей математике по объективным причинам (наряд, болезнь и т.д.). Работая самостоятельно, курсант придерживается характерного для него темпа работы, скорости усвоения материала. Это особенно важно для слабых курсантов. При работе с электронным изданием можно допускать ошибки, возвращаться и повторять одни и те же вопросы. Удобна работа с электронным учебником и для сильных курсантов. Они могут освоить учебный материал за более короткий срок, не задерживаясь из-за отставания слабых курсантов, что часто случается при традиционной форме обучения[3].

Принципиальным отличием обучения с использованием электронных учебников является максимальная автономия курсанта в процессе обучения. Эта особенность вынуждает преподавателя создавать учебно-методические пособия, которые позволили бы организовать самостоятельное изучение учебных дисциплин с соблюдением дидактических требований к образовательному процессу и осуществлением полного цикла обучения (цель – мотив - знание - навык - контроль - коррекция - деятельность). Возникает необходимость в создании единого учебно-информационного пространства с доступом как для преподавателей, так и курсантов.

Таким образом, электронный учебник по высшей математике представляет собой не просто текст книги в электронном исполнении и не просто программу контроля полученных знаний - это качественно новое средство, придающее процессу обучения новые возможности. Использование электронного учебника на занятиях при изучении дисциплины «Высшая математика» позволяет выйти на качественно новый уровень наглядности материала, который предлагается для изучения, расширить потенциал внедрения упражнений, различающихся уровнем сложности, в процесс обучения, а постоянная обратная связь, которая подкреплена продуманной системой корректирования результатов при получении знаний, вносит живую нотку в учебный процесс.

Литература

1. Елистратова, Н.Н. Основы формирования информационной культуры курсантов высших военных технических учебных заведений средствами мультимедиа/ Н.Н. Елистратова. – Рязань: РВАИ, 2007. – 101 с.

2. Мединцева, И. П. Использование электронных учебных материалов при обучении математике/ И. П. Мединцева // Молодой ученый. — 2012. — №11. — С. 455-457.

3. Пустобаева, О.Н. Электронный учебник: опыт образовательной практики/ О.Н. Пустобаева // Молодой ученый. — 2013. — №7. — С. 377-379.

4. Обзор электронных учебных пособий: Электронный учебник [Электронный ресурс] – Электрон. данные. – Режим доступа: http://saprr.narod.ru/elektron_uchebnik.htm

УДК 378. 147

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ КАК ИНСТРУМЕНТ ОРГАНИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ВУЗЕ

Коноплева И.В., кандидат физико-математических наук, доцент,
Ульяновский институт гражданской авиации им. Гл. маршала авиации Б.П. Бугаева, г. Ульяновск
irinakonopleva2014@yandex.ru
Знаенко Н.С., доцент,
Ульяновский институт гражданской авиации им. Гл. маршала авиации Б.П. Бугаева, г. Ульяновск
znaenns@mail.ru

Аннотация. Целенаправленное использование информационных и компьютерных технологий позволяют интенсифицировать учебный процесс, организовать самостоятельную работу студентов и осуществлять ее своевременный контроль. В работе представлен обзор компьютерных технологий используемых при обучении математике в вузе.

Ключевые слова: электронный учебник, электронная рабочая тетрадь, обучающие и контролирующие компьютерные программы.

COMPUTER TECHNOLOGY AS A TOOL TO ORGANIZE THE PROCESS OF MATHEMATICS LEARNING AT A HIGH SCOOL

I.V. Konopleva, PhD in mathematics, docent,
Ulyanovsk Institute of Civil Aviation after Chief Marshal of Aviation B.P. Bugaev, Ulyanovsk
irinakonopleva2014@yandex.ru

N.S. Znaenko, docent,
Ulyanovsk Institute of Civil Aviation after Chief Marshal of Aviation B.P. Bugaev, Ulyanovsk
znaenns@mail.ru

Abstract. The purposeful use of information and computer technologies allows to intensify and organize the process of training and timely monitoring of students' independent work. In this paper the review of computer technologies being used for mathematics learning at a high school is presented.

Keywords: electronic textbook, e-workbook, training and monitoring (controlling) computer programs.

В связи с регулярным переходом на новые федеральные государственные образовательные стандарты перед преподавателями математики (как и всех других общеобразовательных дисциплин) регулярно возникают новые «старые» проблемы организации учебного процесса связанные с очередным уменьшением часов на изучение дисциплины. Но уровень профессиональной подготовки выпускника технического вуза во многом зависит от его математической подготовки, что объясняется большой междисциплинарной функцией математики. Реализация задачи формирования математических компетенций при постоянном сокращении часов на изучение дисциплины затрагивает много «больных» проблем – проблему отбора материала, выработки необходимых знаний, умений, навыков и способности использовать язык и методы математики в профессиональной деятельности. Хронический недостаток аудиторного учебного времени приводит к постоянному сокращению и без того слишком «конспективных» курсов, изучение многих вопросов переносится на самостоятельную работу. Как правило, это вопросы, связанные с приложениями математики, что серьезно ухудшает общеинженерную подготовку специалистов.

Для сохранения качества подготовки студентов вузов необходимо использовать различные подходы: создание единой современной образовательной среды, обновление содержания, внедрение новых методов и технологий обучения, стимулирующих творческие и интеллектуальные способности студентов. Возрастает роль создания современного методического обеспечения, разработки интерактивных форм организации учебного процесса и самостоятельной работы студентов, информационных компьютерных технологий обучения (электронные учебники, компьютерные программы, обучающие и осуществляющие проверку полученных знаний) [1,2].

Электронные учебники. Большинство современных учебников по математике составлены под сильным влиянием научной системы, абстрактной логической формы. Их характерной особенностью является дедуктивная организация содержания («от общего к частному»), формальная строгость изложения. Но это затрудняет понимание предмета для студентов со слабой школьной подготовкой. Очень часто за рамками стандартного курса высшей математики остаются примеры взаимодействия различных ветвей математики и естественных наук, межпредметные связи внутри самой математики, современное состояние математических наук. Основной фундаментальный принцип (принцип взаимодействия теории и практики) – изложение каждой темы, раздела должно содержать достаточное количество примеров и развиваться во взаимодействии конкретного и абстрактного, от анализа частного к постепенным обобщениям и точным формальным определениям.

Очевидно, что отбор, структурирование и объем учебного материала должен производиться, исходя из анализа последующей профессиональной деятельности, и находить свое отражение в учебных программах и содержании учебников. Содержание должно конструироваться таким образом, чтобы осуществлялось движение от накопления знаний к их применению, решения стандартных задач в привычной области к переносу их в новые условия, в другую предметную область и решению усложненных задач, требующих умения соединять сведения, полученные при изучении разных предметов и дисциплин. Это невозможно без внедрения междисциплинарной и межпредметной интеграции [3−5]. Помочь студенту лучше усвоить материал может принцип структурирования изучаемого материала на такие части, усвоение которых не приведет к психологической и физической перегрузке. При этом каждая часть должна излагаться достаточно подробно. Одна из причин непонимания математики студентами – отсутствие или недостаток необходимых примеров и образов, поясняющих математические понятия и формально-логические рассуждения. Этого можно добиться, если показывать многочисленные приложения математики к решению различных задач механики, физики, химии, гидравлики, биологии, экономики, знакомя с новыми направлениями в естествознании, возникающими на стыке математических и естественнонаучных и профессиональных дисциплин. Поэтому включение в содержание курса математики системы межпредметных задач играет важную роль при формировании общепрофессиональных компетенций. Профессиональная направленность заданий способствует активизации учебного процесса, усиливает мотивацию изучения курса математики. Электронный конспект лекций дает возможность представления материала в различных форматах, в соответствии с направлением профессионального обучения менять набор соответствующих примеров и задач и быстро адаптировать содержание в зависимости от уровня подготовки студентов, т.е. осуществлять индивидуальный подход в учебном процессе.

Материал электронных учебников структурируется соответствующим образом – содержание учебного курса представляется в виде отдельных глав, параграфов и связей между ними, из них формируется конспект лекций нужного уровня с необходимым набором задач и примеров для самостоятельной работы (формирование обучающих элементов) с организацией гиперссылок к нужным определениям, понятиям и свойствам. Все разделы математики для специалистов и бакалавров на кафедре ЕНД УИ ГА обеспечены учебными пособиями, в которых указаны многочисленные приложения математики к решению профессиональных задач. В настоящее время ведется разработка таких материалов для магистерских программ и программных средств для формирования общей электронной учебной базы индивидуальных программ для обучения студентов разных специальностей и разных форм обучения. Такая работа, конечно, требует больших временных затрат и наличия соответствующего персонала на кафедрах.

Обучающие компьютерные программы. Необходимое условие усвоения математики – постоянная самостоятельная работа и активность студентов, своевременный контроль преподавателя за усвоением соответствующих разделов математики, а это требует современных, адекватных форм, методов обучения и контроля, способствующих повышению активной познавательной работы студентов, наличие обратной связи, необходимой для управления учебным процессом, а значит, и создания соответствующей организационной базы. Перед каждым преподавателем стоит задача улучшить организацию самостоятельной работы, осуществить в её процессе индивидуальный подход к каждому студентов. Одним из возможных путей решения этой задачи является разработка и использование в учебном процессе электронных рабочих тетрадей (ЭРТ) [2].

ЭРТ представляет собой систему, компоненты которой находятся в тесной связи друг с другом. Она состоит их трех частей: теоретический блок, контрольно-коррекционный и практический блоки. Содержание теоретического блока аналогично содержанию соответствующей лекции (главы, раздела). Студент, не имевший возможности ознакомиться с материалом непосредственно на занятии, может изучить его, прочитав теоретическую часть электронной рабочей тетради. Активность восприятия прочитанного обеспечивает контрольно-коррекционный блок, в котором предлагается ответить на ряд контрольных вопросов. При работе в этом блоке студент должен ввести правильный, по его мнению, ответ. Если обучаемый не знает ответа на поставленный вопрос или его ответ был неверным, он будет отправлен управляющей компьютерной программой в соответствующую часть теоретического блока. Студент, правильно ответивший на все поставленные вопросы, переходит к выполнению практического задания.

ЭРТ можно отнести к частично-поисковому типу самостоятельной работы, так как в основе её лежит продуктивная деятельность, связанная с использованием усвоенной информации для решения практических задач. Программа практического блока электронной рабочей тетради такова, что студент, находясь в постоянном диалоге с ЭВМ, поэтапно выполняет задание и в конечном итоге получает правильный ответ. Использование ЭРТ способствует повышению интереса студентов к самостоятельному изучению материала, применению его к решению задач; позволяет проверить свои действия. Систематическое использование подобных компьютерных методических средств оказывает комплексное воздействие на усвоение каждым студентом научных понятий, способов действий; на формирование определенных личностных характеристик.

Авторами разработаны ЭРТ по темам «Комбинаторика» и «Введение в математический анализ» и совместно со студентами написана программа для их реализации. В теоретической части излагаются основные теоретические положения по данной теме, приводятся рабочие формулы и примеры решения основных типов задач, в контрольно-коррекционном – контрольные вопросы и подсказки для студента, давшего неправильный ответ. В практический блок ЭРТ включаются задания для самостоятельного решения на каждый тип стандартных задач по соответствующей теме, способствующие формированию навыков и умений и закрепляющие материал темы. Банк типовых задач в ЭРТ достаточно велик, задачи выбираются случайным образом. Предусмотрены наборы типовых задач разного уровня сложности. Список задач появляется и в самом начале, и при переходе от задачи к задаче.

Программа построена таким образом, что в случае правильного решения задачи студент переходит к следующей задаче, в случае неправильного решения сначала дается подсказка, а если после этого студент опять получает неверный результат, то ему предлагается разобраться с готовым решением и только после этого он имеет возможность передвигаться дальше.

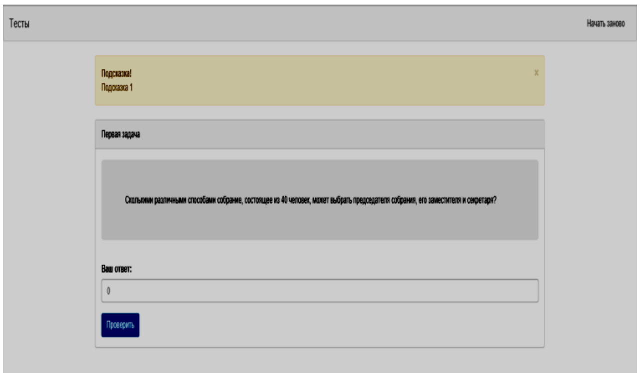


Рис. 1. Подсказка при неправильном ответе

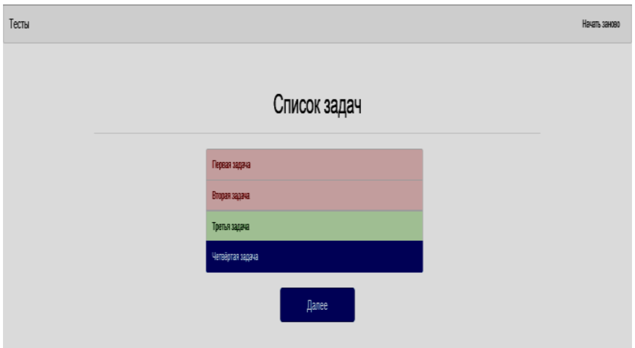


Рис. 2. Список задач между заданиями (красный – неправильный ответ, зелёный – правильный ответ, синий – следующая задача)

Программа к ЭРТ была написана с использованием технологий: JQuery-1.9.2, HTML5, CSS3, Twitter Bootstrap ver 3 и JQuery UI. Это приложение способно функционировать в браузерах на современных мобильных устройствах, в том числе на смартфонах с любой операционной системой.

При изучении теоретического материала с помощью таких тетрадей студенты имеют возможность выбрать индивидуальный темп и уровень обучения, а преподаватель дифференцированно подходить к выбору заданий и объёму материала в зависимости от уровня подготовки обучаемых, их интересов и направления подготовки.

Кроме ЭРТ преподавателями кафедры ЕНД УИГА созданы обучающие системы для изучения разделов «Векторная алгебра и метод координат», «Интерполяция и аппроксимация функций», «Исследование функций одной и двух переменных», «Линейное программирование». Они состоят из учебных пособий, в которых рассматриваются основные теоретические сведения, приводятся примеры решения соответствующих задач, их приложения к профессиональным задачам и соответствующих компьютерных программ. Эти комплексы позволяет проводить аудиторные занятия в интерактивной форме, обеспечить самостоятельную работу курсантов и проверку полученных знаний. Подобные программно-методические продукты обеспечивают полноценный процесс обучения будущих авиационных специалистов методам решения практических задач и контроль полученных знаний во время проведения аудиторных занятий.

Компьютерное моделирование при решении задач. Использование компьютерных технологий на занятиях в аудиториях, оснащенных персональными компьютерами или интерактивной доской, позволяет заниматься самым простейшим моделированием и исследованием решения математических задач. Для геометрических построений (точек, векторов, отрезков, прямых, кривых и поверхностей, графиков функций и их динамических изменений) удобно использовать GeoGebra 3D –свободную образовательную математическую программу, соединяющую в себе геометрию, алгебру и математические исчисления. Она даёт возможность создавать «живые чертежи» в планиметрии, стереометрии, в том числе для построений с помощью циркуля и линейки. У программы богатые возможности работы с функциями (построение графиков, вычисление корней, экстремумов, интегралов и т.д.) за счёт команд встроенного языка, который позволяет управлять и геометрическими построениями.

Использование программ GeoGebra 3D и инструмента электронных таблиц в Microsoft Office Excel [6], позволяет проводить простейшее моделирование при изучении темы «Дифференциальные уравнения». Можно показать, как изменяется интегральная кривая при изменении начальных условий, наглядно подвести студентов к понятию устойчивости решений ОДУ, проиллюстрировать теорему существования и единственности решения ОДУ, что необходимо для использования численных методов.

Рассмотрим простой пример – дифференциальное уравнение 1-ого порядка, моделирующее процесс распространения рекламы (модель Нерлова-Эрроу): $\frac{dx}{dt} = \gamma N(t) - kx$. Здесь x –осведомленнсть покупателей, знающих в момент времени t о рекламной компании, $N(t)$ – рекламная «активность», k – скорость «забывания» о рекламном продукте, γ – постоянная, описывающая эффективность рекламы. Найдем частное решение уравнения при заданном начальном условии $x(0) = x_0$ и $N(t) = const$. Выбирая различные значения параметров x_0, N, k, γ, заполним таблицу значений $x(t)$ и $\Delta x(t)$ (рис. 3), и построим графики функций $x(t)$ и $\Delta x(t)$. В соответствии с изменениями полученных графиков, можно ответить на вопросы, связанные с эффективностью рекламы: установить критический порог, ниже которого компания не эффективна; определить время проведения рекламы с максимальной выгодой. Аналогично можно провести анализ эффективности рекламной компании при разных режимах финансирования рекламы $N(t)$.

t	x	Δx	
1	0	0,300000000000	
2	30	0,727265739980	0,42726574
3	60	1,727653812393	1,000388072
4	90	3,919854261904	2,19220045
5	120	8,097059949305	4,177205687
6	150	14,287138527788	6,190078578
7	180	20,730522705553	6,443384178
8	210	25,385131089051	4,654608383
9	240	27,935249944928	2,550118856
10	270	29,124789173167	1,189539228
11	300	29,637896902028	0,513107729
12	330	29,851717755725	0,213820854
13	360	29,939535585827	0,08781783
14	390	29,975387566069	0,03585198
15	420	29,989988456903	0,014600891
16	450	29,995928804076	0,005940347
17	480	29,998344641949	0,002415838
18	510	29,999326959602	0,000982318
19	540	29,999726358551	0,000399399
20	570	29,999888745087	0,000162387
21	600	29,999954767028	6,60219E-05
22	630	29,999981609630	2,68426E-05
23	660	29,999992523031	1,09134E-05
24	690	29,999996960091	4,43706E-06
25	720	29,999998764065	1,80397E-06

N	γ	k
30	100	0,001

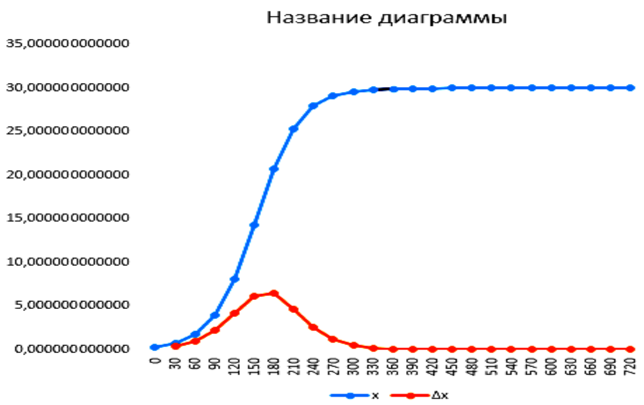


Рис. 3

Компьютерные дидактические игры. Обязанность каждого преподавателя – стимулировать познавательную и мыслительную активность студентов. Приемом, позволяющим «вызвать к жизни интеллектуальную активность», пробудить интерес к предмету, может служить дидактическая игра, представленная в различных видах. Наиболее часто используемый прием при изучении математики – это викторина, построенная по принципу «Своя игра», «Что? Где? Когда?», «Математическое лото», «Черная метка». При создании таких викторин возможно либо использовать готовые оболочки, видео и GOOGLE-формы, либо привлечь студентов для написания программ, создания браузерных игр или презентаций. Данной форме проведения занятия присуще высокий темп обучения, концентрация внимания и сохранение работоспособности в течение всего занятия, а также стимуляция интереса к предмету, возможность рассмотреть нестандартные задачи.

Системы компьютерной математики. Одним из важнейших направлений современного образования является обучение студентов математике с использованием систем компьютерной математики (СКМ) Maple, Matlab, Mathematica, Mathcad, Derive. СКМ предназначены для автоматизации инженерно-технических, научных и математических расчетов и потому подходят для обучения, работы со сложными расчетами и техническими проектами. Простота использования, мощные функциональные возможности (объединение аналитических и численных методов вычислений; использование языков высокого уровня; визуализация результатов вычислений; возможность обмена информацией с помощью различных форматов) позволяют студентам быстро выполнять важные процессы вычислений, проектирования и моделирования, решать задачи, не занимаясь программированием на традиционных языках. Разработка и проведения современного лабораторного компьютерного практикума в вузе без этих систем в настоящее время практически невозможна. Особенно важно использование этих программ для занятий по математическому моделированию для студентов-магистров и аспирантов.

Интерактивные образовательные ресурсы сети Интернет. Так как для традиционного чтения лекций и проведения занятий аудиторного времени недостаточно, часто приходится использовать компьютерные презентации и работать с интерактивной доской. Для подготовки таких учебных занятий можно использовать готовые электронные образовательные ресурсы для всех ступеней образования: демонстрационные ролики, интерактивные тренажеры, находящиеся в свободном доступе. Обзор таких ресурсов можно найти в [7].

Литература

1. Знаенко Н.С. Активизация познавательной деятельности курсантов посредством использования компьютерных технологий / Н.С. Знаенко, А.И. Вилков, А.В. Шкуркин // Материалы XXIX военно-научной конференции. – Ульяновск: УВВТУ им. Б. Хмельницкого, 2005. − С. 47-49.
2. Знаенко Н.С. Информационные технологии, как составляющая технологического подхода к формированию исследовательских умений / Н.С. Знаенко // Информационные технологии в образовании: Материалы Международной заочной научно-практической конференции. – Ульяновск: УлГПУ, 2013.– С. 83-87.
3. Знаенко Н.С. Модель формирования общепрофессиональных компетенций посредством реализации межпредметных связей на примере обучения математике / Н.С. Знаенко, И.В. Коноплева, Л.В. Миронова // Информационные технологии в образовании: Материалы Международной заочной научно-практической конференции. – Ульяновск: УлГПУ, 2017. − С.116-122.
4. Знаенко Н.С. Модель формирования общепрофессиональных компетенций (на примере обучения математике) / Н.С. Знаенко, И.В. Коноплева, Л.В. Миронова // NovaInfo.Ru. − 2017. − Т. 3, № 62. − С. 6-13.
5. Знаенко Н.С. Междисциплинарные связи как способ повышения мотивации изучения математики / Н.С. Знаенко, И.В. Коноплева, Л.В. Миронова // Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании: Материалы Международной научно-технической конференции. – Ульяновск: УлГТУ, 2016. − С. 235-240.
6. Молодцова Л. А. Исследование решений дифференциальных уравнений в аудиторных условиях / Л. А. Молодцова, В.В. Мотов // Математическое моделирование, статистика и информатика в современном управлении экономикой: теория, приложения и роль в образовании: Труды Международной конференции. – Самара: СамГЭА, 2001. − С. 215-217.
7. Сибирева А.Р. Электронные ресурсы для организации самостоятельной работы по математике студентов технического вуза / А.Р. Сибирева // Электронное обучение в непрерывном образовании. − 2015. − Т. 1, № 1 (2) . − С. 386-392.

УДК 004.588; 378.146; 51

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СРЕДСТВ LMS MOODLE ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ

Махмутова Д.И., старший преподаватель,
Казанский федеральный университет, г. Казань
d.i.makhmutova@gmail.com

Опокина Н.А., кандидат физико-математических наук, доцент,
Казанский федеральный университет, г. Казань
opnadin@mail.ru

Аннотация. Рассмотрены вопросы, связанные с формированием и совершенствованием оценочных средств тестовой формы с помощью системы MOODLE. Представлены особенности создания тестовой базы и проверки ее эффективности на примере курса «Теория вероятностей и математическая статистика».

Ключевые слова: тестирование, контроль успеваемости, электронное обучение, оценка тестов.

USE TOOLS OF LMS MOODLE FOR ORGANIZING TEST CONTROL IN TEACHING MATHEMATICAL DISCIPLINES

D.I. Makhmutova, senior lecturer,
Kazan Federal University, Kazan
d.i.makhmutova@gmail.com

N.A. Opokina, Ph.D., associate professor,
Kazan Federal University, Kazan
opnadin@mail.ru

Abstract. The paper considers issues connected with the formation and improvement of the evaluation means of the test form with the help of the LMS MOODLE. It presents the features of creating a test database and assessing its efficiency are described using the example of the discipline "Probability Theory and Mathematical Statistics".

Keywords: testing, monitoring of progress, e-learning, assessment of tests.

Информационные технологии стали неотъемлемой частью современного образовательного процесса. В Казанском (Приволжском) федеральном университете с целью повышения эффективности учебного процесса и в рамках реализации Программ развития и повышения международной конкурентоспособности используется находящаяся в свободном доступе система MOODLE (Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment), которая относится к классу LMS. Все институты и кафедры нашего университета активно осваивают эту и систему и интегрируют ее возможности в образовательный процесс, число курсов, размещенных на площадке СДО КФУ приближается к 1000. Разработанные курсы могут использоваться не только в системе дистанционного образования, но и являются удобным инструментом поддержки очного и заочного обучения.

MOODLE предлагает различные варианты построения учебного курса, организации подачи материала, проверки степени и качества усвоения материала и контроля успеваемости [1]. Одним из наиболее распространенных и эффективных вариантов контроля являются тесты.

Известными преимуществами тестирования являются унифицированные условия и независимость оценки, возможность массового проведения, систематичность, экономия времени и усилий при проведении и проверке [2,3]. ЕГЭ и хорошая компьютерная подготовка сегодняшних студентов ведут к тому, что студентам легче сдавать тесты, и эта форма контроля не вызывает дополнительных барьеров при контроле знаний у слабоуспевающих студентов.

Системы компьютерного тестирования также предоставляют практичные и наглядные средства сравнения и анализа результатов, сбор статистики по обучающимся, группам, темами разделам, легкость пополнения и коррекции банка вопросов.

На стадии подготовки и создания тестовой базы инструментарий LMS MOODLE обеспечивает гибкость и вариативность заданий: банк вопросов может быть организован по темам, могут быть созданы подкатегории вопросов различной сложности, разделены теоретические вопросы и задачи, задано соотношение включаемых заданий из разных категорий при выборе опции случайного вопроса. В MOODLE поддерживаются все основные типы заданий, особенно полезным среди которых является Вычисляемый вопрос, в котором ответ задается в виде формулы, числовые данные для которой выбираются случайным образом [1].

При проведении тестов предусмотрены меры для защиты от недобросовестных попыток обойти систему: опция отображения в «защищенном» окне, проверка IP-адресов, ограничение по времени на выполнение заданий и установка даты и крайнего срока для прохождения теста.

В зависимости от используемого вида контроля: самоконтроля, текущего, рубежного, итогового есть возможности настройки способов проведения по времени, подсказкам (комментариям), методу оценивания, штрафным баллам, возможности повторного прохождения.

При анализе результатов выполнения теста участниками преподаватель получает подробную информацию о динамике ответов, ошибках, набранных баллах, как отдельных студентов, так и групп, может сравнивать результаты группы с общими достижениями и при необходимости может переоценить некоторые ответы (повысить балл для сложных заданий или исправить оценку при обнаружении ошибочного задания).

Собранная статистика и предоставленные числовые характеристики, такие, как индекс легкости (ИЛ), среднеквадратичное отклонение, балл случайного угадывания, эффективный вес, индекс дифференциации, коэффициент дифференциации (КД), средняя оценка испытуемых, медиана, стандартное отклонение оценок за тест, коэффициенты асимметрии и эксцесса, коэффициент надежности, стандартная ошибка позволяют проанализировать как отдельные вопросы, так и тест в общем с целью дальнейшей оптимизации тестов, а именно повышения дифференцирующей способности, надежности и валидности [4].

Авторами были разработаны тесты для текущего контроля знаний по темам курса «Теория вероятностей и математическая статистика». Для анализа использовались результаты прохождения тестов 118 студентов очной и заочной форм обучения Казанского федерального университета, обучающихся по направлению «Экономика».

В банке вопросов содержалось 462 задания, после проведенного анализа вопросов из него были удалены 17 вопросов с ИЛ близким к 100%. Это вопросы, ответы на которые очевидны практически для всех студентов, и потому не обладают дифференцирующей способностью. Это были в основном вопросы на выбор правильной формулы (числа перестановок, числа размещений, принципа суммы, классической вероятности, числовых характеристик дискретной случайной величины, выборочной средней, коэффициента линейного уравнения регрессии), знание и умение применять которые лучше проверяются при решении задач, а также следующие вопросы:

«Указать несовместные события среди приведенных»;

«Чему равна вероятность невозможного (достоверного) события»;

«При каком числе испытаний обычно применяется формула Бернулли»;

«Что понимается под объемом выборки при серийном отборе»;

«Уравнение регрессии отыскивается методом …»

«Указать название универсального показателя тесноты связи».

Слишком сложных вопросов выявлено не было (вопросы, содержащие ошибки выявлялись и корректировались своевременно).

После чего были исключены или переработаны 28 вопросов с КД < 0,3, также не обладающие достаточной дифференцирующей способностью [3], так как при границах этого коэффициента от -1 до 1, отрицательные значения показывают, что на данный вопрос слабые студенты отвечают лучше сильных [1]. Внесенные изменения были следующими:

-некоторые задачи были усложнены или заменены на Числовой вопрос, где студенту не предоставляются варианты ответа;

-в ряде заданий были исправлены отдельные дистракторы, которые не были выбраны при ответах, так как выбивались по стилистике формулировок;

-в заданиях на выбор верного (неверного) среди приведенных утверждений увеличено количество утверждений, и часть была переведена в категорию Множественного выбора, где возможны несколько верных ответов;

-добавлены таблицы значений функций Лапласа и критических точек распределений;

-уточнены неоднозначные формулировки, требующие знаний опущенного контекста;

-упрощена функция плотности, требующая длительных вычислений при расчете математического ожидания, что приводило к тому, что студенты предпочитали угадывать ответ на вопрос, даже зная соответствующую формулу

-убраны вопросы, дословно повторяющие формулировки учебника и глоссария.

После окончания следующего цикла обучения планируется оценка качества исправленной тестовой базы и исследование изменений надежности используемых тестов.

Таким образом, использования LMS MOODLE рекомендуется для организации и проведения тестов на знание теоретического материала и сформированность навыков применения математического инструментария для решения задач, гарантируя объективность, управляемость, быструю модификацию, встроенный статистический анализ для дальнейшего улучшения качества тестов.

Литература

1. https://moodle.org
2. Ким В.С. Тестирование учебных достижений: Монография / В.С. Ким. – Уссурийск: Издательство УГПИ, 2007. – 214 с.
3. Аванесов В. С. Форма тестовых заданий / В. С. Аванесов. – М.: Центр тестирования, 2005. – 156 с.

4. Толстобров А.П. Возможности анализа и повышения качества тестовых заданий при использовании сетевой системы управления обучением MOODLE / А.П. Толстобров, И.А. Коржик // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – Воронеж, 2008. – № 2. – С. 100-106.

УДК 374

РЕГИОНАЛЬНАЯ ВИКТОРИНА «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОЗАИКА» - СОВРЕМЕННЫЙ ИНСТРУМЕНТ ПРОСВЕЩЕНИЯ И ПОПУЛЯРИЗАЦИИ МАТЕМАТИКИ ВО ВЛАДИМИРСКОЙ ОБЛАСТИ

Пчелинцева Т.А., заслуженный учитель РФ,
ГАОУ ДПО ВО ВИРО, г. Владимир
pchelintsewata@yandex.ru

Львова А.Г.,
МБОУ «Воровская СОШ» Судогодского района Владимирской области, г. Владимир
Lvovaalla@yandex.ru

Аннотация. В статье описан опыт разработки и проведения региональных викторин по математике «Математическая мозаика» для учащихся 5-6 классов Владимирской области. Материалы были разработаны сотрудниками Владимирского института развития образования имени Л.И. Новиковой. Викторины проведены в 2015-2016, 2016-2017 учебных годах на сайте проектной деятельности ВИКИ Владимир.

Ключевые слова: информационные образовательные технологии, заочная викторина, познавательный интерес школьников, история математики.

REGIONAL QUIZ “MATH MOSAIC” IS A MODERN TOOL OF EDUCATING AND POPULARIZATION OF MATH IN VLADIMIR REGION

T.A. Pchelintseva, honored teacher of the Russian Federation,
GAOU DPO VO VIRO, Vladimir
pchelintsewata@yandex.ru

A.G. Lvova,
MBOU “Vorovksaya School” Sudogda district, Vladimir region
Lvovaalla@yandex.ru

Abstract. The experience of development and carrying out of regional quizzes “Math Mosaic” for students of 5-6 forms of Vladimir region is being described in this article. All the materials were created by the stuff of Vladimir Institute of Devepolment of Education. Quizzes were held in 2015-2016, 2016-2017 years online, using the project activity WIKI-Vladimir.

Keywords: IT-education, distance quiz, history of Math, cognitive interest of students.

Во Владимирской области разработан региональный план мероприятий по реализации Концепции развития математического образования в Российской Федерации [1]. В данный документ вошли предложения сотрудников Владимирского института развития образования имени Л.И. Новиковой (далее – ВИРО). Одним из них является региональная заочная викторина по математике «Математическая мозаика» для учащихся 5-6 классов Владимирской области.

Викторина является традиционной формой организации познавательной деятельности школьников, способствует развитию эрудиции, смекалки, продуктивного мышления обучающихся. Математическая викторина в ее заочном (сетевом) формате значительно повышает познавательный интерес школьников, расширяет их кругозор за счет активного привлечения сетевых источников информации, обеспечивает каждого ребенка развивающей интеллектуальной деятельностью на доступном ему уровне. Использование сетевых ресурсов создает условия, при которых заочная викторина становится современным инструментом математического просвещения и популяризации математики.

Организация этого мероприятия базируется на соблюдении ряда принципов:

- принцип научности – использование подлинных, прочно установленных наукой знаний;
- принцип доступности – привлечение заданий викторины, по своей сложности не превышающих возрастные, интеллектуальные и познавательные возможности школьников;
- принцип занимательности – структурирование содержания викторины по разделам с использованием увлекательных форм заданий;
- принцип разнообразия – использование заданий разных форматов;
- принцип добровольного участия;
- принцип временно́го ограничения – соблюдение всеми участниками временн*ы*х рамок публикации ответов на задания.

Возраст участников викторины «Математическая мозаика» выбран не случайно. Именно в 5-6 классах обучающиеся в своем большинстве имеют положительное отношение к изучению математики и высокий уровень познавательного интереса, активно стремятся расширить свои знания, установить причинно-следственные связи изучаемых явлений, стать участниками исследовательской деятельности [5]. По мнению М.А. Холодной, автора и разработчика концепции и технологии интеллектуального воспитания [7], нужно учитывать разные уровни интеллектуальной инициативы, постепенно переводя ребенка с более низкого уровня на более высокие её уровни. С этих позиций участие в математической викторине является важной ступенью в развитии личности современного подростка.

Для организации работы на региональном сайте проектной деятельности Вики Владимир были созданы страницы заочной викторины «Математическая мозаика» (http://www.wiki.vladimir.i-edu.ru/index.php?title):

- Регистрация участников. 5 класс
- Регистрация участников. 6 класс
- Экспертная группа
- Итоги викторины
- Обсуждение

Участие детей в данном мероприятии только индивидуальное и бесплатное. Каждый школьник и его учитель были обязаны зарегистрироваться в таблице регистрации, самостоятельно заполнив предлагаемую форму.

Сотрудниками сектора «Психолого-педагогическое сопровождение детской одаренности» ВИРО была разработана структура содержания викторины, состоящая из трех разделов для каждого класса:

- Раздел 1. Логика
- Раздел 2. История математики
- Раздел 3. Задания в картинках

Каждый раздел включал в себя задания с единственным решением, с двумя решениями или задания, не имеющие решения.

Задания первого раздела «Логика» были включены в викторину для развития логического мышления школьников. Еще великий математик Рене Декарт сказал: "Я мыслю, значит, я существую". Следовательно, учить мыслить, рассуждать логически необходимо на протяжении всего периода обучения ребенка в школе. Дефицит логики у людей является одной из универсальных причин человеческих бед [6]. Действенным инструментом восполнения этого дефицита является логическая задача. Каково бы ни было ее содержание, поиск решения способствует с одной стороны, развитию интеллектуального мышления подростка – словесно-логического, наглядно-образного или предметно-действенного, а с другой – формирует логическую грамотность (систему логических знаний и умений), без которой трудно представить развитие логического мышления.

Логические задачи всегда вызывают у подростков особый интерес. Во многом это вызвано тем, что популярные логические задачи опираются не столько на математическую подготовку, сколько на здравый смысл и практический опыт: «У Иры среди одноклассников на 3 мальчика больше, чем девочек. На сколько мальчиков больше, чем девочек, в классе, в котором учится Ира?», «Алексей Иванович приехал на вокзал за 25 минут до отхода поезда. Оказалось, что его часы отстали на 15 минут, а отправление поезда задержали на 35 минут. Сколько минут ждал Алексей Иванович отправления поезда?» и т.п.

Основная сложность при разработке содержания раздела «Логика» - отбор задач, т.к. сетевая доступность существенно облегчает участникам поиск ответа и лишает викторину духа соревнования. Поэтому перед публикацией задач их условия были переформулированы - изменены сюжетные линии, введена «лишняя» информация, прямая задача заменена обратной. Например, при подготовке раздела использовалась популярная «веселая задача» Я.И. Перельмана «Книжный червь»: «В моем книжном шкафу на полке стоят сочинения Пушкина в 8-ми томах, том к тому. Приехав как-то с дачи, я с досадой заметил, что все лето книжный червь усердно сверлил моего Пушкина и успел прогрызть ход от первой страницы 1-го тома до последней страницы 3-го тома. Вопрос: Сколько всего страниц смог прогрызть червь, если в первом томе 700 страниц, во втором – 640, а в третьем – 670?». В викторине для пятиклассников она стала основой задачи «На книжной полке стоят 2 книги. Толщина первой книги без обложки - 10 мм, толщина второй книги без обложки - 15 мм. Толщина обложки каждой книги – 3 мм. Сколько миллиметров составляет длина наименьшего отрезка, соединяющего первую страницу первой книги с последней страницей второй?». Статистика ответов показала, что только 25% участников справились с задачей в новой формулировке, хотя в сети опубликованы десятки ее прототипов.

В программу учебного предмета «Математика. Алгебра. Геометрия» по федеральным стандартам второго поколения введен новый методологический раздел «Математика в историческом развитии» [2]. Польза от знакомства с историей математики выходит за рамки математики. Это знакомство важно для нашего мировоззрения, ведь иначе мы не знали бы, что наука развивается и что ее сегодняшнее состояние не окончательное. Поэтому в викторину был включен блок заданий, составивших второй раздел «История математики». Задачи раздела отражают историю развития систем счисления, старинных мер, возникновения цифр и формирования математических символов.

Вот примеры заданий из этого блока.

1. В двух карманах рубль. В одном столько гривенников, сколько в другом пятиалтынных. Сколько денег в каждом кармане?

Рис.1. Иллюстрация к задаче 1.

2. Лавочник купил ящик сахару, весом 2 пуда, по 6 руб. за пуд. Четвертую часть всего сахара облили керосином и ее пришлось продать по 4 коп. за фунт. Остальной сахар распродан по 16 к. за фунт. Сколько убытку получил лавочник?

Рис. 2. Иллюстрация к задаче 2.

Третий раздел викторины называется «Задания в картинках». Если содержание первых двух разделов является традиционным для школьного математического образования, то идея разработки и включения в содержание викторины данного раздела авторская и принадлежит сотрудниками сектора «Психолого-педагогическое сопровождение детской одаренности» ВИРО [3, 4]. Суть идеи заключается в следующем: в соответствии с программой учебного предмета «Математика» 5-6 классов основного общего образования подобраны картинки к темам курса и к вопросам за страницами учебника математики, после чего к каждой картинке сформулирован вопрос.

Приведем несколько примеров таких заданий:

1. Как связаны математическое понятие «совершенное число» и данная картина Рафаэля?

Рис. 3. Задание по картине Рафаэля

2. Назовите имена ученых, изображенных на фреске Рафаэля «Афинская школа» (1511 г.)

Рис. 4. Задание по фреске «Афинская школа»

На выполнение всех заданий отводилось 3 дня. Свои ответы ребята в первый год проведения викторины присылали по электронной почте, после чего их оценивала команда экспертов в составе 13 человек. Экспертами являлись опытные учителя математики Владимирской области и сотрудники ВИРО.

На второй год авторы и организаторы мероприятия внесли следующие изменения: была опробована тестирующая система (http://onlinetestpad.com/ru), позволяющая исключить «человеческий фактор» при проверке решений участников викторины, сами задания были разделены по классам, что позволило одновременно проводить две викторины – для 5 и 6 классов. Использование тестирующей системы понравилось всем ее участникам. Возможности сетевого ресурса позволили применить следующие формы заданий:

- на одиночный выбор;
- на множественный выбор;
- на ввод числа;
- на ввод текста;
- на заполнение пропусков:
- на установление соответствий.

Например, рассмотренные выше задания в картинках были опубликованы в следующей форме:

Как связано математическое понятие «совершенное число» и данная картина Рафаэля?

Ответ:

на руке [▼] изображено [▼] пальцев;

это число является [▼] .

1.

Назовите имена ученых, изображенных на фреске Рафаэля «Афинская школа» (1511 г.)

☐ Пифагор	☐ Протагор
☐ Евклид	☐ Птолемей
☐ Перуджино	☐ Анаксагор
☐ Фалес	☐ Гипатия
☐ Эратосфен	☐ Рафаэль

2.

В 2015-2016 учебном году в викторине приняли участие 1345 школьников 19-ти из 21-го муниципальных образований Владимирской области, в том числе и 10 участников из Саратовской области. В число участников первого года проведения викторины вошли 734 пятиклассника и 611 шестиклассников. Зарегистрировавшиеся ребята из Крыма не смогли принять участие в викторине по объективной причине (в связи с аварией электросетей) [3].

В 2016-2017 учебном году в викторине приняли участие 813 школьников из 20 муниципальных образований Владимирской области, в том числе 5 участников из Саратовской области и 16 ребят из г. Екатеринбурга. На вопросы викторины отвечали 401 пятиклассник и 412 шестиклассников [4].

Оперативное подведение итогов позволило определить победителей, призеров и лауреатов викторины. Каждому победителю был подготовлен диплом, каждому призеру и лауреату – грамота. Остальные участники, выполнившие все задания, получили электронные сертификаты, подтверждающие участие в мероприятии.

Заочная викторина не оставила равнодушными ни самих школьников, ни их руководителей. Вот мнение участников:

«От лица своих учеников 5 класса МБОУ Ставровской СОШ Собинского района и их родителей хочу поблагодарить координаторов игры за организацию викторины "Математическая мозаика", громадный труд и понимание! По словам детей и их родителей, викторина оказалась для ребят очень занимательной и поучительной, так как они очень много нового узнали для себя во время данной викторины. С уважением, учитель МБОУ Ставровской СОШ В.И. Ларионова».

«Выражаю благодарность организаторам викторины от своих учеников - учащихся 6а класса МБОУ СОШ №14 г. Коврова, участвовавших в конкурсе, их родителей и от себя лично не только за интересные, но и познавательные задания, которые позволили ученикам расширить свои знания по истории математики. Романова Елена Геннадьевна».

Литература

1. Концепция развития математического образования в Российской Федерации [Электронный ресурс] / Концепция развития математического образования в Российской Федерации. – Режим доступа: http://qoo.by/2Bkk .
2. Примерная основная образовательная программа образовательного учреждения. Основная школа / Примерная основная образовательная программа образовательного учреждения. Основная школа — М.: Просвещение, 2011. — 342 с.
3. Пчелинцева Т.А. Итоги первой региональной сетевой викторины по математике для школьников «Математическая мозаика»/ Т.А. Пчелинцева // Информационный бюллетень ГАОУ ДПО ВО ВИРО. – 2016. – № 4(172). – С.63- 67.
4. Пчелинцева Т.А. Итоги первой региональной сетевой викторины по математике для школьников «Математическая мозаика» / Т.А. Пчелинцева // Информационный бюллетень ГАОУ ДПО ВО ВИРО. – 2017. – № 3(183). – С.75-76.
5. Пчелинцева Т.А., Львова А.Г. Сетевой проект как средство формирования у учащихся целостной картины мира / Т.А. Пчелинцева, А.Г. Львова // Математика в школе. – 2013. – № 1. – С.64-69.
6. Рассел Б. Искусство мыслить / Б. Рассел. – М.: Идея-Пресс, 1999. – 240 с.
7. Холодная. М.А. Психология интеллекта: парадоксы исследования / М.А. Холодная. – М.: Барс, 1997. – 392 с.

УДК 378.147

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ПОДГОТОВКЕ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ

Разумова О.В., кандидат педагогических наук, доцент,
Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань
miraolga@rambler.ru

Аннотация. В тезисах рассмотрена проблема подготовки будущего учителя математики к профессиональной деятельности в условиях информационно-коммуникационной образовательной среды.

Ключевые слова: информационно-коммуникационные технологии, научно-исследовательская деятельность будущего учителя математики, когнитивная система.

SOME ASPECTS OF THE USE OF INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGIES IN TRAINING FUTURE TEACHERS

O.V. Razumova, candidate of pedagogical sciences, associate professor,
Kazan (Volga region) Federal University, Kazan
miraolga@rambler.ru

Abstract. The thesis considers the problem of training future teachers of mathematics to professional activities in the information-communication educational environment.

Keywords: information and communication technologies, the research activity of future teachers of mathematics, cognitive system.

Применение информационных технологий и использование компьютерных ресурсов становится неотъемлемой частью современной профессиональной подготовки специалистов. С точки зрения вузовского образования средства информационно-коммуникационных технологий помогают приблизить познавательную деятельность студентов к методам исследования науки, создавая культуротворческую модель образования [1].

Анализ психолого-педагогической литературы, содержания учебных программ подготовки будущих учителей показывает наличие противоречий между высоким потенциалом информационно-коммуникационных технологий как средства решения широкого круга педагогических задач и недостаточным вниманием в практике подготовки будущего специалиста к профессиональной деятельности. Следует также отметить, что, несмотря на изобилие разного рода учебно-методических пособий, учебников и статей, раскрывающих отдельные аспекты применения информационных и коммуникационных технологий в образовательном процессе, присутствует определенный недостаток систематизированных материалов, информационно-образовательной ресурсной базы.

В связи с вышеизложенным возникает необходимость в такой методической подготовке будущего специалиста, которая ориентирована, прежде всего, на формирование профессиональной компетенции, позволяющей будущему учителю проектировать и реализовывать информационно-коммуникационную образовательную среду в своей профессиональной деятельности.

В предлагаемой нами модели организации учебного процесса студентов будущих учителей математики в качестве приоритетной цели рассматривается организация научно-исследовательской деятельности, формирующая платформу для активной самостоятельной работы обучающихся в условиях информационно-коммуникационной образовательной среды [2]. Главная задача преподавателя вуза видится в умении инициировать творческий процесс, в ходе которого разрешаются определенные проблемные ситуации, носящие либо специфически-предметный характер, либо являющиеся методическими задачами в изучаемой предметной области. Важно, что в данном случае затрагиваются такие аспекты педагогических, методических задач, которые не могут быть продуктивно решены с использованием традиционных средств.

В настоящее время особую актуальность в рамках научно-исследовательской деятельности будущих специалистов имеет научное направление, связанное с раскрытием потенциала информационных и коммуникационных технологий в школьном математическом образовании с учетом психоинформационной когнитивной концепции. Предметом исследований студентов становятся когнитивные системы обучающихся, возможности информационно-коммуникационных технологий в разработке электронных образовательных ресурсов по школьным разделам математики, направленных как на решение конкретной учебной задачи, так и учитывающих психологию обучающихся.

Литература

1. Валицкая А.П. Интеллектуальный потенциал России и педагогическое образование // Высшее образование в России. – 2014. – №11. – С. 31-37.

2. Разумова О.В. Формирование предметно-специфического мышления будущих учителей средствами информационно-коммуникационных технологий: автореферат дис…. кандидата педагогических наук: 13.00.01 / О.В. Разумова. – Казань, 2008. – 21 с.

УДК 372

РОЛЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ГИА (МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА)

Ризванов З.З., учитель математики и информатики,
МБОУ «СОШ №143, г. Казань
rizvanov.zemfir@mail.ru

Хуснетдинова Д.М., учитель математики и информатики,
МБОУ «Лицей №177», г. Казань
d.whosnet@yandex.ru

Аннотация. В статье рассматривается вопрос о применении информационных технологий при подготовке к государственной итоговой аттестации, как средства повышения эффективности обучения.

Ключевые слова: информационные технологии, обучение, Якласс, математика, информатика, электронный ресурс.

THE ROLE OF INFORMATION TECHNOLOGY IN PREPARATION FOR SFA (MATHEMATICS AND INFORMATICS)

Z.Z. Rizvanov, math and informatics teacher,
MBEI «SGES №143, Kazan
rizvanov.zemfir@mail.ru

D.M. Husnetdinova, math and informatics teacher,
MBEI «Lyceum №177», Kazan
d.whosnet@yandex.ru

Abstract. The article discusses the application of information technology in preparation for state final examination, as a means of enhancing learning.

Keywords: information technology, teaching, YaClass, mathematics, informatics, electronic resource.

Основная задача, которая стоит перед каждым учителем, это как можно лучше подготовить учащихся к сдаче ГИА. Экзамен по математике и информатике – это итог работы и ученика, и учителя на протяжении всех лет обучения в школе, поэтому подготовка к нему является важной составляющей учебного процесса.

Введение государственной итоговой аттестации по математике и информатике в новой форме (ОГЭ) вызывает необходимость изменения в методах и формах работы учителя.

Данная необходимость обусловлена тем, что изменились требования к знаниям, умениям и навыкам учащихся в материалах экзамена по математике и информатике. Само содержание образования существенно не изменилось, но существенно сместился акцент к требованиям умений и навыкам. Изменилась формулировка вопросов: вопросы стали нестандартными, задаются в косвенной форме, ответ на вопрос требует детального анализа задачи. И это всё в первой части экзамена, которая предусматривает обязательный уровень знаний. Содержание задач изобилует математическими тонкостями, на отработку которых в общеобразовательной программе не отводится достаточное количество часов. В обязательную часть включаются задачи, которые либо изучались давно, либо на их изучение отводилось малое количество времени (проценты, стандартный вид числа, свойства числовых неравенств, задачи по статистике, чтение графиков функций, система счисления, количественные параметры информационных объектов, алгоритмы и управление, значение логического выражения), а также задачи, требующие знаний по другим предметам, например, по физике.

К сожалению, школы не обеспечивают новыми, соответствующими современным требованиям, учебно-методическими комплексами, поэтому учителям приходится самим находить пути решения данной проблемы.

И здесь уже однозначного решения нет:

−подготовленность детей разная;

−разный уровень классов;

−низкие вычислительные навыки учащихся;

−низкий теоретический багаж знаний;

−отсутствие учебников за предыдущие годы обучения;

−нежелание приобретать пособия для подготовки к ОГЭ;

−низкий уровень математической подготовки, не позволяет учащимся успешно осваивать другие предметы естественнонаучного цикла, резко снижает общую способность учиться.

−учителю нужно изыскать время для качественной подготовки учеников к итоговой аттестации.

Подготовку к ОГЭ по математике и информатике было решено осуществлять с помощью образовательного ресурса для школьников Якласс. Этому способствовало несколько причин:

1. Низкий уровень знаний по математике и информатике. Первую пробную работу в двух классах не смогли выполнить на положительную оценку 90% учеников.
2. Отсутствие часов на факультативные занятия по математике и информатике.
3. Текущие уроки по предмету предназначены для изучения материалов предусмотренных программой 9 класса.
4. Нежелание части учеников ходить на дополнительные занятия по причине занятости или элементарной лени.

Якласс предоставляет возможность задавать учащимся различные проверочные работы. Это либо собственные разработки ресурса, либо проверочные работы преподавателя. Естественно, для подготовки к ОГЭ потребовались дополнительные проверочные работы. Создание собственной проверочной работы начинается с выбора типа задания.

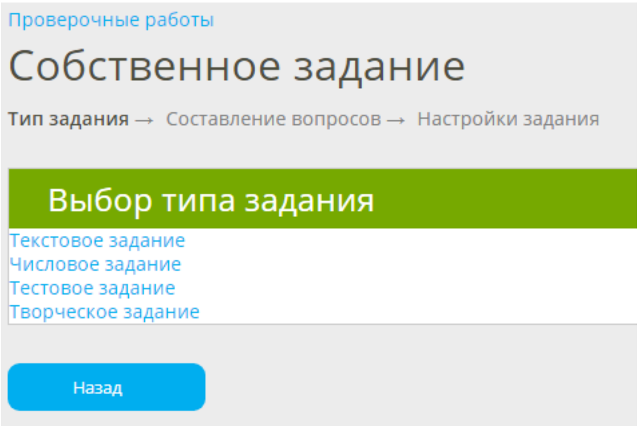


Рис. 1. Создание проверочной работы

При конструировании проверочной работы для подготовки к ОГЭ мы ориентировались на два типа задач – это тестовое задание и творческое задание. Тестовое задание соответствует заданиям КИМов ОГЭ с выбором возможного варианта ответа. Творческое задание предполагает ввод произвольного ответа в свободной форме. Тестовые задания проверяются системой в автоматическом режиме, каждое такое задание оценивалось в один балл. Творческие задания проверялись преподавателем в ручную, но в силу структуризации информации, проверка проходит быстрее, чем обычная проверка письменных работ. Эти задачи также оценивались в один балл. Сам ввод заданий в систему осуществляется в диалоговом режиме с использованием языка LaTex для набора математических формул и алгебраических выражений. Проверочная работа для ученика представляет собой последовательно выдаваемые задания, в порядке, предусмотренном преподавателем.

При создании проверочных работ задания КИМов по математике было решено поделить на две части. Задачи с 1 по 20 были обязательными для выполнения всеми учениками, с 21 по 26 – учениками по выбору. Это либо те, кто имел по математике оценки 4 или 5, либо те, кто хотел заработать дополнительные баллы. В качестве примеров использовались задачи из банка открытых заданий ФИПИ. Еще один тип проверочных работ был предназначен на отработку заданий по номерам. Например, в одной работе собирались задания 4 и 8 – решить уравнение и решить неравенство. Задания КИМов по информатике мы также разделили на две части: информационные процессы и информационные и коммуникационные технологии. Обязательными для выполнения были задания под номерами 1-18. Задания 19-20 задавались ученикам по выбору для оценки 5.

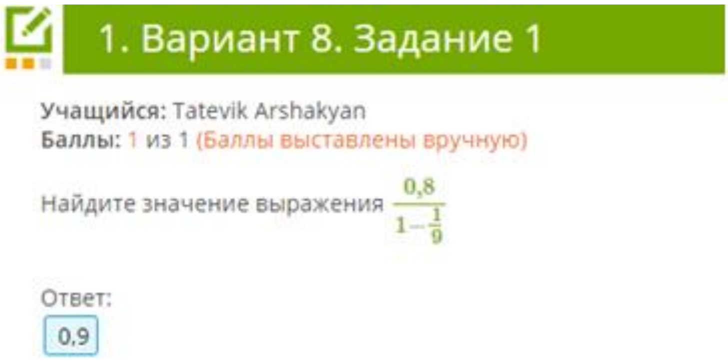


Рис. 2. Пример задания для ученика

На начальном этапе на выполнение заданий проверочной работы давалось две попытки без ограничения времени, ученикам необходимо было привыкнуть к особенностям работы системы, к возможным техническим сбоям. Постепенно количество попыток свелось к одной, а затем начали вводиться ограничения по времени. В начале учебного года задавалась только одна проверочная работа, и ее нужно было сделать в течение недели. К концу учебного года количество работ было увеличено до трех.

После выполнения проверочной работы и ее проверки система формирует итоговую ведомость, в которой по каждому ученику указывается процент выполнения, заработанные баллы и время, потраченное на решение.


Максимальное количество баллов: 20
Срок проведения: 17.05.2017 15:20 - 18.05.2017 23:55
Максимальное количество попыток: 1

Работу выполняют: 19 Работу не выполняют: 8

Результат	Учащийся	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
		1 Б.	1 Б.	1 Б.	1 Б.	1 Б.	1 Б.	1 Б.	1 Б.	1 Б.	1 Б.
11 Б. 55% 48:13	Альберт Ахметов	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
12 Б. 60% 50:29	МАРСЕЛЬ ГАЛЕЕВ	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1
19 Б. 95% 37:11	Сабина Ганиева	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
18 Б. 90% 13:13	Аделя Гараева	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1

Рис. 3. Итоговая ведомость по проверочным работам

Эти показатели позволяют оценить работу ученика либо в баллах, либо в оценке, которую можно выставить в журнал, либо выявить списанные работы.

Отдельным плюсом системы ЯКласс является возможность распечатать работу. Не у всех учеников имеется постоянный доступ к интернету по тем или иным причинам, в этом случае они получали распечатанную копию задания, которую выполняли письменно, что похоже на работу с КИМом ОГЭ.

Так как для получения проверочной работы используется Интернет, то отсутствие ученика в школе, например, по неуважительной причине, не является причиной для ее не выполнения.

Виды работ постоянно чередовались, несколько решенных вариантов и собранная по ним статистика, позволяли увидеть, какие типы примеров нуждаются в дополнительной проработке и по ним формировался второй тип проверочной работы. Задания с наибольшим количеством ошибок обязательно обсуждались в классе.

В результате проделанной работы, достаточно тяжелая ситуация с перспективой не сдачи ОГЭ по математике (информатике) большинством учеников, реализовалась следующим образом: средний результат по баллам – 16 (12), средняя оценка – 3,7 (3,7).

В заключении отметим, применение информационных технологий (на примере Якласс) при подготовке к ОГЭ поможет персонализировать процесс обучения и повысить уровень подготовки ученика.

Литература

1. Лернер И.Я. Процесс обучения и его закономерности. – М.: Знание, 2007.
2. Швырина Г. В. Интернет-ресурсы как эффективное средство формирования культуры речи учащихся / Г.В. Швырина // Образование и общество. – 2010. – №3. – С. 61-64.
3. Сайт *ЯКласс* [Электронный ресурс]/ URL: http://www.yaklass.ru (дата обращения 9.09.2017).

УДК 372

РАЗВИТИЕ ПОЗНАВАТЕЛЬНОГО ИНТЕРЕСА УЧАЩИХСЯ СТАРШИХ КЛАССОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ СРЕДСТВАМИ ЭЛЕКТРОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ (НА ПРИМЕРЕ ТЕМЫ «МНОГОГРАННИКИ»)

Садыкова Е.Р., кандидат педагогических наук, доцент,
Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань
Sadikova_er@mail.ru

Разумова О.В., кандидат педагогических наук, доцент,
Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань
miraolga@rambler.ru

Харисова З.Р., студент,
Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань
05406@bk.ru

Аннотация. В статье рассматриваются возможности использования электронных образовательных ресурсов в качестве средств развития познавательного интереса учащихся средней школы в процессе обучения геометрии.

Ключевые слова: познавательный интерес, познавательная деятельность, информационные технологии, электронные образовательные ресурсы, многогранники.

DEVELOPMENT OF THE COGNITIVE INTEREST OF STUDENTS OF SENIOR CLASSES IN THE PROCESS OF GEOMETRY LEARNING BY MEANS OF ELECTRONIC EDUCATIONAL RESOURCES (ON THE EXAMPLE OF THE THEME OF «POLYHEDRONS»)

E.R. Sadykova, candidate of pedagogical sciences, associate professor,
Kazan (Volga region) Federal University, Kazan

O.V. Razumova, candidate of pedagogical sciences, associate professor,
Kazan (Volga region) Federal University, Kazan
miraolga@rambler.ru

Z.R. Kharisova, student,
Kazan (Volga region) Federal University, Kazan
05406@bk.ru

Abstract. In article the possibilities of use of electronic educational resources as development tools of cognitive interest of pupils of high school in the course of training of geometry are considered.

Keywords: cognitive interest, cognitive activity, information technologies, electronic educational resource, polyhedrons.

В современном информационно-коммуникационном обществе большую роль в комплексе задач обучения занимает проблема развития познавательного интереса учащихся. В настоящее время педагоги, психологи и методисты уделяют внимание познавательным интересам и поисковой активности у детей, которые в становлении личности играют роль ценных мотивов деятельности. Проблема развития познавательного интереса в процессе обучения как математики, так и других предметов неоднократно становилась предметом педагогических, психологических исследований (А. Н. Леонтьев, Г. И. Щукина, И. Ф. Харламов, Л. М. Фридман, С. Л. Рубинштейн, Ф. Н. Гоноболин). Ученые с различных позиций определяют познавательный интерес, подчеркивая разные грани этого феномена. Познавательный интерес - один из самых значимых мотивов учения [3]. В общей структуре мотивации познавательной деятельности этот мотив раньше других осознается учеником, который, не задумываясь, может указать на интересный и неинтересный ему школьный предмет, на интересный или неинтересный урок [2]. Под познавательным интересом различные его исследователи понимают особую избирательную направленность личности на процесс познания, избирательный характер которой выражается в той или иной предметной области (С.Л. Рубинштейн); стремление человека обращать на что-то внимание, познавать какие-либо предметы и явления (Ф.Н. Гоноболин); особое избирательное, наполненное активным замыслом, сильными эмоциями, устремлениями отношение личности к окружающему миру, к его объектам, явлениям, процессам (Г.И. Щукина); эмоционально окрашенную потребность, прошедшую стадию мотивации и придающую деятельности человека увлекательный характер (И.Ф. Харламов). Познавательный интерес характеризуется познавательной активностью, ясной избирательной направленностью учебных предметов, ценной мотивацией, в которой главное место занимают познавательные мотивы. Эта стадия характеризуется поступательным движением познавательной деятельности школьника, поиском интересующей его информации. Любознательный школьник посвящает свободное время предмету познавательного интереса и имеет достаточно высокие показатели и в учении [7]. Развитие познавательного интереса способствует росту сознательного отношения к учению, развитию познавательных процессов, умению ими управлять, сознательно их регулировать.

Рассматривая все обучение в виде цепочки: «хочу – могу – выполняю с интересом – личностно-значимо каждому», Якиманская И. С. в центре этого построения ставит интерес. Ученику «все понятно тогда, когда интересно». Поэтому в процессе обучения учителю необходимо использовать средства и формы организации учебно-познавательной деятельности, способствующие развитию интереса, в частности, к математике. Познавательный интерес к математике – это очень тонкая структура личности, являющаяся важной частью общего феномена «интерес» [3].

Современный учебный процесс немыслим без применения информационных и коммуникационных технологий, без сочетания традиционных средств и методов обучения со средствами ИКТ. Интернет-технологии дают учащимся уверенность в себе, создают более комфортные условия для самореализации и творчества, повышают мотивацию обучения, увеличивают круг общения школьников, предоставляют большой объем разнообразных образовательных ресурсов. Применение электронных образовательных ресурсов дает учителям возможность более глубоко осветить теоретический вопрос, помогает учащимся вникнуть более детально в процессы и явления, которые не могли бы быть изучены без использования интерактивных моделей.

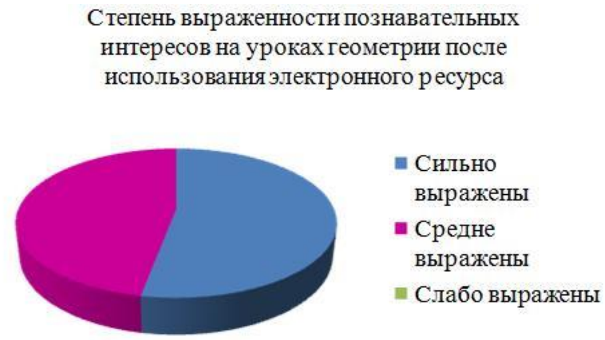
Для экспериментального подтверждения положительного влияния электронных образовательных ресурсов на развитие познавательного интереса в процессе обучения геометрии разработан авторский сайт «(Грани)[N]» (http://zemfiraharisova.wixsite.com/mnogogranniki) на базе общедоступной платформы «Wix».

Данный ресурс предназначен для учащихся 10-11 классов. Представленные материалы дают возможность ученикам сравнивать формулировки

определений и теорем разных авторов школьных учебников геометрии [1,4,6], понимать их суть, способствуют формированию и развитию таких качеств, как интеллектуальная восприимчивость и способность к усвоению новой информации, гибкость и независимость логического мышления. Ресурс содержит и практическую составляющую. Изучив теорию, учащимся предлагается решить геометрические задачи из ЕГЭ. Работая с материалами сайта, ученик сам решает, что ему интересно и актуально на данный момент.

В ходе исследования нами проведена опытно-экспериментальная работа с учащимися 10 «А» класса «Русско-татарской средней общеобразовательной школы №136» города Казани. Для определения уровней познавательного интереса на первом этапе проведено анкетирование на уроках математики, использован метод наблюдения. Метод наблюдения проводился по следующим критериям: активно ли школьник включается в учебную деятельность; отвлекается ли ребенок на уроке; сосредоточенность произвольного внимания; характер процесса деятельности - уровень выполнения познавательной задачи самостоятельно; эмоциональная реакция учащихся [7]. Результаты диагностического обследования показали, что у семи человек сильно выражены познавательные интересы, у десяти учеников - средняя выраженность познавательных интересов.

На втором этапе в качестве средства развития познавательного интереса мы использовали электронный ресурс - сайт «(Грани)^N». При изучении тем «Призма», «Пирамида» ученикам предлагалось в качестве домашнего задания самостоятельно составить конспект, используя материалы сайта, решить задачи по рассматриваемым темам. Домашнее задание было выполнено всеми учащимися, трудностей с использованием ресурса ни у кого не возникло. По мнению учащихся, такая работа вызвала больший интерес, чем работа с учебником. Диагностика сформированности уровней познавательного интереса учащихся проводилась и после завершения второго этапа, когда учащиеся освоили программу занятий. Значительно вырос процент детей, обладающих высоким уровнем сформированности познавательных интересов.



В процессе опытно-экспериментальной работы можно отметить положительную динамику развития познавательного интереса учащихся.

В заключение отметим, что средства развития познавательного интереса должны постоянно развиваться с учетом особенностей учащихся и возможностей современных школ.

Литература

1. Атанасян Л.С. и др. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 2010. – 255 с.
2. Виноградова Л.В. Методика преподавания математики в средней школе: учебное пособие / Л. В. Виноградова // Ростов-на-Дону: Феникс, 2005. – 252 с.
3. Далингер В.А. Познавательный интерес учащихся и его развитие в процессе обучения математике // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. Вып. 3-1. – 2011. – С. 131-137.
4. Погорелов А.В. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / А.В. Погорелов. – М.: Просвещение, 2014. – 175 с.
5. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике / Л. М. Фридман // М.: Издательство «Флинта», 1998. – 224 с.
6. Шарыгин И.Ф. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый уровень. 10-11 классы: учебник / И.Ф. Шарыгин. – М.: Дрофа, 2013. – 236 с.
7. Щукина Г.И. Педагогические проблемы формирования познавательных интересов учащихся / Г. И. Щукина. – М.: Педагогика, 1988. – 208 с.

УДК 378.147

ОБ ЭЛЕКТРОННЫХ УЧЕБНЫХ ПОСОБИЯХ ДЛЯ СПЕЦКУРСА «ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ В НАЦИОНАЛЬНОЙ ШКОЛЕ»

Салаватова С.С., кандидат педагогических наук, профессор,
Стерлитамакский филиал БашГУ, г. Стерлитамак
sssalavatova@mail.ru

Аннотация. В статье раскрывается структура и содержание двух электронных учебных пособий, созданных в программе "Help&Manual" для использования в системе профессионально-методической подготовки будущих учителей математики национальных (башкирских) школ, приводятся скриншоты фрагментов этих пособий.

Ключевые слова: электронное учебное пособие, национальная школа, математика.

ABOUT E-LEARNING TOOLS FOR SPECIAL COURSES "TEACHING OF MATHEMATICS IN NATIONAL SCHOOLS"

S.S. Salavatova, candidate of pedagogical sciences, professor of the department of algebra, geometry and methodic of teaching mathematics,
Sterlitamak branch of Bashkir State University, Sterlitamak
sssalavatova@mail.ru

Abstract. The article reveals the structure and content of the two e-learning tools created in the "Help & Manual" program for use in the system of vocational and methodical training of future math teachers of national (Bashkir) schools, the screenshots fragments of these tools are given.

Keywords: electronic textbook, national school, mathematics.

В многонациональной республике Башкортостан в настоящее время функционирует достаточно большое число национальных школ. Мы исходим из понимания национальной школы как образовательного учреждения, отвечающего потребностям нации и отражающего ее историческую, культурную, духовную ценность, а также менталитет данного этноса, проявляющийся в особенностях национальной психологии, мировоззрении и этнопедагогики. При этом считаем, что для эффективного функционирования такой школы все предметы, в том числе и математика, должны иметь определенную этнокультурную составляющую, в которой можно выделить, по крайней мере, три аспекта: содержательный, языковой и технологический.

Как показывает анализ школьной практики, этнокультурный компонент в национальных школах нашей республики реализуется лишь за счет введения преподавания предмета на родном языке. Действительно, ежегодные отчеты представителей Министерства образования нашей республики констатируют о том, что обучение на родном языке ведется на шести языках (русском, башкирском, татарском, чувашском, марийском, удмурдском). При этом используются переводные учебники (с русского на родной) и потому в их содержании, естественно, нет никакого отражения местного, регионального, этнокультурного компонента. Таким образом, можно выделить проблему, состоящую в том, что наличие национальных школ не подкрепляется ни созданием специальной учебной литературы для обучающихся этих школ, ни соответствующей методической и языковой подготовкой педагогических кадров: ни в педвузах, ни на курсах повышения квалификации учителей не ведется такая подготовка, что создает определенные трудности для учителей. Опрос учителей, работающих (или работавших) в национальных школах, показал, что для обучения математике на родном языке знания бытового башкирского языка вовсе не достаточны. Учителя испытывают большие трудности при преподавании этой дисциплины на родном (не русском) языке, в связи с отсутствием как специальной методической подготовки в стенах вуза, так и научно-методической литературы по предмету на родном (нерусском) языке.

На решение выделенной проблемы, в определенной мере, направлено созданные автором статьи электронные учебные пособия (далее – ЭУП) «Теоретические и практические основы реализации этнокультурного компонента в обучении математике» (далее ЭУП-1) и "Мой Башкортостан: математические задачи с краеведческими сюжетами" (далее – ЭУП-2), предназначенные для использования в рамках спецкурса «Преподавание математики в национальной школе». Первое из названных пособий составлено в соответствии с программой спецкурса, имеет теоретическую и методическую направленность: излагаются теоретические основы реализации национально-регионального компонента образования в процессе обучения математике, раскрывается структура деятельности учителя математики в процессе такой работы, приводятся задания для студентов, как в системе целостной методической подготовки, так и в рамках отдельного специального курса. Второе пособие представляет собой задачник, содержащий математические задачи на четырех языках: русском, башкирском, татарском и английском – для учащихся 5-7-х классов. Это пособие используется не только в системе подготовки учителей, но и непосредственно в системе обучения школьников с башкирским и татарским языками обучения.

Оба пособия созданы на основе программы Help&Manual, которая позволяет составить ЭУП с широким спектром возможностей. Отметим также, такое несомненное преимущество электронного учебного пособия, как возможность его постоянного обновления, дополнения, обогащения. В режиме редактирования студенты имеют возможность вносить дополнения и изменения в ЭУП. Таким образом создается возможность каждому создать свой вариант ЭУП, который затем анализируется на занятиях спецкурса.

Структуру и содержание ЭУП раскроем с помощью некоторых скриншотов с их страниц.

На левой панели экрана пользователи могут постоянно видеть все разделы пособия. На правой панели они видят интересующий их раздел. Причем эти панели могут сужаться и расширяться по мере необходимости.

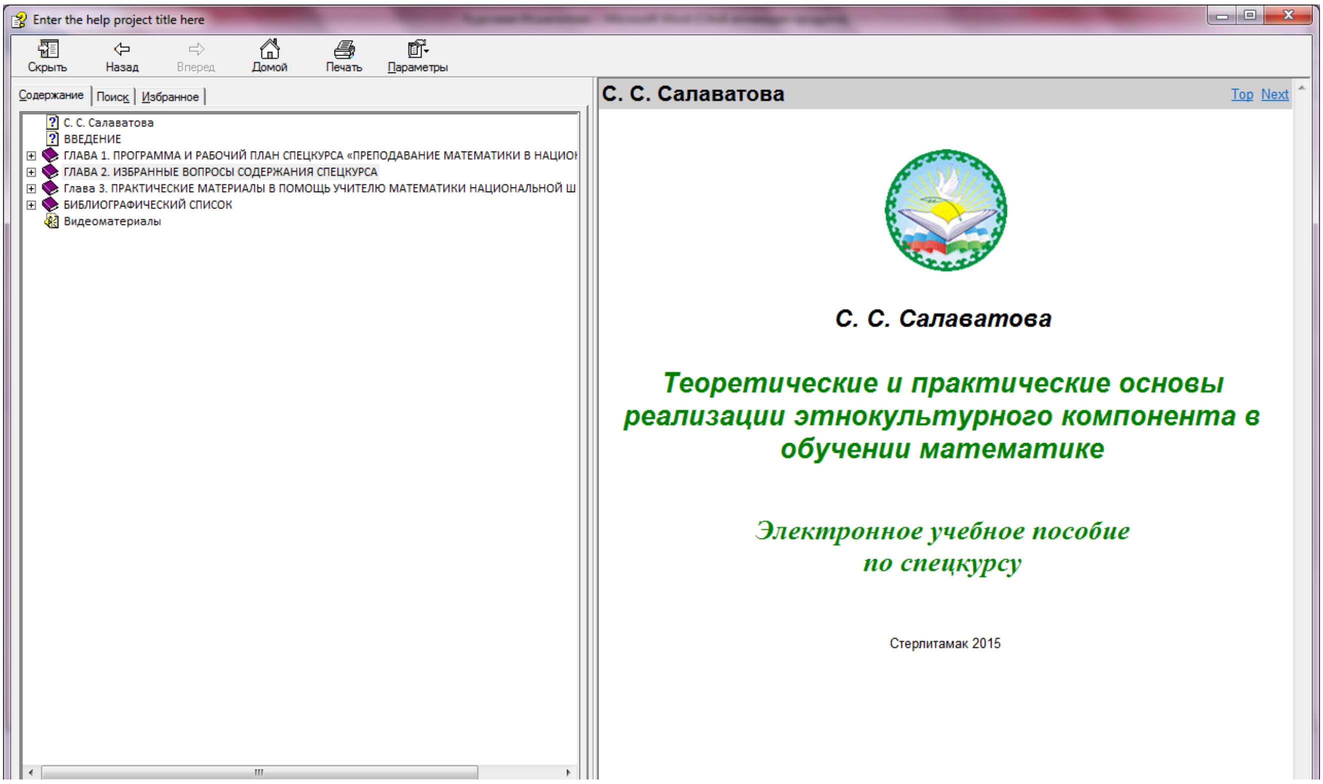


Рис. 1. Скриншот титульной страницы ЭУП-1.

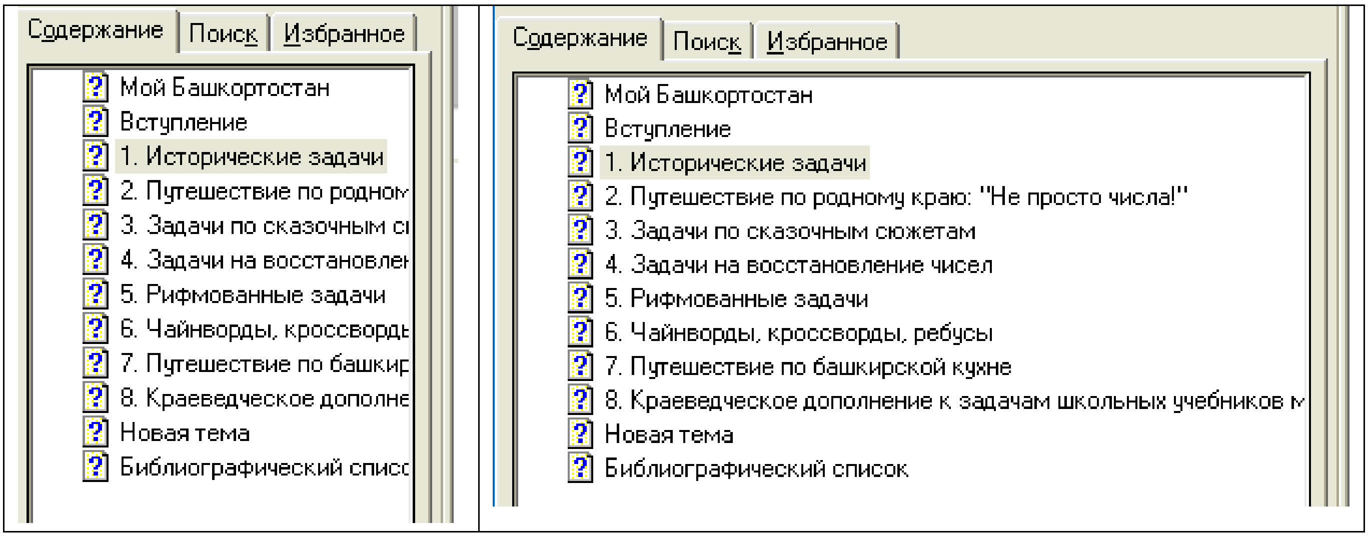


Рис. 2. Вид левой панели ЭУП-2: суженный и расширенный варианты.

Наводя мышкой на соответствующий пункт содержания, ученик может выбрать нужную тему, то есть чтение учебника не обязательно должно быть последовательным. Причем левая панель может также разворачиваться по мере необходимости: пользователи могут видеть либо только оглавление, либо же, нажав на соответствующую главу, могут видеть параграфы, составляющие эту главу.

ЭУП позволяет осуществлять быстрый доступ к требуемой информации. Это достигается путём использования ссылок. В тексте учебника ссылки выделены синим и зелеными цветами. Например, при встрече с указателем на литературу, нет необходимости искать ее в библиографическом списке (в котором приведена литература на русском, башкирском и татарском языках), достаточно навести курсор на этот указатель, при этом появится всплывающая подсказка с названием источника.

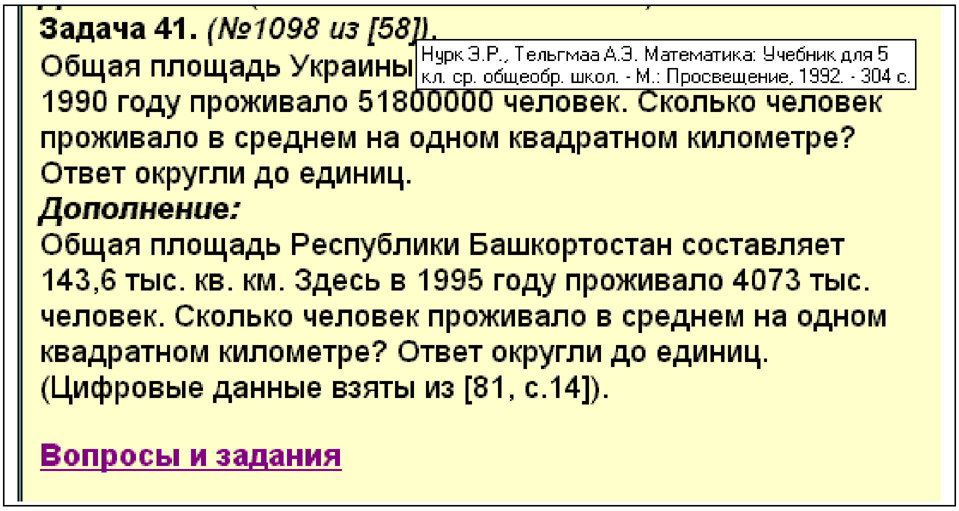


Рис. 3. Скриншот фрагмента ЭУП-1 со всплывающей подсказкой: указанием названия учебника, из которого взята задача №58.

Примечание. Как известно, учебник математики эстонских авторов Э.Р. Нурка и А.Э. Тельгмаа с середины 90-х годов не является действующим учебником, однако он используется нами в системе методической подготовки для сравнительного анализа.

Программа Help&Manual позволяет также встраивать в ЭУП тесты для обучающихся (см. рис. 4.).

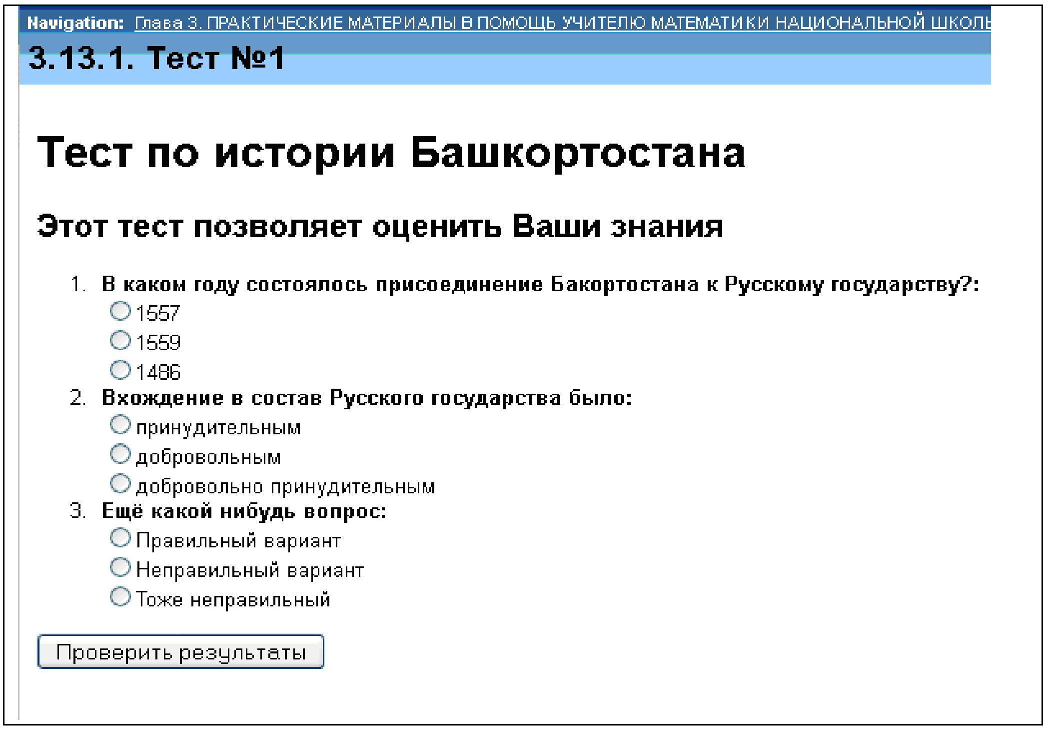


Рис.4. Скриншот фрагмента ЭУП-1 с образцом теста, который могут редактировать студенты

В пособиях достаточно большой материал представлен на башкирском и татарском языках (это разработки уроков, внеурочных мероприятий, условия и решения задач, список литературы), иногда на английском (тексты и решения некоторых задач) (см. рис.5-8).

Рис. 5. Скриншот фрагмента ЭУП-1, где список литературы на башкирском и татарском языках приводится на отдельной странице

Оба пособия содержат математические задачи, записанные на нескольких языках: основной вариант условия задачи представлен на русском языке. В тексте пособия имеются метки: "задача на башкирском языке", "задача на татарском языке", "задача на английском языке", "решение", "ответ", при нажатии на которые мышью, раскрываются соответственные варианты полных текстов. Этот факт отражен на рисунках 7-8.

Рис. 6. Скриншот фрагмента ЭУП-2, где часть текстов скрыта под метками

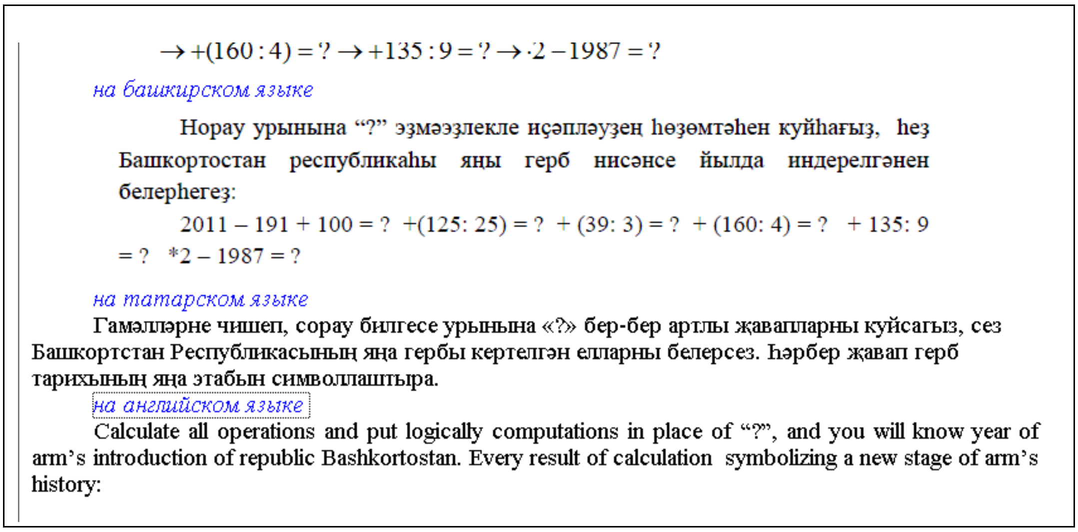
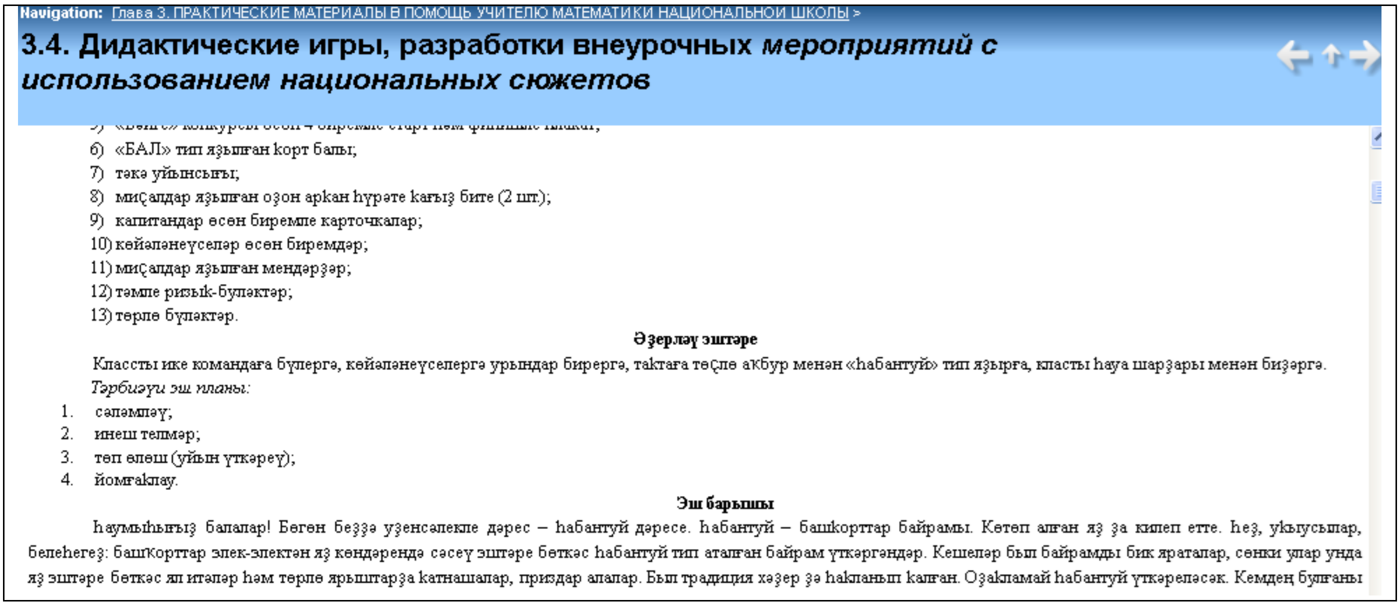


Рис. 7. Скриншот части фрагмента ЭУП-2 из рисунка 6,
на котором при нажатии соответствующих меток на экране появляются тексты
на башкирском, татарском и английском языках



Navigation: Глава 3. ПРАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ В ПОМОЩЬ УЧИТЕЛЮ МАТЕМАТИКИ НАЦИОНАЛЬНОЙ ШКОЛЫ >

3.4. Дидактические игры, разработки внеурочных *мероприятий с использованием национальных сюжетов*

6) «БАЛ» тип яҙылған ҡорт балы;
7) тәкә уйынсығы;
8) миҫалдар яҙылған оҙон арҡан һүрәте ҡағыҙ бите (2 шт.);
9) капитандар өсөн биремле карточкалар;
10) көйәләнеүселәр өсөн биремдәр;
11) миҫалдар яҙылған мендәрҙәр;
12) тәмле ризыҡ-буләктәр;
13) төрлө бүләктәр.

Әҙерләү эштәре

Классты ике командаға бүлергә, көйәләнеүселергә урындар бирергә, таҡтаға төҫлө аҡбур менән «һабантуй» тип яҙырға, класты һауа шарҙары менән биҙәргә.

Тәрбиәүи эш планы:

1. сәләмләү;
2. инеш телмәр;
3. төп өлөш (уйын үткәреү);
4. йомғаҡлау.

Эш барышы

Һаумыһығыҙ балалар! Бөгөн беҙҙә үҙенсәлекле дәрес – һабантуй дәресе. Һабантуй – башҡорттар байрамы. Көтөп алған яҙ ҙа килеп етте. Һеҙ, уҡыусылар, беләһегеҙ: башҡорттар элек-электән яҙ көндәрендә сәсеү эштәре бөткәс һабантуй тип аталған байрам үткәргәндәр. Кешеләр был байрамды бик яраталар, сөнки улар унда яҙ эштәре бөткәс ял итәләр һәм төрлө ярыштарҙа ҡатнашалар, приздар алалар. Был традиция хәҙер ҙә һаҡланып ҡалған. Оҙаҡламай һабантуй үткәреләсәк. Кемдең булғаны

Рис. 8. Скриншот страницы ЭУП-1, где приводится сценарий внеурочного мероприятия, составленного на башкирском языке и внесенного в содержание ЭУП-1 студентами в режиме редактирования

Опытно-экспериментальная апробация описанных ЭУП, проведенная в ходе занятий спецкурса со студентами физико-математического факультета СФ БашГУ, также на курсах повышения квалификации учителей математики Республики Башкортостан, подтвердила ее методическую эффективность, ЭУП "Мой Башкортостан: математические задачи с краеведческими сюжетами" используется в качестве дополнений к действующим учебникам математики.

УДК 378.147

ПРОЕКТ «ЛЕКЦИЯ НА НОЧЬ» В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

Сангалова М.Е., кандидат педагогических наук, доцент
Арзамасский филиал Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, г. Арзамас
smolyanka77@mail.ru

Аннотация. В статье обсуждается организация проекта «Лекция на ночь». Особенностями этого проекта являются: использование технологии перевернутого обучения, создание видео-лекций студентами, организация на электронном курсе единого образовательного пространства.

Ключевые слова: высшее образование, проектно-ориентированное обучение, перевернутое обучение, математическая логика.

PROJECT «LECTURE TONIGHT» IN TEACHING MATHEMATICAL LOGIC

M.E. Sangalova, PhD in pedagogy, associate professor,
Arzamas branch of the National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Arzamas
smolyanka77@mail.ru

Abstract. In the article the organization of the project «Lecture tonight » is discussed. Using flipped classroom, creation of video by students and organization in electronic course of a single educational space are features of this project.

Key words: higher education, project based learning, flipped classroom, mathematical logic.

В соответствии с действующим федеральным образовательным стандартом высшего образования основным результатом обучения является формирование способности к самообразованию, эффективному планированию и самооценке. Следовательно, преподаватель теперь является в большей степени не источником знаний, а аккумулятором и проводником технологий обучения.

Многие современные технологии направлены на достижение обозначенного результата, например, технология развития критического мышления через чтение и письмо (ТРКМЧП), проектно-ориентированные технологии и электронное обучение. Однако их использование при работе с будущими учителями имеет и другой аспект [3]: технологии становятся не только инструментом, но и объектом изучения студентов. Обучение технологиям, причём не теоретическое, а именно практическое – «обучение в деятельности и через деятельность» [1] должно лежать в фундаменте педагогического образования. Освоение в деятельности широкого спектра технологий обучения вооружит будущего учителя эффективным набором инструментов для решения профессиональных задач.

В данном исследовании ставится цель не столько использовать метод проектов, сколько организовать целенаправленное обучение математической логике [3], синтезируя несколько современных технологий. Прежде всего, это: проектная технология, электронное обучение, перевернутое обучение или flipped classroom (рис. 1) [4] и технология портфолио (для создания портфолио проекта).

Рис. 1. Технология flipped classroom

Обучение математической логике планируется осуществлять следующим образом.

1. Все студенты очной формы обучения:
   - участвуют в проекте «Лекция на ночь» (более подробно о нем будет рассказано ниже).
   - выполняют задания и ведут портфолио на электронном курсе «Математическая логика» в системе электронного обучения (СЭО) ННГУ.
   - сами являются соавторами электронного курса «Математическая логика (заочное)» для студентов заочного отделения, размещая видео-лекции вопросы к ним. Объект Лекция системы Moodle может содержать информационные страницы и страницы с вопросами. То есть, при консультационной поддержке преподавателя, студенты создают видео-лекции с теорией и разрабатывают элементы обратной связи.
2. Студенты заочной формы обучения:
   - в начале семестра проходят регистрацию на электронном курсе «Математическая логика (заочное)», разработанного при участии студентов очного отделения;
   - проходят все лекции (прохождение лекции определяет правильность ответов на вопросы к лекции);
   - пользуясь обучающими видео-практиками, предпринимают попытки решить задания контрольной работы; видео-практики разработаны преподавателем к каждой конкретной задаче (например, «Упрощение формул», «СДНФ. Метод равносильных преобразований» (рис.2));
   - обсуждают на форуме проблемные вопросы с преподавателем, студентами очного отделения и друг с другом;
   - в соответствии с технологией перевернутого обучения, во время сессии в аудитории участвуют в обсуждении теоретических вопросов и решают оговоренной на электронном курсе круг задач.

Выбор именно видео-лекций в качестве одного из инструментов обучения вполне обоснован. Просмотр видео является в настоящее время наиболее распространенным, а, следовательно, привычным способом получения информации. Не только студенты, но и преподаватели, использующие электронное обучение отмечают, что ценность электронного курса повышается, если разработчики используют графический, аудио-, а также видеоматериал [2]. Конечно, учебные фильмы могут создаваться преподавателем, но также они могут создаваться и студентами. В этом случае студенты должны стать не объектом, а субъектом процесса обучения, оказаться на позиции преподавателя. Это позволит достичь освоения ими теоретического материала на более высоком уровне. Поэтому студентам очной формы обучения и предлагается участвовать в проекте «Лекция на ночь». Распределив учебные темы по проектным группам, участники проекта приступают к изучению теоретического материала. Преподаватель, поясняет студентам, что целевой аудиторией фильмов являются студенты заочного отделения.

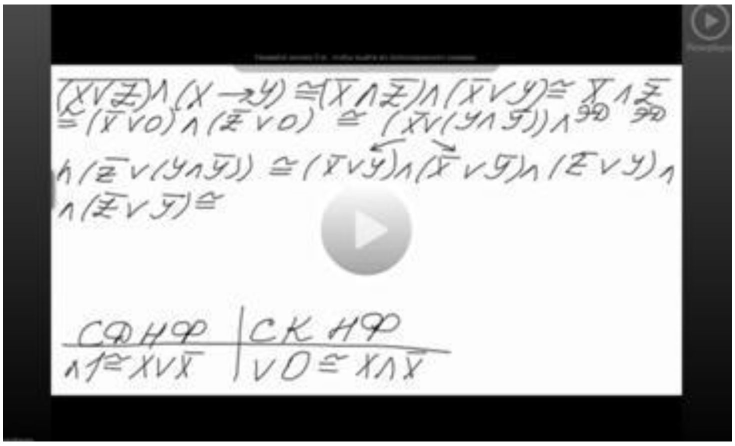


Рис. 2. Учебная видео-практика «Приведение к СКНФ»

Каждая видео-лекция должна:

- полностью освещать теоретический вопрос и содержать все необходимое для подготовки к экзамену: определения, свойства объектов, теоремы и их доказательства, примеры, обеспечивающие понимание материала;
- делиться на фрагменты, длительностью в 7-10 мин, что обеспечивает внимание зрителя.

Примерами видео-лекций могут стать материалы массовых открытых онлайн-курсов (МООК) на платформах Лекториум, Coursera и т.п. Преподаватель осуществляет консультирование студентов на всех этапах подготовки видео-лекций. Лучшие учебные фильмы размещаются на электронном курсе. Далее при взаимодействии со студентами заочного отделения преподаватель может использовать разработанные «Лекция на ночь».

Таким образом, проект «Лекция на ночь», являясь по своей сути обучающим проектом для студентов очного отделения, приобретает значительную практическую ценность, имея конечным продуктом методическую разработку в сфере электронного обучения. Можно предполагать, что, образовательный продукт, созданный в процессе сотрудничества студентов и преподавателя, вызовет значительный интерес в среде методистов. Его жизнеспособность определяется возможностью бесконечного числа творческих решений поставленной задачи.

Литература

1. Дьюи Д. Психология и педагогика мышления. Пер. с англ. Н.М. Никольской. – М.: Совершенство, 1997. – 208 с.
2. Кузьмин И.В. Дистанционное обучение на филологическом факультете ННГУ им. Н.И. Лобачевского // Педагогические чтения в ННГУ: сб. науч. статей. Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ. С. 247-251.
3. Сангалова М. Е. Постановка целей и разработка курсов по ФГОС на примере курса «Математическая логика» //Alma mater (Вестник высшей школы). – 2014. – № 10. – С. 75-80.
4. Flipped classroom/ Rochester Institute of Technology. Innovative learning institute «Teaching and learning service». URL: http://www.rit.edu/academicaffairs/tls/course-design/teaching-elements/flipped-classroom (дата обращения 15.06.2017).

УДК 378.4:51

ОБ ОПЫТЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ MS POWERPOINT ПРЕЗЕНТАЦИЙ НА ЛЕКЦИЯХ ПО МАТЕМАТИКЕ

Тимофеева И.Л., доктор педагогических наук, профессор,
Московский педагогический государственный университет (МПГУ), г. Москва
iltimofeeva@mail.ru

Аннотация. В статье проанализированы достоинства, недостатки и проблемы использования MS PowerPoint презентаций на лекциях по математике. Предложены решения указанных проблем. Статья основана на опыте преподавания автора на математическом факультете в МПГУ.

Ключевые слова: PowerPoint, презентация, математика, лекция, высшая школа.

EXPERIENCE IN THE USE OF MS POWERPOINT PRESENTATIONS IN MATH LECTURES

I.L. Timofeeva, doctor of pedagogic sciences, professor,
Moscow State Pedagogical University (MSPU), Moscow
iltimofeeva@mail.ru

Abstract. Advantages, disadvantages and problems of using MS PowerPoint presentations at math lectures for students are analyzed. Solutions of mentioned problems are proposed. The article is based on author’ math lectures experience at Mathematical Department of Moscow State Pedagogical University.

Keywords: PowerPoint, presentation, mathematics, lecture, high school.

Использование на лекциях в высшей школе презентаций – далеко не новая форма применения современных компьютерных технологий. Однако при чтении лекций именно по математике, где ведущую роль играют доказательства, это не очень распространено, по крайней мере, на математическом факультете МПГУ, где я давно работаю. Думаю, дело не только в консерватизме преподавателей с большим стажем и технической сложности подготовки презентаций, но и в принципиальной позиции преподавателей. Кроме того, не каждый преподаватель готов выполнять огромную дополнительную работу по подготовке презентаций.

Многие годы я также читала лекции по математической логике и теории алгоритмов традиционным способом, будучи твердо уверенной, что мел и тряпка (маркер и губка для стирания) – единственные технические средства лектора, читающего математические дисциплины. Однако четыре года назад у меня впервые возникла необходимость использовать компьютер на лекциях по математической логике и теории алгоритмов. Сначала это была вынужденная мера, когда я физически была не в состоянии читать лекции как прежде, т.е. не отходя от доски в течение двух академических часов. Поэтому я стала готовить презентации для каждой лекции, используя PowerPoint.

При разработке презентаций я следовала следующим принципам:

- Текст на слайде не должен появляться сразу целиком; строчки и формулы должны возникать на экране последовательно, друг за другом, как и на доске, когда преподаватель пишет мелом.
- Текст на слайде должен быть достаточно полным (завершенным), представлять собой не план лекции, а ее краткий конспект, включающий доказательства, но предполагающий устные разъяснения и комментарии.
- Текст на слайде должен быть максимально лаконичным.
- Словесные формулировки определений и теорем на слайде следует сопровождать их символической записью с целью уточнения и наглядного отражения их логической структуры.
- Следует отказаться от "украшательства" слайдов и от эффектов, отвлекающих от содержания. Цвет следует использовать только для выделения новых терминов, некоторых формул и символов, а также наиболее важных моментов.

Сначала я рассматривала разработку презентаций как вынужденную работу и видела только недостатки использования презентаций на лекциях. Прежде всего, подготовка презентации для лекции потребовала гораздо больше времени, чем традиционная подготовка к лекции. Трудности носили как технический, так и содержательный характер. Изложим их суть.

1. Техническая сторона подготовки презентаций осложнялась тем, что необходимо было не только набирать текст и сложные логические формулы, требующие использования MathType, но и настраивать анимацию, обеспечивающую постепенное появление текста и формул на слайде. Эта работа требовала немалого времени, учитывая, что я осваивала новую для меня технологию.

2. Трудности содержательного характера: требовалось продумывать каждое слово на каждом слайде, чтобы отразить материал максимально полно и точно – с одной стороны, но лаконично и компактно – с другой, чего обычно не делалось при традиционной подготовке к лекции. Всегда можно было сказать и написать на доске сначала так, а потом – немного иначе, если по ходу лекции пришел в голову новый вариант.

3. Главный же недостаток использования презентаций на лекциях заключался в том, что исчезала возможность в импровизации во время лекции. На мой взгляд, наиболее интересна импровизация во время доказательства теоремы, когда можно продемонстрировать процесс поиска доказательства. Это в некоторой степени позволяет подключать наиболее сильных студентов к этой эвристической деятельности.

4. Следующая серьезная проблема, с которой я столкнулась, используя презентации на лекции, заключалась в стремлении студентов немедленно начать переписывать со слайда появившуюся строчку (доказательства, определения или теоремы), не слушая мои комментарии. В результате эти комментарии просто не воспринимались студентами. Слабым студентам устные комментарии вовсе мешали переписывать текст со слайда. Сильные студенты тоже с трудом одновременно слушали мои комментарии и записывали текст со слайда.

Перейду к изложению собственного опыта решения перечисленных проблем.

1. Накапливая опыт разработки презентаций, со временем стало проще преодолевать проблемы технического характера, я смогла готовить презентации быстрее.

2. Содержательные трудности на следующий учебный год существенно уменьшились, поскольку разработанную презентацию требовалось только редактировать. Правда, совершенствовать текст можно бесконечно...

3. Недостаток возможности импровизации, в некоторой степени, удалось компенсировать посредством расширения устных комментариев.

4. Четвертую проблему можно частично решить так: сначала сказать то, что считаешь необходимым, а лишь потом – нажать кнопку пульта (кликнуть мышью), чтобы появилась очередная строчка или формула на экране. Таким образом, студенты получают возможность переписать что-то с экрана только после того, как выслушали предварительный комментарий лектора.

Теперь обращусь к достоинствам использования презентаций на лекциях, помня, что недостатки порой являются и достоинствами. Кроме того, каждая медаль имеет две стороны.

1. Освоение PowerRoint расширяет возможности лектора в использовании компьютерных технологий в обучении. Кроме того, это дает возможность не только требовать от студентов использовать презентации на своих докладах на дисциплинах по выбору и на защитах выпускных квалификационных работ, но и существенно помогать им в разработке презентаций, выступать консультантом.

2. Детальное продумывание лектором текста каждого слайда способствует совершенствованию изложения материала, в частности, оптимизации доказательств теорем.

3. Четкое следование тексту презентации (без импровизаций) позволяет легче соблюдать временные рамки.

4. Студенты, имея лаконичное изложение материала на слайде, получают возможность записать лекцию максимально точно. В последние годы студенты очень плохо стали записывать лекции (не только мои), читаемые традиционно. Заглядывая после лекции в тетради студентов (особенно слабых), я изумлялась, насколько они могли исказить сказанный лектором текст, иногда до полной неузнаваемости. Дело в том, что лектор на доске обычно не пишет полный текст, который следует записать студенту в тетради. Слабые студенты (а их год от года становится все больше) не справляются с задачей – связно записать текст, произносимый лектором. По результатам опроса студентов, могу сказать, что подавляющее большинство голосует за использование презентаций на лекциях.

Возникает вопрос: почему бы заранее не выдать на руки конспект лекций в печатном виде? Считаю, что это не лучший выход. Во-первых, известно, что при записи конспекта лекции собственной рукой у студента работает моторная память. Во-вторых, в настоящее время в отечественных вузах сознательность студентов недостаточно высока, чтобы не пропускать лекции, заранее имея на руках все конспекты.

Личное влияние лектора во время "живой" лекции – его энергетику, увлеченность, дополнительные комментарии, нельзя заменить никаким конспектом или учебником, даже если он написан самим лектором (в моем случае именно такая ситуация). Уверена, что лектора нельзя заменить ничем при очной форме обучения. Намечается тенденция – заменить "живые" лекции презентациями, видео-лекциями и пр., которая, на мой взгляд, может повлечь только снижение уровня очного образования. В то же время, при заочном, дистанционном обучении, где курс систематических очных лекций в полном объеме невозможен, есть большие перспективы в этом направлении.

Замечу, что использовать подобные презентации на практических занятиях по математике считаю нецелесообразным, поскольку на таких занятиях у доски и на местах в основном работают студенты.

Таким образом, использование презентаций на лекциях по математике – дело весьма трудоемкое, но полезное: презентация может служить существенным дополнением к традиционным формам чтения лекций в высшей школе.

УДК 378.6

ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ КУРСАНТОВ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ В ВУЗАХ МЧС РОССИИ

Трофимец Е.Н., кандидат педагогических наук, доцент,
Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России, г. Санкт-Петербург
ezemifort@inbox.ru

Аннотация. Рассматривается процесс обучения высшей математики с использованием компьютерного моделирования в образовательном процессе специалистов МЧС России.

Ключевые слова: высшая математика, процесс обучения, интеграция, математическое и компьютерное моделирование.

USE OF INFORMATION TECHNOLOGIES IN THE COURSE OF TRAINING OF MILITARY STUDENTS OF THE HIGHER MATHEMATICS IN HIGHER EDUCATION INSTITUTIONS OF EMERCOM OF RUSSIA

E.N. Trophimets, candidate of pedagogical sciences, associate professor,
Saint-Petersburg university of State Fire Service EMERCOM of Russia, Saint-Petersburg ezemifort@inbox.ru

Abstract. The process of learning mathematics with the use of computer simulation in educational process of specialists of EMERCOM of Russia.

Keywords: the higher mathematics, training process, integration, mathematical and computer modeling.

В системе подготовки специалистов пожарно-спасательного профиля в вузах МЧС России при изучении дисциплин математического цикла целесообразно применять информационные технологии для решения наукоемких и сложных задач. К таким задачам относятся краевые задачи дисциплины «Уравнения математической физики». При решении краевых задач математической физики целесообразно использовать функциональные возможности программных математических пакетов [1, 2].

Наиболее распространенными считаются MathCad, Maple, MatLab, Matematica, Derive и др.

Фокус внимания сместим на решение уравнения гиперболического типа в компьютерной системе MathCad [3, 4].

К уравнениям гиперболического типа (волновым) приводят процессы электрических колебаний в контактных проводах, крутильных колебаний валов, поперечных и продольных колебаний струн, стержней, мембран, электромагнитных колебаний, задачи гидро- и аэродинамики, акустики, диффузии газов и т.д.

Уравнение вынужденных колебаний струны имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$

где $u(x,t)$ – искомая функция поперечных отклонений струны в точке x в момент времени t, $f(x,t)$ – линейная плотность внешней силы, a^2 – волновой параметр, который определяется соотношением:

$$a^2 = \frac{T}{\rho},$$

где T – сила натяжения струны, ρ – погонная плотность струны.

Формула Даламбера для решения уравнения вынужденных колебаний струны получается добавлением к формуле Даламбера для свободных колебаний струны еще одного слагаемого:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

где $\varphi(x) = u(x,0)$ – начальное отклонение струны; $\psi(x) = \frac{\partial}{\partial t}u(x,0)$ – начальная скорость струны.

Таким образом, функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ задают начальные условия (т.е. решается задача Коши).

Пусть на струну действует внешняя сила с линейной плотностью:

$$f(x,t) = e^{-t}\sin(x).$$

Будем рассматривать бесконечную струну с волновым параметром a^2=1. Начальная скорость точек струны $\psi(x)$=0. В начальный момент времени струна имеет профиль, который описывается функцией $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, x < -c \\ u_0\dfrac{x+c}{c}, -c \le x \le 0 \\ u_0\dfrac{c-x}{c}, 0 \le x \le c \\ 0, x > c \end{cases}.$$

Где u_0 – максимальное отклонение струны, c – «масштабный» параметр по координате x. Пусть u_0=1 и c=1.

Решение краевой задачи получим при помощи компьютерной системы MathCad в виде графика профиля струны в моменты времени t_0 и $2t_0$, которые кратны отношению c/a. Решение задачи представлено на рис. 1.

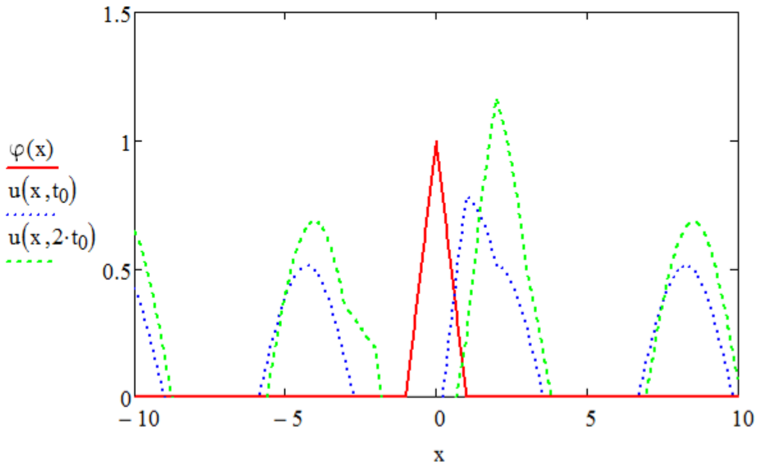


Рис. 1. Определение профиля струны с помощью функции Даламбера

Теперь решим краевую задачу для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + e^{-t}\sin\frac{\pi x}{L},\quad 0 < x < L,\quad t > 0,$$

с начальными условиями:

$$u(x,0) = \sin\frac{5\pi x}{2L},\quad \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = \cos\frac{\pi x}{2L},\quad 0 \le x \le L,$$

и граничными условиями:

$$u(0,t) = \frac{5\pi}{L},\quad u(L,t) = 0,\quad 0 \le t \le T.$$

Зададим следующие параметры: $a^2 = 1$, $L = 1$, $T = 1$.

Для решения задачи воспользуемся блоком Given/Pdesolve.

Функция Pdesolve имеет следующее ограничение: для частной производной по времени допустима только первая производная. Поэтому требуется преобразование исходного волнового уравнения к эквивалентной системе из двух уравнений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = w(x,t), \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t). \end{cases}$$

При этом граничные условия не изменяются, а начальные условия будут иметь вид

$$u(x,0) = \varphi(x), w(x,0) = \psi((x) = 0\,.$$

Решим задачу для $t_0 = 0{,}25$, $t_0 = 0{,}5$ и $t_0 = 0{,}75$.

Решение краевой задачи о малых поперечных колебаниях ограниченной струны представлено на рис. 2.

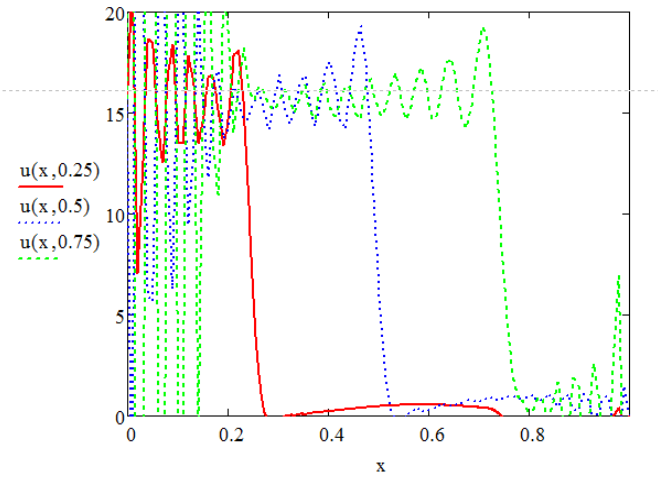


Рис. 2. Решение в виде двухмерного графика

Представим решение задачи в виде поверхности (трёхмерного графика). Для этого воспользуйтесь функцией CreateMesh (находится в категории Построение графика) со следующими параметрами (рис. 3):

$$U := \mathrm{CreateMesh}(u, 0, L, 0, T, 100, 200)$$

Рис. 3. Функция CreateMesh

Решение задачи в виде поверхности представлено на рис. 4.

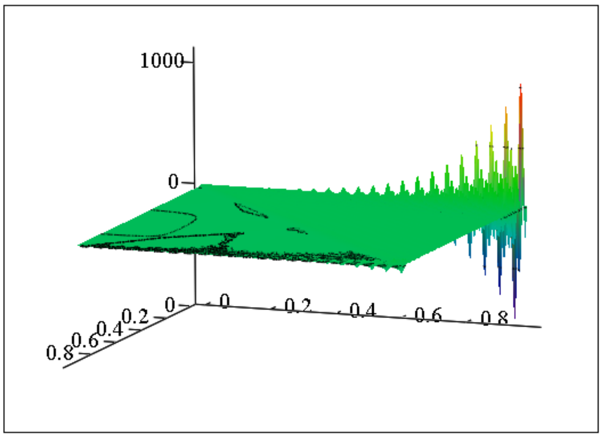


Рис. 4. Решение в виде поверхности

Компьютерная система MathCad – удобный и мощный инструмент, позволяющий решать корректно поставленные задачи математической физики.

Литература

1. Трофимец Е.Н. Компьютерное моделирование в системе подготовки специалистов МЧС России / Е.Н. Трофимец, В.Я. Трофимец // Задачи в обучении математике, физике и информатике: теория, опыт, инновации – Материалы II Международной научно-практической конференции, посвященной 125-летию П.А. Ларичева. – Издательство: ИП Киселев А.В., 2017. – С. 344-346.

2. Трофимец Е.Н. Математическое моделирование температурного поля платы компьютера в среде Mathcad / Е.Н. Трофимец, В.Я. Трофимец // Математика, физика, информатика и их приложения в науке и образовании – Сборник тезисов докладов Международной школы-конференции молодых ученых. – Московский технологический университет (МИРЭА), Российский университет дружбы народов, Мос-

ковский государственный университет им. М.В. Ломоносова. – Издательство: Московский технологический университет (МИРЭА), 2016. – С. 123-124.

3. Вакула И.В. К вопросу решения краевых задач математической физики в Mathcad / И.В. Вакула, Е.Н. Трофимец // Шестьдесят девятая всероссийская научно-техническая конференция студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений с международным участием – Сборник материалов конференции. Электронное издание. Ярославский государственный технический университет, 2016. – С. 1531-1534.

4. Лазарева Е.В. Практическая значимость компьютерной системы Mathcad при нахождении решений по «жестким» математическим моделям / Е.В. Лазарева, Е.Н. Трофимец // Шестьдесят девятая всероссийская научно-техническая конференция студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений с международным участием – Сборник материалов конференции. Электронное издание. Ярославский государственный технический университет, 2016. – С. 1576-1579.

КРАСИВАЯ ЗАДАЧА – ЭСТЕТИЧЕСКАЯ МОТИВАЦИЯ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Г.И.Санникова, учитель математики
Средняя общеобразовательная школа №10, Елабуга
1810009645@edu.tatar.ru

В статье кратко рассказывается о формировании эстетических вкусов школьников на уроках математики в процессе решения красивых задач.

Ключевые слова: текстовые задачи, таблица, рисунок, эстетическая мотивация.

Beautiful tasks as an aesthetic motivation for students studing mathematics

G.I.Sannikova, mathematics teacher
Secondary general school №10, Elabuga
1810009645@edu.tatar.ru

Aesthetic tastes formation of pupils on the lessons of math during the solving beautiful tasks is briefly told in the article.

Keywords: text tasks, tables, images, aesthetic motivation.

Особенность математики заключается в том, что в ней, как в искусстве, заложен огромный эстетический потенциал. Эту красоту можно увидеть в гармонии чисел и форм, геометрической выразительности, стройности математических формул, изяществе математических доказательств, порядке, богатстве приложений, универсальности математических методов, способов решений задач, оригинальности приемов сравнения.

Сильное впечатление производит на ребят использование оригинальных формулировок задач, теорем, доказательств, известных из истории. В качестве примера приведем две задачи, решение которых непременно доставит школьнику большое удовольствие и приобщит к красоте, формирует у него эстетические вкусы.

Задача 1.

Сумма нечетных чисел. Посмотрите на таблицу:

Таблица 1

$1 = 1^2$ $1 + 3 = 4 = 2^2$ $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$ $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

Может быть, эта закономерность сохраняется дальше? Как это проверить? [1] (Ответ: всегда сохраняется)

Задача 2.

Сошлись два пастуха, Иван и Петр. Иван говорит Петру:

- Отгадай-ка ты мне одну овцу, тогда у меня будет овец ровно вдвое больше, чем у тебя.

А Петр ему отвечает:

- Нет! Лучше ты мне отдай одну овцу, тогда у нас будет овец поровну! Сколько же было у каждого овец? [2] (Ответ: у Ивана было 7, а у Петра 5 овец).

Красота математического объекта (формулы, понятия, теоремы, задачи, способа рассуждений) оказывает огромное влияние в обучении математике.

Эстетические мотивы проявляют себя в полной мере в процессе творческой деятельности школьников. В этой деятельности ведущая роль принадлежит задаче. Учитель может использовать эти мотивы, помочь школьникам найти дорогу к решению задачи. Рассмотрим пример.

Задача 3.

Площадь треугольника АВС 80. Биссектриса АД пересекает медиану ВК в точке Е, при этом ВД : СД = 1 : 3. Найдите площадь четырехугольника.

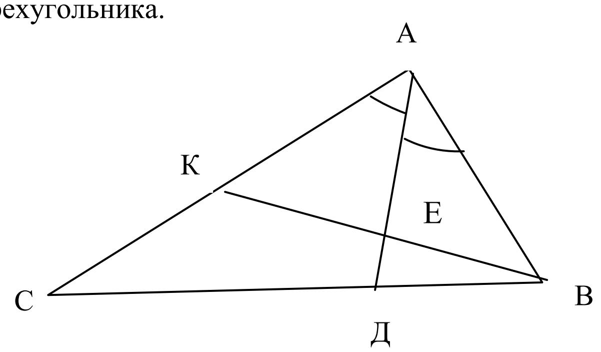


Рисунок 1

Данная задача привлекательна стандартностью ее условия и требования, простым и ясным чертежом. Вместе с тем, что дано отношение длин отрезков на стороне треугольника является для учащихся неожиданным. Неожиданность усиливает интерес к поиску решения задачи. Условие пересечения медианы и биссектрисы усиливает эстетическое впечатление.

Изучение рисунка, которое приобретает большую содержательность и эстетическую привлекательность приводит к выводу о том, что Е – точка пересечения медианы и биссектрисы в треугольнике АВК. По свойству биссектрисы в треугольнике АВК ВЕ : КЕ = АВ : АК = 2 : 3, поскольку в треугольнике АВС ВД : СД = 1 : 3, ВД : СД = АВ : АС = 1: 3 = 2 : 6, АВ = 2х, АС = 6х, АК = КС = 3х.

$$S_{\text{АСД}} = \frac{\text{СД}}{\text{СВ}} \times S_{\text{АВС}} = \frac{3}{4} \times 80 = 60.$$

$$S_{\text{АКЕ}} = \frac{\text{КЕ}}{\text{ВК}} \times S_{\text{АВК}} = \frac{\text{КЕ}}{\text{ВК}} \times \frac{\text{АК}}{\text{КС}} \times S_{\text{АВС}} = \frac{3 \times S_{\text{АВС}}}{10} = \frac{3 \times 80}{10} = 24.$$

Таким образом, $S_{\text{ЕДСК}} = S_{\text{АСД}} - S_{\text{АКЕ}} = 60 - 24 = 36.$

Ответ: 36.

Текстовые задачи занимают большое место в курсе математики. Прежде всего они привлекательны для школьников, поскольку они отражают реальные ситуации, хорошо знакомые им. И именно, арифметический способ решения текстовых задач способствует не только развитию логического мышления, его применение учит использовать эвристики в решении задач, формирует алгоритмический стиль мышления и демонстрирует большой эстетический потенциал, присущий текстовой задаче. Подтвердим сказанное следующей задачей.

Задача 4.

Из двух пунктов одновременно навстречу друг другу вышли грузовая и легковая машины. Скорость грузовой автомашины в 2 раза меньше скорости легковой. Найдите скорость каждой автомашины, если известно, что расстояние между пунктами 480 км и машины встретились через 4 часа.

1) Чему равна общая скорость или расстояние, пройденное за 1 час грузовой и легковой машинами?

480 : 4 = 120 (км/ч)

2) Чему равна скорость грузовой машины?

120 : (2 + 1) = 40 (км/ч)

3) Чему равна скорость легковой машины?

120 – 40 = 80 (км/ч)

Ответ: 40 км/ч и 80 км/ч.

Рассмотренные выше решения задач иллюстрируют огромную их роль в эстетическом развитии школьника. Учителю важно знать, на каком уровне эстетической привлекательности находится каждый его ученик. Владея такой информацией, учитель с помощью специально подобранных или скорректированных им задач может целенаправленно формировать эстетический вкус школьника, управлять с помощью эстетических мотивов его учебной деятельностью.

Сказанное выше подтвердим следующим примером.

В числе текстовых задач особое место занимают задачи на смеси, растворы, сплавы, называемые еще и задачами на процентное содержание или концентрацию, наличие в которых простых и процентных отношений зачастую побуждает относить их к разряду чисто арифметических, а не к задачам на составление уравнений. В таких задачах эстетические мотивы скрыты в самом содержании и проявляют себя в полной мере в процессе решения. Но, к сожалению, такой тип задач вызывает даже у выпускников страх. Как вызвать живой интерес? Заменить на начальном этапе (5-7 класс) в условии задачи слова: сплавы, смеси, кислоты на привычные.

Задача 13. (КИМ, ЕГЭ)

Смешали 2 кг 15 %-ного водного раствора некоторого вещества с 8 кг 10 %-ного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Задача пугает. Совершенно другая реакция на задачу 5.

Задача 5.

Привезли в детский сад 2 кг творога 15% жирности и 8 кг 10% жирности. Их смешали. Найдите процентное содержание жира в полученной массе творога?

Эту задачу с огромным интересом и красиво решают пятиклассники.

1) Сколько кг жира содержится в 2кг творога 15% жирности?

2 : 100 · 15 = 0,3 (кг)

2) Сколько кг жира содержится в 8кг творога 10% жирности?

8 : 100 · 10 = 0,8 (кг)

3) Сколько кг жира содержится в полученной массе творога?

0,3 + 0,8 = 1,1 (кг)

4) Определите сколько процентов составляет 1,1кг жира в 10кг творога?

1,1 : 10 · 100 = 11%

Ответ: 11%.

Итак, решение красивой задачи способствует формированию эстетического вкуса школьников, воспитанию склонности к использованию аналогии, обобщения, наглядной выразительности математических объектов, всестороннему анализу изучаемых ситуаций, поиску различных способов решения задачи и выбору из них наиболее изящного.

Литература

1. Саранцев Г.И. Эстетическая мотивация в обучении математике. – Саранск, 2003.
2. Виленкин В.Я. Математика 5 класс: учебник для общеобразовательных организаций. – Москва, 2015.
3. Лысенко Ф.Ф., Кулабухова С.Ю. Математика. Подготовка к ЕГЭ. – 2013 – Ростов-на-Дону, 2012.
4. Чепракова Е.М., Липкина Т.А. Присутствие красоты // Математика в школе. – 2001 - №3 – с.73-75.
5. Атанасян А.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. Геометрия. 7-9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений. – Москва. 2013.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ALVIDREZ MARIANA, University of Texas at El Paso, USA; malvidrez2@miners.utep.edu

CASTEL FREDERIC, Université de Reims Champagne Ardenne, France

KOSHELEVA OLGA, PhD, associate professor, University of Texas at El Paso; olgak@utep.edu

KREINOVICH VLADIK, PhD, professor, University of Texas at El Paso; vladik@utep.edu

OSEGUEDA ESCOBAR MARTHA, student, University of Texas at El Paso; mcoseguedaescobar@miners.utep.edu

TCHOSHANOV MOURAT, University of Texas at El Paso, USA; mouratt@utep.edu

ZAPATA FRANCISCO, PhD, instructor, University of Texas at El Paso; fazg74@gmail.com

АБРАМОВА ОЛЕСЯ МИХАЙЛОВНА, кандидат педагогических наук, доцент кафедры физико-математического образования физико-математического факультета Арзамасского филиала Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, г. Арзамас; olesia144@mail.ru

АГАФОНЦЕВ ВАЛЕРИЙ ВАСИЛЬЕВИЧ, кандидат технических наук, Псковский государственный университет, г. Псков; fon-valery-ag@yandex.ru

АКИНДИНА АННА СЕРГЕЕВНА, аспирант 1 курса Института детства Российского государственного университета им. А.И. Герцена, г. Санкт-Петербург; учитель начальных классов ГБОУ школа № 207 с углубленным изучением английского языка, г. Санкт-Петербург; lime-anya@yandex.ru

АЛЕКСЕЕВА ЕЛЕНА ЕВГЕНЬЕВНА, старший преподаватель кафедры математических дисциплин ДПО ГБОУ ВО МО «Академия социального управления», г. Москва; МОУ СОШ № 9, г. Павловский Посад; alekseeva.ok@mail.ru

АНТОНОВА ЕЛЕНА ИВАНОВНА, кандидат педагогических наук, Институт развития образования, г. Владимир; antonova-e-i@mail.ru

АСЛАНОВ РАМИЗ МУТАЛЛИМ ОГЛЫ, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий отделом «Научно-технической информации» Института математики и механики Национальной Академии Наук Азербайджана, Азербайджан, г. Баку; r_aslanov@list.ru

БЕРЕБЕРДИНА СВЕТЛАНА ПЕТРОВНА, соискатель кафедры элементарной математики и методики обучения математике, Московский педагогический государственный университет, заместитель директора МАОУ СОШ №8 им. Ц.Л. Куникова города-курорта Геленджик; sbereberdina@yandex.ru

БАГОУТДИНОВА АЛЬФИЯ ГИЗЗЕТДИНОВНА, кандидат технических наук, доцент, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань; bagoutdinova@rambler.ru

БОГДАНОВ ПАВЕЛ СЕРГЕЕВИЧ, кандидат физико-математических наук, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара; poulsmb@rambler.ru

БОГДАНОВ СЕРГЕЙ НИКОЛАЕВИЧ, кандидат физико-математических наук, доцент, Самарский филиал ГАОУ ВО «Московский городской педагогический университет», г. Самара; bogdanovsan@rambler.ru

БОГДАНОВА ЕЛЕНА АНАТОЛЬЕВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара; bogdanovaea2014@gmail.com

БОЖЕНКОВА ЛЮДМИЛА ИВАНОВНА, доктор педагогических наук, доцент, Московский педагогический государственный университет, г. Москва; krasel1@yandex.ru

БОТАШЕВА ЗАМИРА ХУСЕЙЕВНА, старший преподаватель кафедры алгебры и геометрии Карачаево-черкесского государственного университета имени У.Д. Алиева, г. Карачаевск

БУКУШЕВА АЛИЯ ВЛАДИМИРОВНА, кандидат педагогических наук, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, г. Саратов; bukusheva@list.ru

БУРЫКИН ИЛЬЯ ГЕННАДИЕВИЧ, научный сотрудник, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г. Москва; ilia.burykin@sdo.msu.ru

БУШМЕЛЕВА НАТАЛЬЯ АЛЕКСАНДРОВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Вятский государственный университет, г. Киров; na_bushmeleva@vyatsu.ru

ВАЛИЕВА САГИДА МИНИХАНОВНА, учитель математики и физики первой квалификационной категории, МОУ «Утар-Атынская средняя общеобразовательная школа» Арского муниципального района РТ, Sag1975@mail.ru

ВАРАНКИНА ВЕРА ИВАНОВНА, кандидат физико-математических наук, доцент, Вятский государственный университет, г. Киров; veravarankina@gmail.com

ВАСИЛЬЕВА ЕЛЕНА АНАТОЛЬЕВНА, учитель математики, МБОУ «Лицей № 116 им. М.И. Махмутова», г. Казань; elenavasilieva116@yandex.ru

ВДОВИЧЕНКО АЛЕНА АЛЕКСАНДРОВНА, ассистент кафедры основ математики и информатики, Саратовский национальный исследовательский государственный университет, г. Саратов; vdovichenkoaa@yandex.ru

ВЕЧТОМОВ ЕВГЕНИЙ МИХАЙЛОВИЧ, доктор физико-математических наук, профессор, Вятский государственный университет, г. Киров; vecht@mail.ru

ВИНТИШ ТАТЬЯНА ЮРЬЕВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Челябинск

ВЛАСОВ ДМИТРИЙ АНАТОЛЬЕВИЧ, кандидат педагогических наук, доцент, Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, г. Москва; DAV495@gmail.com

ВЛАСОВА ИРИНА НИКОЛАЕВНА, кандидат педагогических наук, доцент кафедры теории и методики обучения математике Пермского государственного гуманитарно-педагогического университета, г. Пермь; vlasova@pspu.ru

ВЛАСОВА СВЕТЛАНА АЛЕСАНДРОВНА, кандидат педагогических наук, МБОУ «Гимназия №5», г. Рязань; svetlanaalexvl@yandex.ru

ВОЛОКОБИНСКИЙ МИХАИЛ ЮРЬЕВИЧ, доктор технических наук, Санкт-Петербургский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации, г. Санкт-Петербург; MYVolokobinskij@fa.ru

ВОРОЖЦОВА ВЕРА МИХАЙЛОВНА, преподаватель кафедры математики и информатики, Глазовский государственный педагогический институт имени В.Г. Короленко, г. Глазов; vorozhtsova.vera@gmail.com

ВОРОНЦОВА ВАЛЕРИЯ ЛЕОНИДОВНА, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, кафедра общей математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань; milen99@yandex.ru

ВЫБОРНОВА АЛЕНА ВЯЧЕСЛАВОВНА, учитель истории, МБОУ «Лицей №116 им. М.И. Махмутова», г. Казань; 4522000144@edu.tatar.ru

ГАВРИЛОВ ВЛАДИМИР КОНСТАНТИНОВИЧ, кандидат физико-математических наук, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева, г. Красноярск; gavrilov1009@mail.ru

ГАВРИЛОВА МАРГАРИТА АЛЕКСЕЕВНА, доктор педагогических наук, профессор, Пензенский государственный университет, г. Пенза; margogavr@yandex.ru

ГАВРИЛОВА ТАМАРА ЮРЬЕВНА, учитель МОУ Дергаевская СОШ №23, д. Дергаево; tomagavrilova@mail.ru

ГАЙНУТДИНОВА ТАТЬЯНА ЮРЬЕВНА, кандидат технических наук, доцент, Казанский федеральный университет, г. Казань; tgainut@mail.ru

ГАЛУШКИНА Д.В., Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова, г. Ульяновск

ГЕРБЕКОВ ХАМИД АБДУЛОВИЧ, кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой алгебры и геометрии Карачаево-черкесского государственного университета имени У.Д. Алиева, г. Карачаевск; hamit_gerbekov@mail.ru

ГИЛЬМУЛЛИН МАНСУР ФАЙЗРАХМАНОВИЧ, кандидат педагогических наук, доцент, Елабужский институт Казанского (Приволжского) федерального университета, г. Елабуга; Gilt_edged@mail.ru

ГЛАВАЦКИЙ СЕРГЕЙ ТИМОФЕЕВИЧ, кандидат физико-математических наук, доцент, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, г. Москва; serge@rector.msu.ru

ГРИНШПОН ЯКОВ САМУИЛОВИЧ, кандидат физико-математических наук, доцент, Томский государственный университет, г. Томск; grinshpon@mail.ru

ДЕНИСОВА МАРИЯ ИВАНОВНА, кандидат педагогических наук, профессор, Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина, г. Рязань; mivden@yandex.ru

ДЕНИСОВА МАРИНА ЮРЬЕВНА, кандидат физико-математических наук, доцент, Казанский федеральный университет, Казань; denisova_mar@mail.ru

ДМИТРИЕВА ЮЛИЯ АЛЕКСАНДРОВНА, старший преподаватель, Новосибирский государственный университет, Г. Новосибирск; yudmitrieva@gmail.com

ДРОБЫШЕВ ЮРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ, доктор педагогических наук, профессор, Калужский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации, г. Калуга; drobyshev.yury2011@yandex.ru

ДРОБЫШЕВА ИРИНА ВАСИЛЬЕВНА, доктор педагогических наук, профессор, Калужский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации, г. Калуга; drobysheva2010@yandex.ru

ДЯТЛОВ ВЛАДИМИР НИКОЛАЕВИЧ, кандидат физико-математических, доцент, Южный математический институт ВНЦ РАН, Владикавказ, Новосибирский государственный университет; vndyatlov@gmail.com

ЕВСЕЕВА АЛЕКСАНДРА АНДРЕЕВНА, учитель математики МБОУ «Лицей №1» Чистопольского муниципального района Республики Татарстан; aleksandra25_10@mail.ru

ЕВСЮКОВА ЕЛЕНА ВЛАДИМИРОВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Тюменский государственный университет, г. Тобольск; l-evsjukova@rambler.ru

ЕГУПОВА МАРИНА ВИКТОРОВНА, доктор педагогических наук, доцент, Московский педагогический государственный университет, г. Москва; mv.egupova@mpgu.edu

ЕНИКЕЕВА СВЕТЛАНА РАШИДОВНА, кандидат физико-математических наук, ФГБОУ ВПО «Казанский национальный исследовательский технологический университет», г. Казань; enikeeva.svetlana@mail.ru

ЕРМАКОВ ВЛАДИМИР ГРИГОРЬЕВИЧ, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Гомель, Беларусь; vgermakov@gmail.com

ЖУРАВЛЕВА МАРИЯ ИГОРЕВНА, магистрант, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань

ЗАБЕЛИНА СВЕТЛАНА БОРИСОВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Московский государственный областной университет, г. Москва; zabelina_sb@mail.ru

ЗАРИПОВА ЗУЛЬФИЯ ФИЛАРИТОВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Альметьевский государственный нефтяной институт, г. Альметьевск; zaripova1968@ yandex.ru

ЗЕЛИМОВА АЛЬБИНА РАШИДОВНА, студентка 5 курса, Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова, г. Ульяновск albinazelimva@mail.ru

ЗНАЕНКО НАТАЛЬЯ СЕРГЕЕВНА, доцент, Ульяновский институт гражданской авиации им. Гл. маршала авиации Б.П. Бугаева, г. Ульяновск; znaenns@mail.ru

ЗУБАРЕВА ИРИНА ИВАНОВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Московский городской педагогический университет, г. Москва; i_zubareva@mail.ru

ЗУБКОВА ЮЛИЯ АЛЕКСЕЕВНА, кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры общепрофессиональных дисциплин, Филиал военной академии материально-технического обеспечения им. генерала армии А.В. Хрулева, г. Пенза; yul.zubkova.86@mail.ru

ИВАНЮК МАРИЯ ЕВГЕНЬЕВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Самарский государственный социально-педагогический университет, г. Самара; ivanyuk.maria@yandex.ru

ИГНАТОВА ОЛЬГА ГРИГОРЬЕВНА, учитель МОУ Дергаевская СОШ №23, д. Дергаево

ИГНАТУШИНА ИНЕССА ВАСИЛЬЕВНА, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа и методики преподавания математики Оренбургский государственный педагогический университет, г. Оренбург; streleec@yandex.ru

ИГОШИН ВЛАДИМИР ИВАНОВИЧ, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, г. Саратов; igoshinvi@mail.ru

КАБИНА СВЕТЛАНА ВАСИЛЬЕВНА, преподаватель кафедры общепрофессиональных дисциплин, Филиал военной академии материально-технического обеспечения им. генерала армии А.В. Хрулева, г. Пенза; kabina210777@mail.ru

КАЛИНИН СЕРГЕЙ ИВАНОВИЧ, доктор педагогических наук, профессор, Вятский государственный университет, г. Киров; kalinin_gu@mail.ru

КАШИРСКАЯ ЮЛИЯ СЕРГЕЕВНА, старший преподаватель, Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова, г. Ульяновск; pavlova1505@mail.ru

КАШТАНОВА ЕЛЕНА КИРИЛЛОВНА, старший преподаватель, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань; mst-stat@mail.ru

КАЮМОВА АЛИСА АЙРАТОВНА, учитель математики, МБОУ «Школа №161», г. Казань; kayumova.alisa2011@yandex.ru

КИСЛЯКОВА МАРИЯ АНДРЕЕВНА, старший преподаватель кафедры математики и информационных технологий, Тихоокеанский государственный университет, г. Хабаровск; rabota2486@yandex.ru

КЛЕКОВКИН ГЕННАДИЙ АНАТОЛЬЕВИЧ, кандидат физико-математических наук, доцент, Самарский филиал ГАОУ ВО г. Москвы «Московский городской педагогический университет», г. Самара; klekovkun_ga@mail.ru

КНЯЗЕВА ЛАРИСА ЕВГЕНЬЕВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону; eknyazeva@sfedu.ru

КОНДАУРОВА ИНЕССА КОНСТАНТИНОВНА, кандидат педагогических наук, доцент, заведующая кафедрой математики и методики ее преподавания, Саратовский национальный исследовательский государственный университет, г. Саратов; i.k.kondaurova@yandex.ru

КОНДРАТЬЕВА ГАЛИНА ВЯЧЕСЛАВОВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Московский государственный областной университет, г. Москва; kondratevagv@mail.ru

КОНОПЛЕВА ИРИНА ВИКТОРОВНА, кандидат физико-математических наук, доцент, Ульяновский институт гражданской авиации им. Гл. маршала авиации Б.П. Бугаева, г. Ульяновск; irinakonopleva2014@yandex.ru

КОРНИЛОВ ВИКТОР СЕМЕНОВИЧ, доктор педагогических наук, профессор, Московский городской педагогический университет, г. Москва; vs_kornilov@mail.ru

КОЧАГИНА МАРИЯ НИКОЛАЕВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Московский педагогический государственный университет, г. Москва; KochaginaMN@yandex.ru

КОЧКАРЕВ БАГРАМ СИБГАТУЛЛОВИЧ, кандидат физико-математических наук, доцент, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань; bkochkar@gmail.com

КУЗИНА НАТАЛЬЯ ГЕОРГИЕВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова, г. Ульяновск

КУЗНЕЦОВА ТАТЬЯНА ИВАНОВНА, доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры естественных и гуманитарных наук, Институт русского языка и культуры Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, г. Москва; kuzti45@gmail.com

ЛАТЫШЕВА ЛЮБОВЬ ПАВЛОВНА, кандидат педагогических наук, Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Пермь; lublat@mail.ru

ЛЕМЕШКО ДМИТРИЙ ДМИТРИЕВИЧ, магистрант, Томский государственный университет, г. Томск; dmitriy-lemeshko@mail.ru

ЛЕОНТЬЕВА НАТАЛИЯ ВЛАДИМИРОВНА, кандидат педагогических наук, старший преподаватель кафедры математики и информатики, Глазовский государственный педагогический институт имени В.Г. Короленко, г. Глазов; leonteva-natalia-0812@yandex.ru

ЛИННИК ЕЛЕНА ПЕТРОВНА, кандидат физико-математических наук, доцент, ГПА (филиал) КФУ им. В.И. Вернадского, г. Ялта; aplinnik@mail.ru

ЛИННИК ИВАН ИВАНОВИЧ, кандидат технических наук, доцент, ГПА (филиал) КФУ им. В.И. Вернадского, г. Ялта; aplinnik@mail.ru

ЛИПАТНИКОВА ИРИНА ГЕННАДЬЕВНА, доктор педагогических наук, профессор, заведующая кафедрой теории и методики обучения математике, Институт математики, информатики и информационных технологий, Уральский государственный педагогический университет, г. Екатеринбург; lipatnikovaig@mail.ru

ЛОБАНОВА НАТАЛЬЯ ИВАНОВНА, муниципальное учреждение дополнительного образования «Центр внешкольной работы г. Зеленокумска Советского района», г. Зеленокумск; lobantchik@yandex.ru

ЛУКОНИНА СВЕТЛАНА ЮРЬЕВНА, учитель математики, МБОУ «Гимназия № 96», г. Казань; lukoninasveta@yandex.ru

ЛЬВОВА АЛЛА ГЕННАДЬЕВНА, учитель МБОУ «Воровская СОШ» Судогодского района Владимирской области, г. Владимир; Lvovaalla@yandex.ru

МАЙОРОВА НАТАЛИЯ ЛЬВОВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова, г. Ярославль; mnlv@yandex.ru

МАКЕЕВА ОЛЬГА ВИКТОРОВНА, кандидат физико-математических наук, Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н.Ульянова, г. Ульяновск; mov_ulspu@mail.ru

МАКЛЕЦОВ СЕРГЕЙ ВЛАДИСЛАВОВИЧ, кандидат педагогических наук, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань; smak-80@yandex.ru

МАЛОВА ИРИНА ЕВГЕНЬЕВНА, доктор педагогических наук, профессор, Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского, Южный математический институт ВНЦ РАН РСО-А, г. Брянск, г. Владикавказ; mira44@yandex.ru

МАРДАНОВ МИСИР ДЖУМАИЛ ОГЛЫ, член-корреспондент НАН Азербайджана, доктор физико-математических наук, профессор, директор Института математики и механики Национальной Академии Наук Азербайджана, Азербайджан, г. Баку; misir.mardanov@imm.az

МАРТЫНОВА ЕЛЕНА ВЛАДИМИРОВНА, Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Челябинск; martynova@cspu.ru

МАТЕРШЕВА ЛЮДМИЛА НИКОЛАЕВНА, магистрант 1 курса Саратовский национальный исследовательский государственный университет, г. Саратов; mfirst@author.email, matersheva@yandex.ru

МАХМУТОВА ДИАНА ИЛЬДАРОВНА, старший преподаватель, Казанский федеральный университет, г. Казань; d.i.makhmutova@gmail.com

МАЦУР ФРАНЧЕСКА КАЗИМИРОВНА, кандидат педагогических наук, Московская государственная академия водного транспорта – Филиал ФГБОУ ВО «ГУМРФ им. адмирала С.О. Макарова», г. Москва; macur@mail.ru

МЕДЖИДОВА АЙГЮН АБУЛЬФАТ ГЫЗЫ, учитель Бакинского Европейского Лицея и Азербайджанского государственного педагогического университета, кандидат педагогических наук, Заслуженный учитель Азербайджанской Республики, член-корреспондент Международной Академии Наук педагогического образования, Азербайджан, г. Баку; aygunmecidova@gmail.com

МЕЛЬНИКОВ РОМАН АНАТОЛЬЕВИЧ, кандидат педагогических наук, доцент, кафедра математики и методики её преподавания, Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, г. Елец; roman_elets_08@mail.ru

МЕЛЬНИКОВ ЮРИЙ БОРИСОВИЧ, кандидат физико-математических наук, доцент, Уральский государственный экономический университет, г. Екатеринбург; UriiMelnikov58@gmail.com

МИРОШНИЧЕНКО САЧИТА ЛАТЫПОВНА, кандидат педагогических наук, учитель математики, МБОУ «Средняя школа имени Д.И. Коротчаева», г. Новый Уренгой; lanolar@rambler.ru

НАЗИПОВ РИФНУР ГАФИЯТОВИЧ, учитель математики первой квалификационной категории, МБОУ «Вечерняя (сменная) школа» Кукморского муниципального района Республики Татарстан; nazipov.rifnur@mail.ru

НИКОЛАЕВ РОСЕН НИКОЛАЕВ, PhD, доцент, Экономический университет Варна, г. Варна; nikolaev_rosen@ue-varna.bg

НИКОЛАЕВА ТАТЬЯНА ТИХОНОВНА, учитель МБОУ «Гимназия №11», Г.о. Балашиха, Московская область; tatjanatiho@rambler.ru

ОВЧИННИКОВА МАРИНА ВИКТОРОВНА, кандидат педагогических наук, доцент, ГПА (филиал) КФУ им. В.И.Вернадского, г. Ялта; m_ovchinnikova@ukr.net

ОЖЕГОВА АЛЛА ВЯЧЕСЛАВОВНА, кандидат физико-математических наук, доцент, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань; ozhegovaalla@gmail.com

ОПОКИНА НАДЕЖДА АНАТОЛЬЕВНА, кандидат физико-математических наук, доцент, Казанский федеральный университет, г. Казань; opnadin@mail.ru

ОРЛОВ ВЛАДИМИР ВИКТОРОВИЧ, доктор педагогических наук, профессор, Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, г. Санкт-Петербург; vlvo@mail.ru

ПАВЛОВА МАРИЯ АЛЕКСАНДРОВНА, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, г. Архангельск; m.pavlova@narfu.ru

ПАВЛОВА ПОЛИНА АРКАДЬЕВНА, аспирант, Елабужский институт Казанского (Приволжского) федерального университета, г. Елабуга; polina8.82@mail.ru

ПАНИШЕВА ОЛЬГА ВИКТОРОВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Луганский национальный университет им. Т.Шевченко, г. Луганск; panisheva-ov@mail.ru

ПАНКРАТОВА ЛАРИСА ВАЛЕРЬЕВНА, кандидат педагогических наук, Вятский государственный университет, г. Киров; pankratovalarisa19@rambler.ru

ПАШКИН АРТЕМ ВЛАДИМИРОВИЧ, студент, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань

ПЕКАРСКАЯ ОЛЬГА АНАТОЛЬЕВНА, кандидат экономических наук, Санкт-Петербургский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации, г. Санкт-Петербург; olga.pekarskaya@mail.ru

ПЕРМИНОВ ЕВГЕНИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ, кандидат физико-математических наук, доцент, Российский государственный профессионально-педагогический университет, г. Екатеринбург; perminov_ea@mail.ru

ПОДХОДОВА НАТАЛЬЯ СЕМЕНОВНА, доктор педагогических наук, профессор, РГПУ им. А.И. Герцена, г. Санкт-Петербург; podhodova@gmail.com

ПОЛИЧКА АНАТОЛИЙ ЕГОРОВИЧ, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, Тихоокеанский государственный университет, г. Хабаровск; aepol@mail.ru

ПОЛЯКОВА ТАТЬЯНА СЕРГЕЕВНА, доктор педагогических наук, профессор Южного Федерального университета, г. Ростов-на-Дону; 46tsp@mail.ru

ПОПАДЬИНА ЕВГЕНИЯ АЛЕКСАНДРОВНА, учитель математики, ГБОУ Школа № 1416, г. Москва; popadina.evgeniya@bk.ru

ПОТЕХА ВИКТОРИЯ ВАЛЕРЬЕВНА, Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского, магистрант, г. Брянск; grishenkova.viktoria@yandex.ru

ПРОКОПЕНКО ГАЛИНА ИВАНОВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Челябинск

ПУЧКОВ НИКОЛАЙ ПЕТРОВИЧ, доктор педагогических наук, профессор, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов; sekr@nnn.tstu.ru

ПЧЕЛИНЦЕВА ТАТЬЯНА АЛЕКСАНДРОВНА, заслуженный учитель РФ, ГАОУ ДПО ВО ВИРО, г. Владимир; pchelintsewata@yandex.ru

ПЫРКОВ ВЯЧЕСЛАВ ЕВГЕНЬЕВИЧ, кандидат педагогических наук, доцент, Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону; pyrkovve@yandex.ru

РАЗОВА ЕЛЕНА ВЛАДИМИРОВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Вятский государственный университет, г. Киров; ev_razova@vyatsu.ru

РАЗУМОВА ОЛЬГА ВИКТОРОВНА, кандидат педагогических наук, доцент кафедры теории и технологий преподавания математики и информатики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань; miraolga@rambler.ru

РАМЕНСКИЙ М.Р., учитель МОУ Дергаевская СОШ №23, д. Дергаево

РИЗВАНОВ ЗИМФИР ЗУФАРОВИЧ, учитель математики и информатики, МБОУ «СОШ №143; студент 2 курса магистратуры, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань; rizvanov.zemfir@mail.ru

РОМАКИНА ЛЮДМИЛА НИКОЛАЕВНА, доцент, Саратовский государственный университет, г. Саратов; romakinaln@mail.ru

РУЗЛЯЕВА ЮЛИЯ СЕРГЕЕВНА, кандидат педагогических наук, преподаватель кафедры общепрофессиональных дисциплин, Филиал военной академии материально-технического обеспечения им. генерала армии А.В. Хрулева, г. Пенза; zgila@yandex.ru

РЫМАНОВА ТАТЬЯНА ЕВГЕНЬЕВНА, кандидат педагогических наук, доцент, кафедра математики и методики её преподавания, Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, г. Елец; barkarelez@mail.ru

САВВИНА ОЛЬГА АЛЕКСЕЕВНА, доктор педагогических наук, профессор, кафедра математики и методики её преподавания, Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, г. Елец; oas5@mail.ru

САДРЕЕВА ГУЛЬФИЯ РИФГАТОВНА, учитель математики, МБОУ «Гимназия №155», г. Казань; Gula2704@mail.ru

САДЫКОВА ЕЛЕНА РАШИДОВНА, кандидат педагогических наук, доцент кафедры теории и технологий преподавания математики и информатики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань; Sadikova_er@mail.ru

САЛАВАТОВА САМИРА САЛИХОВНА, кандидат педагогических наук, профессор, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак; sssalavatova@mail.ru

САНГАЛОВА МАРИНА ЕВГЕНЬЕВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Арзамасский филиал Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, г. Арзамас; smolyanka77@mail.ru

САФУАНОВ ИЛЬДАР СУФИЯНОВИЧ, доктор педагогических наук, профессор, Московский городской педагогический университет, г. Москва; ngpis@rambler.ru

САФУАНОВА АЛИНА МИХАЙЛОВНА, аспирантка кафедры высшей математики и методики преподавания математики Московского городского педагогического университета, г. Москва; alinas1990@mail.ru

СЕВОСТЬЯНОВА СВЕТЛАНА АНАТОЛЬЕВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Челябинск; sev-sa@mail.ru

СЕЛЮТИН ВЛАДИМИР ДМИТРИЕВИЧ, доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и математических методов в экономике Орловского государственного университета, г. Орёл; selutin_v_d@mail.ru

СЕМЕНЯЧЕНКО ЮЛИЯ АЛЕКСАНДРОВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Московский городской педагогический университет, г. Москва; semua@rambler.ru

СЕРГЕЕВА ИРИНА ЕВГЕНЬЕВНА, кандидат педагогических наук, Московский педагогический государственный университет, г. Москва; ie.sergeeva@mpgu.edu

СИМОНОВСКАЯ ГАЛИНА АЛЕКСАНДРОВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, г. Елец; simonovskaj_g@mail.ru

СКОРНЯКОВА АННА ЮРЬЕВНА, кандидат педагогических наук, Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Пермь; skornyakova_anna@mail.ru

СИДОРОВА НАТАЛЬЯ ВЛАДИМИРОВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н.Ульянова, г. Ульяновск

СИМАКОВ НИКИТА ЕВГЕНЬЕВИЧ, студент, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань

СИНЧУКОВ АЛЕКСАНДР ВАЛЕРЬЕВИЧ, кандидат педагогических наук, доцент, Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, г. Москва; AVSinchukov@gmail.com

СОКОЛОВА АННА НИКОЛАЕВНА, кандидат педагогических наук, Вятский государственный университет, г. Киров; an_sokolova@vyatsu.ru

СОЛОВЬЯНОВ ВАДИМ БОРИСОВИЧ, Уральский государственный экономический университет, г. Екатеринбург; vadsolov@mail.ru

СТАРЦЕВА НАДЕЖДА ВЯЧЕСЛАВОВНА, учитель математики, МБОУ «Гимназия №8- Центр образования», г. Казань; Krupskaya_nadin@mail.ru

СТОЛЯРОВА ИРИНА ВИКТОРОВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова, г. Ульяновск; stolyar-irina@mail.ru

СТРЕБКОВ ЕВГЕНИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ, кандидат физико-математических наук, доцент, Казанский федеральный университет, г. Казань; str9050258629@yandex.ru

СУХОВИЕНКО ЕЛЕНА АЛЬБЕРТОВНА, доктор педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой математики и методики обучения математике, Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Челябинск; suhovienko@mail.ru

ТАРАНОВА МАРИНА ВЛАДИМИРОВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Институт физико-математического и информационно-экономического образования, Новосибирский государственный педагогический университет, г. Новосибирск; marinataranowa@yandex.ru

ТАРАСОВА ОКСАНА ВИКТОРОВНА, доктор педагогических наук, доцент, Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, г. Орел; Tarasova_orel@mail.ru

ТЕСТОВ ВЛАДИМИР АФАНАСЬЕВИЧ, доктор педагогических наук, профессор кафедры математики и методики преподавания математики, Вологодский государственный университет, г. Вологда; vladafan@inbox.ru

ТИМЕРБАЕВА НАИЛЯ ВАКИФОВНА, кандидат педагогических наук, доцент кафедры теории и технологий преподавания математики и информатики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань; timnell@yandex.ru

ТИМОФЕЕВА ИРИНА ЛЕОНИДОВНА, доктор педагогических наук, профессор, Московский педагогический государственный университет, г. Москва; tln142@mail.ru

ТИМОФЕЕВА ЛАРИСА НИКОЛАЕВНА, кандидат педагогических наук, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, г. Санкт-Петербург; iltimofeeva@mail.ru

ТОКАРЕВА ЛЮДМИЛА ИВАНОВНА, доктор педагогических наук, Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого, г. Великий Новгород; rnv1952@mail.ru

ТОМИЛОВА АННА ЕВГЕНЬЕВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Северный (Арктический) университет имени М.В. Ломоносова, г. Архангельск; a.tomilova@narfu.ru

ТРОФИМЕЦ ЕЛЕНА НИКОЛАЕВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России, г. Санкт-Петербург; ezemifort@inbox.ru

УТКИН АЛЕКСЕЙ АЛЕКСЕЕВИЧ, кандидат физико-математических наук, доцент, Орский гуманитарно-технологический институт (филиал) Оренбургского государственного университета, г. Орск; UtkinAA@yandex.ru

УТКИНА ТАМАРА ИЛЬИНИЧНА, доктор педагогических наук, профессор, Орский гуманитарно-технологический институт (филиал) Оренбургского государственного университета, г. Орск; UtkinaTI@yandex.ru

ФАЗЛЕЕВА ЭЛЬМИРА ИЛДАРОВНА, кандидат педагогических наук, доцент кафедры теории и технологий преподавания математики и информатики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань; elmira.fazleeva@mail.ru

ФАЛИЛЕЕВА МАРИНА ВИКТОРОВНА, кандидат педагогических наук, доцент кафедры теории и технологий преподавания математики и информатики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань; mmwwff@yandex.ru

ФИЛИЧЕВА НЕЛЛИ ПЕТРОВНА, МБОУ «Школа №74 им. А.С. Соколова», г. Рязань; Filicheva6@yandex.ru

ФИРСТОВА НАТАЛЬЯ ИГОРЕВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Московский педагогический государственный университет, г. Москва; steva54@mail.ru

ФОЛИАДОВА ЕЛЕНА ВИКТОРОВНА, кандидат физико-математических наук, Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н.Ульянова, г. Ульяновск; ef1961@gmail.com

ХАБИБУЛЛИНА ГУЗЕЛЬ ЗАБИРОВНА, кандидат педагогических наук, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань; hgz1980@rambler.ru

ХАЗЫКОВА ТАМАРА САРАНГОВНА, кандидат педагогических наук, Калмыцкий государственный университет имени Б.Б. Городовикова, г. Элиста; tschazikova@yandex.ru

ХАЙРУЛЛИНА ЛИЛИЯ ЭМИТОВНА, кандидат физико-математических наук, доцент, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань; liliya-v1@yandex.ru

ХАМОВ ГЕННАДИЙ ГРИГОРЬЕВИЧ, доктор педагогических наук, профессор, Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, г. Санкт-Петербург; gghamov@yandex.ru

ХАРИСОВА ЗЕМФИРА РАШИДОВНА, студентка 4 курса, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань; 05406@bk.ru

ХАРЧЕНКО А.А., аспирант 3 курса, Саратовский государственный университет, г. Саратов; ainadil@mail.ru

ХАРЧЕНКО НАТАЛИЯ АЛЕКСЕЕВНА, учитель МБОУ «СОШ № 9», г. Саратов; ainagor@mail.ru

ХАСАНОВА АСИЯ ЮСУФОВНА, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра общей математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань; AsJHasanova@kpfu.ru

ХОДОТ ТАТЬЯНА ГЕОРГИЕВНА, доцент кафедры геометрии, Российский педагогический университет им. А.И. Герцена, г. Санкт-Петербург; tghodot@mail.ru

ХУСНЕТДИНОВА ДИНА МАНСУРОВНА, учитель математики и информатики, МБОУ «Лицей № 177», г. Казань; d.whosnet@yandex.ru

ЧЕКУЛАЕВА МАРИЯ ЕВГЕНЬЕВНА, к.п.н., доцент, Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова, г. Ульяновск; navsi69@mail.ru

ЧЕРЕМНЫХ ЕЛЕНА ЛЕОНИДОВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Пермь; cheremnyh.e@inbox.ru

ЧИСПИЯКОВ СЕРГЕЙ ВАЛЕНТИНОВИЧ, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Брянский государственный университет, г. Брянск; chispiyakoff@yandex.ru

ШАБАНОВА МАРИЯ ВАЛЕРЬЕВНА, доктор педагогических наук, профессор, Московский институт открытого образования, г. Москва; shabanovamv@mioo.ru

ШАБАРШИНА ГАЛИНА ВЛАДИМИРОВНА, кандидат физико-математических наук, доцент, Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова, г. Ярославль; shegeve@yandex.ru

ШАКИРОВА КАДРИЯ БАРИЕВНА, кандидат педагогических наук, доцент кафедры теории и технологий преподавания математики и информатики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань; shakirova_ka@mail.ru

ШАКИРОВА ЛИЛИАНА РАФИКОВНА, доктор педагогических наук, профессор, зав. кафедрой теории и технологий преподавания математики и информатики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань; lilianashakirova1209@gmail.com

ШАТРОВА ЮЛИЯ СТАНИСЛАВОВНА, кандидат педагогических наук, доцент, Самарский государственный социально-педагогический университет, г. Самара; shatrova.julia.s@gmail.com

ШИЛОВА ЛЮБОВЬ ИВАНОВНА, кандидат педагогических наук, доцент, ГПА (филиал) КФУ им. В.И.Вернадского, г. Ялта; kafmat.ieu@gmail.com

ШИРОКОВА ОЛЬГА АЛЕКСАНДРОВНА, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и математического моделирования, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань; shirokova2602@mail.ru

ШИРОКОВА ЕЛЕНА АЛЕКСАНДРОВНА, доктор физико-математических наук, доцент, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань; Elena.Shirokova@kpfu.ru

ШИРПУЖЕВ СЕРГЕЙ ВИКТОРОВИЧ, Уральский государственный экономический университет, г. Екатеринбург; schiger@mail.ru

ШКЕРИНА ЛЮДМИЛА ВАСИЛЬЕВНА, доктор педагогических наук, профессор, Красноярский государственный педагогический университет им. В.П. Астафьева, г. Красноярск; Shkerina@mail.ru

ЩЕРБАТЫХ СЕРГЕЙ ВИКТОРОВИЧ, доктор педагогических наук, профессор, кафедра математики и методики её преподавания, Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, г. Елец; shchersv@elsu.ru

ЩУКИНА ГУЛЬНАРА ВАИСОВНА, учитель математики, МБОУ «Школа №55», г. Казань; gulnara-11@mail.ru

ЯРЕМКО НАТАЛИЯ НИКОЛАЕВНА, доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры «Математическое образование» Пензенского государственного университета, г. Пенза; yaremki@yandex.ru

ЯСТРЕБОВ АЛЕКСАНДР ВАСИЛЬЕВИЧ, доктор педагогических наук, профессор, Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского, г. Ярославль; alexander.yastrebov47@gmail.com

Научное издание

Н.И. ЛОБАЧЕВСКИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ В РОССИИ

Материалы Международного форума по математическому образованию, посвященного 225-летию Н.И. Лобачевского

IFME – 2017

Казань, 18–22 октября 2017 г.

Том 2

Компьютерная верстка
И.А. Насыровой

Подписано в печать 14.09.2013.
Бумага офсетная. Печать ризографическая.
Формат 60х84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 36,4.
Уч.-изд. л. 43,2. Тираж 100 экз. Заказ 72/9

Отпечатано в типографии Издательства
Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28