Материалы международной конференции
по алгебре, анализу и геометрии,
посвященной юбилеям выдающихся профессоров Казанского университета,
математиков Петра Алексеевича (1895-1944)
и Александра Петровича (1926-1998) Широковых,
и молодежной школы-конференции по алгебре, анализу, геометрии

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО АЛГЕБРЕ, АНАЛИЗУ И ГЕОМЕТРИИ

(*26 июня – 2 июля 2016 г., Казань*)

Казанский (Приволжский) федеральный университет

2016

Казанский (Приволжский)
федеральный университет
Россия, Татарстан
420008, Казань
ул. Кремлевская 18

Kazan (Volga Region)
Federal University
Russia, Tatarstan
420008, Kazan
Kremlevskaya st. 18

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Академия наук Республики Татарстан
Российский фонд фундаментальных исследований

Издание осуществлено при финансовой поддержке
РФФИ (проекты № 16-01-20342 г и № 16-31-10218 мол_г) и КФУ.

УДК 510:512:514:517
ББК 22.1

Материалы международной конференции по алгебре, анализу и геометрии, посвященной юбилеям выдающихся профессоров Казанского университета, математиков Петра Алексеевича (1895-1944) и Александра Петровича (1926-1998) Широковых, и молодежной школы-конференции по алгебре, анализу, геометрии. – Казань: Казанский университет; изд-во Академии наук РТ, 2016. – 374 с.

ISBN 978-5-9690-0269-2

Сборник содержит тезисы докладов, представленных на международную конференцию по алгебре, анализу и геометрии, посвященной юбилеям выдающихся профессоров Казанского университета, математиков Петра Алексеевича (1895-1944) и Александра Петровича (1926-1998) Широковых, и молодежную школу-конференцию по алгебре, анализу, геометрии. (Казань, 24 июня – 6 июля 2016 года).

ISBN 978-5-9690-0269-2

УДК 510:512:514:517
ББК 22.1

АЛГЕБРА В КАЗАНСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

М.М. Арсланов, А.Н. Абызов

Работы по алгебре в Казанском университете ведут свое начало от Н.И. Лобачевского. Ряд оригинальных результатов Н.И. Лобачевского по алгебре был изложен в его замечательном учебнике «Алгебра или вычисления конечных» (1834). В нем представлен новый метод отделения корней (так называемый метод Лобачевского-Греффе), исследованы круговые многочлены, метод решения n линейных уравнений с n неизвестными, совпадающий, по существу, с методом определителей, который не был тогда еще завершен. В своей книге Н.И. Лобачевский подверг глубокому логическому анализу основные понятия алгебры. Как показывает следующая выдержка из предисловия к его учебнику «Алгебра» (1825), Н.И. Лобачевский предвосхитил основные идеи абстрактной алгебры. «Для науки надобно всегда желать, чтобы она стала на твердом основании, чтобы строгость и ясность сохранялась в самых ее началах, как они делаются первым его достоинством в продолжении… Лагранж в своей теории аналитических функций старается избежать употребления бесконечно малых; между тем он не усомнился ввести в свои исчисления воображаемый корень, который сам собою не существует, а только может быть понимаем в его свойствах: последнего уже и довольно…Положить первые и твердые основания вообще для всех родов вычислений употребительных в математике – главная цель алгебры».

Существенное влияние на научную активность казанских математиков с 80-х годов XIX века в области теории чисел оказал воспитанник Петербургского университета А.В. Васильев. В Казанском университете А.В. Васильев работал с 1874 по 1907 гг. Находясь в заграничных командировках (1879 и 1882 гг.), он слушал лекции Л. Кронекера и К. Вейрштрасса (Берлин), Ш. Эрмита (Париж) и Ф. Клейна (Лейпциг). Его магистерская диссертация «О функциях рациональных, аналогичных с функциями двоякопериодическими» (Казань, 1880) посвящена рассмотрению функций инвариантных относительно конечных дробно-линейных инвариантных подстановок, где он вплотную подошел к открытию автоморфных функций. В докторской диссертации «Теория отделения корней систем алгебраических уравнений» (1884) А.В. Васильев развивает и применяет метод характеристик Кронекера, причем он использует геометрию многомерных пространств. А.В. Васильев был организатором и душой Казанского физико-математического общества, основанного в 1880 г. В изданиях Казанского физико-математического общества публиковались наиболее интересные статьи отечественных и зарубежных математиков, оригинальные работы по математике. По теории чисел наиболее значительные результаты в тот период были получены П.С. Порецким, П.В. Преображенским и А.В. Васильевым. Особо стоит отметить большую заслугу А.В. Васильева в освещении жизни и деятельности Н.И. Лобачевского, популяризации его идей.

Казанская алгебраическая школа была основана выдающимся математиком, членом-корреспондентом АН СССР Н.Г. Чеботаревым, он же руководил основанной им в 1934 г. кафедрой алгебры вплоть до своей кончины в 1947 г.

На 30-е и 40-е годы приходится период расцвета алгебраических исследований в университете. В это время зарождалась Казанская алгебраическая школа, постепенно превратившая Казань в один из мировых алгебраических центров. Основную роль в формировании этой школы сыграл организованный Н.Г. Чеботаревым алгебраический семинар, участниками которого в те годы были, кроме Николая Григорьевича, его ученики И.Д. Адо, В.В. Морозов, Н.Н. Мейман, аспиранты Николая Григорьевича А.И. Гаврилов, В.Н. Цапырин, А.В. Дороднов. Именно на этом семинаре определились основные направления научно-исследовательской деятельности коллектива, часть из которых продолжает развиваться в Казанском университете и в настоящее время.

Прежде всего, крупные результаты во многих областях алгебры были получены самим Н.Г. Чеботаревым. В теории Галуа им была определена структура абсолютной группы Галуа полей классов и установлены ограничения, наложенные на простые делители числа классов. В теории групп Ли Н.Г. Чеботарев дал доказательство высказанного еще в 1894 г. Картаном предположения, что подгруппы простых групп максимального порядка регулярны, и нашел аналитический признак наличия меры у заданного представления группы Ли.

Целый ряд работ Н.Г. Чеботарева относится к проблеме сведения решения алгебраических уравнений высших степеней (не разрешимых в радикалах) к решению уравнений возможно более простого вида, известной под общим названием “проблема резольвент”.

В терминах суперпозиций проблема резольвент формулируется так: для произвольного натурального числа n найти такое наименьшее число k, что корень общего уравнения n-ой степени как функция от его коэффициентов представляется в виде суперпозиции алгебраических функций от k переменных. Проблема резольвент в такой формулировке связана с тринадцатой проблемой Гильберта из его знаменитой серии, состоящей из двадцати трех проблем математики, решение которых, по словам самого Гильберта, “может значительно стимулировать дальнейшее развитие науки”.

Н.Г. Чеботарев проблеме резольвент посвятил целую серию работ. За совокупность работ в этой области ему посмертно была присуждена Сталинская премия 1-ой степени (1948). Н.Г. Чеботарев при работе над проблемой резольвент столкнулся с вопросом “об одевании” конечных групп группами Ли. Эту задачу он предложил своему ученику И.Д. Адо, который блестяще справился с поставленной задачей, получив точное конечномерное представление конечномерных алгебр Ли над полем характеристики нуль (1935). Этот результат был настолько важен в доказательстве эквивалентности групп и алгебр Ли, что И.Д. Адо была присуждена степень доктора физ.-мат. наук при защите им кандидатской диссертации. В.В. Морозову Н.Г. Чеботарев предложил проблему классификации примитивных групп, поставленную еще Софусом Ли. И в 1938 г. В.В. Морозов добивается замечательных успехов, получив общие и полные результаты для пространств произвольной размерности. В том же году он защищает кандидатскую диссертацию в Московском государственном университете. Занимаясь классификацией примитивных групп, он естественно приходит к проблеме классификации всех однородных примитивных пространств. Эта проблема была сведена им к проблеме классификации всех максимальных подгрупп полупростых групп Ли. В.В. Морозов дал полную классификацию максимальных неполупростых подгрупп полупростых групп Ли и в 1943 г. защитил докторскую диссертацию. В дальнейшем, в 1951 г. Е.Б. Дынкин в своей докторской диссертации получил классификацию полупростых максимальных подгрупп полупростых групп Ли. Таким образом, усилиями В.В. Морозова и Е.Б. Дынкина была полностью решена поставленная еще в XIX веке С. Ли проблема классификации комплексных однородных примитивных многообразий. Основу метода В.В. Морозова составляет доказанная им замечательная теорема, утверждающая регулярность всякой максимальной неполупростой подалгебры полупростой алгебры Ли. Первоначальное доказательство этой теоремы в докторской диссертации было довольно громоздким. Позднее, в 1950 г., В.В. Морозов нашел изящное общее доказательство этой важной теоремы.

Ряд учеников Н.Г. Чеботарева изучали поставленную им проблему продолжаемости полиномов. Полином $f(x)$ называется M-продолжаемым, где M — некоторое множество комплексных чисел, если путем добавления к нему членов высших порядков можно получить полином, все корни которого будут принадлежать M. А.И. Гаврилов доказал, что всякий полином является M-продолжаемым, если M -– окружность ненулевого радиуса, центр которого находится в начале координат. Другой аспирант Николая Григорьевича Н.Н. Мейман исследовал случай, когда M является множеством вещественных чисел. В этом случае проблема продолжаемости полинома сводится к проверке выполнения бесконечного числа неравенств. Н.Н. Мейману удалось разработать алгоритм, с помощью которого за конечное число шагов удается определить, выполняются ли эти условия. За эти исследования Н.Н. Мейману также была присуждена степень доктора наук, минуя кандидатскую.

В 1934 г. в процессе работы над книгой «Основы теории Галуа» Н.Г. Чеботарев обратился к одной из классических задач древности – задаче перечисления всех круговых луночек, квадрируемых при помощи циркуля и линейки.

Знаменитой задачей древности, известной как задача о квадратуре круга, является задача о построении с помощью циркуля и линейки квадрата, равновеликого данному кругу. Попытки решения задачи о квадратуре круга, продолжавшиеся в течение тысячелетий, неизменно оканчивались неудачей. Если взять радиус круга за единицу, то сторона равновеликого этому кругу квадрата равна корню из числа Пи. Таким образом, задача сводится к построению с помощью циркуля и линейки отрезка, длина которого равна корню из числа Пи. Нетрудно доказать, что с помощью циркуля и линейки можно построить только такие отрезки, числовые значения длин которых могут быть получены из рациональных чисел с помощью операций извлечения квадратного корня, а также сложения и умножения. Также легко доказывается, что все такие числа являются алгебраическими, т. е. для каждого из них можно построить многочлен с целыми коэффициентами, корнями которых они являются. Однако, как установил в 1882 г. немецкий математик Ф. Линдеман, число Пи — трансцендентное число, т. е. не является корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, значит трансцендентен и корень из числа Пи.

Таким образом, задача квадратуры круга неразрешима. В отличие от этой задачи, задача о квадрируемых луночках имеет решения. Круговой луночкой называется замкнутая фигура, образованная дугами двух окружностей. Круговая луночка квадрируема, если с помощью циркуля и линейки можно построить равновеликий ей квадрат, то есть если ее площадь имеет значение, алгебраически выражаемое через входящие в их построение линейные элементы. Частным случаем круговых луночек являются луночки Гиппократа – найденные древнегреческим геометром Гиппократом Хиосским (V в. до н. э.) квадрируемые луночки. (С помощью этих луночек Гиппократ пытался справиться с задачей о квадратуре круга). Существуют три квадрируемые луночки Гиппократа. Одна из них строится следующим образом: берется четверть круга OAC и на хорде AC, соединяющей концы радиусов OA и OC, описывается как на диаметре внешняя по отношению к четверти круга полуокружность. Нетрудно проверить, что площадь луночки равна площади треугольника AOC. Таким образом, луночка квадрируема. Д. Бернулли указал условие, которому должны удовлетворять квадрируемые луночки, и привел уравнение, которому удовлетворяет еще одна (четвертая) квадрируемая луночка.

Задача перечисления всех квадрируемых луночек привлекала внимание многих крупнейших математиков разных времен. Существенное продвижение в решении этой проблемы было достигнуто самим Н.Г. Чеботаревым. Прежде всего, он свел задачу к случаю, когда отношение угловых мер α и β дуг, ограничивающих луночку, соизмеримо и равно m/n (т.е. для некоторого t, $\alpha = m\backslash t$, $\beta = n\backslash t$), где m, n взаимно простые натуральные числа, и составил алгебраическое относительно $\cos t$ уравнение, которому должны удовлетворять квадрируемые луночки, а это означает, что уравнение должно решаться при помощи извлечения квадратных корней. Последнее, в свою очередь, означает, что группа Галуа неприводимых множителей этого уравнения должна иметь порядок, равный степени двойки. Н.Г. Чеботарев подробно исследовал случай, когда числа m и n – нечетные взаимно простые натуральные числа. Его ученик А.В. Дороднов позднее (1948) разобрал случай, когда одно из этих чисел четное. Таким образом, задача перечисления всех квадрируемых луночек получила окончательное решение. В конечном итоге выяснилось, что существуют всего пять видов квадрируемых луночек.

Работы Н.Г. Чеботарева и его учеников получили широкое признание во всем мире. В 30-е годы Казань становится одним из мировых центров алгебраических исследований, возникает авторитетная Казанская алгебраическая школа, задающая тон мировым исследованиям по многим направлениям современной алгебры, а ее глава Н.Г. Чеботарев приглашается с обзорными докладами на крупнейшие математические форумы того времени: по теории алгебраических чисел -– на первый Всесоюзный математический съезд (Харьков, 1930); по теории Галуа – на Всемирный математический конгресс (Цюрих, 1932) и на второй Всесоюзный математический съезд (Ленинград, 1934).

Теория групп и алгебр Ли развивалась в работах учеников В.В. Морозова. Исследованиями по теории групп Ли занимались два ученика В.В. Морозова – Я.И. Заботин и Л.Д. Эскин. Я.И. Заботин описал импримитивные группы преобразований 4-х мерного комплексного пространства. После защиты кандидатской диссертации по этой тематике он перешел к изучению задач линейного и выпуклого программирования и их применению к различным экономическим вопросам. Л.Д. Эскин вначале занимался теорией представлений групп Ли. Им были построены операторы Лапласа на группе комплексных унитарных матриц и с их помощью исследовались матричные элементы неприводимых бесконечномерных унитарных представлений группы Лоренца. В цикле работ, выполненных в 60-е годы, Л.Д. Эскин построил фундаментальные решения уравнения теплопроводности на многообразиях комплексных полупростых групп Ли и симметрических римановых пространств. Полученные результаты Л.Д. Эскин применил к построению преобразований Вейерштрасса на симметрических римановых пространствах и получил новый метод вычисления меры Планшереля для этих пространств. В последние годы Л.Д. Эскин развивал методы построения асимптотических разложений в окрестности сингулярных точек для инвариантных решений ряда нелинейных задач математической физики. В 70-е годы задачами по теории групп Ли занимался ученик Л.Д. Эскина – Е.Л. Столов. При реализации представлений классических групп появляются новые специальные функции, обобщающие известные специальные функции. Эти функции возникают как матричные элементы соответствующих представлений. При этом получаются как известные соотношения между старыми специальными функциями, так и новые формулы. Е.Л. Столов изучал асимптотические свойства этих функций.

Среди работ по теории алгебр Ли в первую очередь следует отметить работы Г.Н. Мубаракзянова и Э.Н. Сафиуллиной, посвященные описанию нильпотентных и разрешимых алгебр Ли малых размерностей. В 50-е годы В.В. Морозов начинает привлекать своих учеников к исследованию алгебр Ли над полями положительной характеристики. Уже в 1952 г. в ДАН СССР выходит работа А.В. Сульдина, в которой он доказывает существование точного конечномерного представления конечномерной алгебры Ли над полем положительной характеристики, т. е. переносит результат И.Д. Адо на случай модулярных алгебр Ли (так принято обычно называть алгебры Ли над полем положительной характеристики). Затем изучением алгебр Ли над полями положительной характеристики занимался А.Х. Долотказин. Обобщая результаты И. Капланского и Р. Блока, он описал строение модулярных алгебр Ли ранга 1. В 70-е годы теорией модулярных алгебр Ли начал заниматься еще один ученик В.В. Морозова – Ю.Б. Ермолаев. Его первые работы были посвящены изучению центра универсальной обертывающей алгебры для алгебры Витта и алгебры Цассенхауза. Строение центра универсальной обертывающей алгебры существенным образом определяет вид неприводимых модулей над этой алгеброй Ли. Ю.Б. Ермолаев нашел образующие и определяющие соотношения между этими образующими для центра универсальной обертывающей алгебры алгебр Витта и Цассенхауза. В дальнейшем Ю.Б. Ермолаев исследовал проблему классификации простых конечномерных алгебр Ли над полем положительной характеристики. Кроме Ю.Б. Ермолаева задачами классификации занимались М.Ю. Целоусов (ученик В.В. Морозова) и Г.О. Эльстинг (ученик Л.Д. Эскина). М.Ю. Целоусов описал алгебры дифференцирований всех алгебр Ли картановского типа. Г.О. Эльстинг занимался переносом некоторых фактов, определенных для градуированных алгебр Ли на алгебры Ли с фильтрацией.

В завершающей стадии реализации проекта по классификации простых модулярных алгебр Ли принял участие выпускник кафедры алгебры, ученик чл.-кор. АНСССР А.И. Кострикина– С.М. Скрябин, который получил глубокие результаты по исследованию алгебр Ли картановского типа и выполнил работу по классификации простых алгебр Ли положительной характеристики и представлений алгебр Ли. Эти результаты легли в основу его докторской диссертации, защищенной в 1999 г. в МГУ.

Наряду с вопросами классификации простых модулярных алгебр Ли рассматривалась задача описания представлений этих алгебр. Этой проблематикой занимался ученик Ю.Б. Ермолаева – Н.А. Корешков. Им получено описание неприводимых представлений p-алгебр Ли картановского типа в терминах индуцированных. Для изучения некоторых вопросов, связанных с неприводимыми модулями, например, для вычисления максимальной размерности неприводимых представлений, необходимо рассмотреть структуру центра универсальной обертывающей алгебры соответствующей алгебры Ли. Н.А. Корешков нашел некоторые серии элементов центра, а для гамильтоновой алгебры ранга один описал множество всех порождающих центра ее универсальной обертывающей алгебры.

Полиадическими числами занимался ученик В.В. Морозова – Е.В. Новоселов. Полиадические числа впервые появились в работе у немецкого математика Ханса Прюфера, опубликованной в 1925 г. Конструкции полиадических чисел предлагали также Герн Гензель, Дж. Фон Нейман. Кольцо полиадических чисел является прямым произведением колец целых p-адических чисел по всем простым числам. Е.В. Новоселов определял кольцо полиадических чисел эквивалентным способом: множество целых чисел можно рассматривать как топологическое кольцо относительно метризуемой топологии, полная систем окрестностей у которой имеет вид $n + mZ$, тогда кольцо полиадических чисел определяется как пополнение этого топологического кольца. Им была изучена арифметика колец полиадических чисел и построена теория меры и интеграла на таких кольцах. Разработанную теорию Е.В. Новоселов применяет в различных вопросах теории чисел, в частности, им были изучены проблемы, связанные с распределением значений арифметических функций. Отметим также, что результаты, полученные Е.В. Новоселовым, подробно изложены в известной книге А.Г. Постникова «Введение в аналитическую теорию чисел» (Москва, 1971). В настоящее время арифметические свойства полиадических чисел изучаются В.Г. Чирским и его учениками. Также кольцо полиадических чисел под названием кольца целых универсальных чисел находит глубокие приложения в теории абелевых групп (П.А. Крылов, А.А. Фомин).

По инициативе В.В. Морозова его ученик И.И. Сахаев занялся проблематикой, относящейся к теории колец и модулей. В 60-е годы И.И. Сахаев изучал кольца, над которыми каждый правый конечнопорожденный плоский модуль является проективным. Такие кольца в настоящее время называются правыми S-кольцами. В 1960 г. Басс получил характеризацию совершенных справа колец, т.е. колец над которыми проективны все правые плоские модули. Проблемой характеризации S-колец занимались многие известные специалисты по теории колец и модулей, например, С. Эндо, В. Васкенселос, С. Йондруп. Изучая S-кольца, И.И. Сахаев разработал глубокую технику работы с регулярными в кольцах последовательностями. Используя эту технику, ему удалось получить полное описание правых S-колец. Эти результаты легли в основу его кандидатской диссертации, защищенной в 1969 г. в МГУ.

В 1974 г. Лазаром была выдвинута гипотеза о конечной порожденности каждого проективного модуля, у которого фактормодуль по радикалу Джекобсона конечнопорожден. Для коммутативных колец эта гипотеза была доказана самим Лазаром. Справедливость этой гипотезы для PI-колец была установлена С. Йондрупом.

И.И. Сахаевым были получены необходимые и достаточные условия, при которых гипотеза Лазара верна. В 1984 г. была опубликована совместная работа В.Н. Герасимова и И.И. Сахаева, в которой был построен пример полулокального кольца, для которого гипотеза Лазара не выполняется. Эти и другие его результаты легли в основу докторской диссертации И.И. Сахаева, защищенной в 1994 г. в Санкт-Петербургском университете.

Очередное существенное повышение научной активности в области алгебры и ее приложений приходится на 90-е годы. Начиная с 90-х годов научно-исследовательская работа на кафедре (новое название кафедры – кафедра алгебры и математической логики) проводится по нескольким направлениям. Это – традиционные для кафедры направления по алгебрам Ли и их применениям, по алгебрам Хопфа, теории операд, по теории колец и модулей, теории полуколец и полумодулей, а также по теории вычислимости и вычислимым алгебрам.

Алгебры Хопфа, их действия и кодействия на ассоциативных алгебрах представляют значительный интерес не только как объекты с весьма богатой алгебраической структурой, но и в связи с возможными приложениями в математической физике. С.М. Скрябиным установлен ряд важных теоретико-кольцевых свойств произвольной артиновой ассоциативной алгебры, вытекающих исключительно из отсутствия ненулевых нильпотентных идеалов этой алгебры, устойчивых относительно действия некоторой алгебры Хопфа. Были получены результаты о проективности и плоскостности алгебры Хопфа как модуля над подалгебрами Хопфа и коидеальными подалгебрами, а также более общие результаты о проективности эквивариантных и коэквивариантных модулей. Разработана теория, обобщающая категорные эквивалентности, связанные с категориями квазикогерентных пучков на однородном пространстве, в духе некоммутативной алгебраической геометрии. В совместной работе с М.С. Еряшкиным доказано существование наибольшей подалгебры Хопфа в любой слабо конечной биалгебре.

Лиевы пучки были введены в работах И.Л. Кантора и Д.Б. Персица в 1989 г. Конструкция лиевых пучков связана с нахождением первых интегралов некоторых гамильтоновых систем. Н.А. Корешковым было показано, что для лиевых пучков имеет место аналог теоремы Ли. Также им был найден критерий нильпотентности для лиевых пучков, который является аналогом теоремы Энгеля. С использованием этого критерия удалось доказать существование Картановской подалгебры в любом лиевом пучке, которая, как и в алгебрах Ли, определяется как нильпотентная подалгебра, совпадающая со своим нормализатором. Оказывается, необходимым свойством обладает нулькомпонента регулярной пары. В настоящее время Н.А. Корешковым проводятся исследования, связанные с классификацией простых лиевых пучков. Были получены результаты при ограничениях на размерность лиевых пучков или размерность их нулькомпоненты.

Учениками И.И. Сахаева в настоящее время проводятся исследования по теории операд и теории колец и модулей. Была решена проблема, поставленная И.И. Сахаевым, об описании колец, над которыми каждый правый модуль является слабо регулярным. Аспирантом Д.Т. Тапкиным для ряда широких классов колец формальных матриц была исследована проблема изоморфизма. Исследованиям по теории операд посвящены работы С.Н. Тронина. Его кандидатская диссертация была посвящена проективным алгебрам, т.е. ретрактам свободных алгебр многообразий линейных алгебр. В дальнейшем были работы по категориям частных, эквивалентности Мориты, алгебраической теории информации, и с 2000 г. цикл работ по теории операд, который привел в 2011 г. к защите докторской диссертации. Особенностью подхода С.Н. Тронина к теории операд (и более общим образом к теории мультикатегорий) является то, что рассматриваются операды не только над симметрическими группами, но и над гораздо более общими объектами – вербальными категориями. Благодаря этому класс обычных (симметрических и несимметрических) операд существенно расширяется, и в него попадают, например, все абстрактные клоны. Таким образом, вся теория многообразий универсальных алгебр может рассматриваться как раздел теории операд, и соотношение между традиционным подходом и подходом операдным напоминает соотношение между комбинаторной теорией групп и общей теорией групп. Помимо этого, С.Н. Тронин построил общую теорию всех возможных супералгебр (мультиоператорных). При этом также использовалась теория операд. В последнее время С.Н. Тронин обратился к алгебраической криптографии и совместно со своими аспирантками К.А. Петуховой и А.Р. Гайнуллиной получил ряд новых результатов. Найдены далеко идущие алгебраические обобщения классической криптосистем RSA и некоторых криптосистем, основанных на трудности проблемы о дискретном логарифме. В последнем случае были использованы операдные методы.

Полукольца и полумодули являются одним из наиболее естественных и при этом весьма широких обобщений колец и модулей, что обуславливает интерес к изучению вопросов о том, в какой мере те или иные классические результаты теории колец и модулей могут быть перенесены на случай полуколец и полумодулей. В частности, развивается так называемая «гомологическая» классификация полуколец, направленная на изучение и описание различных классов полуколец с заданными свойствами полумодулей над ними, – эта область исследований отражена в ряде работ зарубежных математиков, таких как Y. Katsov, X. Wang, A. Patchkoria, O. Sokratova, J.Y. Abuhlail, T.G. Nam и др. С 2006 г. в этом же направлении работает сотрудник кафедры алгебры и математической логики КФУ доцент С.Н. Ильин, опубликовавший в центральных российских и зарубежных журналах по этой тематике порядка 10 статей, в том числе совместно с некоторыми из перечисленных выше математиков.

Ю.А. Альпин и С.Н. Ильин провели исследования по линейной алгебре и теории матриц. Ими доказано существование рациональных процедур для ряда важных задач линейной алгебры, найдены новые области локализации собственных значений матриц и корней полиномов, установлен критерий унитарной эквивалентности матричных семейств. В ходе исследования матричных полуколец полностью описаны обратимые матрицы над положительно упорядоченными полукольцами, и найден критерий регулярности полного матричного полукольца. Получены точные оценки числовых характеристик знаковых портретов вещественных матриц, дана формула для наименьшего из рангов бесконечных продолжений теплицевой матрицы.

Научная деятельность коллектива под руководством М.М. Арсланова связана с исследованиями в области теории вычислимости, науки, развивающейся на стыке алгебры и математической логики. В своей докторской диссертации М.М. Арсланов исследовал тьюринговые степени, содержащие функции без т.н. “неподвижных точек”, с их помощью сформулировав критерии полноты множеств в арифметической иерархии. Эти его работы положили начало целому направлению исследований в этой области с участием многих математиков, работающих в теории вычислимости. Теперь эти критерии хорошо известны в литературе как критерии полноты Арсланова. Ему также принадлежат первые результаты в разработке структурной теории тьюринговых степеней неразрешимости, принадлежащих разностной иерархии множеств, хорошо известной как иерархия Ершова, в частности доказательство элементарной неэквивалентности полурешеток степеней перечислимых множеств и степеней, содержащих первого за этим уровнем уровня иерахии. Впоследствии им совместно со своим учеником И.Ш. Калимуллиным и профессором С. Лемппом (США) был установлен такой результат и для следующей пары уровней иерархии, что решает проблему, долгое время остававшей открытой. В настоящее время И.Ш. Калимуллин исследует алгоритмические свойства алгебраических структур, а также связанных с ними алгоритмических сводимостей. Среди его основных результатов решение проблемы элементарной эквивалентности элементарных полурешеток n-в.п. степеней по перечислимости при различных n, доказательство определимости операции скачка в степенях по перечислимости, классификация различных сводимостей массовых проблем представимости алгебраических структур (равномерные и неравномерны варианты, всюду определенные и частичные массовые проблемы). Совместно со своим учеником М.Х. Файзрахмановым им построена иерархия спектров семейств на различных уровнях комулятивной иерархии фон Неймана, ими также найдены алгебраические структуры, спектры которых состоят из дополнений классов степеней, низких на фиксированном предельном уровне гиперарифметической иерархии.

М.Х. Файзрахманов в своей кандидатской диссертации исследовал уровни иерархии Ершова, содержащие тьюринговые скачки множеств. Ему удалось дать полное описание уровней иерархии, содержащие тьюринговые скачки, не принадлежащие меньшим уровням. Он также изучает так называемые обобщенно вычислимые нумерации -– нумерации семейств, вычислимых с помощью оракула. В этом направлении им были получены критерии существования универсальных обобщенно вычислимых нумераций конечных семейств.

В 2000-х годах на кафедре алгебры и математической логике начинает активно развиваться направление вычислимых линейных порядков. Первые результаты этого направления были получены в кандидатской диссертации А.Н. Фролова, еще одного ученика М.М. Арсланова. В своих первых работах А.Н. Фролов разрабатывал технику построения вычислимых представлений для линейных порядков, в алгоритмическом смысле близких к вычислимым и называемых низкими. Им (в некоторых случаях в совместных работах) был получен целый ряд результатов, позволяющих получить описание самого широкого известного на данный момент класса низких линейных порядков, имеющих вычислимые представления (этот вопрос был поставлен Р. Доуни в 1998 году).

А.Н. Фроловым также изучается вопрос описания спектров представлений линейных порядков. Первые результаты в этом направлении им были получены еще кандидатской диссертации. Впоследствии им был получен ряд примеров ограниченных спектров линейных порядков, построены примеры спектров линейных порядков, содержащих в точности все n-высокие степени, а также все степени, не являющиеся n-низкими для $n > 1$. Все эти результаты легли в основу его докторской диссертации, защищенной в 2014 году.

Ученик Арсланова и Фролова М.В. Зубков исследовал связь между вычислимыми линейными порядками, предельно монотонными функциями и эта-представлением. В кандидатской диссертации он дал описание сильно эта-представимых тьюринговых степеней, в терминах псевдовозрастающих на множестве рациональных числе предельно монотонных функций. Им также изучались уровни разностной иерархии $\Sigma-0-2$-множеств, содержащие сильно эта-представимые множества.

В 2015 году под руководством А.Н. Фролова защитил кандидатскую диссертацию Р.И. Бикмухаметов. В ней он доказал алгоритмическую независимость ряда отношений на вычислимых линейных порядках. В частности, им были рассмотрены такие естественные отношения, как отношение соседства, блока, предельности слева и справа, плотности. Также эти отношения рассматривались на начальных сегментах линейных порядках. Одним из основных результатов диссертационной работы Р.И. Бикмухаметова является доказательство того, что $\Sigma-0-2$-начальные сегменты вычислимых линейных порядков исчерпывают все $\Sigma-0-2$-степени и все вычислимые порядки без наибольшего элемента.

Н.Н. Корнеева изучает сложности бесконечных последовательностей над конечным алфавитом относительно различных типов автоматной сводимости, таких как конечно-автоматная и асинхронно автоматная сводимости, и возникающие при этом степени неразрешимости. В кандидатской диссертации она исследовала структурные свойства множества степеней асинхронно автоматных преобразований. В частности, было установлено существование континуума атомов, вложимость любого конечного линейно-упорядоченного множества как начального сегмента. Также был получен отрицательный ответ на вопрос дополняемости вверх и положительный ответ на вопрос дополняемости вниз как в множестве степеней асинхронно автоматных преобразований, так и в множестве степеней конечно-автоматных преобразований. В настоящее время Н.Н. Корнеева изучает подструктуры указанных степенных структур. В частности, структурные свойства степеней конечно-автоматных и асинхронно автоматных преобразований последовательностей с разрешимой монадической теорией и последовательностей со свойством префиксной разрешимости.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В КАЗАНСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Ф. Г. Авхадиев, С. Р. Насыров

Научные исследования в области теории функций и математического анализа в Казанском университете начались с его основания в 1804 г., однако серьезная математическая школа сформировалась с образованием в 1934 г. кафедры математического анализа и связана, прежде всего, с личностью первого заведующего этой кафедрой профессора Бориса Михайловича Гагаева (1897-1975), возглавлявшего ее в течение сорока лет. Всемирную известность принесло ему решение важной проблемы, поставленной Н.Н. Лузиным: Б.М. Гагаев доказал, что тригонометрическая система функций на отрезке – единственная система ортогональных функций, дифференцирование и интегрирование которой приводит опять (с точностью до постоянных множителей) к той же системе функций.

Гагаев дал путёвку в большую науку огромному количеству своих учеников, многие из них возглавили авторитетные научные школы в России и ближнем зарубежье. Среди учеников, активно работавших в Казани, можно отметить Ф.Д. Гахова, впоследствии действительного члена академика АН Белорусской ССР, профессоров Б.Г. Габдулхаев (Казань), А.Д. Ляшко (Казань), среди иногородних – академика РАН В.Н. Монахова (Новосибирск), профессоров Я.В. Быкова (Фрунзе), Ю.Г. Борисовича (Воронеж), К.С. Сибирского (Кишинёв).

Исследования по математическому анализу в Казанском университете проводились также на воссозданной в 1948 г. кафедре дифференциальных уравнений (в становление которой важную роль сыграл Ф.Д. Гахов), отделившейся от кафедры математического анализа кафедре теории функций и приближений, основанной членом-корреспондентом АН Республики Татарстан Б.Г. Габдулхаевым, и в НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева (зав. отделом математического анализа – Ф.Г. Авхадиев). Основные направления – краевые задачи для аналитических функций и их обобщений, геометрическая теория функций комплексного переменного, интегральные и интегродифференциальные уравнения, интегральные и изопериметрические неравенства, функциональный анализ.

Опишем кратко основные научные достижения в этих областях. Федор Дмитриевич Гахов известен тем, что он впервые дал полное решение классической задачи Римана для аналитических функций. Им и его многочисленными учениками исследована разрешимость различных краевых задач, в том числе, на разомкнутых контурах, в многосвязных областях, матричных краевых задач, а также сингулярных интегральных уравнений с различными ядрами. После отъезда из Казани Ф.Д. Гахова кафедру дифференциальных уравнений возглавил С.Н. Андрианов, а затем – одна из лучших учеников Федора Дмитриевича – Л.И. Чибрикова. Ее основные достижения связаны с исследованием краевых задач для автоморфных функций, на римановых поверхностях, на счетном множестве кривых, а также сингулярных интегральных уравнений с автоморфными и квазиавтоморфными ядрами, с гипергеометрическими ядрами, с ядрами, имеющими одну или две подвижных особенности логарифмического или степенного типа и пр. Среди ее учеников – десятки кандидатов наук, многие из которых защитили докторские диссертации. Эти ученики составляют основу кафедры дифференциальных уравнений и в настоящее время.

В.И. Жегалов исследовал различные краевые задачи для уравнений смешанного типа. И.А. Бикчантаев изучал разрешимость краевых задач на произвольных некомпактных римановых поверхностях. Ю.В. Обносов решил ряд практически важных краевых задач теории гетерогенных сред. Также сотрудниками кафедры изучается краевая задача Римана для счётного числа контуров и её приложения к задачам теории упругости (И.Г. Салехова); задача факторизации матриц-функций в связи с решением матричной краевой задачи Римана (С.Н. Киясов).

В 1962 г. в Казанском университете был создан научный семинар по геометрической теории функций комплексного переменного (руководитель – проф. Л.А. Аксентьев). Он стал творческим объединением математиков из различных вузов Казани. Семинар сначала действовал при кафедре дифференциальных уравнений, а с 1978 года по настоящее время работает при кафедре математического анализа. Участниками семинара защищено более тридцати кандидатских диссертаций, большинство – под руководством Л.А. Аксентьева, и восемь докторских диссертаций. Семинар по ГТФКП способствовал созданию научного коллектива, который занимается исследованиями в области однолистных функций, краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных и решением экстремальных проблем методами геометрической теории функций комплексного переменного. С начала 90-х годов в Казани регулярно, раз в два года, проводятся летние всероссийские школы-конференции по теории функций, в организации которых принимают активное участие члены кафедры математического анализа. Опишем основные достижения коллектива, начиная с середины 80-х годов.

Казань является ведущим центром в России по исследованиям в области достаточных условий однолистности и p-листности аналитических функций. Их разработке посвящены исследования Ф.Г. Авхадиева, Л.А. Аксентьева, И.Р. Каюмова, И.Р. Нежметдинова, С.Р. Насырова, П.Л. Шабалина, Е.А. Широковой. Однолистность имеет важные применения в краевых задачах с неизвестной (свободной) границей, так называемых обратных краевых задачах. Одной из основных обратных краевых задач для аналитических функций является внешняя задача по параметру s в постановке Ф.Д. Гахова, который нашел уравнение для определения полюса искомой функции и доказал его разрешимость. По предложению Л.А. Аксентьева это уравнение стало называться уравнением Гахова. Различным аспектам изучения разрешимости обратных краевых задач и уравнения Гахова для различных классов функций, в односвязных и многосвязных областях, связи его с конформным радиусом плоских областей посвящены работы Ф.Г. Авхадиева, Л.А. Аксентьева, А.Н. Ахметовой, А.М. Елизарова, М.И. Киндера, А.В. Казанцева, А.В. Киселева, С.Р. Насырова, Ю.Е. Хохлова, Е.А. Широковой и др. Смешанные обратные краевые задачи, в которых отыскивается область с частично известной границей, по различным параметрам для аналитических функций и их обобщений на плоскости и на римановых поверхностях рассматривались А.М. Елизаровым, В.Н. Монаховым, С.Р. Насыровым.

На кафедре математического анализа были получены важные результаты по исследованию (прямых) краевых задач для аналитических функций, а также их применению в теории функций и прикладных вопросах. Так, Б.А. Кац впервые построил аппарат решения краевых задач теории аналитических функций для областей с неспрямляемыми и фрактальными границами и описал влияние фрактальных размерностей границы на разрешимость краевой задачи Римана. Им получены условия существования интеграла Коши по неспрямляемым и фрактальным кривым и описаны граничные свойства такого интеграла. Кроме того, Б.А. Кац исследовал преобразования Коши распределений с носителями на неспрямляемых кривых, что позволило получить решения этой краевой задачи в замкнутом виде. С. Р. Миронова построила решения краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши для счетного множества кривых и описала влияние фрактальных размерностей этого множества на разрешимость указанных выше краевых задач и уравнений. Ф.Н. Гарифьянов исследовал приложения теории краевых задач к различным проблемам из смежных областей комплексного анализа, таких как моменты целых функций экспоненциального типа, представляющие системы мероморфных функций, разностные уравнения и пр.

Ф.Г. Авхадиевым и С.Р. Насыровым получены некоторые необходимые и достаточные условия разрешимости задачи о построения римановой поверхности над сферой по проекции края. Эта проблема, носящая топологический характер, ставилась в работах Пикара, Левнера и Хопфа. С.Р. Насыровым введено и изучено пространство римановых поверхностей, разветвленно накрывающих заданную поверхность, на нем введена сходимость к ядру по Каратеодори, топология и метрика. С использованием емкостей Робена он решил обобщенную задачу М.А. Лаврентьева о нахождении дужки максимальной подъемной силы при заданной длине и ограничении на ее кривизну.

Исследования в области функционального анализа в Казанском университете начали проводиться на базе научного семинара «Алгебры операторов и их приложения» (научный руководитель – А.Н. Шерстнев, зав. кафедрой математического анализа с 1973 по 1998 гг.), возникшего в недрах НИИММ им. Н.Г. Чеботарева в конце 60-х гг., а с 1974 г. переместившегося на кафедру математического анализа. Отметим некоторые основные направления исследований участников семинара.

Некоммутативная теория меры и интеграла. В связи с прогрессом в теории алгебр фон Неймана, расширением сферы ее приложений актуальной стала проблема распространения некоммутативной теории интегрирования И. Сигала на нормальные веса, являющиеся нецентральными аналогами интегралов по неограниченным мерам, заданных на классе ограниченных функций. Решение указанной проблемы было получено проф. А.Н. Шерстневым и его учеником Н. В. Труновым. О.Е. Тихоновым была построены аналоги пространств L_p, ассоциированных с весом, удовлетворяющим определенным условиям. А.М. Бикчентаев предложил общий метод построения некоммутативных F-нормированных идеальных пространств (в частности, пространств Орлича), ассоциированных с полуаддитивной мерой на проекторах алгебры фон Неймана. Н.В. Труновым и А.Н. Шерстневым развита теория условного ожидания в пространстве L_1 интегрируемых билинейных форм и установлена связь этого понятия с традиционным понятием условного ожидания в алгебрах фон Неймана. О.Е. Тихоновым основные результаты теории интегрирования относительно следа и следовых неравенств на алгебрах фон Неймана перенесены на случай пространств в спектральной двойственности Å. Альфсена и Ф. Шульца. Г.Ш. Скворцовой и О.Е. Тихоновым получен некоммутативный аналог теоремы Бухвалова-Лозановского. М.Р. Тимиршиным построены новые представления алгебр фон Неймана, ассоциированные с графиками замкнутых операторов. А.М. Бикчентаев получил представления линейных ограниченных операторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве в виде конечных сумм попарных произведений ортопроекторов и исследовал измеримые операторы, присоединенные к алгебре фон Неймана. О.Е. Тихонов и А.М. Бикчентаев установили интересные характеризации следа в классе всех положительных функционалов на алгебре фон Неймана.

Другое направление исследований семинара «Алгебры операторов и их приложения» – проблемы строения мер на ортопроекторах алгебры фон Неймана. Проблема продолжения меры на проекторах алгебры фон Неймана до линейного функционала была успешно решена М.С. Матвейчуком. Г.Д. Луговой и А.Н. Шерстневым в алгебре всех ограниченных операторов сепарабельного гильбертова пространства полностью решена задача описания неограниченных мер; этот результат явился обобщением на неограниченные меры классической теоремы Глисона. Ими же построен пример неограниченной полуконечной конечно-аддитивной меры на проекторах алгебры фон Неймана без прямых слагаемых типа I_2, которая не продолжается до веса, введены и изучены неограниченные аналоги векторных ортоаддитивных мер на ортопроекторах алгебры фон Неймана со значениями в гильбертовом пространстве. Изучены порядковые свойства ортогональных векторных полей и их связи с топологическими свойствами. Е.А. Туриловой и А.Н. Шерстневым рассмотрены задачи изучения мер, заданных на замкнутых подпространствах унитарного пространства E, присоединённых к алгебре фон Неймана, действующей в гильбертовом пространстве H – пополнении E. С.В. Дорофеевым и А.Н. Шерстневым изучалась возможность обобщения теоремы Глисона для зарядов на алгебре всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве.

Ортомодулярные упорядоченные множества. Класс ортопроекторов коммутативной алгебры фон Неймана обладает естественной структурой булевской алгебры. Если алгебра фон Неймана не коммутативна, мы приходим к более общей структуре, которую естественно рассматривать как аналог возможных высказываний о подходящей квантово-механической системе. Абстрактный «булевский» аналог этой структуры носит название ортомодулярного упорядоченного множества. Исследование таких множеств в Казани начато в конце 60-х гг. А. Н. Шерстневым: теория размерности Лумиса для ортомодулярных решеток перенесена на произвольные ОМУМ. Плодотворные исследования ОМУМ систематически велись затем П. Г. Овчинниковым и Ф Ф. Султанбековым. В частности, предложена новая аксиоматика для ОМУМ, описаны автоморфизмы упорядоченного множества косых проекторов в гильбертовом пространстве, доказана известная гипотеза Птака-Пульмановой о свойстве Яуха-Пирона, обобщена на гиперграфы теорема Биркгофа о бистохастических матрицах, построен первый известный пример атомического неортоатомического ОМУМ, найден точный топологический аналог понятия ортоупорядоченного множества, построена общая теория меры и зарядов на конечных логиках множеств. А.М. Бикчентаев предложил универсальный метод построения квантовых логик идемпотентов унитального кольца. Д.Х. Муштари доказал аналог теоремы Глисона для зарядов на квантовой логике всех идемпотентных рациональных матриц порядка выше 3. Аналогичный результат доказан также для матриц, элементы которых принадлежат простым конечным полям или полю из четырех элементов.

Одна из наиболее трудных и важных проблем в теории вероятностных распределений в бесконечномерных линейных пространствах – проблема сигма-аддитивности цилиндрической вероятности. При решении этой и близких к ней задач Д.Х. Муштари развил топологические методы исследования свойств слабой компактности и сигма-аддитивности цилиндрических вероятностей в банаховых пространствах. Эти методы позволили получить полное описание класса банаховых пространств, для которых существует топологическое решение указанной проблемы. Ряд важных результатов обобщен им на класс линейных топологических и линейных метрических пространств. Получен также ряд вероятностных характеризаций класса ядерных пространств Фреше, изучены устойчивые вероятности в банаховых пространствах.

Как уже отмечалось, Б. Г. Габдулхаев организовал кафедру теории функций и приближений. Он создал казанскую научную школу по теории аппроксимаций и интегральным уравнениям», подготовил около сорока кандидатов, из них четверо стали докторами физико-математических наук. Из его основных достижений отметим следующие. Он построил общую теорию приближенных методов, основанную на односторонней обратимости аппроксимирующих операторов. На основе ее разработал прямые и проекционные методы решения различных классов сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с ядрами Гильберта, Коши, Адамара и с полярно-логарифмическими ядрами. Разработал основы полиномиальных и сплайновых приближений функций в пространствах Гёльдера, Никольского и Соболева. В настоящее время исследования Б.Г. Габдулхаева продолжают его ученики Ю.Р. Агачев, А.Ф. Галимянов, Е.К. Липачев и А.В. Ожегова. Ими разработаны прямые и проекционные методы решения ряда новых типов интегро-дифференциальных уравнений, включающих, в частности, интегралы дробного порядка. Лидером этой группы является Ю.Р. Агачев, при кафедре работает организованный им семинар, в котором принимают участие молодые математики М.Ю. Першагин, Р.Р. Замалиев, Р.К. Губайдуллина и сотрудники других вузов Казани.

Отметим также некоторые результаты Ф.Г. Авхадиева и его учеников И.Р. Каюмова, Р.Г. Салахудинова, И.К. Шафигуллина и Р.Г. Насибуллина по решению ряда экстремальных задач теории функций и их приложениям. Ф.Г. Авхадиевым получено решение классической изопериметрической проблемы, восходящей к Коши и Сен-Венану, о геометрическом эквиваленте жесткости кручения упругой балки с заданным сечением, совместно с немецким математиком К.-Й. Вирсом построена теория неравенств типа Шварца-Пика для высших производных аналитических функций.

И.Р. Каюмовым получены лучшие нижние оценки для знаменитого спектра интегральных средних, введенных Н.А. Макаровым при исследовании граничного поведения конформных отображений. Из ряда результатов Р.Г. Салахудинова по изопериметрическим неравенствам следует выделить построение функционалов областей, обладающих свойством изопериметрической монотонности.

Ф.Г. Авхадиевым, Р.Г. Насибуллиным и И.К. Шафигуллиным построены и обоснованы несколько новых интегральных неравенств типа Харди и Реллиха для функций, финитных в плоских или пространственных областях. В частности, Р.Г. Насибуллин доказал неравенства типа Харди с точными константами в случае, когда ядра имеют полярно-логарифмические особенности, И. К. Шафигуллин определил точный порядок роста констант Харди в гипотезе Б.Е. Дэвиса, Ф.Г. Авхадиев построил несколько универсальных интегральных неравенств, справедливых для произвольной области евклидова пространства.

ГЕОМЕТРИЯ В КАЗАНСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

В. В. Шурыгин

Кафедра геометрии Казанского государственного университета организована в 1934 году после разделения кафедры математики на несколько специальных кафедр. Ее первым заведующим был выдающийся геометр Петр Алексеевич Широков (1895–1944). П.А. Широков одним из первых в нашей стране применил тензорные методы в геометрических исследованиях, с помощью которых им был решен ряд важных проблем теории римановых и обобщенных пространств. В 1934 г. вышла написанная им широко известная книга «Тензорное исчисление». П.А. Широковым был впервые выделен и исследован класс симметрических пространств, характеризующихся обращением в нуль ковариантной производной тензора кривизны, им был открыт класс комплексных пространств с гибридными метриками, названных им A-пространствами и впоследствии получивших название кэлеровых пространств. Научные интересы П.А. Широкова во многом определили направление исследований на кафедре геометрии, им был воспитан ряд учеников, из которых Б.Л. Лаптев, И.П. Егоров, А.З. Петров, П.И. Петров стали докторами наук.

В 1945 г. кафедру геометрии возглавил Александр Петрович Норден (1904–1993), один из самых ярких ученых Казанского университета, труды которого оказали существенное влияние на направление геометрических исследований во второй половине XX века как в нашей стране, так и за рубежом. В 1937 году А.П. Норден защитил докторскую диссертацию «О внутренних геометриях поверхностей проективного пространства», в которой им был предложен универсальный метод построения связностей на поверхностях проективного пространства, вошедший в историю науки как метод нормализации Нордена. Научные интересы А.П. Нордена были чрезвычайно широки, они охватывали такие области геометрии как пространства аффинной связности, биаксиальные и биаффинные пространства, конформная геометрия, линейчатая геометрия, теория сетей, научное наследие Н.И. Лобачевского. В 1950 году в издательстве «Физматгиз» вышла монография А.П. Нордена «Пространства аффинной связности», ставшая настольной книгой для нескольких поколений геометров. Применение А.П. Норденом и его учениками коммутативных ассоциативных алгебр в геометрии обобщенных пространств и дифференцируемых многообразий привело к появлению нового научного направления – теории многообразий над алгебрами, ставшего одним из основных направлений исследований кафедры геометрии Казанского университета. А.П. Норденом были написаны учебники «Краткий курс дифференциальной геометрии», переведенный на ряд иностранных языков и «Теория поверхностей», в котором на современном языке, с использованием тензорного анализа, изложены классические результаты теории поверхностей. Под руководством А.П. Нордена защищено около 40 кандидатских диссертаций. Семь его учеников Р.Г. Бухараев, В.И. Ведерников, В.В. Вишневский, А.И. Чахтаури, А.П. Широков, В.И. Шуликовский и В.В. Шурыгин стали докторами наук.

В основу докторской диссертации Бориса Лукича Лаптева (1905–1989) легли его исследования по теории пространств опорных элементов или, в другой терминологии, расслоения дифференциально-геометрических объектов. В изучаемых пространствах Б.Л. Лаптев развил аппарат дифференцирования Ли, указал приложения этого аппарата к исследованию групп автоморфизмов полей дифференциально-геометрических объектов различных типов, а также инвариантному вычислению различного типа интегралов, развил теорию связностей и теорию дифференциальных инвариантов. Изучение различных специальных типов пространств опорных элементов продолжили ученики Б.Л. Лаптева и в их числе Борис Никитович Шапуков.

Алексей Зиновьевич Петров (1910–1915) защитил в 1943 году кандидатскую диссертацию по проблеме геодезических отображений римановых многообразий. В послевоенные годы его научные интересы переместились в область приложений геометрических методов к теории физического поля. В 1952-1954 годах он установил, что в соответствии с алгебраической структурой тензора кривизны существует только три типа четырехмерных пространств Эйнштейна сигнатуры Лоренца. Впоследствии в мировой литературе эти типы получили название типов Петрова. В докторской диссертации А.З. Петрова были разработаны инвариантно-групповые методы изучения полей тяготения. В 1960 году А.З. Петров возглавил организованную им кафедру теории относительности и гравитации на физическом факультете Казанского университета. Результаты исследований А.З.Петрова и его учеников вошли в монографии «Пространства Эйнштейна» (1961 г.) и «Новые методы в общей теории относительности» (1966 г.), переведенные на многие иностранные языки.

Работы другого ученика П.А. Широкова, Петра Ивановича Петрова, посвящены дифференциальным инвариантам римановых пространств. Им был построен наипростейший базис метрических скалярных дифференциальных инвариантов третьего порядка трехмерных римановых пространств.

Ученик А.П. Нордена Валентин Иванович Шуликовский (1922–1973) систематизировал и развил теорию сетей двумерных пространств аффинной связности. Результаты его исследований вошли в монографию «Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении» (М. 1963).

Исследования Александра Петровича Широкова (1926–1998), сына П.А. Широкова и ученика А.П. Нордена, заведующего кафедрой геометрии с 1980 по 1993 год, принадлежат, главным образом, области геометрии пространств над алгебрами. Им была развита общая теория дифференцируемых многообразий и пространств аффинной связности над ассоциативными коммутативными унитальными алгебрами, введены структуры многообразий над локальными алгебрами на касательных расслоениях высших порядков и расслоениях Вейля, что позволило естественным образом построить теорию лифтов геометрических структур на эти расслоения. В работах А.П. Широкова и его многочисленных учеников были исследованы различные аспекты теории пространств над алгебрами и ее приложений в линейчатой геометрии, геометрии неевклидовых пространств, к теории касательных расслоений. А.П. Широковым на основе конспекта лекций П.А. Широкова была опубликована монография «Аффинная дифференциальная геометрия» (ГИФМЛ, 1959), переведенная на немецкий язык. Результаты А.П. Широкова и его учеников частично вошли в книгу «Пространства над алгебрами» (Казан. ун-т, 1985), написанную совместно с В.В. Вишневским и В.В. Шурыгиным.

Геометрии пространств над алгебрами посвящены и исследования ученика А.П. Нордена Владимира Владимировича Вишневского (1929–2007). В докторской диссертации «Пространства над алгебрами, определяемые аффинорами», им была решена задача интерпретации дифференцируемого многообразия с заданной на нем произвольной интегрируемой аффинорной структурой как вещественной реализации дифференцируемого многообразия над алгеброй, была развита теория чистых и гибридных относительно инволюции в алгебре тензоров, построена вещественная реализация тензорных операций в пространствах над фробениусовыми алгебрами. В дальнейшем В.В. Вишневским была построена универсальная модель расслоенного пространства, несущего интегрируемую структуру нерегулярного представления алгебры плюральных чисел – полукасательное расслоение. Результаты исследований В.В. Вишневского и его учеников частично вошли в указанную выше книгу «Пространства над алгебрами» (Казан. ун-т, 1985).

Темой научных работ Алексея Семеновича Подковырина (род. в 1934 г.), ученика А.П. Нордена, является геометрия поверхностей биаффинных и унитарных пространств. В его исследованиях также существенно используется метод нормализации А.П. Нордена.

Область научных интересов Бориса Никитовича Шапукова (1937–2007), ученика Б.Л. Лаптева, заведующего кафедрой геометрии в 1993-2007 годах, – дифференциальная геометрия расслоенных многообразий и их приложения. В своих работах он развил общую теорию линейных связностей и дифференцирования Ли на тотальных пространствах гладких расслоений, исследовал некоторые структуры, естественным образом возникающие на расслоенных многообразиях, выяснил роль симметрической группы в геометрии тензорных расслоений и показал, что всякое тензорное расслоение обладает естественной почти алгебраической структурой. На этом пути им было получено широкое обобщение результатов Б.Л. Лаптева. Б.Н. Шапуковым была написана книга «Задачи по группам Ли и их приложениям» (М. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002), переведенная на испанский язык.

Идеи А.З.Петрова развивались его учениками на кафедре теории относительности и гравитации Казанского университета.

Научные интересы Владимира Романовича Кайгородова (1936–2015) связаны с применением инвариантно-групповых методов к исследованию римановых и псевдоримановых пространств произвольной сигнатуры с рекуррентной структурой тензора кривизны и их приложениями в теории тяготения. Используя метод Ньюмена-Пенроуза и инвариантно-групповой подход, В.Р. Кайгородов и его ученики решили проблему выделения точных решений уравнений Эйнштейна с космологической постоянной и электродинамической правой частью для алгебраически специальных полей тяготения.

Исследования Аси Васильевны Аминовой (род. в 1942 г.) и её учеников посвящены разработке инвариантно-групповых методов, а также методов финслеровой и комплексной дифференциальной геометрии в теории проективных отображений пространственно-временных и фазовых многообразий с кэлеровой, кватернионной и суперримановой структурами, развитию концепции суперсимметрии как автоморфизма супергеометрической структуры и их приложениям в квантовой теории поля, космологии и теории гравитации. В трудах А.В. Аминовой решены проблема Ли и классическая геометрическая задача определения псевдоримановых метрик с соответствующими геодезическими, развит инвариантно-групповой подход к построению геометрической теории дифференциальных уравнений, установлена тесная связь между проективными преобразованиями и группами симметрии гамильтоновых систем и преобразованиями Ли-Беклунда уравнений Гамильтона-Якоби с квадратичными гамильтонианами. По результатам исследований А.В. Аминовой опубликована монография «Проективные преобразования псевдоримановых многообразий» (Москва, «Янус-К», 2003).

Ученик А.П. Широкова Виктор Егорович Фомин (род. в 1947 г.) защитил кандидатскую диссертацию на тему «О дифференциальной геометрии банаховых многообразий», в которой им были построены основы дифференциальной геометрии гладких многообразий банахова типа. Вместе с аспирантами им изучались многообразия типа Фреше поточечно-конформных структур на гладких компактных многообразиях, многообразия компактных подмногообразий конечномерных гладких многообразий, многообразия над банаховыми алгебрами, различные аспекты дифференциальной геометрии гильбертова пространства.

Исследования Шурыгина Вадима Васильевича (род. в 1952 г.), ученика А.П. Нордена, заведующего кафедрой геометрии в 2007-2016 годах, посвящены геометрии и топологии многообразий над локальными алгебрами и их применению в дифференциальной геометрии высшего порядка. Им построен аналог когомологий Вайсмана–Молино для многообразий над локальными алгебрами, с помощью которого построены препятствия к существованию голоморфных связностей на этих многообразиях, в терминах тривиальности когомологий с коэффициентами в некотором неабелевом пучке получен ответ на вопрос об эквивалентности многообразия над локальной алгеброй некоторому расслоению Вейля, в терминах когомологий Молино для некоторого слоеного главного расслоения им были представлены препятствия для существования связностей Эресмана на многообразиях над локальной алгеброй. Вместе с аспирантами им изучаются обобщенные трансверсальные структуры, возникающие на гладких многообразиях над локальными алгебрами, обобщенные функторы Вейля на категориях многообразий, зависящих от параметров.

Научные интересы Михаила Арменовича Малахальцева (род. в 1961 г.), ученика А.П.Нордена, руководителя отдела геометрии НИИММ имени Н.Г. Чеботарева при Казанском университете в 1996-2011 годах, посвящены различным областям дифференциальной геометрии и топологии и, в частности, геометрии и топологии слоений и гладких многообразий над алгебрами. Им построен аналог когомологий Дольбо для многообразий над алгеброй дуальных чисел, построенные когомологии применены для описания пространства деформаций структур многообразия над алгеброй дуальных чисел на торе, построены характеристические классы (X,G)-слоений и указаны способы их вычисления, с помощью комплекса Спенсера производной Ли им построены тонкие резольвенты пучков инфинитезимальных симметрий ряда G-структур, для многообразий, наделенных симплектической структурой с особенностями Мартине, построены тонкие резольвенты для пучков инфинитезимальных симметрий 2-форм непостоянного ранга, изучены потоки Риччи на поверхностях трехмерного евклидова пространства, построены инварианты субриманова многообразия размерности (3,2) вдоль поверхности неконтактности распределения.

Учеником М.А. Малахальцева Петром Николаевичем Иваньшиным (род. в 1979 г.) защищена кандидатская диссертация на тему «Алгебры функций на группоиде слоения, порожденного локально свободным действием группы». В настоящее время им исследуется поведение чебышевского центра и других точек наилучшего приближения в метрических пространствах неположительной кривизны, в том числе с приложением к задачам механики.

Другой ученик М.А. Малахальцева, Шурыгин Вадим Вадимович (род. в 1980 г.), защитил кандидатскую диссертацию на тему «Дифференциальные комплексы, ассоциированные с пуассоновыми многообразиями», в которой, в частности, исследованы пуассоновы структуры на расслоениях Вейля. В настоящее время им исследуются дифференциальные инварианты дифференциальных уравнений относительно действия различных псевдогрупп преобразований.

Научные интересы Сосова Евгения Николаевича (род. в 1959 г.), ученика А.П. Широкова, лежат в области метрической геометрии. В докторской диссертации на тему «Геометрии выпуклых и конечных множеств геодезического пространства» им решен ряд актуальных задач геометрии геодезических пространств. В настоящее время им исследуются геометрические свойства наилучших аппроксимирующих множеств для ограниченных множеств метрических пространств, метрические инварианты метрических пространств с приложением к распознаванию образов, аппроксимируемых конечным числом точек.

Константин Борисович Игудесман (род. в 1974 г.), ученик В.Е. Фомина, защитил кандидатскую диссертацию на тему «Дифференциальная геометрия бесконечномерных многообразий над алгебрами». К области научных интересов К.Б. Игудесмана помимо пространств над алгебрами и бесконечномерных пространств принадлежат фрактальная геометрия, теория меры и нелинейная динамика. Им найден критерий инвариантности меры при действии оснащенной многозначной трансформации, доказано, что рандомизированный алгоритм построения фракталов применим также и для построения суперфракталов, исследовано распределение, полученное в результате применения этого алгоритма.

Научные интересы Павла Игоревича Трошина (род. в 1983 г.), ученика К.Б. Игудесмана, принадлежат области фрактальной геометрии и стохастических динамических систем. В кандидатской диссертации на тему «Многозначные динамические системы и системы итерированных функций» им построены инвариантные меры для семейства двузначных динамических систем на отрезке, исследованы системы итерированных функций на комплексной плоскости и над телом кватернионов.

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ И РЕЛЛИХА В ОБЛАСТЯХ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Ф. Г. Авхадиев[1]

---

[1] *Farit.Avhadiev@kpfu.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

В докладе будут описаны недавние результаты о функционалах, определяемых как точные константы в неравенствах типа Харди и Реллиха для полигармонических операторов. Основное внимание будет уделено следующим геометрическим аспектам: а) критерии положительности констант и области с равномерно совершенными границами; б) геометрическое описание областей, обладающих максимальными константами.

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МЕТОДАХ В НЕКОММУТАТИВНОЙ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Г. Г. Амосов[1]

---

[1] *gramos@mi.ras.ru*, Математический институт им. В.А. Стеклова

Квантовым каналом называется вполне положительное отображение на алгебре всех ограниченных операторов, сохраняющее след. Каждый квантовый канал допускает представление Крауса следующего вида

$$\Phi(\rho) = \sum_k V_k \rho V_k^*,$$

где линейные операторы V_k удовлетворяют условию

$$\sum_k V_k^* V_k = I.$$

Представление Крауса не является единственным. Подбирая операторы (V_k) таким образом, чтобы они удовлетворяли определённым алгебраическим соотношениям, можно добиться возможности оценки выходных энтропийных характеристик канала [1,2]. При этом наиболее важной задачей является оценка выходных характеристик тензорного произведения фиксированного канала на произвольный.

Подпространство линейных операторов, натянутое на элементы $V_k^* V_m$ называется некоммутативным графом. Структура некоммутативного графа, соответствующего некоторому квантовому каналу позволяет определить такие важные характеристики канала как квантовая пропускная способность с нулевой ошибкой. Алгебраические свойства графа [3] позволяют понять, как меняются свойства канала при возведении его в некоторую тензорную степень.

Литература

[1] Amosov G.G., *On Weyl channels being covariant with respect to the maximum commutative group of unitaries//* J. Math. Phys. –2007. –V. 48. –P. 012104.

[2] Амосов Г.Г., *Об оценке выходной энтропии тензорного произведения канала, демпфирующего фазу, на произвольный канал//* Пробл. передачи информ. – 2013. –Т. 49. –С. 32–39.

[3] Амосов Г.Г., Ждановский И.Ю., *О некоммутативной деформации операторного графа, отвечающего группе Клейна//* Зап. научн. сем. ПОМИ –2015. – Т. 436. –С. 49–75.

ПРИБЛИЖЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ РАЦИОНАЛЬНЫМИ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

А. И. Аптекарев[1]

---

[1] *aptekaa@keldysh.ru*, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Пусть f — росток (степенное разложение) алгебраической функции в бесконечности. Мы обсудим предельные свойства функциональных дробей с полиномиальными коэффициентами для f (другие названия — диагональные аппроксимации Паде или наилучшие локальные рациональные аппроксимации). Если сравнивать такие функциональные непрерывные дроби для f с обычными непрерывными дробями (с целыми коэффициентами) для действительных чисел, то степень многочлена, коэффициента функциональной дроби, будет аналогична величине целого коэффициента числовой непрерывной дроби. В нашей работе с М. Ятцелевым [1] получена сильная (или типа Бернштейна-Сегё) асимптотика знаменателей подходящих функциональной непрерывной дроби для аналитической функции с конечным числом точек ветвления (находящихся в общем положении в комплексной плоскости). Одно из приложений, вытекающее из этого результата, доказательство справедливости гипотезы Гончара–Чудновских–Шталя об ограниченности размеров (с эффективной точной оценкой) у блоков диагональных рациональных аппроксимаций Паде алгебраических функций. Эту гипотезу также называют сильным функциональным аналогом теоремы Туэ-Зигеля-Рота о скорости приближения алгебраических чисел рациональными. Из справедливости этой гипотезы также следует ограниченность неполных частных (т. е. ограниченность степени коэффициентов) функциональных непрерывных дробей алгебраических функций.

Литература

[1] Aptekarev A.I., Yattselev M.L., *Pade approximants for functions with branch points – strong asymptotics of Nuttall-Stahl polynomials* // Acta Math. – 2015. – V. 215, No 2. – P. 217–280 (также см.: arXiv:1109.0332v2 [math.CA]).

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ И УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ НА ГРУППАХ ЛИ С ЛЕВОИНВАРИАНТНОЙ (СУБ)РИМАНОВОЙ МЕТРИКОЙ

В. Н. Берестовский[1]

---

[1] *vberestov@inbox.ru*, Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск

Далее df — дифференциал гладкого отображения f.

Теорема 1. *Пусть d — левоинвариантная (суб)финслерова метрика на группе Ли G с единицей e и алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, определяемая вполне неголономным распределением D на G и нормой F на $D(e)$, $g(t)$, $t\in(-a,a)$, где $0<a\leqslant+\infty$, — параметризованная длиной дуги геодезическая (т.е. локально кратчайшая) на (G,d). Тогда существуют непрерывная, нигде не обращающаяся в нуль функция $\psi(t)\in\mathfrak{g}^*$ и измеримая функция $u(t)\in D(e)$, $t\in(-a,a)$, такие, что для почти всех $t\in(-a,a)$,*

$$g'(t)=dl_{g(t)}(u(t)),\quad F(u(t))=1, \tag{1}$$

где $l_{g(t)}$ — левый сдвиг группы Ли G на элемент $g(t)$;

$$(\psi(t)(v))'=\psi(t)([u(t),v]),\quad v\in\mathfrak{g}; \tag{2}$$

$$\psi(t)(u(t))=\max\{\psi(t)(w):w\in D(e),F(w)\leqslant 1\}\equiv M_0\geqslant 0. \tag{3}$$

Кривая $g(t)$, $t\in(-a,a)$, в (G,d), п.в. удовлетворяющая условиям (1), (2) и (3), называется *экстремалью* в (G,d). Экстремаль в (G,d) называется *нормальной*, если $M_0>0$; *анормальной*, если $M_0=0$; *строго анормальной*, если не существует $\psi=\psi(t)$, для которой она является нормальной экстремалью. Геодезические субримановых (G,d) (когда $F(u)=\sqrt{(u,u)}$) могут быть нормальными или (не) строго анормальными. Каждая нормальная экстремаль в субримановой (G,d) — геодезическая.

Теорема 2. *Пусть $g=g(t)$, $t\in(-a,a)$, — параметризованная длиной дуги экстремаль в (G,d), удовлетворяющая п.в. условиям (1), (2), (3) из теоремы 1, $g_0:=g(0)$ и $\psi(0)=\mathrm{Ad}^*g_0(\psi_0)$, $\psi_0\in\mathfrak{g}^*$. Тогда*

$$\psi(t)=\mathrm{Ad}^*g(t)(\psi_0),\quad t\in(-a,a).$$

Определим для произвольного вектора u из $D(e)$ по индукции векторные подпространства в $\mathfrak{g}$: $D_0(u)=D(e)$, $D_{i+1}(u)=D_i+[u,D_i(u)]$.

Теорема 3. *Пусть $g=g(t)$, $t\in(-a,a)$, — экстремаль в (G,d), параметризованная длиной дуги и непрерывно дифференцируемая по t в некоторой окрестности точки t_0. Кроме того, $\dot g(t_0)=dl_{g(t_0)}(u_0)$, $u_0\in D(e)$, и $D_m(u_0)=\mathfrak{g}$ для некоторого неотрицательного целого m. Тогда экстремаль $g=g(t)$, $t\in(-a,a)$, нормальна.*

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 14-01-00068-а.

OPERADS OVER POLYNOMIAL FIREWORKS AND QUADRATIC DIFFERENTIALS

A. Vasiliev[1]

---

[1] University of Bergen, Norway

We construct some operads in categories of polynomials and quadratic differentials as well as morphisms between them. In the case of polynomials the construction is based on the topology of lemniscates and the symmetries are given by an abelian subgroup of the group of braids. In the case of quadratic differentials the operad is coloured and braided. Joint work with Mirjam Solberg and Anastasia Frolova.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ: НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ

С. К. Водопьянов[1]

---

[1] *vodopis@math.nsc.ru*, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Обсуждается связь между пространствами Соболева с первыми обобщенными производными и свойствами отображений, индуцирующих по правилу замены переменной либо изоморфизмы, либо ограниченные операторы пространств Соболева.

На основе этой связи возникают новые двухиндексные шкалы отображений, содержащие в качестве частного случая квазиконформные отображения и некоторые их обобщения.

Будут приведены свойства нового класса отображений, и их применения в геометрии и теории упругости.

КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ КЛАССОВ ДЛЯ МНОГОЧЛЕННЫХ ФОРМАЛЬНЫХ МОДУЛЕЙ

С. В. Востоков[1]

---

[1] Санкт-Петербургский государственный университет

Приводится новая явная формула для формальных многочленных модулей. Практически впервые удалось получить кососимметрическое спаривание для формальных групп и доказать необходимые свойства. Такого типа спаривания в дальнейшем будет применяться в теории эллиптических кривых и криптографии которое может найти применение в теории эллиптических кривых и криптографии

СТЕПЕНИ АВТОУСТОЙЧИВОСТИ

С. С. Гончаров[1]

---

[1] Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН

НЕХАУСДОРФОВА ТОПОЛОГИЯ – ТОПОЛОГИЯ ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Ю. Л. Ершов[1]

[1]Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН

АВТОМОРФИЗМЫ $AT4(4,4,2)$-ГРАФА И ОТВЕЧАЮЩИХ ЕМУ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ

К. С. Ефимов[1], А. А. Махнев[2]

[1]*konstantin.s.efimov@gmail.com*, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

[2]*makhnev@imm.uran.ru*, Уральский федеральный университет

Задача классификации локально $GQ(s,t)$-графов является классической. В работе [1] классифицированы дистанционно регулярные локально $GQ(5,3)$-графы. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом, в котором окрестность каждой вершины является обобщенным четырехугольником $GQ(5,3)$. Тогда либо диаметр Γ равен 2 и Γ имеет параметры $(322,96,20,32)$, либо Γ — граф с массивом пересечений $\{96,75,16,1;1,16,75,96\}$.

Последний граф являются $AT4(4,4,2)$-графом и по теореме из [3] $AT4(4,4,2)$-граф не является локально $GQ(5,3)$-графом. Однако существование $AT4(4,4,2)$-графа, являющегося локально псевдо $GQ(5,3)$-графом неизвестно.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{96,75,16,1;1,16,75,96\}$. Тогда антиподальное частное $\bar{\Gamma}$ — сильно регулярный граф с параметрами $(322,96,20,32)$. В работе найдены возможные автоморфизмы указанных графов.

Теорема 1. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(322,96,20,$ $32)$*, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* $(96,20,4,4)$*,* $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$*,* g *— элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$*. Тогда* $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,23\}$ *и верно одно из утверждений:*

(1) Ω *является пустым графом, либо* $p=23$*,* $\alpha_1(g)=92$*, либо* $p=7$*,* $\alpha_1(g)=140l-28$*, либо* $p=2$*,* $\alpha_1(g)=40t-8$*;*

(2) Ω *является* n*-кликой, либо* $p=3$*,* $n=1$*,* $\alpha_1(g)=60t-24$ *или* $n=4$*,* $\alpha_1(g)=60t-12$*, или* $n=7$*,* $\alpha_1(g)=60t$*, либо* $p=5$*,* $n=2$*,* $\alpha_1(g)=100s+20$ *или* $n=7$*,* $\alpha_1(g)=100s+40$*;*

(3) Ω *является* l*-кокликой,* $p=2$*,* l *четно,* $4\leqslant l\leqslant 56$ *и* $\alpha_1(g)=20m+12+4l$*;*

(4) Ω *содержит геодезический* 2*-путь и либо*

  (i) $[a]\subset\Omega$*, для некоторой вершины* a*,* $|\Omega|=97$ *и* $p=3,5$*, либо*

  (ii) $p=3$*,* $|\Omega|=3n+1$*,* $n=1,2,\dots,37$*,* $\alpha_1(g)=60l+12n$*;*

  (iii) $p=2$*,* $|\Omega|=2m$*,* $m=4,6,\dots,56$*,* $\alpha_1(g)=40s+4|\Omega|-8$.

Следствие. *Сильно регулярный граф с параметрами* $(322,96,20,32)$*, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* $(96,20,4,4)$*, не является вершинно транзитивным.*

Теорема 2. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{96,75,16,1;1,16,75,96\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,23\}$ *и верно одно из утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф, либо*

(i) $p=2$, $\alpha_4(g)=4l$, $\alpha_2(g)=20-20l-80s$, $\alpha_1(g)=56m+18l+40s+32$, $\alpha_3(g)=592+2l+40s-56m$, *либо*

(ii) $p=7$, $\alpha_4(g)=0$, $\alpha_1(g)=140-140l+196t$, $\alpha_2(g)=280l+140$, $\alpha_3(g)=364-196t-140l$, *либо*

(iii) $p=23$, $\alpha_4(g)=0$, $\alpha_1(g)=\alpha_3(g)=92$ *и* $\alpha_2(g)=460$;

(2) Ω *является объединением двух изолированных* t*-клик, либо* $p=3$, $t=1,4,7$ *и* $\alpha_2(g)=40s-10t-20$, *либо* $p=5$, $t=2,7$ *и* $\alpha_2(g)=200s-10t+20$;

(3) Ω *содержит геодезический* 2*-путь,* $p=2$, $|\Omega|=4m-\alpha_4(g)$, $\alpha_4(g)=14e+2s-78+10n$, $\alpha_1(g)=8s$, $\alpha_2(g)=80n+20-20m$ *и* $\alpha_3(g)=624-80n+16m-8s$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 14-11-00061 (теорема 2 и следствие) и соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (теорема 1).

Литература

[1] Махнев А. А., Падучих Д. В., Хамгокова М. М. *О вполне регулярных локально* $GQ(5,3)$*-графах* // Доклады академии наук. –2010. – Т. 435. – № 6. – С. 744–747.

[2] Махнев А. А., Падучих Д. В., Хамгокова М. М. *О локально* $GQ(5,3)$*-графах* // Тез. докл. Международной конф. “Алгебра и комбинаторика”, посвященной 60-летию А. А. Махнева, Екатеринбург. — 2013. — С. 64–66.

ТЕОРИЯ АТТРАКТОРОВ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

В. Г. Звягин[1]

---

[1] *zvg_vsu@mail.ru*, Воронежский государственный университет

При изучении динамики систем и, в частности, систем гидродинамики особый интерес представляет наряду с теоремами существования начально-краевых задач и предельное поведение их решений, когда время стремится к бесконечности. При этом часто встречаются системы со следующим свойством: “на бесконечности” их динамика сосредотачивается на небольшой части фазового пространства, называемой аттрактором. Понятие “аттрактор” возникло в теории динамических систем, однако для применения теории аттракторов динамических систем требуется однозначная глобальная разрешимость задачи с заданным начальным условием. Но для большинства моделей гидродинамики этого нет.

В работах М. И. Вишика и В. В. Чепыжова и независимо в работах Дж. Селлом был предложен подход, основанный на рассмотрении траекторных пространств и траекторных аттракторов (см. обзор [1] и ссылки там). Основная идея этого подхода состоит в том, чтобы рассматривать слабые решения исследуемого уравнения как точки некоторого траекторного пространства, при этом на нем рассматривается некоторая полугруппа трансляций. Тогда, если траекторное пространство трансляционно инвариантно и замкнуто, то к полугруппе трансляций можно применять аналоги метода теории динамических систем. Однако, аттракторы множества моделей неньютоновой гидродинамики не удавалось исследовать с помощью этой теории. Ограничительными оказались условия на траекторное пространство трансляционной инвариантности и замкнутости. Д. А. Воротниковым и В. Г. Звягиным [2, 3] был предложен другой метод доказательства существования аттракторов уравнений, основанный не на аппарате ω–предельных множествах, как в теории динамических систем и теории Вишика-Чепыжова-Селла, а на топологической лемме Шуры-Буры и, на основе этого метода, доказано существование аттракторов для большого числа автономных и неавтономных уравнений неньютоновской механики [3, 4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 14–21–00066, выполняемый в Воронежском государственном университете).

Литература

[1] Звягин В. Г., Кондратьев С. К. *Аттракторы уравнений неньютоновской гидродинамики* // Успехи мат. наук. – 2014. – Т. 69. – В. 5(419). – С. 81–156.

[2] Vorotnikov D. A., Zvyagin V. G. *Trajectory and global attractors of the boundary value problem for autonomous motion equations of viscoelastic medium* // J. Math. Fluid Mech. – 2008. – V. 10. – P. 19–44.

[3] Zvyagin V. G., Vorotnikov D. A. *Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodynamics.* – De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications (12), Walter de Gruyter, Berlin – New York, 2008. – 230 p.

[4] Звягин В. Г., Кондратьев С. К. *Pullback–аттракторы модели движения слабо концентрированных водных растворов полимеров* // Изв. РАН. Сер. матем. – 2015. – Т. 79. – В. 4. – С. 3–26.

МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С λ - ЧЛЕНОМ

Ю. Г. Игнатьев[1]

---

[1] Казанский (Приволжский) федеральный университет

Показано, что модели Вселенной с первоначальной инфляцией физически неустойчивы. Эта неустойчивость проявляется в трех видах: 1. Модели с ранней инфляцией неустойчивы по отношению к добавлениям малых примесей физической материи с уравнением состояния, отличающегося от инфляционного $\varepsilon + P = 0$. При этом Вселенная *приобретает* начало в конечном прошлом, а масштабный фактор в начале истории Вселенной растет по степенному закону, постепенно переходя на экспоненциальный. 2. Модели с ранней инфляцией неустойчивы по отношению к вырожденному решению с постоянным скалярным полем. При правильном решении полевых уравнений возникает Вселенная с конечным началом. 3. Модели с ранней инфляцией неустойчивы по отношению к поперечным гравитационным возмущениям, которые на ранних стадиях дают ультрарелятивистскую добавку в энергию-импульс, что приводит к уничтожению де-Ситтеровской стадии эволюции. Построена замкнутая система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих космологическую эволюцию макроскопически однородной изотропной Вселенной, заполненной гравитационным излучением в модели Эйнштейна с космологическим членом.

Получено асимптотическое решение космологических уравнений в ВКБ-приближении, описывающее переход с ультрарелятивистской фазы расширения на инфляционную.

ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ НЕГОЛОНОМНЫХ СТРУКТУР

М. Б. Карманова[1]

---

[1] *maryka84@gmail.com*, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Мы исследуем дифференциальные свойства отображений-графиков на пятимерных субримановых и сублоренцевых структурах. Результаты применены к доказательству формул площади и к описанию экстремальных поверхностей.

Мы рассматриваем $\mathbb{R}^5$ с набором полей $\{X_1, \ldots, X_5\}$ и предполагаем, что группы Гейзенберга $\mathbb{H}_1$ и $\mathbb{H}_2$ таковы, что $T\mathbb{H}_1 = span\{X_1, X_2, X_3\}$ и $T\mathbb{H}_2 = span\{X_1, X_4, X_5\}$. Для $\varphi = (\varphi_1, \varphi_4, \varphi_5) : \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_2$ строится *адаптированный* базис $\{\widetilde{X}_j^x\}_{j=1}^5$, зависящий от значений $\varphi(x)$ и $D\varphi_1(x)$. Несмотря на то, что отображение-график $\varphi_\Gamma(x) = \exp\bigl(\varphi_1(x)X_1 + \varphi_4(x)X_4 + \varphi_5(x)X_5\bigr)(x)$ не является липшицевым, он обладает некоторым свойством регулярности: полиномиально субриманово дифференцируем в точках hc-дифференцируемости φ.

Теорема. *Для отображения-графика φ_Γ в каждой точке x существует отображение $\mathscr{L}_x$, являющееся полиномом от координат элементов в окрестности x, и аппроксимирующее φ_Γ с точностью до величины $o(\cdot)$ относительно субриманова расстояния до x.*

Аналогичный результат справедлив и для классов композиций отображений; отображение-график является их самым простым примером.

Опишем сублоренцево расстояние для точек на образе φ_Γ:

$$(\widetilde{d}_\infty^{SL_2})^2(v, y) = \max\bigl\{\max\{y_1^2, y_2^2\} - y_4^2, sgn(y_3^2 - y_5^2)\sqrt{|y_3^2 - y_5^2|}\bigr\}.$$

Для построения внутренней сублоренцевой меры Хаусдорфа мы применяем конструкцию Каратеодори к соответствующим шарам, определяемым соотношением $(\widetilde{d}_\infty^{SL_2})^2 < r^2$. Справедливы следующие результаты о субримановой и сублоренцевой площади поверхности-графика классов липшицевых отображений и классов композиций липшицевых отображений.

Теорема. *Для* $\varphi : \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_2$ *справедлива следующая формула для вычисления внутренней субримановой* $\mathcal{H}^4_\Gamma$*-меры поверхности-графика* $\mathcal{H}^4_\Gamma(\varphi_\Gamma(\Omega))$*:*

$$\int\limits_\Omega \sqrt{1+(X_1\varphi_4)^2(x)+(X_2\varphi_4)^2(x)}\sqrt{1+(X_3\varphi_5)^2(x)}\, d\mathcal{H}^4(x).$$

Кроме того, сублоренцева внутренняя ${}^{SL_2}\mathcal{H}^4_\Gamma$*-мера поверхности-графика* ${}^{SL_2}\mathcal{H}^4_\Gamma(\varphi_\Gamma(\Omega))$ *равна*

$$\int\limits_\Omega \sqrt{1-(X_1\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1-(X_2\varphi_4)^2(v)}\sqrt{1-(X_3\varphi_5)^2(v)}\, d\mathcal{H}^4(v).$$

Эти результаты применены для вывода уравнений экстремальных поверхностей в субримановой геометрии и сублоренцевой геометрии [1, 2]. Подробные описания поверхностей и точные формулировки вышеперечисленных теорем см. в [1, 2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00768).

Литература

[1] Карманова М. Б. *Вариации отображений с неголономным образом и применения к теории макисмальных поверхностей* // Докл. АН. – принята к печати.

[2] Карманова М. Б. *Поверхности-графики коразмерности два над трехмерными пространствами Карно — Каратеодори* // Докл. АН. – на рассмотрении редколлегии.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО НЕСПРЯМЛЯЕМЫМ КРИВЫМ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Б. А. Кац[1]

---

[1] Казанский (Приволжский) федеральный университет

Строится поток с носителем на неспрямляемой кривой, который можно рассматривать как обобщение котурного интегрирования на такие кривые.

Полученное обобщение позволяет дать решение ряда краевых задач в областях с неспрямляемыми границами и имеет другие приложения.

ТЕОРЕМЫ ОБ ОГРАНИЧЕНИИ ОПЕРАТОРА НА КООРДИНАТНОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО

Б. С. Кашин[1]

---

[1] Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

ПРОСТЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ С НЕВЫРОЖДЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕМ

М. И. Кузнецов[1]

---

[1] Нижегородский университет им. Н.И. Лобачевского

Интерес к простым алгебрам Ли с невырожденным дифференцированием возник в связи с доказательством А. Шалева и Е.И. Зельманова гипотез о p-группах конечного кокласса. Дальнейшее развитие техники, связанной с алгебрами Ли, привело к возникновению нового направления в теории градуированных алгебр Ли. Над полями характеристики $p > 3$ все простые алгебры Ли с невырожденным дифференцированием были найдены Дж. Бенкарт, А.И. Кострикиным и М.И. Кузнецовым в 90-х годах.

В докладе будет дан обзор известных результатов, начиная с классической работы Н. Джекобсона об алгебрах Ли с невырожденным дифференцированием. Основное внимание будет уделено новому малоизученному классу простых неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли. Одна из серий таких алгебр была построена китайским математиком L. Lin. Эти алгебры Ли “живут” только в характеристике 2 и являются аналогами (бесконечномерных) гамильтоновых супералгебр Ли. С этой точки зрения они изучались Д. Лейтесом и его учениками. В докладе будет дана общая конструкция неальтернирующих гамильтоновых алгебр Ли, приведен ряд новых результатов об этих алгебрах, в частности, будут построены новые серии простых алгебр Ли, допускающих невырожденные дифференцирования, установлена их связь с алгебрами Блока. Также планируется обсудить ряд результатов о деформациях классических алгебр Ли.

PROBLEMS ON STRUCTURE OF FINITE QUASIFIELDS AND PROJECTIVE TRANSLATION PLANES

V. M. Levchuk[1], O. V. Kravtsova[2]

---

[1] *vlevchuk@sfu-kras.ru*, SFU, Krasnoyarsk
[2] *ol71@bk.ru*, SFU, Krasnoyarsk

It is well-known that finite projective plane is coordinatized by a field iff it is desarguesian. Failure of commutativity and associativity of coefficients leads to concept of semifield; it is a simple ring S in which non-zero elements form a loop S^*. The weakening of two-sided distributivity to one-sided leads to concepts of quasifield and translation projective plane, that is coordinatized by quasifield.

The problem on solvability of collineation group for the finite non-desarguesian projective semifield plane is unsolved still. The structure of even well-known proper (i.e., it isn’t a field) finite semifields and quasifields is little studied [1].

The report presents the investigations of problems on structure of finite quasifields and semifields: the element orders of its loop, automorphisms and autotopisms, maximal subfields and their orders, the hypothesis that a loop S^* is 1-generated for a finite semifield S. Anomaly properties are shown by the structure of semifields of orders 32 and 64, which are counter-examples to Wene’s hypothesis.

The investigations are supported by RFBR, project 16-01-00707.

References

[1] Johnson N. L., Jha V., Biliotti M. *Handbook of Translation Planes* // Taylor and Francis Group. — 2007. — 861 p.

ON CONFORMAL AND PROJECTIVE MAPPINGS OF COMPLETE RIEMANNIAN MANIFOLDS

A. Melnikov[1]

[1] Massey University, New Zealand

A large portion of classical mathematics is concerned with classifying structures, usually up to the right notion of similarity (i.e., isomorphism, homeomorphism etc). When objects are algorithmically presented, it is natural to classify such objects using some algorithmic tool.

We will discuss several classification-type results, some of these results have applications outside computability theory. Among other things. the talk will cover the recent solution of Goncharov's problem on Delta-alpha categorical torsion-free abelian groups (M.), the recent description of computably categorical torsion abelian groups by M. and Ng (thus solving a problem that goes back to Mal'cev in the important case of torsion groups), and the positive solution to problem of Goncharov and Knight on Friedberg enumeration of computable equivalence relations (Downey, M. and Ng) up to isomorphism.

ГОМОТОПИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ТРАНЗИТИВНЫХ АЛГЕБРОИДОВ ЛИ

А. С. Мищенко[1]

[1] МГУ имени М.В. Ломоносова

Доклад посвящен изложению результатов группы исследователей по транзитивным алгеброидам Ли. Эта программа была инициирована безвременно ушедшим профессором политехнического университета в Лодзи (Польша) Яном Кубарски, который совместно с автором начал изучение сигнатур транзитивных алгеброидов Ли в 2003 году.

В целом программа исследований может быть описана как гомотопическая классификация транзитивных алгеброидом Ли при фиксированном многообразии в качестве базы и фиксированной конечно мерной алгебре Ли, присоединенной к транзитивному алгеброиду Ли. Еще в книге Маккензи ([1]) было установлено, что если расслоение L со слоем конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и структурной группой автоморфизмов этого слоя допускает каплинг $\sharp$ с касательным расслоением TM многообразия M, то тогда такое расслоение L расширяется до транзитивного алгеброида Ли, у которого данное расслоение L присоединено к полученному алгеброиду Ли, при условии тривиальности препятствия Маккензи в виде трехмерного класса когомологий $obs(\sharp) \in H^3(M; ZL)$ с коэффициентами в плоском расслоении ZL.

Для завершения гомотопической классификации транзитивных алгеброидов Ли надо решить две задачи: 1) Найти необходимые и достаточные условия существования каплинга для заданного расслоения L и 2) описать условия тривиальности препятствия Маккензи. Обе эти задачи в книге Маккензи ([1]) не ставились и не обсуждались. Доклад посвящен решению сформулированных задач. Первая задача решена полностью ([5], [3]). В рамках второй задачи о вычислении препятствия Маккензи показана его функториальнось ([5])и показана его тривальность в некоторых частных случаях ([4],[6]).

Литература

[1] K.C.H. Mackenzie. *General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids*. Cambridge University Press, 2005.

[2] Xiaoyu Li, A.S. Mishchenko *Classification of Couplings for Transitive Lie Algebroids,* Doklady Mathematics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), t. 91, No.1, p. 84-86, 2015

[3] Xiaoyu Li, A.S. Mishchenko *The existence and classification of couplings between Lie algebrabundles and tangent bundles,* Topology and its Applications, Elsevier BV (Netherlands), t. 200, p. 1-18, 2016

[4] Xiaoyu Li, A.S. Mishchenko, V.Gasimov *Mackenzie obstruction for the existence of a transitive Lie algebroid,* Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), t. 21, No.4, p. 544-548, 2014

[5] А.С.Мищенко, Сяоюй Ли *Транзитивные алгеброиды Ли. Категорная точка зрения,* Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том.20, № 2, с.133–156

[6] Xiaoyu Li, A.S. Mishchenko, Leanh Nguyen *Some results on the Mackenzie obstruction for transitive Lie algebroids,* Preprint of joint scientific project No: 71NC /2015/VNCCCT on the VIASM (Vietnam Institute for Advanced Study in Mathematics), 2016

Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), t. 21, No.4, p. 544-548, 2014

СОВМЕСТНЫЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ РАДИУС: КАК НАЙТИ И КАК ПРИМЕНИТЬ?

В. Ю. Протасов[1]

Совместный спектральный радиус нескольких матриц – это максимальный показатель роста норм их всевозможных произведений. Для одной матрицы он совпадает с обычным спектральным радиусом. Совместный спектральный радиус появился в 1960 г. в работе Ж.К. Рота и Г. Стрэнга, с тех пор он нашел множество применений в теории функций, теории всплесков (вейвлетов), данамических системах, теории кодирования, теории вероятностей, комбинаторике, а также во множестве инженерных задач.

---

[1] МГУ имени М.В. Ломоносова

Изучением его свойств и методов вычисления занимались И. Добеши, Дж. Лагариас, В. Блондель, Ю. Нестеров, Дж. Цициклис, П. Паррило, и многие другие. В отличие от обычного спектрального радиуса, для совместного спектрального радиуса не существует замкнутой формулы. Задача о его вычислении чрезвычайно сложна (для 0-1 матриц она NP-сложна, а для общих матриц – алгоритмически неразрешима). Тем не менее, в последние годы появилось несколько эффективных геометрических методов вычисления и даже точного нахождения этой величины, что привело к значительному прогрессу во многих задачах.

КВАНТОВЫЙ АНАЛИЗ И КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ГОМЕОМОРФИЗМЫ

А. Г. Сергеев[1]

---

[1] Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Москва

Одной из главных задач некоммутативной геометрии является перевод основных понятий анализа, геометрии и топологии на язык банаховых алгебр ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. В докладе будет приведен ряд примеров такого перевода для классических пространств теории функций, таких как соболевское пространство полудифференцируемых функций, пространство BMO, пространство квазисимметричных гомеоморфизмов. Возникающее при этом операторное исчисление принято называть, следуя Конну, квантовым анализом.

ПРИБЛИЖЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ РАЦИОНАЛЬНЫМИ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

А. Т. Фоменко[1]

---

[1] МГУ имени М.В. Ломоносова

За последние годы были открыты новые физические системы, обладающие богатыми скрытыми симметриями, что позволяет их «интегрировать», то есть эффективно описывать траектории движения. Оказывается, такие интегрируемые системы с двумя степенями свободы допускают топологическую классификацию. Однако во многих конкретных случаях эволюция системы весьма причудлива. Таковы, например, некоторые случаи динамики тяжелого твердого тела в пространстве. С другой стороны, недавно был открыт класс «обобщенных биллиардов», описываемых скольжением материальной точки по двумерным локально плоским поверхностям с «хорошей границей». Неожиданным и нетривиальным фактом оказалось, что такие кусочно-гладкие биллиарды “наглядно” моделируют важные (и достаточно сложные) случаи интегрируемости, например, в динамике твердого тела. То есть, некоторые запутанные и даже неустойчивые эволюции таких систем теперь можно наглядно увидеть как движение шара по двумерной биллиардной области с несложной топологией.

О СТРУКТУРЕ ОБЩЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

А. К. Цих[1]

---

[1] Сибирский федеральный университет

КАТЕГОРИФИКАЦИЯ ИНВАРИАНТОВ КОНЕЧНОГО ТИПА

Н. А. Широкова[1]

---

[1] Santa Clara University, USA

We categorify invariants of finite type and construct a classification theory for Floer-type homologies. In particular we construct a local system of Khovanov complexes on the space of knots and a wall-crossing morphism for this local system. We extend it to the singular locus (discriminant) by the cone of this morphism and introduce the definition of the local system of finite type.

We prove the following properties of the Khovanov's complex:

Theorem 1. *Let k denote the kth crossing point of the knot projection D, then for any k the Khovanov's complex C decomposes into a sum of two subcomplexes* $A = A_0^k \oplus A_1^k$ *with matrix differential of the form*

$$d_A = \begin{pmatrix} d_0 & d_{0,1} \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}$$

Consider two complexes $A^\bullet$ and $B^\bullet$ adjacent to the generic wall of the discriminant. When we change kth overcrossing to an undercrossing, 0 and 1-resolutions are exchanged , so $A^\bullet = A_0^\bullet \oplus A_1^\bullet$, $B^\bullet[1] = B_0^\bullet[1] \oplus B_1^\bullet[1]$, thus for every k we can define the wall-crossing morphism ω as follows:

Theorem 2. *The map defined as the identity on* $A_0^\bullet$ *and as a trivial map on* $A_1^\bullet$*:*

$$\omega : A_0^\bullet \xrightarrow{Id} B_0^\bullet[1]$$

$$\omega : A_1^\bullet \xrightarrow{\varnothing} B_1^\bullet[1]$$

is the morphism of complexes.

Definition. *The local system is of finite type n if for any self intersection of the discriminant of codimension n, the result of the extension of the local system to the discriminant is quasi isomorphic to* $C^\bullet(n)(U)$*, where U is the complex corresponding to the disjoint union of unknots.*

Theorem 3. *Restricted to the subcategory of knots with at most n crossings,* $n \geqslant 3$*, Khovanov local system is of finite type* $\leqslant n$*.*

References

[1] Khovanov M., A Categorification of the Jones Polynomial, Duke Math. J. 101 (2000), no. 3, 359–426.

AN INEQUALITY FOR PROJECTIONS AND A CONVEX FUNCTION

S.A. Abed[1]

[1] *samialbarkish@gmail.com*, University of Diyala

Let H be a Hilbert space, $B(H)$ be an algebra of all bounded linear operator in H, $B(H)^{\mathrm{pr}}$ be the set of all projections in H. For a set A in $B(H)$ by A' we denote the commutant of A.

Lemma 1. *For each pair of projections* $p,\ q \in B(H)^{\mathrm{pr}}$ *such that* $pq = qp$ *and for continuous function* $f \in C[0,1]$*, such that* $f(x) \leqslant f(1)x + f(0)(1-x)$*, the inequality* $f(\lambda p + (1-\lambda)q) \leqslant \lambda f(p) + (1-\lambda)f(q)$ *holds for every* $\lambda \in [0,1]$.

Proof: For $p,\ q$ consider the von Neumann algebra $\{p,\ q\}''$. It is Abelian, therefore, $\{p,\ q\}'' \cong L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$ and there exist $A,\ B \subset \Omega$ such that $p \sim I_A$, $q \sim I_B$. Evidently, $f(\lambda I_A + (1-\lambda)I_B) = f(1)I_{A\cap B} + f(0)I_{(A\cup B)^c} + f(\lambda)I_{A\setminus B} + f(1-\lambda)I_{B\setminus A}$, also $\lambda f(I_A) + (1-\lambda)f(I_B) = f(1)I_{A\cap B} + f(0)I_{(A\cup B)^c} + (\lambda f(1) + (1-\lambda)f(0))I_{A\setminus B} + ((1-\lambda)f(1) + \lambda f(0))I_{B\setminus A}$. To finish the proof, we note, that $f(x) \leqslant f(1)x + f(0)(1-x)$.

Lemma 2. *For* $\lambda \in [0,1]$*, for each pair of projections* $p,\ q \in \mathbb{M}_2(C(\Omega))^{\mathrm{pr}}$ *and for a continuous function* $f \in C[0,1]$ *such that* $f(x) \leqslant f(1)x + f(0)(1-x)$ *the inequality* $f(\lambda p + (1-\lambda)q) \leqslant \lambda f(p) + (1-\lambda)f(q)$ *holds for every* $\lambda \in [0,1]$.

Proof: It is sufficient to consider $p = \operatorname{diag}(1,0)$ and

$$q = \begin{pmatrix} t & \delta\sqrt{t(1-t)} \\ \overline{\delta}\sqrt{t(1-t)} & 1-t \end{pmatrix},$$

with $t \in [0,1]$ (see [1]).

Note, that for any ω there exists $r \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})^{\mathrm{pr}}$ such that $\lambda p + (1-\lambda)q = \mu_1 r + \mu_2 r^\perp$, $r^\perp + r = \mathbf{1}$, $\mu_1,\ \mu_2 \in [0,1]$, $\mu_1 + \mu_2 = 1$. Therefore, $f(\lambda p + (1-\lambda)q) = f(\mu_1)r + f(\mu_2)r^\perp$.

On the other hand, $\lambda f(p) + (1-\lambda)f(q) = \lambda f(1)p + \lambda f(0)(\mathbf{1}-p) + (1-\lambda)f(1)q + (1-\lambda)f(0)(\mathbf{1}-q) = f(0)\mathbf{1} + (f(1)-f(0))(\lambda p + (\mathbf{1}-\lambda)q) = (f(1)\mu_1 + f(0)(1-\mu_1))r + (f(1)\mu_2 + f(0)(1-\mu_2))r^\perp$.

To finish the proof we note that $f(\mu_1) \leqslant f(1)\mu_1 + f(0)(1-\mu_1)$ and $f(\mu_2) \leqslant f(1)\mu_2 + f(0)(1-\mu_2)$.

Theorem. *For each pair of projections* $p,\ q \in B(H)^{\mathrm{pr}}$ *and for continuous function* $f \in C[0,1]$*, such that* $f(x) \leqslant f(1)x + f(0)(1-x)$*, the inequality* $f(\lambda p + (1-\lambda)q) \leqslant \lambda f(p) + (1-\lambda)f(q)$ *holds for every* $\lambda \in [0,1]$.

Proof: Consider the von Neumann algebra $\{p,q\}'' = \mathcal{N}$. By Lemma 3 [1], there exists a central element $z \in \mathcal{N} \cap \mathcal{N}'$ such that $\mathcal{N} = \mathcal{N}_z \oplus \mathcal{N}_{z^\perp}$. An algebra $\mathcal{N}_{z^\perp}$ is Abelian, therefore, by Lemma 1, $f(\lambda p z^\perp + (1-\lambda)q z^\perp) \leqslant \lambda f(p z^\perp) + (1-\lambda)f(q z^\perp)$. The algebra $\mathcal{N}_z$ is equivalent to $M_2(C(\Omega))$ and, therefore, $f(\lambda p z + (1-\lambda)q z) \leqslant \lambda f(p z) + (1-\lambda)f(q z)$.

To finish the proof it is sufficient to note, that $f(p) = f(pz \oplus pz^{\perp}) = f(pz) \oplus f(pz^{\perp})$.

Corollary. *For each pair of projections* $p,\ q \in B(H)^{\mathrm{pr}}$ *and for continuous convex function* $f \in C[0,1]$ *the inequality* $f(\lambda p + (1-\lambda)q) \leqslant \lambda f(p) + (1-\lambda) f(q)$ *holds for every* $\lambda \in [0,1]$.

Example. For $f(x) = x^3$ the inequality $f(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q) \leqslant \frac{1}{2}f(p) + \frac{1}{2}f(q)$ holds. Note, that $f(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q) = \frac{1}{8}(p+q) + \frac{1}{4}(pq+qp) + \frac{1}{8}(pqp+qpq)$. Since $p - pq - qp + q = (p-q)^2 \geqslant 0$, it folows that $pq + qp \leqslant p + q$. Also, $pqp \leqslant p$ and $qpq \leqslant q$, since $q,\ p \leqslant \mathbf{1}$. Therefore,

$$\frac{1}{8}(p+q) + \frac{1}{4}(pq+qp) + \frac{1}{8}(pqp+qpq) \leqslant \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}f(p) + \frac{1}{2}f(q),$$

so $f(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q) \leqslant \frac{1}{2}f(p) + \frac{1}{2}f(q)$.

This work was supported by the Ministry of Higher Education and Scientific Research of Republic of Iraq.

References

[1] Bikchentaev A.M. *Commutation of projections and trace characterization on von Neumann algebras. II* // Math. Notes. – 2011. –V. 89. – № 4. – 461–471.

AN ENSEMBLE TRAFFIC TABLE BASED INTRUSION DETECTION SYSTEM FOR MOBILE ADHOC NETWORKS

M. K. Al-Anni[1]

---

[1] *maadk-anni@live.com*, N.I. Lobachevsky Institute of Computer Mathematics and Informational Technologies, Kazan (Volga Region) Federal University

We study an algorithmic dependence of Artificial Neural Network on Multilayer Perceptron (MLP) relative to the classification and Clustering presentations.We give complete description of standard back propagation(BP) normally utilizes computationally training algorithms in which there is a computable machine learning. Work has been performed to classify patterns using multilayer perceptron learning by artificial back propagation algorithm, a proposed system are used a distributed mobile agent incorporated with Intrusion Detection Mechanism that expected to detect the deviating behaviours of some nodes in Mobile Adhoc Networks, as such this work led us to comparison studies made in NN learning based on Data Set(Traffic Table) which divide into training set and testing set, consequently have to specify any experimental results is better in solving the case study(IDS for MANETs) in terms of less Mean Square Error and high Accuracy Level, in this article we are going to show the effectiveness of BP used as a machine learning to classify the malicious behaviour in simulated Networks, as we are going to prove it in Problem Identification and Proposed Solution, Despite BP having been used for decades, Feed-Forward Back-Propagation (FF-BP) systems are still the most commonly used ANN topology. FF-BP ANNs are applied in an extensive range of areas including computer network security, handwriting analysis, medicine, intrusion detection, computer vision, physics, retail, battlefield management, and finance. Their performance depends on several factors, including: the number of neuronal layers, the number of neurons at each layer, the activation functions used by the neurons, and the choice of initial connection weights. There are many algorithm for ANN learning algorithm such as Adaline, Hebbian, Perceptron Learning rule, Back propagation, Artificial Bee Colony.

References

[1] Tiranuch Anantvalee and Jie Wu, *A Survey on Intrusion Detection in Mobile Ad Hoc Networks, Wireless/Mobile Network Security* (Springer, 2006).

[2] Ovais Ahmad Khan.A Survey of Secure Routing Techniques for MANET, (http://ovais.khan.tripod.com/papers/Secure_Routing_MANET.pdf).

[3] Ernesto Jimenez Caballero. Vulnerabilities of Intrusion Detection Systems in Mobile Ad-hoc Networks -The routing problem, (http://www.tml.tkk.fi/Publications/C/22/papers/Jimenez_final.pdf).

[4] Yanchao Zhang, Wenjing Louy, Wei Liu and Yuguang Fang, A Secure Incentive Protocol for Mobile Ad Hoc Networks, Wireless Networks, (springer, 2006).

[5] Satria Mandala, Md. Asri Ngadi and A. Hanan Abdullah, A Survey on MANET Intrusion Detection, (International Journal of Computer Science and Security, August 2007).

[6] Mirza Cilimkovic, Neural Networks and Back Propagation Algorithm, Institute of Technology Blanchardstown, (Ireland, 2014).

[7] Arjita Ghosh and Sandip Sen, Agent-Based Distributed Intrusion Alert System, (Springer, 2005).

[8] http://www.scholarpedia.org/article/Artificial-bee-colony-algorithm.

[9] S.Madhavi and Tai Hoon Kim, An Intrusion Detection System in Mobile Adhoc-Networks, (International Journal of Security and Its Applications, Vol. 2, No.3,July, 2008).

[10] Angelo Rossi and Samuel Pierre, Collusion-resistant reputation-based intrusion detection system for MANETs, International Journal of ComputerScience and Network Security, (VOL.9 No.11, November 2009).

[11] Animesh Kr Trivedi, Rishi Kapoor, Rajan Arora, SudipSanya and SugataSanya, RISM - Reputation Based Intrusion Detection System for Mobile AdhocNetworks, 3rd International Conference on Computers and Devices forCommunication, (2006).

[12] Bo Sun, Kui Wu and Udo W. Pooch, Zone-Based Intrusion Detection for Mobile Ad Hoc Networks, http://webhome.cs.uvic.ca/ wkui/research/IDS.pdf.

[13] Yana M, Mohmad H, and Rozaida G, Training a Functional Link Neural Network Using an Artificial Bee Colony for Solving a Classification Problems, (2010).

[14] Faez H, Hazem N, Pattern Recognition Based On Intelligent System,(Issue No. 31, Journal of Al Rafidain University College , ISSN (1681 – 6870) ,2013).

THE EINSTEIN-MAXWELL-AETHER-AXION THEORY: DYNAMO-OPTICAL ANOMALY IN THE ELECTROMAGNETIC RESPONSE

T. Yu. Alpin[1]

---

[1] *Timur.Alpin@kpfu.ru*, Kazan Federal University

We consider a pp-wave symmetric model in the framework of the Einstein-Maxwell-aether-axion theory. Exact solutions to the equations of axion electrodynamics are obtained for the model, in which pseudoscalar, electric and magnetic fields were constant before the arrival of a gravitational pp-wave. We show that dynamo-optical interactions, i. e. couplings of electromagnetic field to a dynamic unit vector field, attributed to the velocity of a cosmic substratum (aether, vacuum, dark fluid etc.), provide the response of axionically active electrodynamic system to display anomalous behavior.

References

[1] A. B. Balakin, T. Yu. Alpin *Extended axion electrodynamics: Anomalous dynamo-optical response induced by gravitational pp-waves* // Gravitation and Cosmology. — 2014. — Vol. 20, N 3. — P. 152-156

[2] A. B. Balakin, Wei-Tou Ni *Anomalous character of the axion-photon coupling in a magnetic field distorted by a pp-wave gravitational background* // Classical and Quantum Gravity. — 2014. — Vol. 31, No. 10. — P. 105002-1-105002-21.

[3] A. B. Balakin, J. P. S. Lemos *Einstein-aether theory with a Maxwell field: General formalism* // Annals of Physics. — 2014. — Vol. 350, No. 11. — P. 454-484.

[4] T. Yu. Alpin, A. B. Balakin *The Einstein-Maxwell-aether-axion theory: Dynamo-optical anomaly in the electromagnetic response* // International Journal of Modern Physics D. — 2016. — Vol. 25. — No. 4. — 1650048-1-1650046-23.

ON CURVATURE STRUCTURE OF PSEUDO-RIEMANNIAN MANIFOLDS ADMITTING INFINITESIMAL PROJECTIVE TRANSFORMATIONS

A. V. Aminova[1], M. N. Sabitova[2]

---

[1] *asya.aminova@kpfu.ru*, Kazan Federal University
[2] *maria.sabitova@qc.cuny.edu*, CUNY, New York

A vector field X on a manifold M^n with affine connection $\nabla(\Gamma^i_{jk})$ is an infinitesimal projective transformation (p.m.) if and only if $\nabla_Y(L_X - \nabla_X) = R(X,Y) - \phi(Y)\cdot id - Y\phi$ for a 1–form ϕ and all vector fields Y on M^n, where R is the curvature tensor. In local coordinates we have $L_X\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j\phi_k + \delta^i_k\phi_j$. For a pseudo-Riemannian manifold (M^n, g), this is equivalent to the equations $L_X g = h,\ \nabla h(Y,Z,W) = 2g(Y,Z)W\varphi + g(Y,W)Z\varphi + g(Z,W)Y\varphi,$ where $Y,Z,W \in TM$ and $(n+1)\varphi = \mathrm{div}X$. The first of these equations is the generalized Killing equation, and the second one is the Eisenhart equation. The metrics g admitting non-trivial solutions $h \neq cg$ of the last equation are called h-metrics. If div$X = const$, then X is an infinitesimal affine transformation, or affine motion (a.m.), in particular, homothety (h.m.), when $h = cg$, and isometry (i.m.), when $h = 0$. The set $\mathscr{P}(M^n)$ of all projective motions in M^n forms a projective Lie algebra in M^n. The set of all complete projective vector fields X in M^n forms a Lie algebra of the group $\mathscr{P}(M)$ of projective transformations in M^n. The following inclusions for the isometric, homothetic, affine and projective Lie algebras in (M^n, g) are valid: $\mathscr{I}(M^n) \subseteq \mathscr{H}(M^n) \subseteq \mathscr{A}(M^n) \subseteq \mathscr{P}(M^n)$.

The structure of curvature 2-form Ω_{ij} of the so called rigid h-spaces (M^n, g) of arbitrary dimension and signature is described, and it is proved that an affine group acting in the rigid h-space consists of homotheties at most, and a proper k-dimensional projective group of such space has a $(k-1)$-dimensional homothetic subgroup.

GROUP GRADED SEMIGROUPS

V. A. Arzumanian[1], S. A. Grigoryan[2]

---

[1]*vicar@instmath.sci.am*, Institute of Mathematics, National Academy of Science of RA
[2]*gsuren@inbox.ru*, Kazan State Power Engineering university

Last years the attention of many experts is focused on the constructions of algebras associated with irreversible dynamical systems. Since the concept of the group crossed product can not be directly transferred on the case of semigroups, new methods are being developed to avoid the difficulties.

The involvement in considerations the concept of graded algebra seems to be most promising in this regard. In the first step the concept of group-graded system arises which can be interpreted in different ways.

We proposed in [1] a modified version of the so called Fell bundle (C*-algebraic bundle) considered by Ruy Exel in [2].

In our new interpretation, it is an involutive semigroup structured in a special way with the help of a group.

In the case when initial group is Abelian we consider main properties of such systems, based on the C*-module structure of a graded system and an action of the dual group, their modular representations and the associated operator algebra in a suitable Hilbert module.

In addition, the realization of the associated C^*-algebra as a subalgebra of the algebra of continuous C^*-valued mappings on the dual group is given.

References

[1] Arzumanian V., Grigoryan S. *Group-graded systems and algebras* // Zap. Nauchn. Sem. POMI. – 2015. – V. 437. – P. 5–14.

[2] Exel R. *Partial Dynamical Systems, Fell Bundles and Applications* // http://mtm.ufsc.br/exel/papers/pdynsysfellbun.pdf.

POLYNOMIALLY COMPLETE FINITE QUASIGROUPS

V.A. Artamonov[1]

---

[1] *artamon@mech.math.msu.su*, Department of Algebra, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow State University

A general finite algebra Q is polynomially complete if any the clone of its operations is generated by all basic operations and by all constants.

A finite quasigroup Q is affine if Q admits a structure of an Abelian group $(Q,+)$ such that the basic operation of multiplication $x\cdot y$ has the form $x\cdot y = \alpha(x)+\beta(y)+c$, where α,β are automorphisms of $(Q,+)$ and $c \in Q$. It is known that a finite quasigroup is polynomially complete if and only if Q is congruence-simple and non-affine.

For a quasigroup Q denote by $\operatorname{Mult} Q$ the permutation group on the set Q generated by the permutations L_x, R_x of left and right multplication by x in Q.

A finite quasigroup is usually given by lis Latin square (= Cayley table). We consider the problem of recognition of polynomially complete qusaigroups given by their Latin squares. The case of a quasigroup of order 4 was considere in [**?**].

Theorem 1. *Let Q be a finite quasigroup such that* $\operatorname{Mult}(Q)$ *contains a subgroup isomorphic the alternative subgroup* $\mathbf{A}_m$*, where*

$$m = 1+\max\left(\left[\frac{n}{2}\right],4\right). \tag{1}$$

Then Q is polynomially complete.

Denote by $G(Q)$ the subgroup in $\operatorname{Mult}(Q)$ generated by all elements $L_xL_y^{-1}$, $R_xR^{-1}y$, where $x,y \in Q$. In contrust with $\operatorname{Mult} Q$ we have

Theorem 2. *Under an isotopy (π,π_1,π_2) the group $G(Q)$ is mapping to $\pi G(Q)\pi^{-1}$.*

Research is partially supported by grant RFBI-DST 15-51-45031

References

[1] Viacheslav A. Artamonov, Sucheta Chakrabarti, Sugata Gangopadhyay and Saibal K. Pal, On Latin squares of polynomially complete quasigroups and qausigroups generated by shifts, Quasigroups and Related Systems 21 (2013), 201–214

[2] Artamonov, V.A., Chakrabarti, S., Pal, S. K., Characterization of Polynomially Complete Quasigroups based on Latin Squares for Cryptographic Transformations, J. Discrete Applied Mathematics, doi:10.1016/j.dam.2015.06.033

ABOUT INTERSECTION OF A SET WITH A HYPERPLANE

M.V. Balashov[1]

---

[1] *balashov73@mail.ru*, Department of Higher Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology (state university)

We consider the set-valued mapping whose images are intersections of a fixed closed convex bounded set A with nonempty interior from a real Hilbert space with shifts of a closed linear subspace L:

$$A \ni x \to F(x) = A \bigcap (L + x).$$

We characterize such strictly convex sets in the Hilbert space that the considered set-valued mapping F is Hölder continuous with the power $\frac{1}{2}$ in the Hausdorff metric. We also consider the question about intersections of a fixed uniformly convex set [1] with shifts of a closed linear subspace. We prove that the modulus of continuity of the set-valued mapping in this case is the inverse function to the modulus of uniform convexity [2, Theorem 3.1] and vice versa: the modulus of uniform convexity of the set is the inverse function to the modulus of continuity of the set-values mapping. The report is based on the paper [3].

The research was supported by RFBR (grant № 16-01-00259.)

References

[1] Polyak B. T. *Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restrictions* //Soviet Math. – 1966 – N 7. – P. 72 — 75.

[2] Balashov M. V., Repovš D. *Uniform convexity and the spliting problem for selections//* J. Math. Anal. Appl. – 2009 – V. 360. – N 1. – P. 307-316.

[3] Balashov M. V. *Intersection of a set with a hyperplane//* Journal of Convex Anal. – 2016 – V. 23. – N

THE CRITERION OF THE EXISTANCE OF NONLINEAR MAPPING WITH THE JACOBI MATRIX COMMUTING WITH MATRIXES OF THE RING

Yu. A. Chirkunov[1]

---

[1] *chr101@mail.ru*, Novosibirsk State Technical University

We obtained a criterion for the existence of a nonlinear mapping $\boldsymbol{u} : C^m \to C^m$ $(m \geqslant 2)$, whose Jacobi matrix commutes with each constant complex matrix of a given ring Q. We showed that such mapping exists if and only if the ring Q has at least one $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{l})$–pair [1–4]. Such problem arises, for example, in the group analysis of differential equations in the study of the dependence of the main Lie group of transformations with respect to the dependent variables [1–4].

The proof consists of the series of lemmas, with the help of which we obtained the result for all possible cases. A characteristic feature of the proofs of these lemmas is the induction in two directions (sorting of rows and columns of the block matrix). Proof of the induction step is most often carried out on an example of the second step. Important meaning has the following

Lemma. *Let* M_α *and* M_β *be constant matrixes, and* $\max\{\text{rank}(M_\alpha), \text{rank}(M_\beta)\} > 1$. *If for all* $i \in J_\alpha$ *and all* $j \in J_\beta$ *we have:* $\partial_i K^\sigma_\beta = h_{\beta i}(\boldsymbol{x}) M_\beta$ *and* $\partial_j K^\sigma_\alpha = h_{\alpha j}(\boldsymbol{x}) M_\alpha$, *where* $h_{\beta i}(\boldsymbol{x})$, $h_{\alpha j}(\boldsymbol{x})$ *are scalar functions of the variable* $\boldsymbol{x} = \left(x^1, x^2, \ldots, x^m\right)^T$, *then* $\partial_i K^\sigma_\beta = 0$ *and* $\partial_j K^\sigma_\alpha = 0$ *for all* $i \in J_\alpha$ *and for all* $j \in J_\beta$. *In particular, if* $K = h(\boldsymbol{x}) M$ *or* $\partial_i K = h_i(\boldsymbol{x}) M$

($i = 1, 2, \dots, m$), where M is a constant matrix, whose rank is greater than 1*, and $h(\boldsymbol{x})$, $h_i(\boldsymbol{x})$ are scalar functions, then $\partial K = 0$.*

The lemma shows the result of the interaction of Schur's lemma, and compatibility conditions, since the matrices of the ring commute with the Jacobi matrix. This lemma plays the same role in the "Multi-dimensional factors" as the condition concerning the existence of an $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{l})$–pair in the "One-dimensional factors".

References

[1] Chirkunov Yu. A. *Linear Autonomy Conditions for the Basic Lie Algebra of a System of Linear Differential Equations.* // Doklady Mathematics. – 2009. – Vol. 79. – № 3. – P. 415–417.

[2] Chirkunov Yu. A. *Systems of Linear Differential Equations Symmetric with Respect to Transformations Nonlinear in a Function.* // Siberian Mathematical Journal. – 2009. – Vol. 50. – № 3. – P. 541–546.

[3] Chirkunov Yu. A. *Systems of Linear Differential Equations with Non-x-Autonomous Basic Lie Algebra.* // Journal of Applied and Industrial Mathematics. –2012. – Vol. 6. – № 1. – P. 31–41.

[4] Chirkunov Yu. A. *Nonlinear Mappings whose Jacobi Matrix Commutes with Constant Matrices of a Ring.* // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 186. – № 3. – P. 379–386.

ON HOLOMORPHICALLY PROJECTIVE MAPPINGS OF PARABOLIC KÄHLER MANIFOLDS

H. Chudá[1], J. Mikeš[2], P. Peška[3], M. Shiha[4]

---

[1] *chuda@fai.utb.cz*, Tomas Bata University in Zlin, Czech Republic
[2] *josef.mikes@upol.cz*, Palacky University Olomouc, Czech Republic
[3] *patrik_peska@seznam.cz*, Palacky University Olomouc, Czech Republic
[4] *d.mohsen.sheha@gmail.com*, Homs University, Syria

We study the fundamental equations of holomorphically projective mappings of parabolic Kähler spaces (which are generalized classical, pseudo- and hyperbolic Kähler spaces) with respect to the smoothness class of metrics. We show that holomorphically projective mappings preserve the smoothness class of metrics.

We remind that Kähler spaces characterized by conditions $F^2 = -Id$, $g(X, FX) = 0$, $\nabla F = 0$, were first considered by P.A. Shirokov, see [1]. The monography by V.V. Vishnevskii, A.P. Shirokov and V.V. Shurygin [2] inspired us to introduce the following notion: a n-dimensional (pseudo-) Riemannian manifold (M, g) is called an *m-parabolic Kähler manifold $K_n^{o(m)}$*, if additionally to the metric tensor g, a tensor field F of a rank $m \geqslant 2$ of type $(1,1)$ is given on the manifold M_n, such that the following conditions hold: $F^2 = 0$, $g(X, FX) = 0$, $\nabla F = 0$, where X is an arbitrary tangent vector, ∇ denotes the covariant derivative.

We study the fundamental equations of holomorphically projective mappings of parabolic Kähler manifolds in dependence on the smoothness class of the metric. I. Hinterleitner solved similar problems for classical, pseudo- and hyperbolic Kähler manifolds, [3, p. 427].

M. Shiha [4] (see [3, p. 427]) proved the following theorem:

Theorem 1. *A diffeomorphism* $f\colon K_n^{o(m)} \to \bar{K}_n^{o(\bar{m})}$ *is a holomorphically-projective mapping if and only if the linear Cauchy-like system of differential equations*

$$a_{ij,k} = \lambda_{(i}g_{j)k} + \theta_{(i}F_{j)k}; \theta_{i,j} = \tau F_{ij} + a_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}_{1|ij}; \tau_{,i} = \theta_{\alpha}T^{\alpha}_{2|i} + a_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}_{3|i}$$

has a solution a_{ij}, λ_i *and* τ *satisfying the conditions*

$$a_{ij} = a_{ji},\ a_{\alpha j}F^{\alpha}_{i} + a_{\alpha i}F^{\alpha}_{j} = 0,\ \det a_{ij} \neq 0.$$

The tensors $T^{\alpha\beta}_{1|ij}$, $T^{\alpha}_{2|i}$, $T^{\alpha\beta}_{3|i}$ *are determined from the metric and structure tensors* g_{ij} *and* F^{h}_{i} *of the space* $K_n^{o(m)}$.

This theorem was proved assuming that $K_n^{o(m)}$ and $\bar{K}_n^{o(m)}$ belong to the class C^3 [4]. We proved Theorem 1 if $K_n^{o(m)} \in C^3$ and $\bar{K}_n^{o(\bar{m})} \in C^2$. Further

Theorem 2. *Let* $K_n^{o(m)} \in C^r$ $(r \geqslant 3)$ *and* $\bar{K}_n^{o(\bar{m})} \in C^2$. *If* $K_n^{o(m)}$ *admits holomorphically-projective mapping onto* $\bar{K}_n^{o(\bar{m})}$ *then* $\bar{K}_n^{o(\bar{m})} \in C^r$.

The system of equations in Theorem 1 has at most one solution for the initial values at the point x_0: $a_{ij}(x_0)$, $\lambda_i(x_0)$ and $\tau(x_0)$. Hence, the general solution of this system depends on no more than $(n+2)(n+1)/2 - m(n-m+1)$ real parameters.

References

[1] Shirokov P. A. *Selected investigations on geometry.* – Kazan': Kazan' Univ. Press, 1966. – 432 p.

[2] Vishnevskij V., Shirokov P. A., Shurygin V. *Spaces over aglebras* – Kazan': Kazan' Izd. Kazansk. Univ, 1985. – 263 p.

[3] Mikeš J., et al. *Differential geometry of special mappings.* – Olomouc: Palacky Univ. Press, 2015. – 568 p.

[4] Shiha M., *On the theory of holomorphically-projective mappings of parabolically-Kählerian spaces.* – Opava: Math. Publ. 1993.– P. 157–160.

2- AND 3-TENSOR-STABLE POSITIVE QUBIT MAPS

S. N. Filippov[1], K. Yu. Magadov[2]

---

[1] *sergey.filippov@phystech.edu*, Moscow Institute of Physics and Technology

[2] —, Moscow Institute of Physics and Technology

Tensor product structures play a vital role in quantum information theory. Positivity of linear maps under tensor powers was analyzed in the recent seminal paper [1] where the notions of n-tensor-stable positive maps were introduced. Such maps were found to provide new bounds on quantum channel capacities.

Definition. *A linear map* $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_d) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_d)$ *is called* n*-tensor-stable positive if the map* $\Phi^{\otimes n}$ *is positive.*

We give a full characterization of 2- and 3-tensor-stable positive qubit maps ($d = 2$) [2]. We start by analysis of unital qubit maps Φ satisfying $\Phi[I] = I$. Such maps can be expressed in the form $\Phi[X] = W(\Upsilon[VXV^\dagger])W^\dagger$ where V and W are appropriate unitary operators, $\Upsilon[X] = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3}\lambda_j \mathrm{tr}[\sigma_j X]\sigma_j = \sum_{j=0}^{3} q_j \sigma_j X \sigma_j$, with $\sigma_0 = I$ and $\{\sigma_i\}_{i=1}^{3}$ being a conventional set of Pauli operators [3]. Thus, an n-qubit unital map $\Phi^{\otimes n}$ is positive if and only if $\Upsilon^{\otimes n}$ is positive.

Theorem 1. Υ *is 2-tensor-stable positive if and only if* Υ^2 *is completely positive, i.e.* $\lambda_0^2 \pm \lambda_3^2 \geqslant |\lambda_1^2 \pm \lambda_2^2|$.

Theorem 2. Υ *is 3-tensor-stable positive if and only if the following* 12 *inequalities are satisfied:*

$$\lambda_0^3 - \lambda_i^3 - 3\lambda_i\lambda_j^2 + 3\lambda_0\lambda_k^2 \geqslant 0,$$
$$\lambda_0^3 + \lambda_i^3 + 3\lambda_i\lambda_j^2 + 3\lambda_0\lambda_k^2 \geqslant 0,$$

where (i,j,k) *is a permutation of indices* $(1,2,3)$*, i.e.* $i,j,k = 1,2,3$ *and* $i \neq j \neq k \neq i$.

An interior map of the cone of positive non-unital qubit maps $\Phi : (\mathcal{B}(\mathcal{H}_2))^+ \mapsto (\mathcal{B}(\mathcal{H}_2))^+$ can be represented in the form of concatenation $\Phi[X] = B(\Upsilon[AXA^\dagger])B^\dagger$ where $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ are positive-definite operators [4,5]. As A and B are non-degenerate, the condition $\langle\varphi|\Phi^{\otimes n}[|\psi\rangle\langle\psi|]|\varphi\rangle \geqslant 0$ holds for all $|\psi\rangle, |\varphi\rangle \in \mathcal{H}_{2^n}$ if and only if $\langle\widetilde{\varphi}|\Upsilon^{\otimes n}[|\widetilde{\psi}\rangle\langle\widetilde{\psi}|]|\widetilde{\varphi}\rangle \geqslant 0$ holds for all $|\widetilde{\psi}\rangle, |\widetilde{\varphi}\rangle \in \mathcal{H}_{2^n}$, since $|\widetilde{\psi}\rangle = A^{\otimes n}|\psi\rangle$ and $|\widetilde{\varphi}\rangle = (B^\dagger)^{\otimes n}|\varphi\rangle$. Thus, the positivity of a tensor product of non-unital maps $\Phi^{\otimes n}$ is equivalent to the positivity of the tensor product of corresponding unital maps $\Upsilon^{\otimes n}$. In other words, the above theorems can be applied for characterization of 2- and 3-tensor-stable positive non-unital qubit maps too.

The study is supported by Russian Science Foundation under project No. 16-11-00084 and performed in Moscow Institute of Physics and Technology.

References

[1] Müller-Hermes A., Reeb D., Wolf M. M. *Positivity of linear maps under tensor powers* // J. Math. Phys. – 2016. – V. 57. – P. 015202.

[2] Filippov S. N., Magadov K. Yu. *Positive tensor products of qubit maps and 2-tensor-stable positive qubit maps* // Preprint arXiv:1604.01716 [quant-ph].

[3] Ruskai M. B., Szarek S., Werner E. *An analysis of completely-positive trace-preserving maps on* M_2 // Linear Algebra Appl. – 2002. – V. 347. – P. 159.

[4] Gurvits L. *Classical complexity and quantum entanglement* // J. Comput. System Sci. – 2004. – V. 69. – P. 448.

[5] Aubrun G., Szarek S. J. *Two proofs of Størmer's theorem* // Preprint arXiv:1512.03293 [math.FA].

NEW SIMPLE LIE *P*-ALGEBRA OF DIMENSION 248 OVER A FIELD OF CHARACTERISTIC 2

A.N. Grishkov[1]

---

[1] *shuragri@gmail.com*, University of Sao Paulo, Brazil

The classification of simple finite dimensional Lie algebras over fields of characteristic $p = 2$ and $p = 3$ is open and difficult problem. In the case of p-algebras this problem is more easy but still open too. In the case of characteristic $p = 2$ the last new simple finite dimensional Lie p-algebra (of dimension 34) was constructed by V. Kac and B. Weisfeiler in 1969 (see [1]).

We constructed (in collaboration with V.Kac) new simple finite dimensional Lie p-algebra E_{248} which is the direct product of Cartan special Lie p-algebra $S(5)$ of dimension 124 and dual $S(5)$-module $S(5)^*$. It is clear that $dimE_{248} = 248$.

References

[1] Kac V., Weisfeiler B. *Exponentials in Lie algebras of characteristic p.* – Izvestija AN USSR (ser. Math.) 35 (1971), p. 762–788 [English translation: USSR-Izvestija 5 (1971), 777-803].

WEIERSTRASS CONTINUOUS VARIETIES ARISING FROM COVERINGS OF COMPACT GROUPS AND TENSOR APPROXIMATION PROBLEMS

R. N. Gumerov[1]

---

[1] *renat.gumerov@kpfu.ru*, Kazan (Volga region) Federal University

Motivated by problems in topological groups theory and tensor analysis [1,2], we consider polynomials in one variable over Banach algebras of continuous functions.

As is well known, parameterized families of polynomials arise in different branches of Mathematics. For instance, in connection with the Weierstrass preparation theorem there naturally appear the covering mappings associated with the polynomials whose coefficients are holomorphic functions.

Let X be a topological space. A *Weierstrass polynomial* of degree $n \in \mathbb{N}$ over X is a mapping $R : X \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ of the form

$$R(x,z) = z^n + \sum_{j=1}^{n} f_j(x) z^{n-j},$$

where $x \in X, z \in \mathbb{C}$, and the coefficients $f_1, \ldots, f_n$ are continuous functions from X into $\mathbb{C}$. A Weierstrass polynomial R is said to be *separable* if, for every $x \in X$, the polynomial

$R(x, z)$ in the variable z with complex coefficients has no multiple root in $\mathbb{C}$. For a separable polynomial R, consider the subspace W in $X \times \mathbb{C}$ defined as follows:

$$W = \{(x, z) \in X \times \mathbb{C} \mid R(x, z) = 0\}.$$

The space W and the projection onto the first coordinate $pr : W \to X : (x, z) \mapsto x$ are called *a Weierstrass continuous variety* and *a polynomial covering mapping* associated with the Weierstrass polynomial R, respectively.

The properties of Weierstrass polynomials over algebras of continuous functions and polynomial coverings were studied by various authors (see, for instance, [3] and references therein).

One of the main tools in our study of Weierstrass continuous varieties associated with polynomials over compact groups is the covering group theorem [4, Theorem 1]. This theorem is a generalization of Pontryagin's theorem about lifting a group structure [5, Theorem 79] for not necessary locally connected compact groups. As an example, we consider the coverings of the P-adic solenoids studied in [6].

References

[1] Gumerov R. N. *Weierstrass polynomials and coverings of compact groups* // –Sib. Matem. Zhurn. –2013 –54(2) –P. 320–324 [Sib. Math. J –2013 –54(2) – P. 243–246.]

[2] Gumerov R. N., Vidunov S. I. *Approximation by matrices with simple spectra* // Lobachevskii J. Math. –2016 –Vol. 37. –№ 3 –P. 240–243 (in press).

[3] Hansen V. L. *Braids and Coverings — Selected Topics.* London Math. Soc. Stud. Texts, – Vol. 18, – Cambridge Univ. Press, – Cambridge, – 1989.

[4] Grigorian S. A., Gumerov R. N. *On the structure of finite coverings of compact connected groups.//* Topology Appl., –2006. – 153(18) – P. 3598-3614.

[5] Pontryagin L. S. *Continuous Groups.* – M.:Nauka. –1984.

[6] Gumerov R. N.*On finite-sheeted covering mappings onto solenoids//* Proc.Amer.Math.Soc. –2005 – 133 –P. 2771–2778.

ON GENERALIZATIONS OF ADS MODULES

P.T. Hai[1], T.C. Quynh[2]

---

[1] *haikien2004@yahoo.com.vn*, Department of Mathematics, Baria-Vungtau Teacher Training College, Vietnam

[2] *tcquynh@live.com*, Department of Mathematics, Danang University, Vietnam

In 2012, Alahmadi, Jain and Leroy considered the concept of ADS modules. A right module M over a ring R is said to be ADS if for every decomposition $M = S \oplus T$ and every complement T' of S, we have $M = S \oplus T'$. The authors Quynh and Kosan continued their work and obtained nice results of ADS modules (see [2]). In Proposition 2.2 of [1], the authors showed that if M and N are modules and $X = N \oplus M$, then N is essentially pseudo

M-injective if and only if for any complement K of N in X with $K \cap M = 0$, $X = N \oplus K$. Combination of the above problems, we consider generalizations of ADS modules, named generalized ADS modules.

Definition. *A module M is called generalized ADS if, for every decomposition* $M = S \oplus T$ *of M and every complement* T' *of S with* $T' \cap T = 0$*,* $M = S \oplus T'$*.*

We have the implication $ADS \Longrightarrow generalized\ ADS$. However, the converse is not true in general. The following example show that a generalized ADS module is not an ADS module:

Example. Let $R = \begin{pmatrix} \mathbb{F} & \mathbb{F} & \mathbb{F} \\ 0 & \mathbb{F} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{F} \end{pmatrix}$ where $\mathbb{F}$ is a field which has 2 elements. Call $N = e_{11}R$. We have N be an automorphism-invariant module, indecomposable, not quasi-injective with $End(N)$ local. Consider $M = N \oplus N$. Then, M is a generalized ADS module but M is not an ADS module.

It is well-known that M is ADS if, for any decomposition $M = A \oplus B$, then A and B are relatively injective. For generalized ADS modules, we obtained the following results:

Theorem. *M is generalized ADS if, for any decomposition* $M = A \oplus B$*, then A and B are relatively essentially pseudo-injective.*

We know that every direct summand of an ADS module is an ADS module. However, direct summand of generalized ADS modules under weak conditions.

Proposition. *Let M be a generalized ADS module. Then:*

(1). Every CS direct summand of M is generalized ADS.

(2). If M is a distributive module then every direct summand of M is generalized ADS.

In the following theorem, we study the properties related to a generalized ADS module M when it is semisimple in the category $\sigma[M]$.

Theorem. *The following conditions are equivalent for a module M:*

(1). M is semisimple.

(2). Every module in $\sigma[M]$ *is generalized ADS.*

(3). Every finitely generated module in $\sigma[M]$ *is generalized ADS.*

(4). Every 3-generated module in $\sigma[M]$ *is generalized ADS.*

References

[1] Alahmadi A., Er N. and Jain S. K. *Modules which are invariant under monomorphisms of their injective hulls* // J. Aust. Math. Soc. — 2005. — Vol. 79. — P. 349-360.

[2] Quynh T. C., Kosan M. T. *On ADS modules and rings* // Communications in Algebra — 2004. — Vol. 42. — P. 3541–3551.

CHOQUET ORDER OF ORTHOGONAL MEASURES AND ABELIAN SUBALGEBRAS

J. Hamhalter[1], E. Turilova[2]

---

[1] *hamhalte@math.feld.cvut.cz*, Czech Technical University
[2] *Ekaterina.Turilova@kpfu.ru*, Kazan Federal University

The aim of the paper is to show equivalence between two seemingly different ordered structures resulting in functional analysis. On one side, it is the structure of abelian subalgebras of an operator algebra ordered by the set theoretic inclusion. This structure covers the normal part of the whole algebra and it is an important operator theoretic invariant. It has received a great deal of attention recently in connection with topos approach to foundations of quantum theory and plays a central role in "bohrification program" for quantum structures. The other structure has geometric content. It is the the set of orthogonal representing measures on a compact convex set endowed with the Choquet order. This order plays a decisive role in Choquet theory and has important applications to decompositions of states in quantum mechanics and elsewhere.

Let us state a few definitions. Given a von Neumann algebra $\mathscr{M}$, we shall denote by $\mathcal{V}(\mathscr{M})$ the poset of all abelian von Neumann subalgebras containing the unit of $\mathscr{M}$. The order is given by the set theoretic inclusion.

Let K be a compact convex set in a locally convex topological space X. The symbol $C(K)$ will stand for the C^*-algebra of all continuous complex functions on K. Let $A(K)$ and $P(K)$ represent the set of all continuous affine functions on K and all continuous convex functions on K, respectively. By a Radon measure μ on K we mean an element in the dual space $C(K)^*$, canonically identified with a regular Borel measure $d\mu$ on K. The set of all probability Radon measures on K will be denoted by $M_1^+(K)$. Let $\mu \in M_1^+(K)$. The point $b(\mu) \in K$ is called the *barycenter* of μ if, for each $a \in A(K)$, $a(b(\mu)) = \int_K a(\omega)\, d\mu(\omega)$. Measure μ is called *representing* for a given point $x \in K$ if x is the barycenter of μ. The set of all representing measures of x will be denoted by $M_x^+(K)$. Let μ and ν be positive Radon measures. The Choquet order relation is defined in the following way [1]:

$$\mu \prec \nu \quad \text{if } \mu(f) \leqslant \nu(f) \text{ for all } f \in P(K).$$

Let us now specify the convex theory to the state spaces of C^*-algebras. Let $S(\mathscr{A})$ be the set of all states (norm one positive functionals) on C^*-algebra $\mathscr{A}$ endowed with the weak*-topology. It is a compact convex set. Let us fix a state φ on $\mathscr{A}$. The measure $\mu \in M_\varphi^+(S(\mathscr{A}))$ is called *orthogonal* if, for each Borel set $E \subset S(\mathscr{A})$, the positive functionals φ_E and $\varphi_{S(\mathscr{A})\setminus E}$ on $\mathscr{A}$ given by $\varphi_E(a) = \int_E a(\omega)\, d\mu(\omega)$ and $\varphi_{S(\mathscr{A})\setminus E}(a) = \int_{S(\mathscr{A})\setminus E} a(\omega)\, d\mu(\omega)$ are orthogonal. (Recall that the positive functionals are called orthogonal if there is no nonzero positive functional dominated by both of them.)

Let us denote by $O_\varphi(\mathscr{A})$ the set of all orthogonal measures in $M_\varphi^+(S(\mathscr{A}))$.

We have proved the following main result linking Choquet order with the set theoretic order on abelian subalgebras.

Theorem. *Let φ be a faithful normal state on a von Neumann algebra $\mathscr{M}$. Then $O_\varphi(\mathscr{M})$ is order isomorphic to $\mathcal{V}(\mathscr{M})$.*

An important role in the poset $\mathcal{V}(\mathscr{M})$ is played by finite dimensional subalgebras that are unions of finitely many atoms. Given a von Neumann algebra $\mathscr{M}$, let $\mathcal{V}^{fin}(\mathscr{M})$ denote the set of all finite dimensional unital abelian subalgebras of $\mathscr{M}$ ordered by the set theoretic inclusion. For a state φ on a C^*-algebra $\mathscr{A}$ let $O_\varphi^{fin}(\mathscr{A})$ stand for the the set of all measures in $O_\varphi(\mathscr{A})$ that have finite support ordered by Choquet order. We have identified these two structures by showing that $O_\varphi^{fin}(\mathscr{M})$ is order isomorphic to $\mathcal{V}^{fin}(\mathscr{M})$.

References

[1] Takesaki M. *Theory of Operator Algebras I.* – Berlin.: Springer, 2001. – 416 c.

ON CONTROL OF N-LEVEL QUANTUM SYSTEMS BY NON-SELECTIVE MEASUREMENTS

N. Il'in[1], A. Pechen[2]

---

[1] *ilyn@mi.ras.ru*, The National University of Science and Technology MISiS
[2] *pechen@mi.ras.ru*, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences

Manipulation by quantum systems using back-action of non-selective quantum measurements is considered as a useful resource for various problems [1,2,3]. We consider the problem of maximizing the probability of transition from a given initial state to a given final state of an n–level quantum system using non–selective quantum measurements as control action [4]. We estimate from below the maximum transition probability attained by a fixed number of measurements and find optimal observables which achieve this estimate.

The evolution of the density matrix ρ of a quantum system between measurements is described by Schrödinger equation

$$i\frac{d\rho}{dt} = [H, \rho].$$

Hence density matrix between measurements is transformed by unitary evolution operator $U_t = e^{-iHt}$: $\rho \to \mathscr{U}_t(\rho) := e^{-iHt}\rho e^{iHt}$. Under the influence of non–selective measurement of an observable Q, density matrix of the system is transformed according to the following rule: $\rho \to \mathscr{M}_Q(\rho) := \sum_i P_i \rho P_i$. Here P_i are spectral projectors of Q. Non–selective measurements of Q_k at time instants t_k and unitary evolution during time intervals $[t_k, t_{k+1}]$ together define the following transformation of the density matrix: $\rho_N = \mathscr{U}_{(T-t_{N-1})} \circ \mathscr{M}_{Q_N} \circ \mathscr{U}_{(t_{N-1}-t_{N-2})} \dots \mathscr{M}_{Q_1} \circ \mathscr{U}_{t_1}(\rho_0)$. The problem of maximizing the transition probability from an initial state $|\psi_i\rangle$ to a final state $|\psi_i\rangle$ at time T on the set consisting of sequences of observables $Q_1, \dots, Q_N$ can be formulated as maximization of the transition probability $P_N[Q_1, \dots\ Q_N] = \langle\psi_f|\mathscr{U}_{(T-t_{N-1})} \circ \mathscr{M}_{Q_N} \circ \dots \circ \mathscr{M}_{Q_1} \circ \mathscr{U}_{t_1}(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|)|\psi_f\rangle$. Optimal observables $Q_1^{\text{opt}}, \dots, Q_N^{\text{opt}}$ are those which satisfy $P_N^{\max} := \max\limits_{Q_1, \dots Q_N} P_N[Q_1, \dots Q_N] = P_N[Q_1^{\text{opt}}, \dots, Q_N^{\text{opt}}]$.

We consider the non-trivial case $|\psi_f\rangle \neq |\psi_i\rangle$. For this case, we can define the matrices $\sigma_x = |\psi_i\rangle\langle\psi_i^\perp| + |\psi_i^\perp\rangle\langle\psi_i|$, $\sigma_y = i(|\psi_i\rangle\langle\psi_i^\perp| - |\psi_i^\perp\rangle\langle\psi_i|)$, and $\sigma_z = \mathbb{I} - 2|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. Here $|\psi_i^\perp\rangle = \psi/||\psi||$, where $\psi = |\psi_f\rangle - \langle\psi_i|\psi_f\rangle|\psi_i\rangle$.

Theorem. *Let* $|\psi_i\rangle$ *and* $|\psi_f\rangle$ *be initial and final states of the system,* $|\psi_f\rangle \neq |\psi_i\rangle$, $\boldsymbol{\lambda} := \langle\psi_f|\boldsymbol{\sigma}|\psi_f\rangle$ *and* $\mathbf{a} := \langle\psi_i|\boldsymbol{\sigma}|\psi_i\rangle$. *Then maximum* $P_N^{\max}[\psi_i, \psi_f]$ *of the transition probability satisfies the estimate*

$$P_N^{\max}[\psi_i, \psi_f] \geqslant \frac{1}{2}\Big(1 + \Big[\cos\frac{\Delta\varphi}{N+1}\Big]^{N+1}\Big).$$

Here $\Delta\varphi = \angle(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda}) = \arccos\left[2|\langle\psi_f|e^{-iTH}|\psi_i\rangle|^2 - 1\right]$.

References

[1] Pechen A.N., Ilin N.B., Shuang F., Rabitz H. *Quantum control by von Neumann measurements* //Phys. Rev. A. – 2006. – V. 74. – P. 052102.

[2] Wiseman H. W. *Quantum control: Squinting at quantum systems* //Nature (London). – 2011. – V. 470. – P. 178.

[3] Pechen A. N., Trushechkin A. S. *Measurement–assisted Landau-Zener transitions* //Phys. Rev. A. – 2015. – V. 91. – P. 052316.

[4] Pechen A.N., Ilin N.B. *On the problem of maximization of the transition probability for n-level quantum system using nonselective measurements* // Proceeding of Steklov Mathematical Institute. — 2016. — V. 293. — (in press).

A FAST ALGORITHM FOR COUNTING GCD OF NATURAL NUMBERS

S. T. Ishmukhametov[1], R. G. Rubtsova[2]

---

[1] *sishmukh@ksu.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

[2] *rrubtsov@kpfu.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

In our report we develop a new algorithm for counting the greatest common divisor GCD of natural numbers. Our algorithm is based on the k-ary GCD algorithm and uses the Farey Series to approximate the relation A/B of given naturals.

We remind that k-ary algorithm is a generalization of the binary GCD algorithm and was invented in 1990 by J. Sorenson [1]. Let $k = 2^S$ be chosen, and $A > B > 0$ be naturals that have no common divisors with k (i.e. A, B are odd). The k-ary algorithm consists of iterations. At each iteration the algorithm searches for small integers x and y such that

$$Ax + By \equiv 0 \mod k. \tag{1}$$

Then set $C = (Ax + By)/k$ is defined and the original pair $(A;B)$ is replaced by a new pair $(B;C)$ or $(C;B)$ depending on whether $C < B$ holds or not. The procedure stops when second argument B becomes equal to 0. Then the first argument A is the GCD that we need or its multiple. To remove extra factors from GCD g that we found we need to apply the standard Euclid algorithm $g = Euclid\_GCD(A; Euclid\_GCD(B; g))$, where A, B are original integers.

Our Algorithm

Let q be equal to A/B mod k, $0 \leqslant q < k$. From (1) we have

$$y \equiv -Ax/B(\operatorname{mod} k) = -qx(\operatorname{mod} k) \ \rightarrow \ y = -qx + ks \text{ for some } s \in \mathbf{Z}.$$

So we have a possibility to diminish C by changing parameters x and s. Let us define a rational $r = A/B$, $r > 1$. Then

$$|Ax + By| = B|rx + y| = B|rx - qx + ks| = Bk|((r-q)x)/k + s|,$$

Let $r_0 = (r-q)/k \bmod 1$, $0 \leqslant r_0 < 1$. We search for an integer $x < k$ such that function $d(x) = r_0 x$ takes a minimal value.

Theorem 1. *For any* $\alpha \in (0;1)$*, there exists a fraction* m/n *with* $0 < m, n < k$ *such that* $\rho(\alpha, m/n) = |\alpha - m/n| \leqslant 1/(k-1)$.

Now we can give a sketch of instructions for the Algorithm:

1. Let $k = 2^s$ and odd integers $A > B > 0$ be given. Calculate $r = A/B$ and $q = A/B$ (mod k) and define $r_0 = (r-q)/k \bmod 1$, $0 \leqslant r_0 < 1$, $s = (r-q)/k - r_0$.

2. Find a fraction m/n close to $\alpha = r_0$ as in Theorem 1.

3. Define $x = n$ and $y = -((q+sk)x + mk)$. Set C equal to $(Ax+By)/k$. While C is even, divide C by 2.

4. Define a new pair $(B;C)$ and go to the next step.

Example. $A = 30825$, $B = 583$, $k = 16$.

1. $r = A/B = 52{,}87$, $q = \frac{A}{B} \bmod k = \frac{9}{7} \bmod 16 = 15$, $r_0 = (r-q)/k \bmod k = 0{,}37$, $s = (52{,}87 - 15)/16 - 0{,}37 = 2$.

2. Find $m/n = 4/11$.Define $x = 11$, $y = -(15 + 2\cdot 16)\cdot 11 - 4\cdot 16 = -581$. Calculate $C = (Ax+By)/k = (30825\cdot 11 - 583\cdot 581)/16 = 22$. After reduction by 2, we obtain $C = 11$.

Conclusion

Our Algorithm has the same complexity estimate as the standard k-ary method, namely $O(n^2/\ln k)$, when k does not exceed a processor's word. But at each iteration its coefficient of reduction A/C exceeds $k-1$ and significantly overcomes the analogous coefficient of the standard k-ary equal to $\sqrt{k}/2$.

References

[1] Sorenson J. *The k-ary GCD Algorithm//* University of Wisconsin-Madison, Tech. Report, 1990. – P. 1–20.

SOME PROBLEMS FOR LINEAR MEASURE ON 3X3 MATRICES

M. Matvejchuk[1]

---

[1] *Marjan.Matvejchuk@yandex.ru*, Kazan National Reserch Technical University – KAI, Kazan, Russia

In the book [1] problems were formulated about description of the measure on quantum logics (see Problem 110, page 371, and the Problem 88, page 547). In present paper we formulate problems whose solution can solve Birkhoff's problems in quantum logics (of projections in Hilbert space with conjugation operator).

Let $\mathbb{R}^3$ be the unitary (=Hermitian) real space with usual scalar product $(\cdot,\cdot)$ and let $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ be the unit sphere in $\mathbb{R}^3$. Denote by B the set of all self-adjoint operators of the form $c[(\cdot,e)e^{\perp} + (\cdot,e^{\perp})e]$. Here $c \in \mathbb{R}$, e, $e^{\perp} \in S^2$, $(e, e^{\perp}) = 0$.

For any operator $(\cdot,e)e^\perp + (\cdot,e^\perp)e$ there exist vectors ψ, $\psi^\perp \in S^2$, $(\psi,\psi^\perp) = 0$ such that $(\cdot,e)e^\perp + (\cdot,e^\perp)e = (\cdot,\psi)\psi - (\cdot,\psi^\perp)\psi^\perp$. Let us represent a number $c \geqslant 0$ in the form $c = ab$, $a \geqslant 0$, $a^2 - b^2 = 1$.

Definition. *Two operators* $a_1b_1[(\cdot,e_1)e_1^\perp + (\cdot,e_1^\perp)e_1]$, $a_2b_2[(\cdot,e_2)e_2^\perp + (\cdot,e_2^\perp)e_2]$ *are said to be orthogonal*

$$\text{if } a_1a_2(e_1,e_2) = b_1b_2(e_1^\perp,e_2^\perp) \text{ and } a_1b_2(e_1,e_2^\perp) = -b_1a_2(e_1^\perp,e_2).$$

Note that: 1) Any maximal set of mutually orthogonal operators includes three elements. 2) Let $a_1b_1[(\cdot,e_1)e_1^\perp+(\cdot,e_1^\perp)e_1]$, $a_2b_2[(\cdot,e_2)e_2^\perp+(\cdot,e_2^\perp)e_2]$, $a_3b_3[(\cdot,e_3)e_3^\perp+(\cdot,e_3^\perp)e_3]$ be mutually orthogonal. Then

$$a_1b_1[(\cdot,e_1)e_1^\perp + (\cdot,e_1^\perp)e_1] + a_2b_2[(\cdot,e_2)e_2^\perp + (\cdot,e_2^\perp)e_2] + a_3b_3[(\cdot,e_3)e_3^\perp + (\cdot,e_3^\perp)e_3] = 0.$$

Define a function $F : B \to \mathbb{R}$ with the properties:

(1) $F(ab[(\cdot,e))e^\perp + (\cdot,e^\perp)e]) = abF((\cdot,e)e^\perp + (\cdot,e^\perp)e)$ (then $F((\cdot,\psi)\psi - (\cdot,\psi^\perp)\psi^\perp) = -F((\cdot,\psi^\perp)\psi^\perp - (\cdot,\psi)\psi)$ were $ab[(\cdot,\psi)\psi - (\cdot,\psi^\perp)\psi^\perp] \in B$);

(2) $a_1b_1F(\cdot,\psi_1)\psi_1 - (\cdot,\psi_1^\perp)\psi_1^\perp) + a_2b_2F(\cdot,\psi_2)\psi_2 - (\cdot,\psi_2^\perp)\psi_2^\perp) =$

$$= F(a_1b_1[(\cdot,e_1)e_1^\perp + (\cdot,e_1^\perp)e_1]) + a_2b_2[(\cdot,e_2)e_2^\perp + (\cdot,e_2^\perp)e_2]$$

for any mutually orthogonal operators $a_1b_1[(\cdot,e_1)e_1^\perp+(\cdot,e_1^\perp)e_1]$, $a_2b_2[(\cdot,e_2)e_2^\perp+(\cdot,e_2^\perp)e_2]$.

Problem 1. *Can we extend the function* $F(\cdot)$ *to the linear functional on the set of all self-adjoint operators in* $\mathbb{R}^3$?

It is interesting to prove the weak variant of Problem 1.

Problem 2. *Does the equality*

$$F((\cdot,e_1)e_1 - (\cdot,e_2)e_2) + F((\cdot,e_2)e_2 - (\cdot,e_3)e_3) = F((\cdot,e_1)e_1 - (\cdot,e_3)e_3)$$

hold for all mutually orthogonal vectors e_1, e_2, $e_3 \in S^2$?

References

[1] Birhoff, G., *Lattice theory.* — Providence Rhode, Island 1967. Russian transl.: M. «Nauka», 1984.

ON CONFORMAL AND PROJECTIVE MAPPINGS OF COMPLETE RIEMANNIAN MANIFOLDS

J. Mikeš[1], S. E. Stepanov[2]

---

[1] *josef.mikes@upol.cz*, Palacky University of Olomouc, Czech Republic
[2] *s.e.stepanov@mail.ru*, Finance University under the Government of Russian Federation

Let (M,g) be an n-dimensional ($n \geqslant 2$) complete Riemannian manifold. Recall here that $f \in C^2M$ is *subharmonic* (resp. *superharmonic* or *harmonic*) if

$$\Delta f \geqslant 0 \quad (\text{resp. } \Delta f \leqslant 0 \text{ or } \Delta f = 0)$$

for the Laplace-Beltrami operator $\Delta f = \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\, f)$.

The following lemma is true.

Lemma. *If (M,g) is a simply connected complete Riemannian manifold, then any superharmonic (or subharmonic) function $f \in C^2 M$ with $\|\mathrm{grad}\, f\| \in L^1(M,g)$ is harmonic.*

A diffeomorphism $f\colon (M,g) \to (\bar{M},\bar{g})$ onto another Riemannian manifold $(\bar{M},\bar{g})$ is called *conformal* if it preserves angles between any pair of curves. From the Lemma above we conclude that the following theorem holds.

Theorem 1. *Let (M,g) be an n-dimensional $(n \geqslant 3)$ simply connected complete Riemannian manifold, and $f: (M,g) \to (\bar{M},\bar{g})$ be a conformal diffeomorphism onto another Riemannian manifold $(\bar{M},\bar{g})$ such that*

$$\bar{g} = \mathrm{e}^{2\sigma} g \quad \text{and} \quad s \leqslant \mathrm{e}^{2\sigma} \bar{s}$$

for some function $\sigma \in C^2 M$ and the scalar curvatures s and $\bar{s}$ of (M,g) and $(\bar{M},\bar{g})$, respectively. If $\|\mathrm{grad}\,\sigma\| \in L^1(M,g)$, then f is a homothetic map.

A diffeomorphism $f\colon (M,g) \to (\bar{M},\bar{g})$ is called *projective* or *geodesic* mapping if f maps any geodesic curve in (M,g) onto a geodesic curve in $(\bar{M},\bar{g})$. In this case from the Lemma above we conclude that the following theorem is true.

Theorem 2. *Let (M,g) be a simply connected complete Riemannian manifold and $f: (M,g) \to (\bar{M},\bar{g})$ be a projective diffeomorphism such that*

$$\mathrm{trace}_g \overline{Ric} \geqslant s \quad \text{or} \quad \mathrm{trace}_g \overline{Ric} \leqslant s$$

for the scalar curvature s and the Ricci tensor $\overline{Ric}$ of (M,g) and $(\bar{M},\bar{g})$, respectively. If the gradient of the function $\log\left(\frac{\det \bar{g}}{\det g}\right)$ has integrable norm on (M,g) then f is an affine map.

The work of the second author was supported by RBRF, grant 16-01-00053 (Russia).

References

[1] Mikeš J., Stepanov S. E. et al. *Differential geometry of special mappings.* – Olomouc: Palacky Univ. Press, 2015. – 568 p.

COMPUTABLE NUMBERINGS AND REDUCIBILITY

M. Mustafa[1]

---

[1] *manat.mustafa@nu.edu.kz*, Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan

Uniform computations of families of computably enumerable sets, also called computable numberings, are a classical object of research in the theory of algorithms. The theory of numberings is one of the fundamental topics in computability theory and mathematical logic. It is basically due to Gödel's idea to code countable families of objects by numbers, so that objects of the family cann be effectively identified with numbers, or indices, and studied from their indices. Given its relevance, the theory of numberings has seen the contributions of many distinguished scholars. While numberings are a powerful tool to use the set of natural numbers in order to study families of constructive objects (in recursive algebra, recursive model theory, etc.), they are an interesting object of study in themselves: Here, an important device is that of reducibility between numberings, where a numbering is reducible to another numbering, if there is an effective way to go from indices of an object in the first numbering to indices of the same object in the second numbering. Thus the relative complexity of numberings of objects of a same family can be measured by this notion of reducibility, and gives rise to the so called Rogers upper semilattice of the family, whose elements are the degrees of numberings, where two numberings have the same degree if they are reducible to each other.

Aim of this talk considers reductions between types of numberings; these reductions preserve the algebraic properties of Roger's Semilattices. It is shown how these reductions can be used to answer some open problems. Furthermore, it is shown that for the basic types of numberings, one can reduce the left-r.e. numberings to the r.e. numberings and the k-r.e. numberings to the $(k+1)$-r.e. numberings; all further reductions are obtained by concatenating these reductions.

The part of the work is supported by Social Policy grant from Nazarbayev University.

References

[1] S.A. Badaev . Steffen Lempp. *A decomposition of the Rogers semilattice of a family of d.c.e. sets.* The Journal of Symbolic Logic, 74: 618 –640, 2009.

[2] Yu. L. Ershov. *Theory of Numberings.* Nauka, Moscow, 1977. In Russian.

[3] Sergey S. Goncharov. Steffen Lempp . D. Reed Solomon. *Friedberg numberings of families of n-computably enumerable sets.* Algebra and Logic, 41:81–86, 2002.

[4] Bjørn Kjos-Hanssen. Frank Stephan. Jason Teutsch. *Arithmetic complexity via effective names for random sequences.* ACM Transactions on Computational Logic, 13:24:1-24:18, 2012.

FINITELY GENERATED FLAT MODULES IN WISBAUER CATEGORY

M. F. Nasrutdinov[1]

---

[1] *marat.nasrutdinov@kpfu.ru*, Kazan Federal University, Nikolai Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics

Let R be an associative ring. For an R-module M we denote by $\sigma[M]$ the category of those R-modules which are submodules of M-generated modules or the *Wisbauer category.*

$\sigma[M]$ is the full subcategory of the category of right R-modules consisting of all submodules and homomorphic images direct sums of copies of the module M. Note that $\sigma[R]$ coincides with the category of all modules.

It is well known [4] that the properties of module categories of ring allow to characterize the properties of the ring.

A classic result of this kind is that every R-module is projective if and only if the ring R is a direct sum of matrix rings over division ring.

In the book [2] Wisbauer has been shown that many of the homologous classifications can be transferred to the category of $\sigma[M]$.

The report examines the properties of the module M, under which category of $\sigma[M]$ is projective every finitely generated flat module.

Note that the ring in which any finitely generated flat module is projective first considered prof. Sakhaev (see. [3]) and have been studied by many authors (see [4]). In particular, it remains an open question as to whether the condition is done all right projectivity of finitely generated flat modules if all left projective finitely generated flat modules.

References

[1] Skornjakov L. A., *Homological classification of rings//* Mat. Vesnik. – 1967. – 4 (19). – P. 415-434.

[2] Wisbauer R. *Foundations of Module and Ring Theor.* – Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.

[3] Sakhaev I. *Finite generation of projective modules* (in russia)// Izv.VUZov. Mat. – 1977. – № 9. – P. 69–79.

[4] Puninski G., Rothmaler Ph. *When every finitely generated flat modules projective //* J. Algebra. – 2004. – V. 277. – P. 542–558.

ON AUTOMORPHISM-INVARIANT RINGS AND MODULES

T.C. Quynh[1]

In this talk, we study rings having the property that every right ideal is automorphism-invariant. Such rings are called right a-rings. It is shown that (1) a right a-ring is a direct sum of a square-full semisimple artinian ring and a right square-free ring, (2) a ring R is semisimple artinian if and only if the matrix ring $\mathbb{M}_n(R)$ is a right a-ring for some $n > 1$, (3) every right a-ring is stably-finite, (4) a right a-ring is von Neumann regular if and only if it is semiprime, and (5) a prime right a-ring is simple artinian. We also describe the structure of an indecomposable right artinian right non-singular right a-ring as a triangular matrix ring of certain block matrices.

Definition. *A module M is called automorphism-invariant if M is invariant under any automorphism of its injective envelope.*

Rings all of whose right ideals are automorphism-invariant are called right a-rings

Example. Consider the ring R consisting of all eventually constant sequences of elements from $\mathbb{F}_2$. Clearly, R is a commutative automorphism-invariant ring as the only automorphism of its injective envelope is the identity automorphism. Hence R is an a-ring by the above lemma. But R is not a q-ring because R is not self-injective.

---

[1] *tcquynh@dce.udn.vn, tcquynh@live.com*, Department of Mathematics, Danang University, Vietnam

Theorem. *A right a-ring is a direct sum of a square-full semisimple artinian ring and a right square-free ring.*

Theorem. *A ring R is semisimple artinian if and only if the matrix ring $\mathbb{M}_n(R)$ for some $n > 1$ is an a-ring.*

Theorem. *If R is a right a-ring, then R is stably-finite, that is, every matrix ring over R is directly-finite.*

Theorem. *A right a-ring is von Neumann regular if and only if it is semiprime, and a prime right a-ring is simple artinian.*

References

[1] Lee T. K., Zhou Y. *Modules which are invariant under automorphisms of their injective hulls* // J. Algebra and Appl. 12, 2 (2013), 9 p.

[2] Tamer Kosan M., Quynh T. C. and Srivastava A. K. *Rings with each right ideal automorphism-invariant* // Journal of Pure and Applied Algebra, 220(4), 2016, p. 1525–1537.

[3] Jain S. K., Mohamed S., Singh S. *Rings in which every right ideal is quasi-injective* // Pacific J. Math. 31 (1969), p. 73–79.

[4] Jain S. K., Srivastava A. K., Tuganbaev A. A. *Cyclic Modules and the Structure of Rings*. — Oxford : Oxford Mathematical Monographs, Oxford Univ. Press, 2012.

MODULES WHICH ARE COINVARIANT UNDER IDEMPOTENTS OF THEIR COVERS

T.C. Quynh[1], A.N. Abyzov, P.H. Tin

---

[1] *tcquynh@dce.udn.vn; tcquynh@live.com*, Department of Mathematics, Danang University, Vietnam

In this paper we introduce and study the dual notion of $\mathcal{X}$-idempotent-invariant modules. Namely, a right R-module M is called $\mathcal{X}$-idempotent-coinvariant if there exists an $\mathcal{X}$-cover $p\colon X \to M$ satisfying that for any idempotent $g \in End(X)$ there exists an endomorphism $f\colon M \to M$ such that $f \circ p = p \circ g$. Several characterizations of $\mathcal{X}$-idempotent-coinvariant modules are provided and used to describe some well-known classes of rings.

Definition. *Let M be a R-module. We will say that M is $\mathcal{X}$-idempotent-coinvariant if there exists an $\mathcal{X}$-cover $p\colon X \to M$ satisfying that for any idempotent $g \in End(X)$ there exists an endomorphism $f : M \to M$ such that $f \circ p = p \circ g$.*

Example. (i) If $\mathcal{X} = \mathrm{Mod} - R$, then each right R-module is trivially $\mathcal{X}$-idempotent-coinvariant.

(ii) Let R be a right perfect ring. If $\mathcal{X}$ is the class of all projective modules, then $\mathcal{X}$-idempotent-coinvariant modules are precisely the quasi-discrete modules.

Theorem. *Let $p : X \to M$ be an epimorphic $\mathcal{X}$-cover. Then M is $\mathcal{X}$-idempotent-coinvariant if and only if* $\mathrm{Ker}\,(p)$ *is invariant under every idempotent endomorphism of X.*

Theorem. *Let $f \in \mathbb{Z}[x]$ - decomposable monic polynomial of degree $n > 1$. Assume $p\colon X \to M$ is an $\mathcal{X}$ - cover where $\mathcal{X}$ is closed under isomorphisms and finite direct sums. The following conditions are equivalent:*

(i) M is $\mathcal{X}$-endomorphism-coinvariant.

(ii) If for each $\phi \in End(X^n)$ for which equality $f(\phi) = 0$ is executed, there is a $\psi \in End(M^n)$ such that $\psi \circ p^n = p^n \circ \phi$.

Definition. *We call a module M $\mathcal{X}$-discrete if,*

(i) M is $\mathcal{X}$-idempotent-coinvariant.

(ii) If $f \in End(M)$ with $f \circ p = p \circ g$ for some automorphism g of X, then f is an automorphism of M.

Theorem. *Assume that M is an $\mathcal{X}$-discrete module. Then $End(M)$ is a semiregular ring. Moreover, $J(End(M)) = \nabla(M)$.*

References

[1] Lee T. K., Zhou Y. *Modules which are invariant under automorphisms of their injective hulls* // J. Algebra and Appl. 12, 2 (2013), 9 p.

[2] Tamer Kosan M., Quynh T. C. and Srivastava A. K. *Rings with each right ideal automorphism-invariant* // Journal of Pure and Applied Algebra, 220(4), 2016, p. 1525–1537.

[3] Jain S. K., Mohamed S., Singh S. *Rings in which every right ideal is quasi-injective* // Pacific J. Math. 31 (1969), p. 73–79.

[4] Jain S. K., Srivastava A. K., Tuganbaev A. A. *Cyclic Modules and the Structure of Rings.* — Oxford Mathematical Monographs, Oxford Univ. Press, 2012.

[5] Thuyet L. V., Dan P. and Quynh T. C. *Modules which are invariant under idempotents of their envelopes* // Colloquium Mathematicum, 143(2), 2016, p. 237–250.

ON CONTROL LANDSCAPES FOR QUANTUM SYSTEMS

A. Pechen[1]

---

[1] *pechen@mi.ras.ru*, The National University of Science and Technology MISiS, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences

The analysis of objective functionals which describe various quantum control problems attracts high attention of researchers [1, 2, 3]. If a quantum system is isolated from the environment, its evolution under the action of coherent control can be described by the Schrödinger equation for an unitary evolution operator U_t:

$$i\frac{dU_t}{dt} = (H_0 + f(t)V)U_t, \qquad U_{t=0} = \mathbb{I}.$$

Here $f(t) \in L^1([0,T];\mathbb{R})$ is the control, e.g., a shaped laser pulse, H_0 and V are free and interaction Hamiltonians. For an n–level quantum system, H_0 and V are $(n \times n)$-Hermitian matrices.

First important for applications class of objective functionals describes quantum average of an observable A (a Hermitian operator) of the system at some final time $T > 0$:

$$\mathcal{J}_A[f] = \mathrm{Tr}(U_T \rho_0 U_T^\dagger A).$$

Here ρ_0 is the initial density matrix of the system.

Another class of objective functionals describes the problem of gate or process generation for an n–level quantum system. Let $W \in SU(n)$ be a special unitary matrix. The goal of control is to find such f that U_T is as close as possible (up to unphysical phase) to the target unitary matrix W. This goal can be described as maximization of the objective functional

$$\mathcal{J}_W[f] = \frac{1}{n^2}|\mathrm{Tr}(W^\dagger U_T)|^2.$$

Much interest is directed towards analysis of traps, that is, local but not global extrema of the objective functionals [1]. We will discuss the following two results on this topic.

First result is the existence of second-order traps for some systems with $n \geqslant 3$ described by the following

Theorem 1 ([2]). *Let* $[H_0, V] \neq 0$ *and* $V_{ij} = 0$ *for some* $i \neq j$ *in the eigenbasis* $|i\rangle$ *of* H_0. *Then there exist* ρ_0 *and* A *such that the control* $f(t) \equiv 0$ *is a second-order trap of* $\mathcal{J}_A$.

Second result is the absence of traps for $n = 2$. Define

$$T_0 := \frac{\pi}{|H_0 - (1/2)\mathrm{Tr}H_0 + f_0 V\|}, \quad f_0 := -\frac{\mathrm{Tr}(H_0 V)}{\mathrm{Tr}(V^2)}.$$

Theorem 2 ([4]). *Let* $n = 2$ *and* $[H_0, V] \neq 0$. *If* $T \geqslant T_0$*, then all maxima and minima of the objective functionals* $\mathcal{J}_A$ *and* $\mathcal{J}_W$ *are global. If* $f \neq f_0$*, then* f *is not a trap for any* $T > 0$.

References

[1] Rabitz H., Hsieh H., Rosenthal C. *Quantum optimally controlled transition landscapes* // Science. – 2004. – V. 303. – P. 1998.

[2] Pechen A. N., Tannor D. J. *Are there traps in quantum control landscapes?* // Phys. Rev. Lett. – 2012. – V. 108. – P. 198902.

[3] de Fouquieres P., Schirmer S. G. *A closer look at quantum control landscapes and their implication for control optimization* // Inf. Dim. Anal., Quant. Probab. and Related Topics. – 2013. – V. 16. – P. 1350021.

[4] Pechen A. N., Il'in N. B. *Coherent control of a qubit is trap-free* // Proc. Steklov Math. Inst. – 2014. – V. 285. – P. 244–252.

A FEW STATEMENTS CONCERNING THE OPERATION OF A CARTESIAN-QUOTIENT EXTENSION OF A THEORY

M. G. Peretyatkin[1]

---

[1] *mperetyatkin@gmail.com*, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

We consider theories in first-order predicate logic *with equality* and use general concepts of model theory and algorithm theory. Special concepts used in this paper are defined in [1]. Generally, *incomplete theories* of either enumerable of finite signatures are considered.

Given a signature σ and a finite sequence of formulas of this signature:

$$\kappa = \langle \varphi_1^{m_1}/\varepsilon_1, \varphi_2^{m_2}/\varepsilon_2, \ldots, \varphi_s^{m_s}/\varepsilon_s \rangle, \tag{1}$$

where φ_k is a formula with m_k free variables, $\varepsilon_k(\bar{y}_k, \bar{z}_k)$ is a formula with $2m_k$ free variables such that $len\bar{y}_k = len\bar{z}_k = m_k$. In the case when $\varepsilon_k(\bar{y}_k, \bar{z}_k)$ coincides with $\bar{y}_k = \bar{z}_k$ for all $k \leqslant s$, we use the following simpler notation

$$\kappa = \langle \varphi_1^{m_1}, \varphi_2^{m_2}, \ldots, \varphi_s^{m_s} \rangle, \tag{2}$$

instead of the common entry (1). We consider the most interesting case when the sequence (1) satisfies the following technical condition:

$$(\forall k \leqslant s)\big[\, \varphi_k(\bar{x}_k) \text{ and } \varepsilon_k(\bar{y}_k, \bar{z}_k) \text{ are } \exists \cap \forall\text{-presentable in } T\,\big]. \tag{3}$$

In the work [1], there is a definition to the concept of a *Cartesian-quotient extension* $T\langle\kappa\rangle$ of a theory T with the sequence κ of the form (1); moreover, there is an interpretation $I_{T,\kappa} : T \to T\langle\kappa\rangle$ which is said to be a *special Cartesian-quotient interpretation* of T in $T\langle\kappa\rangle$. In the case when κ has the form (2), $T\langle\kappa\rangle$ is said to be a *Cartesian extension* of T.

We formulate the main statement of the paper.

Theorem 1. *Given a theory T of signature σ and a finite tuple of formulas κ of the form* (1) *satisfying* (3). *Interpretation $I_{T,\kappa} : T \to T\langle\kappa\rangle$ preserves locally the model-theoretic property of $\forall\exists$-axiomatizability.*

Statement of Theorem 1 strengthens a result of [1], cf. property $\mathfrak{p}_{16}$ in the list (2.3) in [1], establishing a similar estimate with a longer prefix Σ_3; i.e., with the quantifier prefix of the form $\exists\forall\exists$.

One more statement concerning $\forall\exists$-axiomatizability.

Theorem 2. *There are decidable theories T and S of pure predicate signatures without finite models such that T and S are mutually $\exists \cap \forall$-definable interpretable in each other; moreover, T is $\forall\exists$-axiomatizable, while S is not.*

A couple of examples of theories having interesting properties:

Theorem 3. *There are two theories T and S together with a tuple κ of the form* (2) *satisfying* (3) *such that both T and S are applicable to κ; moreover, $T \approx_a S$ but $T\langle\kappa\rangle \not\approx_a S\langle\kappa\rangle$.*

Theorem 4. *There are two theories T and S together with a tuple κ of the form* (2) *satisfying* (3) *such that both T and S are applicable to κ, and we have $T\langle\kappa\rangle \approx_a S\langle\kappa\rangle$; however, $T \not\approx_a S$.*

The two latter results show that the operation of a Cartesian extension of a theory as well as that of a Cartesian-quotient extension of a theory is defined in a non-regular manner relative to the classes of theories modulo algebraic isomorphisms $\approx_a$.

References

[1] Перетятькин M. G. *Комбинаторика первого порядка и теоретико-модельные свойства различимые на парах взаимно интерпретируемых теорий* // Математические труды. – 2015. – Т. 18.– No 2. – С. 61–92.

ON KOSTANT'S THEOREM FOR THE LIE SUPERALGEBRA *Q*(*N*)

E. Poletaeva[1]

---

[1] *elena.poletaeva@utrgv.edu*, School of Mathematical and Statistical Sciences, University of Texas Rio Grande Valley, Edinburg, TX, USA

A finite W-algebra is a certain associative algebra attached to a pair $(\mathfrak{g}, e)$, where $\mathfrak{g}$ is a complex semisimple Lie algebra and $e \in \mathfrak{g}$ is a nilpotent element. It is a generalization of the universal enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$. It is a result of B. Kostant that for a regular nilpotent element e, the finite W-algebra coincides with the center of the universal enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$ [4].

In the full generality, the finite W-algebras were introduced by A. Premet [6]. His definition makes sense for classical Lie superalgebras classified by V. G. Kac in [3]. However, Kostant's theorem does not hold for Lie superalgebras.

Finite W-algebras for the general linear Lie algebras $\mathfrak{gl}(n)$ were described in terms of Yangians (a class of Hopf algebras) by J. Brundan and A. Kleshchev [1]. Then J. Brown, J. Brundan and S. Goodwin generalized this approach to the general linear Lie superalgebras $\mathfrak{gl}(m|n)$ in the case of a regular nilpotent element [2]. The super-Yangian of the queer Lie superalgebra $Q(n)$ was defined by M. Nazarov [5].

We study finite W-algebras for basic Lie superalgebras and $Q(n)$ associated to regular even nilpotent elements. In the case of $Q(n)$ we give an explicit description of the finite W-algebra in terms of generators and relations and realize it as a quotient of the super-Yangian of $Q(1)$. Our main result is the following

Theorem ([7]). *There exists a surjective homomorphism of the super-Yangian of* $Q(1)$ *onto the finite* W*-algebra for* $Q(n)$.

This is a joint work with V. Serganova.

References

[1] Brundan J., Kleshchev A. *Shifted Yangians and finite W-algebras* // Adv. Math. – 2006. – V. 200. – P. 136–195.

[2] Brown J., Brundan J., Goodwin S. *Principal W-algebras for $GL(m|n)$* // Algebra Numb. Theory. – 2013. – V. 7. – P. 1849–1882.

[3] Kac V. G. *Lie superalgebras* // Adv. Math. – 1977. – V. 26. P. 8–96.

[4] Kostant B. *On Whittaker vectors and representation theory* // Invent. Math. – 1978. – V. 48. – P. 101–184.

[5] Nazarov M. *Yangian of the queer Lie superalgebra* // Comm. Math. Phys. – 1999. – V. 208. – P. 195–223.

[6] Premet A. *Special transverse slices and their enveloping algebras* // Adv. Math. – 2002. – V. 170. –P. 1–55.

[7] Poletaeva E., Serganova V. *On Kostant's theorem for the Lie superalgebra $Q(n)$* // Adv. Math. – 2016. Published online: http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2016.03.021.

REPRESENTATION OF AN AFFINE CONNECTION BY THE 2ND ORDER VECTOR-VALUED FORMS

K. V. Polyakova[1]

---

[1] *KaPolyakova@kantiana.ru*, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad

We continue the study of frame bundles and tangent bundles of the 1st and 2nd orders over linear frame bundle on a manifold X_m by means of covariant method [1] and based on structure equations and derivation formulae. Exterior differential and 'ordinary' differential of forms are considered.

An affine connection is given by 2nd order vectors called horizontal. It is shown that if we proceed from the 1st and 2nd orders tangent vectors to a manifold X_m, then condition of invariancy of horizontal subspaces for the 1st order affine connection concerning action of group is unnecessary. Vertical vertical-valued and horizontal horizontal-valued forms of the 2nd order are constructed for the 1st order affine connection.

It is proved that a symmetric affine connection in the bundle of tangent linear frames LX_m defines a vertical linear operator (a vertical vertical-valued form of the 2nd order for the 1st order affine connection) from the 2nd order tangent space into the 1st order tangent space to a manifold X_m. This operator: 1) takes the 2nd order vector (osculating vector or diffusors) to its vertical component [2]; 2) is a projector; 3) annihilates all the 2nd order horizontal vectors; 4) is the identity when restricted to a vertical subspace $VT^2X_m = TX_m$ of the 2nd order tangent space.

It is shown that an affine connection in tangent linear frame bundle defines a linear operator (the 2nd order vertical vertical-valued form for the 1st order affine connection) from the 1st order cotangent space (space of forms of degree 1) into cotangent space of the 2nd order (space of the 2nd order forms or codiffusors) [2].

It is proved that affine connection in tangent linear frame bundle defines a horizontal linear operator (the 2nd order horizontal horizontal-valued form for the 1st order affine connection) in the 2nd order tangent bundle. This operator: 1) takes the 2nd order vector (osculating) to its horizontal component; 2) is a projector; 3) annihilates all vertical vectors; 4) is the identity when restricted to a horizontal subspace of the 2nd order tangent space.

It is shown that the second ordinary differential of a point of a manifold with the 1st order affine connection can be presented as the sum of the vertical and horizontal projectors.

References

[1] Polyakova K.V. *Dual methods of investigation of differential-geometric structures* // Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. – Kaliningrad, 2014. – №. 45. – P. 92–104. (In Russian)

[2] Emery M. *An Invitation to Second-Order Stochastic Differential Geometry* . – 2007. – 42 p. <hal-00145073>

SECTIONS OF HARMONIC MAPPINGS

S. Ponnusamy[1]

---

[1] *samy@iitm.ac.in*, Indian Statistical Institute

The lecture is based on the class $\mathcal{H}_0$ of sense-preserving harmonic functions $f = h+\overline{g}$ defined in the unit disk $|z| < 1$ and normalized so that $h(0) = 0 = h'(0) - 1$ and $g(0) = 0 = g'(0)$, where h and g are analytic in the unit disk. In the first part of the lecture, we review a number of known results concerning convolution of harmonic mappings and recent advances in discussing harmonic analog on Polya–Schoenberg conjecture on convolution. As application, we study the harmonic sections (partial sums)

$$s_{n,n}(f)(z) = s_n(h)(z) + \overline{s_n(g)(z)},$$

where $f = h+\overline{g} \in \mathcal{H}_0$, $s_n(h)$ and $s_n(g)$ denote the n-th partial sums of h and g, respectively. We prove, among others, that if $f = h+\overline{g} \in \mathcal{H}_0$ is a univalent harmonic convex mapping, then $s_{n,n}(f)$ is univalent and close-to-convex in the disk $|z| < 1/4$ for $n \geqslant 2$, and $s_{n,n}(f)$ is also convex in the disk $|z| < 1/4$ for $n \geqslant 2$ and $n \neq 3$. Moreover, we show that the section $s_{3,3}(f)$ of $f \in \mathcal{C}_H^0$ is not convex in the disk $|z| < 1/4$ but is shown to be convex in a smaller disk. Some open problems will be discussed.

ASYMPTOTIC CONFORMAL WELDING VIA LOEWNER-KUFAREV EVOLUTION

D. Prokhorov[1]

---

[1] *prokhorovdv@info.sgu.ru*, Saratov State University

For the unit disk $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ and the complement $\mathbb{D}^* = \{z : |z| > 1\}$ to the closure of $\mathbb{D}$, let $f : \mathbb{D} \to \Omega$ and $F : \mathbb{D}^* \to \Omega^*$ be conformal maps where a domain Ω is bounded by a closed Jordan curve Γ, and Ω^* is the unbounded complementary component of Γ. The composition $F^{-1} \circ f$ determines a homeomorphism of the unit circle $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D} = \partial\mathbb{D}^*$ which is called a conformal welding. Suppose that $0 \in \Omega$, $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$, and $F(\infty) = \infty$, $F'(\infty) > 0$.

An asymptotic conformal welding for domains close to $\mathbb{D}$ was proposed by the author [1]. It is based on asymptotic formulas for conformal mappings due to Siryk [3] and those in [1].

Theorem A. *For the polar coordinates* (r, ψ), *let* $\Gamma = \partial\Omega = \partial\Omega^*$ *have the polar equation* $r = r(\psi) = 1 - \delta(\psi)$, $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$, *where* $\delta(\psi)$ *is twice differentiable and*

$$|\delta(\psi)| < \epsilon, \quad |\delta'(\psi)| < \epsilon, \quad |\delta''(\psi)| < \epsilon.$$

Set

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\delta(\psi) - \delta(x)) \cot\frac{\psi - x}{2} d\psi, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Then, for $f : \mathbb{D} \to \Omega$, $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$, *and* $F : \mathbb{D}^* \to \Omega^*$, $F(\infty) = \infty$, $F'(\infty) > 0$, *the conformal welding* $\sigma = \sigma(s)$ *for the domain* Ω *bounded by* $\Gamma = \{f(e^{is}) : 0 \leqslant s \leqslant 2\pi\} = \{F(e^{i\sigma}) : 0 \leqslant \sigma \leqslant 2\pi\}$ *satisfies the asymptotic relation*

$$s + h(s) = \sigma - h(\sigma) + O(\epsilon^2), \quad s \in [0, 2\pi], \quad \epsilon \to +0.$$

From the other side, the Löwner-Kufarev evolution with smooth boundary conditions also can produce asymptotics for mappings onto domains close to Ω and Ω^*, e.g., for $\Omega = \mathbb{D}$, see [2] for comparison.

Theorem 1. *Let the driving function* $p(z,t)$ *holomorphic in* $z \in \mathbb{D}$, *Re* $p(z,t) > 0$, *be* C^2 *in* $\overline{\mathbb{D}}$ *for* $0 \leqslant t < T$, $p(z,\cdot)$ *be continuous in* $[0,T)$ *for* $z \in \overline{\mathbb{D}}$, $p(z,t)$, $p'(z,t)$ *and* $p''(z,t)$ *be bounded in* $\overline{\mathbb{D}} \times [0,T)$. *Then solutions* $f(z,t)$ *to the Loewner-Kufarev differential equation*

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -z\frac{\partial f(z,t)}{\partial z} p(z,t)$$

for $z \in \mathbb{D}$ *and for almost all* $t \in [0,T)$, *where* $\Omega(0) = \mathbb{D}$, $\Omega(t) = f(\mathbb{D},t)$, *generate the curves* $\partial\Omega(t) = \Gamma(t)$ *which determine the conformal welding* $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, $\varphi = \varphi(\tilde{\varphi})$, *satisfying the following relation*

$$\varphi = \tilde{\varphi} + 2\,\mathrm{Im}\, p(e^{i\tilde{\varphi}}, 0)\, t + o(t), \quad t \to +0.$$

Research has been supported by the RF Ministry of Education and Science (project 1.1520.2014k).

References

[1] Prokhorov D. *Conformal welding for domains close to a disk* // Anal. Math. Phys. – 2011. –V. 1. –N 3. –P. 101–114.

[2] Prokhorov D. *Asymptotic conformal welding via Loewner-Kufarev evolution* // Comput. Methods Funct. Theory. –2013. –V.13. –N 1. P. 37–46.

[3] Siryk G. V. *On a conformal mapping of near domains* // Uspekhi Matem. Nauk –1956. – V. 9. –N 5. –P. 57–60.

NILPOTENT STEINER LOOPS OF CLASS TWO

M.N. Rasskazova[1]

---

[1] *maromsk@yandex.ru*, Omsk Polytechnik University

By definition a Steiner loop P is a loop such that every two different elements of $P^* = P \setminus \{1\}$ generate the group $C_2 \times C_2$, where C_2 is the group of order two. If P is a Steiner loop then the set P^* is a 3−geometry (Steiner system of the type $S(2,3,n)$, $n = |P^*|$) such that a line $l_{x,y}$ that contains two different elements $x, y \in P^*$ is $\{x, y, xy\}$. If $(x, y, z) = (xy.z)(x.yz)$ then a Steiner loop is nilpotent of class two if it satisfies the identity $((x, y, z), a, b) = 1$.

We (in collaboration with A.Grishkov, D.Rasskazova and I.Stulh) described the structure of nilpotent of class two Steiner loop and calculate the order of free nilpotent of class two Steiner loop F_n with n generators: $F_n = 2^m$, where $m = \frac{1}{3}(2^{2n-1}+1) - 3 \cdot 2^{n-1} + n + 1$.

BIANCHI IDENTITIES IN PRINCIPAL BUNDLE

N. A. Ryazanov[1]

---

[1] *ryazanov-92@mail.ru*, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad

Structure equations of the bundle $G_r(M_n)$, whose base is an n-dimensional smooth manifold $M_n$and typical fiber is a Lie group G_r, have the form: $d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j$, $d\omega^\alpha = C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \omega^i \wedge \omega^\alpha_i$; $i, j, ... = \overline{1, n}$; $\alpha, \beta, ... = \overline{n+1, n+r}$. The derivation formula can be written as [1]: $dA = \omega^i e_i + \omega^\alpha e_\alpha$, where $A \in G_r(M_n)$. The set of the first order vectors $e = \{e_i, e_\alpha\}$ forms a frame for the tangent space $T_{n+r} = span(e_i, e_\alpha)$ at A to the bundle $G_r(M_n)$. The vectors e_α are tangent to the fiber, they are called vertical, vectors e_i are called non-vertical. The coframe $\omega = \{\omega^i, \omega^\alpha\}$ is dual to the frame e.

We define the horizontal vectors $\tilde{e}_i = e_i - \Gamma^\alpha_i e_\alpha$ and vertical connection form $\tilde{\omega}^\alpha = \omega^\alpha + \Gamma^\alpha_i \omega^i$ (sf. [1]), and $\Delta\Gamma^\alpha_i - \omega^\alpha_i = \Gamma^\alpha_{ij}\omega^j$. It is shown that the vertical connection form $\tilde{\omega}^\alpha$ are annulled by the horizontal vectors $\tilde{e}_i$, and acting on the non-vertical vectors e_i, they give the components of the connection object Γ^α_i. Exterior differential of the connection forms is

$$d\tilde{\omega}^\alpha = C^\alpha_{\beta\gamma}\tilde{\omega}^\beta \wedge \tilde{\omega}^\gamma - \frac{1}{2}R^\alpha_{ij}\omega^i \wedge \omega^j. \tag{1}$$

The structure equation (1) for the forms of the fundamental-group connection can be written as follow $d\tilde{\omega}^\alpha = C^\alpha_{\beta\gamma}\tilde{\omega}^\beta \wedge \tilde{\omega}^\gamma - \Omega^\alpha$, where $\Omega^\alpha = \frac{1}{2}R^\alpha_{ij}\omega^i \wedge \omega^j$ are the curvature forms, $R^\alpha_{ij} = 2\Gamma^\alpha_{[ij]} - 2C^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\beta_i\Gamma^\gamma_j$ are the components of the curvature tensor $R = \{R^\alpha_{ij}\}$.

It is shown that the horizontal curvature forms Ω^α acting on a pair of horizontal or non-vertical vectors provide the curvature tensor $R = \{R^\alpha_{ij}\}$, i.e. $\Omega^\alpha(\tilde{e}_i, \tilde{e}_j) = R^\alpha_{ij}$, $\Omega^\alpha(e_i, e_j) = R^\alpha_{ij}$, and Ω^α vanish if at least one vector is vertical, i.e. $\Omega^\alpha(e_\beta, e_\gamma) = 0$, $\Omega^\alpha(e_\beta, e_i) = 0$, $\Omega^\alpha(e_\beta, \tilde{e}_i) = 0$.

Prolonging the structure equations (1) and taking into account the tensor character of R, we obtain $(R^\alpha_{ijk} + 2C^\alpha_{\beta\gamma}R^\beta_{ij}\Gamma^\gamma_k)\omega^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0$, where R^α_{ijk} are Pfaffian (non-holonomic) derivatives of the curvature tensor R^{α}_{ij}. Using the linear independence of the basis forms we have

$$R^{\alpha}_{[ijk]} + 2C^{\alpha}_{\beta\gamma}R^{\beta}_{[ij}\Gamma^{\gamma}_{k]} = 0.$$

Lemma. *Alternation in three indices of an object, which is skew-symmetric in two of them, coincides with the cycling in these three indices.*

Theorem. *In an arbitrary principal bundle the Pfaffian analog for the Bianchi second identities for the components of the curvature tensor is* $R^{\alpha}_{\{ijk\}} + 2C^{\alpha}_{\beta\gamma}R^{\beta}_{\{ij}\Gamma^{\gamma}_{k\}} = 0$*; the covariant analog of the Bianchi second identities is* $\nabla_{\{k}R^{\alpha}_{ij\}} + R^{\alpha}_{l\{j}T^{l}_{ki\}} = 0$*, where* T^{l}_{ki} *is torsion of affine connection additionally set on manifold* M_n.

References

[1] Polyakova K. V., Shevchenko Y. I. *Laptev—Lumiste's methods of giving connection and horizontal vectors* // Differ. Geom. Mnoogbr. Figur. Kaliningrad, 2012. №43. – C. 114–121. (In Russian)

ABOUT NON-HOLONOMICITY OF QUOTIENT MANIFOLD OF HOLONOMIC DISTRIBUTION ON SEMI-HOLONOMIC SMOOTH MANIFOLD

Ju. I. Shevchenko, E. V. Skrydlova[1]

---

[1] *eskrydlova@kantiana.ru*, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad

Akivis derivation formulas [1] for an n-dimensional smooth manifold M_n can be written in the form $\overline{dx} = \omega^{I}\overline{e_I}$, $d\overline{e}_I = \omega^{J}_{I}\overline{e}_J + \omega^{J}\overline{e}_{IJ}$, … $(I,\ldots = \overline{1,n})$, where $\overline{dx}$ is vector characterizing the displacement of the point $x \in M_n$ up to the 1st order; ω^{I}, ω^{I}_{J}, … are linear differential forms that satisfy the Laptev structure equations [2]:

$$d\omega^{I} = \omega^{J}\wedge\omega^{I}_{J},\ d\omega^{I}_{J} = \omega^{K}_{J}\wedge\omega^{I}_{K} + \omega^{K}\wedge\omega^{I}_{JK},\ \ldots; \tag{1}$$

$$\omega^{I}_{[JK]} = \lambda^{I}_{JKL}\omega^{L},\ \lambda^{I}_{(JK)L} = 0, \lambda^{I}_{\{JKL\}} = 0, \tag{2}$$

where the square brackets denote alternation, round brackets denote symmetry, and braces denote cycling. The manifold M_n with the structure equations (1), in which the three-index forms ω^{I}_{JK} satisfy the conditions (2) is called smooth semi-holonomic manifold M^{S}_{n}. If the condition of the local symmetry (2_1) degenerates into a condition of symmetry $\omega^{I}_{[JK]} = 0$, then M_n is called [3] holonomic smooth manifold M^{H}_{n}. On the other hand, if the condition (2_1) does not hold, then we will say about internally non-holonomic smooth manifolds M^{N}_{n}. Finally, if instead of the equations (1_2) we have more general structure equations, then we say about externally non-holonomic smooth manifold ${}^{N}M_n$.

Equations for distribution $T_m(M_n)$ of m-dimensional tangent subspaces T_m on semi-holonomic manifold M_n are $\omega^{\alpha}_{i} = \Lambda^{\alpha}_{ij}\omega^{j}$ $(i,\ldots = \overline{1,m}, \alpha,\ldots = \overline{m+1,n})$. Denote $N^{\alpha}_{ij} = \Lambda^{\alpha}_{[ij]}$

is tensor of non-holonomicity of the distribution. Consider a holonomic distribution $T_{m,n}$, when $N^\alpha_{ij} = 0$ and $M_n = M_m(F_{n-m})$, where F_{n-m} is quotient manifold of m-dimensional submanifolds $M_m \subset M_n$ enveloping subspaces T_m. For the smooth manifold F_{n-m} we have

$$d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \Omega^\alpha_\beta,\ \Omega^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta - \Lambda^\alpha_{i\beta}\omega^i;$$

$$d\Omega^\alpha_\beta = \Omega^\gamma_\beta \wedge \Omega^\alpha_\gamma + \omega^\gamma \wedge \Omega^\alpha_{\beta\gamma} + N^\alpha_{ij\beta}\omega^i \wedge \omega^j,$$

where $N^\alpha_{ij\beta} = \lambda^\alpha_{ij\beta} + 2\lambda^\alpha_{\beta[ij]}$ is the external non-holonomicity object for the manifold F_{n-m}, as well as

$$\Omega^\alpha_{[\beta\gamma]} = \lambda^\alpha_{\beta\gamma\delta}\omega^\delta + N^\alpha_{\beta\gamma i}\omega^i,\ N^\alpha_{\beta\gamma i} = \lambda^\alpha_{\beta\gamma i} + 2\lambda^\alpha_{i[\beta\gamma]}$$

is the internal non-holonomicity object for the manifold F_{n-m}. These objects satisfy the following differential comparisons:

$$\Delta N^\alpha_{ij\beta} + \omega^\alpha_{[ij]\beta} \cong 0,\ \Delta N^\alpha_{\beta\gamma i} + \omega^\alpha_{[\beta\gamma]i} \cong 0\ (mod\ \omega^I).$$

Theorem. *The quotient manifold of holonomic distribution $T^S_{m,n}$ on semi-holonomic smooth manifold M^S_n is externally and internally non-holonomic smooth manifold ${}^N F^N_{n-m}$. The quotient manifold holonomic distribution $T^H_{m,n}$ on holonomic manifold M^H_n is holonomic smooth manifold F^H_{n-m}.*

References

[1] Akivis M. A. *Multidimensional differential geometry.* Kalinin, 1977. – 84 p. (In Russian)

[2] Laptev G. F. *Fundamental infinitesimal structures of higher order on a smooth manifold.* // Trudy geom. sem. 1, 1966. – P. 139–189. (In Russian)

[3] Shevchenko Ju. I. *Framing of holonomic and non-holonomic smooth manifolds.* Kaliningrad, 1998. – 83 p. (In Russian)

METHODS OF DEMOLITION OF THE BOUNDARY CONDITIONS BY MEANS OF PERTURBATION

O. A. Shirokova[1]

This paper is devoted to an application of methods of the perturbation theory [1].

The flat filtration flow of fluid through the weakly inhomogeneous flow domain Ω which has an arbitrary shape and a free boundary, when there is the stationary mode, is investigated. The boundary value problem for the function of head $h(x,y)$ in Ω flow with a free surface has the form [2]:

$$\vec{U} = -K(x,y)\cdot\nabla h, \quad \mathrm{div}\,U = 0,\ (x,y) \in \Omega,$$

---

[1] *oshirokova@mail.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

$$\partial h / \partial n = 0, \ (x, y) \in \Gamma_v;$$

$$h = h_i, \qquad (x, y) \in \Gamma_i, \qquad i = 1, 2;$$

$$p = \rho g(h(x, y) - y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_p;$$

$$p = 0, \quad \partial h / \partial n = 0, \quad (x, y) \in \Gamma'_y,$$

where p — pressure, $K(x, y)$ — filtration coefficient, Γ'_y — depression curve, Γ_v — impermeable base, Γ_p — seepage area, $\Gamma_i, \quad (i = 1, 2)$ — input and output boundary of the flow Ω with heads h_i.

Since the ground is weakly inhomogeneous, we assume that the filtration flow in Ω is the result of a perturbation of "reference" flow in the homogeneous ground in the initial filtration area Ω_0. Thus, we have $K(x, y) = K_0 + \varepsilon\chi(x, y), \quad \varepsilon \ll 1$, where $\varepsilon\chi(x, y)$ — a small perturbation of the filtration coefficient, $K_0 = \text{const}$.

The variation of the filtration coefficient $\varepsilon\chi(x, y)$ leads to a shift, by δy of the curve of depression Γ_y of the reference flow and to perturbations $\varepsilon\phi(x, y)$, $\varepsilon\bar{v}(x, y)$, δQ of the head h_0, the speed $\bar{U}$, and the expense Q in the initial area of filtration Ω_0.

The relationship between the function of pressure variations $\varphi(x, y)$ and the displacement of $N(x)$ of Γ_y is reached through the condition of impermeability on Γ_y which has the form:

$$(\nabla h \cdot \bar{n}) = (\nabla h_0 + \varepsilon\nabla\varphi) \cdot (\bar{n} \cdot \delta\bar{n}) = 0.$$

Then we will find an expression for the $\delta\bar{n}$. For this we consider in detail the deformation of the line Γ_y which is shifted by the vector $\delta\,\bar{y} = \varepsilon\,N(x)\,\bar{j}$.

As the result, we have: $\delta n = -\varepsilon \cdot N'_x \cos^2\alpha \cdot \bar{\tau}$.

Thus, for the steady flow we get the boundary value problem for the function $\varphi(x, y)$ in the "reference" field Ω_0:

$$\Delta\varphi = -K_0^{-1}(\nabla h_0 \cdot \nabla\chi), \quad (x, y) \in \Omega_0,$$

$$\partial\varphi\ / \partial n = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_v,$$

$$\varphi\ = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_p,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial S}\left[\frac{\varphi}{1 - \partial h_0 / \partial y}\right] + \\ + \frac{\varphi}{1 - \partial h_0 / \partial y} \cdot \left[\frac{\partial^2 h_0}{\partial x \partial y} \cdot \sin\alpha - \frac{\partial^2 h_0}{\partial y^2} \cdot \cos\alpha\right], (x, y) \in \Gamma_y. \quad (1)$$

Moreover, for the connection between $\varphi(x, y)$ and $N(x)$, the ratio is obtained:

$$N(x) = \varphi(x, y) / (1 - \partial h_0 / \partial y).$$

References

[1] Milton Van Dyke. *Perturbation methods in fluid mechanics.* – Academic Press, Stanford, California, 1964. – 229 pages.

[2] Samarski A. A., Vabishchevich P. N. *Numerical methods of solution convection-diffusion problems.* – Editorial. URSS, Moscow, 2004. – 248 pages. (Rus)

ON KT-FIELDS AND SHARPLY 3-TRANSITIVE GROUPS

A. I. Sozutov[1], O. V. Kravtsova[2]

---

[1] *sozutov_ai@mail.ru*, Siberian Federal University
[2] *ol71@bk.ru*, School of Mathematics and Computer Science

Sharply 2- and 3-transitive groups are closely related with nearfields, neardomains and KT-fields [1,2].H. Zassenhaus gave the complete classification of finite 2- and 3-transitive groups and nearfields [1, p. 419–421], [2, p. 215]. Locally finite sharply 3-transitive groups were classified by O. Kegel. The locally finiteness of binary finite sharply 2-transitive groups and nearfields with binary finite multiplicative group was stated in [3]. Locally finiteness of sharply 3-transitive permutation groups with periodic two points stabilizator was proved in [4]. The articles [5,6] demonstrate the examples of sharply 2-transitive groups without regular Abelian normal subgroups, an article [7], using the groups from [5,6], presents the examples of sharply 3-transitive groups. In particular, there exist KT-fields (F, σ), where the neardomains $(F, +, \cdot)$ are not the nearfields. These results gives another reason to study the KT-fields and the groups $T_3(F, \varepsilon)$ with additional restrictions (see necessary definitions in [2, ch. V]).

We study infinite KT-fields (F, ε) and groups $T_3(F, \varepsilon)$ with some additional conditions for involution ε and for the group $N = F^* \leftthreetimes \langle\varepsilon\rangle$. An involution x from infinite group K is said to be *finite in* K, if any commutator $[x, g]$ $(g \in K)$ has an finite order. An involution x from a group K is said to be *perfect in* K, if any two non-commuting involutions from x^K are conjugated by the involution from x^K [1]. The next results were obtained.

Theorem 1. *If an involution ε is finite in $N = F^* \leftthreetimes \langle\varepsilon\rangle$, then $(F, +, \cdot)$ is locally finite field.*

Theorem 1 implies

Corollary. *Sharply 3-transitive permutation group with finite involution, that stabilizes at least one point, is locally finite.*

Theorem 2. *If an involution ε is perfect in $N = F^* \leftthreetimes \langle\varepsilon\rangle$, then $(F, +, \cdot)$ is (commutative) field.*

Theorem 2 implies the corresponding corollary on the structure of a group $T_3(F, \varepsilon)$ with perfect involution.

Supported by RFBR, project No. 15-01-04897a.

References

[1] Hall M. *The Theory of Groups.* – New York, 1959.

[2] Wähling H. *Theorie der Fastkörper.* – Essen: Thalen Ferlag. – 1987.

[3] Grundhöfer T. Jabara E. *Fixed-point-free 2-finite automorphism groups.* – Arch. Math., –97 (2011), –July 7. –P. 219–223.

[4] Sozutov A. I. Durakov E. B. *Local Finiteness of Periodic Sharply Triply Transitive Groups* // Algebra and Logic January-February – 2015. – Volume 54, – Issue 1. – P. 70–84.

[5] Rips E. Segev Y. Tent K. *A sharply 2-transitive group without a non-trivial Abelian normal subgroup* // arXiv:1406.0382v4 [math.GR], –22 Oct. – 2014. – P. 1–17.

[6] Tent K Ziegler M. *Sharply 2-transitive groups* // arXiv:1408.5612v1 [math.GR], – 24 Aug – 2014. – P. 1–5.

[7] Tent K. *Sharply 3-transitive groups* // Advances in Mathematics, – January, – 2016, – Volume 286, – Issue 2. – P. 722–728.

NEW APPLICATIONS OF THE GLOBAL DIVERGENCE THEOREMS

S. E. Stepanov[1], J. Mikeš[2]

---

[1] *s.e.stepanov@mail.ru*, Finance University under the Government of Russian Federation
[2] *josef.mikes@upol.cz*, Palacky University of Olomouc, Czech Republic

S. Bochner devised an analytic technique to obtain *vanishing theorems* for some geometric objects on a closed (i.e. compact without boundary) Riemannian manifold, under some curvature assumption (see [1]). Currently, there are two different points of view about classical *Bochner technique*; the first one uses the *divergence theorem*, and the second uses the *classical maximum principle*. In our paper [2] we presented applications of the classical Bochner technique and, in particular, the divergence theorem to cosmological models.

In our report we will use the generalized Bochner technique which used for the case of noncompact Riemannian manifolds (see [3]). Our proofs will be based on generalized divergence theorems and a generalized maximal principle for complete, noncompact Riemannian manifolds. In particular, in our report will be prove *Liouville-type theorems* for some types of complete, noncompact Riemannian almost product manifolds, projective and Riemannian submersions of complete, noncompact Riemannian manifolds which generalize similar well known results for closed manifolds.

In particular we will prove a proposition which generalizes the theorem on two orthogonal complete totally umbilical distributions on compact Riemannian manifold with non positive mixed scalar curvature, and its a corollary.

Theorem. *Let (M,g) be a complete, noncompact and simply connected Riemannian manifold with two orthogonal complementary totally umbilical distributions V and H such that their mean curvature vectors ξ_V and ξ_H satisfy the condition $\|\xi_V+\xi_H\|$ in $L^1(M,g)$. If the mixed scalar curvature s_{min} of (M,g) is nonpositive then V and H are integrable and (M,g) is isometric to a direct product $(M_1\times M_2, g_1\oplus g_2)$ of Riemannian manifolds (M_1,g_1) and (M_2,g_2) such that integral manifolds of V and H correspond to the canonical foliations of the product $M_1\times M_2$.*

Corollary. *Let (M,g) be an n-dimensional complete, noncompact and simply connected Riemannian manifold and $f\colon (M,g)\to(\bar M,\bar g)$ be a projective submersion onto another m-dimensional $(m<n)$ Riemannian manifold $(\bar M,\bar g)$. If the mixed scalar curvature s_{min} is nonpositive and the mean curvature vector ξ_H of the horizontal distribution $(\mathrm{Ker}\, f_*)^{\perp}$ satisfies*

the condition $\|\xi_H\| \in L^1(M,g)$*, then* $(\operatorname{Ker} f_*)^\perp$ *is integrable and* (M,g) *is isometric to a direct product* $(M_1 \times M_2, g_1 \oplus g_2)$ *of some Riemannian manifolds* (M_1, g_1) *and* (M_2, g_2) *such that the integral manifolds of* $\operatorname{Ker} f_*$ *and* $(\operatorname{Ker} f_*)^\perp$ *correspond to the canonical foliations of the product* $M_1 \times M_2$.

References

[1] Wu H. H., *The Bochner technique in differential geometry.* – Harwood: Harwood Acad. Publ., 1987.

[2] Stepanov S. E., Mikeš J., *The generalized Landau-Raychaudhuri equation and its applications.* – Int. J. Geom. Methods in Modern Phys., 12:8 (2015) 1560026 [9 pages].

[3] Pigola S., Rigoli M., Setti A. G., *Vanishing and finiteness results in geometric analysis. A Generalization of the Bochner Technique.* – Berlin: Birkhäuser Verlag AG, 2008.

THE KILLING TENSORS ON A MANIFOLD WITH AN EQUIAFFINE STRUCTURE

I. I. Tsyganok[1], T. V. Dmitrieva[2]

---

[1] *i.i.tsyganok@mail.ru*, Finance University under the Government of Russian Federation
[2] *ztv77@mail.ru*, Russian State Social University

The “structural point of view” of affine differential geometry was introduced by K. Nomizu in 1982 in the lecture at Münster University with the title “What is Affine Differential Geometry?” (see [1]). K. Nomizu suggested the term affine differential geometry for geometry of a manifold M endowed with an *equiaffine structure* is called affine differential geometry.

In recent years, there has been a new wave of papers devoted to affine differential geometry. Today the number of publications (including monographs) on affine differential geometry reached a considerable level. The main part of these publications is devoted to geometry of hypersurfaces (see [2] and [3] for the history and references).

In our report, we solve the problem of finding integrals of equations determining the Killing tensors (see [4] for the definitions, properties and applications) on an n-dimensional differentiable manifold M endowed with an equiaffine structure.

The first of two present theorems proved in our report is an affine analogue of the statement published in the paper [6], which appeared in the process of solving problems in General relativity.

Remark The work of the first author was supported by RBRF grant 16-01-00053 (Russia).

References

[1] Nomizu K., *What is affine differential geometry?* Differential Geometry Meeting Univ. Munster 1982. – Tagungsbericht, 1982. – P. 42–43.

[2] Schirokow P. A. and A. P. *Affine Differentialgeometrie..* – Teubner, Leipzig. – 1962.

[3] Simon U., Schwenk-Schellschmidt A., Viesel H. *Introduction to the affine differential geometry of hypersurfaces.* // Science University of Tokyo. – Japan, –1991.

[4] Kramer D., Stephani H., Mac Callum M. A. H. and Herit E. *Exact solutions of Einstein's field equations.* // Cambridge Univ. Press. – Cambridge, –1980.

[5] Stepanov S. E. The Killing-Yano tensor. *Theoretical and Mathematical Physics.* – **134**(2003), no. 3. – P. 333–338.

NONDENSITY OF BUBBLE PAIRS

M. M. Yamaleev[1]

---

[1] *mars.yamaleev@kpfu.ru*, N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics of Kazan Federal University

Given a 2-computably enumerable (2-c.e.) set D with an effective approximation $\{D_s\}_{s\in\omega}$ such that $|D_s - D_{s-1}| \leqslant 1$, we say that $L(D) = \{s : \exists\ x \in D_s - D\}$ is the Lachlan set of D. It is easy to show that the Turing degree of $L(D)$ doesn't depend on the approximation (e.g., by Ishmukhametov [1]), hence we say that $\deg(L(D))$ is the Lachlan degree of D. In [1] Ishmukhametov proved that there exists a 2-c.e. set D such that $\deg(L(D)) \equiv_T \deg(L(B))$ for all 2-c.e. sets $B \equiv_T D$, hence the degree of D has a unique Lachlan's degree. He called such degrees $\deg(D)$ as exact 2-c.e. degrees.

Exact 2-c.e. degrees are superset of the tops of bubble pairs. We say that noncomputable 2-c.e. degrees $\mathbf{e} < \mathbf{d}$ form a bubble pair if all 2-c.e. degree below $\mathbf{d}$ is comparable with $\mathbf{e}$. Bubble pairs was introduced by Arslanov, Kalimullin and Lempp [2], in the same work they used a generalization of bubble pairs to disprove Downey's conjecture showing that partial orders of 2-c.e. and 3-c.e. Turing degrees are not elementarily equivalent. Moreover, they investigated an important property of bubble pairs, namely, they showed that the degree $\mathbf{e}$ must be c.e., and even more, $L(D) \in \mathbf{e}$ for all 2-c.e. sets $D \in \mathbf{d}$ (hence, the tops of bubble pairs are exact 2-c.e. degrees). So, the distribution of bubble pairs (and exact degrees as well) in 2-c.e. degrees presents a great interest from a point of view of distribution of definable singletons in 2-c.e. degrees. In a joint work with Andrews, Kuyper, Lempp and Soskova we obtained the following result.

Theorem. *There exists a noncomputable c.e. degree* $\mathbf{a}$ *such that there is no a pair of noncomputable 2-c.e. degrees* $\mathbf{e} < \mathbf{d} < \mathbf{a}$ *which form a bubble pair.*

This result contrast with the resent result of Liu, Wu and Yamaleev [3] where they showed that exact 2-c.e. degrees are downwards dense. As a corollary, we conclude that in 2-c.e. degrees the class of tops of bubble pairs is a proper subset of the class of exact degrees.

The work is supported by Russian Foundation for Basic Research (projects 15-41-02507, 15-01-08252), by Russian Government Program of Competitive Growth of Kazan Federal University, and by the subsidy allocated to Kazan Federal University for the project part of the state assignment in the sphere of scientific activities (project 1.2045.2014).

References

[1] Ishmukhametov Sh.T. *On the predececcors of d.r.e. degrees* // Arch. Math. Logic. – 1999. – V. 38. – P. 373–386.

[2] Arslanov M.M., Kalimullin I.Sh., Lempp S. *On Downey's Conjecture* // Journal of Symbolic Logic. – 2010. – V. 75. – No.2 – P. 401–441

[3] Liu J., Wu G., Yamaleev M.M. *Donward Density of Exact Degrees* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2015. – V. 36. – No. 4. – P. 389–398.

WEIL FOLIATIONS OF ANY SIGNATURE

N. I. Zhukova[1]

---

[1] *nzhukova@hse.ru*, National Research University, Higher School of Economics

Let $\Omega^m(N)$ be the space of external forms of degree $m \geqslant 0$, where $\Omega^0(N)$ is the algebra of smooth functions on a manifold N.

By a Weil geometry of the signature $(v, q-v)$ on a q-dimensional manifold N we call the pair $([g], \nabla)$, where $[g]$ is the class of conformally equivalent pseudo-Riemannian metrics of the signature $(v, q-v)$ and ∇ is a torsion free linear connection on the manifold N such that:

(i) there is a map $f : [g] \to \Omega^1(N)$ satisfying the equality $f(e^\lambda g) = f(g) - d\lambda$ for all $\lambda \in \Omega^0(N)$;

(ii) $\nabla h + f(h) \otimes h = 0$ for every $h \in [g]$.

Foliations of a codimension q admitting a Weil geometry of the signature $(v, q-v)$ as the transverse structure are called Weil foliations of the transverse signature $(v, q-v)$.

We investigate the influence of the transverse Weil geometry of a foliation (M, F) on topology and geometry of this foliation. We consider Weil foliations on n-dimensional manifolds.

At first we give the following characterization of Weil foliations.

Theorem 1. *A smooth foliation (M, F) of the codimension q is a Weil one of the transverse signature $(v, q-v)$ modelled on the Weil geometry $(N, [g], \nabla)$ if and only if (M, F) is a Cartan foliation of the type $(G, CO(v, q-v))$, where $G = CO(v, q-v) \ltimes R^q$ is the semidirect product of the conformal group $R^+ \cdot O(v, q-v)$ and the Abelian normal subgroup R^q.*

Using Theorem 1 we get a criterion for a Weil foliation (M, F) to be a pseudo-Riemannian one.

Consideration of Weil foliations as Cartan foliations allowed us to apply in our investigation the results from [1]. In particular, the holonomy group $\Gamma(L, x)$ of a leaf $L = L(x)$ of a foliation (M, F) defines the class of conjugated subgroups of the group $H = CO(v, q-v)$ which is denoted by $H(L)$.

Definition. *We say that the holonomy group $\Gamma(L, x)$ of a leaf L of a Weil foliation (M, F) is α-essential, if the set $H(L)$ contains an element of the form $\lambda \cdot A \in CO(v, q-v)$ where λ is a real number, $\lambda \neq 1$, and the matrix A belongs to a compact subgroup of the pseudo-orthogonal group $O(v, q-v)$.*

Theorem 2. *If Weil foliation* (M,F) *of a signature* $(v,q-v)$ *has a leaf L with* α*-essential holonomy group, then the closure* $\mathscr{M} := \bar{L}$ *of the leaf L is an attractor, and* $\mathscr{M}$ *is a minimal set. The restriction of this foliation on the attraction basin* $\mathscr{A}ttr(\mathscr{M})$ *is a transversely similar pseudo-Euclidean foliation of the same transverse signature.*

If, moreover, the Weil foliation (M,F) *is complete, then* $\mathscr{M}$ *is both a global attractor and a minimal set, with* (M,F) *is covered by a locally trivial bundle over the pseudo-Euclidean space of the signature* $(v,q-v)$*.*

Several examples are constructed.

The work was funded by RFBR (the project № 16-01-00132) and the Basic Research Program at the National Research University Higher School of Economics (the project № 98).

References

[1] Zhukova N. I. *Minimal sets of Cartan foliations* // Proc. of the Steklov Inst. of Math. – 2007. – V. 256. – P. 105–135.

ОПИСАНИЕ СОПРЯЖЕННЫХ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАННОГО РОСТА В ОБЛАСТЯХ КАРАТЕОДОРИ

А. В. Абанин[1], Т. М. Андреева[2]

---

[1] *abanin@math.sfedu.ru*, Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук

[2] *metzi@yandex.ru*, Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук

Пусть G — область в $\mathbb{C}$, $H(G)$ — пространство всех функций, голоморфных в G. С каждой непрерывной функцией $v : G \to \mathbb{R}$ (весом) свяжем банахово пространство

$$H_v(G) := \left\{ f \in H(G) : ||f||_v := \sup_{z \in G} \frac{|f(z)|}{e^{v(z)}} < \infty \right\}.$$

По убывающей (возрастающей) последовательности весов $V = (v_n)$ образуем проективный (индуктивный) предел $HV(G) := \operatorname{proj} H_{v_n}(G)$ $\big($соотв., $\mathcal{V}H(G) := \operatorname{ind} H_{v_n}(G)\big)$. В связи с рядом задач представляет интерес исследование вопроса об описании сопряженных с $HV(G)$ и $\mathcal{V}H(G)$, удобном для использования в приложениях. В докладе будут представлены новые, более общие по сравнению с предыдущими, результаты в указанном направлении для случая, когда не требуется выпуклость G и используется преобразование Коши функционалов. Ранее сформулированная задача изучалась для конкретных весовых последовательностей проективного [1] и индуктивного [2,3] типов пространств.

Основное ограничение на проективную весовую последовательность, используемое в работе, состоит в предположении, что имеется такая положительная функция

$\rho(z) < \operatorname{dist}(z, \partial G)$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $C_n > 0$, при котором

$$\sup_{|\zeta - z| \leqslant d(z)} v_{n+1}(\zeta) + \ln \frac{1}{\rho(z)} \leqslant C_n + \inf_{|\zeta - z| \leqslant d(z)} v_n(\zeta), \ \forall z \in G.$$

Для индуктивной последовательности нужно лишь поменять v_{n+1} и v_n местами. От G требуется, чтобы она была областью Каратеодори.

При этих ограничениях доказано, что преобразование Коши устанавливает изоморфизм между $HV(G)$ $\big($или $\mathcal{V}H(G)\big)$ и некоторым пространством голоморфных вне $\overline{G}$ функций, исчезающих в бесконечности и продолжимых в $\overline{G}$ как бесконечно дифференцируемые в вещественном смысле функции g с определенной оценкой $\partial g / \partial \bar{z}$. С помощью известных результатов Е.М. Дынькина о квазианалитическом продолжении это пространство может быть реализовано как пространство голоморфных вне $\overline{G}$ функций с заданной граничной гладкостью.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-01404).

Литература

[1] Трунов К. В., Юлмухаметов Р. С., *Квазианалитические классы Карлемана на ограниченных областях* // Алгебра и анализ. – 2008. – Т. 20. – № 2. – С. 178–217.

[2] Варзиев В. А., Мелихов С. Н., *О сопряженном к пространству аналитических функций полиномиального роста вблизи границы* // Владикавк. матем. журн. – 2008. – Т. 10. – вып. 4. – С. 17–22.

[3] Abanin A. V., Le Hai Khoi. *Cauchy transformation and mutual dualities between* $A^{-\infty}(\Omega)$ *and* $A^{\infty}(C\Omega)$ *for Carathéodory domains* // Bull. Belgian Math. Soc. Simon Stevin. – 2016. – Vol.23. – P. 87–102.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. И. Абдулнагимов[1]

Пусть $\Lambda_Z = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — перенумерованная (каким-либо образом) в порядке не убывания модулей последовательность всех комплексных чисел с целочисленными координатами: $\lambda_k = m + il, \ m, l \in Z$. Обозначим через D — ограниченную выпуклую область в C и $H(\overline{D})$ — пространство функций, аналитических в окрестности ее замыкания $\overline{D}$. Пусть $\{K_p\}_{p=1}^{\infty}$ — последовательность выпуклых компактов в области D, которая строго исчерпывает ее, т.е. $K_p \subset \operatorname{int} K_{p+1}, p \geqslant 1$, (символ int означает внутренность множества) и $D = \cup_{p=1}^{\infty} K_p$. Для каждого $p \geqslant 1$ введем банахово пространство последовательностей комплексных чисел

$$Q_p = \left\{ d = \{d_k\} : \|d\|_p = \sup_{k \geqslant 1} |d_k| \exp H_{K_p}(\lambda_k) < \infty \right\}.$$

---

[1] *buffonishe@mail.ru*, Уфимский государственный авиационный технический университет

Пусть $Q(D,\Lambda_Z) = \cap_{p\geqslant 1} Q_p$ наделено топологией проективного предела.

Теорема. *Пусть D – ограниченная выпуклая область в C. Тогда каждая функция $g \in H(\overline{D})$ представляется рядом*

$$g(z) = \sum_{m,l\in Z} d_{m,l} e^{(m+il)z}, \qquad z \in D. \tag{1}$$

При этом $\{d_{m,l}\} \in Q(D,\Lambda_Z)$ и ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на компактных подмножествах области D.

Замечание 1. *Согласно теореме Абеля для рядов экспонент из работы [1] (теорема 3.1) ряд (1) сходится в выпуклой области (возможно неограниченной) абсолютно и равномерно на ее компактных подмножествах. Эта область определяется при помощи формулы Коши-Адамара для рядов экспонент ([1], теорема 4.1).*

Замечание 2. *Из леммы 2.5 работы [1] следует, что для каждого набора коэффициентов $\{d_{m,l}\} \in Q(D,\Lambda_Z)$ сумма $g(z)$ ряда (1) является функцией, аналитической в области D (но не обязательно в окрестности $\overline{D}$).*

Литература

[1] Кривошеева О. А. *Область сходимости рядов экспоненциальных мономов* // Уфимский матем. журн. – 2011. – Т. 3. – № 2. – С. 43–56.

МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ КАНОНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЕЙ НА ОДНОСВЯЗНЫЕ И ДВУСВЯЗНЫЕ ОБЛАСТИ

Д. Ф. Абзалилов, Е. А. Широкова[1]

---

[1] *Elena.Shirokova@kpfu.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

В работе построено отображение единичного круга $|\zeta| < 1$ на произвольную односвязную область D с гладкой границей L, заданной в комплексной плоскости параметрически: $z(t) = x(t) + iy(t) = \sum\limits_{k=-m}^{m} c_k e^{ikt}$, $t \in [0,2\pi]$. Получена такая перепараметризация $t = t(\theta)$, $\theta \in [0,2\pi]$, кривой L, при которой её представление $z(t(\theta))$ в виде ряда Фурье не будет содержать отрицательных степеней: $z(t(\theta)) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_k e^{ik\theta}$.

В этом случае отображающая функция имеет вид $z(\zeta) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_k \zeta^k$.

Для построения функции $t(\theta)$ сначала строится обратная функция $\theta(t) = \arg z(t) + q(t)$, где

$$q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt, \; t \in [0,2\pi] \tag{1}$$

– решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$q(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} q(\tau)d\tau+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} q(\tau)K(\tau,t)d\tau+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|z(\tau)|\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}d\tau+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|z(\tau)|L(\tau,t)d\tau,\quad(2)$$

где непрерывные ядра $K(\tau,t)$ и $L(\tau,t)$ строятся с использованием исходной параметризации границы. Уравнение (2) сводится к решению конечной линейной системы относительно первых коэффициентов разложения (1). Близость решения усечённой системы к решению бесконечной системы регулируется совпадением коэффициентов отображающей функции, найденных по двум разным формулам.

В случае двусвязной области D задаются две граничные кривые $L_j\colon\{x=x_j(t),\ y=y_j(t),\ t\in[0,2\pi]\}$, $j=0,1$. Здесь для построения аналитической функции, конформно отображающей круговое кольцо на D, мы также ищем перепараметризацию каждой из граничных кривых, решая для производных вспомогательных функций $q_j(t)$, $j=1,2$ интегральные уравнения. Эти уравнения легко приводятся к виду, подобному (2), выделением сингулярных слагаемых с ядром $\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}$ для применения формулы Гильберта. Решение также сводится к решению усечённой системы линейных уравнений. Метод достаточно просто программируется. На рис. 1 приведены примеры построения конформных отображений кольца на соответствующие области.

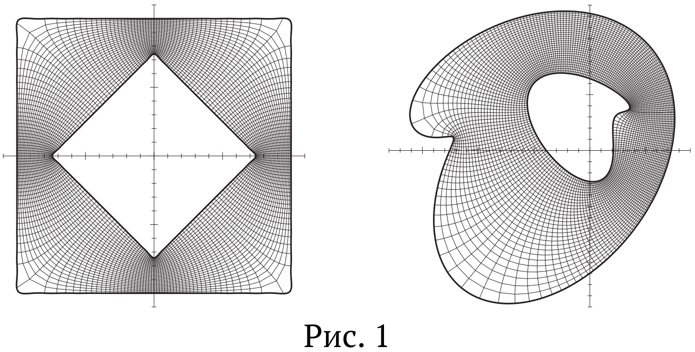

Рис. 1

Литература

[1] Широкова Е. А. *О приближенном конформном отображении единичного круга на односвязную область* // Изв. вузов. Математика. – 2014. – № 3. – С. 57–67.

МНОГОМЕРНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРЕМЫ КЕЗИ

Н. В. Абросимов[1], В. В. Асеев[2]

---

[1] *abrosimov@math.nsc.ru*, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
[2] *aseevvv@yandex.ru*, Лаборатория Квантовой топологии ЧелГУ

Прямая и обратная теоремы Кези [1] являются обобщением теоремы Птолемея, они дают, соответственно, необходимые и достаточные условия, когда к четырем окружностям на плоскости можно провести общую касательную окружность.

Будем называть k-мерную обобщенную сферу $S \subset \overline{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ $(n \geqslant 2,\ 1 \leqslant k < n)$ общей *ϕ-касательной* для некоторого набора помеченных n-мерных обобщенных замкнутых шаров $\mathbf{B}_j \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ с пометками $\phi_j \in [0,\pi]$, если S касается каждого шара $\mathbf{B}_j$, причем угол между нормалями S и $\mathbf{B}_j$ в точке касания $p_j = S \cap \mathbf{B}_j$ равен ϕ_j. Для пары отмеченных n-мерных шаров $\phi_i\mathbf{B}_i$ и $\phi_j\mathbf{B}_j$ *длиной* ℓ_{ij} *ϕ-касательного отрезка* будем называть расстояние между точками касания $\mathbf{B}_i$ и $\mathbf{B}_j$ с их общей ϕ-касательной прямой. Нами получены следующие n-мерные обобщения прямой и обратной теорем Кези.

Теорема 1. *Пусть k-мерная обобщенная сфера S является общей ϕ-касательной для четверки помеченных n-мерных обобщенных шаров $\phi_j\mathbf{B}_j, (j = 1,2,3,4)$. Тогда при любой перенумерации шаров для длин ϕ-касательных отрезков ко всем парам из указанного набора шаров выполнено неравенство $\ell_{12}\ell_{34} + \ell_{23}\ell_{14} \geqslant \ell_{13}\ell_{24}$, причем точки касания $p_j = S \cap \mathbf{B}_j$ располагаются на некоторой обобщенной окружности $C \subset S$ и равенство достигается в том и только том случае, когда p_j занумерованы в порядке обхода C.*

Теорема 2. *Пусть даны четыре помеченных n-мерных обобщенных шара $\phi_j\mathbf{B}_j, (j = 1,2,3,4)$, $\phi_j = \{0,\pi\}$, причем шар наименьшего радиуса не касается остальных трех шаров. Если для длин ϕ-касательных отрезков ко всем парам из указанного набора шаров при любой их перенумерации выполнено неравенство $\ell_{12}\ell_{34} + \ell_{23}\ell_{14} \geqslant \ell_{13}\ell_{24}$, то существует $(n-1)$-мерная обобщенная сфера, которая является общей ϕ-касательной к четверке отмеченных шаров $\phi_j\mathbf{B}_j$.*

В работах [2] и [3] установлена теорема Птолемея на плоскости Лобачевского. Теорема Кези на плоскости Лобачевского и на двумерной сфере получена в [4]. В [5] предложены новые интерпретации евклидовой и гиперболической теорем Кези.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента (проект МК-9572.2016.1) и РФФИ (проект 16-31-00138).

Литература

[1] Casey J. *A sequel to the first six books of the Elements of Euclid, containing an easy introduction to modern geometry, with numerous examples.* – Dublin : Hodges, Figgis and Co., 1888.

[2] Kubota T. *On the extended Ptolemy's theorem in hyperbolic geometry* // Science reports of the Tohoku University. Ser. 1: Physics, chemistry, astronomy. – 1912. – V. 2. – P. 131–156.

[3] Широков П. А. *Этюды по геометрии Лобачевского* // Известия физико-математического общества при КГУ, серия 2. – 1924. – Т. 24. – № 1. – С. 26–32.

[4] Abrosimov N. V., Mikaiylova L. A. *Casey's theorem in hyperbolic geometry* // Sib. Èlektron. Mat. Izv. – 2015. – V. 12. – P. 354–360.

[5] Костин А. В., Костина Н. Н. *Интерпретации теоремы Кези и ее гиперболического аналога* // Сиб. электрон. матем. изв. – 2016. – Т. 13. – С. 242–251.

ГЛАВНЫЕ ПОДМОДУЛИ В МОДУЛЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА И ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Н. Ф. Абузярова[1]

---

[1] *abnatf@gmail.com*, Башкирский государственный университет

Пусть $[a_1;b_1] \Subset [a_2;b_2] \Subset \dots$ – последовательность отрезков, исчерпывающая конечный или бесконечный интервал $(a;b)$ вещественной прямой, $\mathscr{P}(a;b)$ – индуктивный предел последовательности банаховых пространств $\{P_k\}$, где

$$P_k = \left\{\varphi \in H(\mathbb{C}):\ \|\varphi\|_k = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{(1+|z|)^k \exp(b_k y^+ - a_k y^-)} < \infty\right\},$$

$y^{\pm} = \max\{0, \pm y\}$, $z = x + \mathrm{i}y$. Всякий элемент φ пространства $\mathscr{P}(a;b)$ является функцией вполне регулярного роста при порядке 1, индикаторная диаграмма которой есть отрезок мнимой оси $[\mathrm{i}c_\varphi; \mathrm{i}d_\varphi] \subset (\mathrm{i}a; \mathrm{i}b)$. В пространстве $\mathscr{P}(a;b)$ операция умножения на независимую переменную z непрерывна, поэтому $\mathscr{P}(a;b)$ – топологический модуль над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$. Замкнутые подмодули модуля $\mathscr{P}(a;b)$ состоят в двойственности с замкнутыми подпространствами пространства $C^\infty(a;b)$, инвариантными относительно оператора дифференцирования (см. [1], [2]).

Обозначим $\mathscr{J}_\varphi$ главный подмодуль, порожденный функцией $\varphi \in \mathscr{P}(a;b)$: $\mathscr{J}_\varphi = \overline{\{p\varphi:\ p \in \mathbb{C}[z]\}}$. Главный подмодуль $\mathscr{J}_\varphi$ называется *слабо локализуемым*, если он содержит *все* функции $\psi \in \mathscr{P}(a;b)$ со свойствами: функция ψ имеет ту же индикаторную диаграмму, что и φ, и обращается в нуль на множестве нулей функции φ.

В силу результатов работы [3] наибольший интерес представляют условия слабой локализуемости главного с подмодуля с образующей $\varphi \in \mathscr{P}_0(a;b)$, где множество $\mathscr{P}_0(a;b) \subset \mathscr{P}(a;b)$ состоит из всех функций φ, для которых $\lim\limits_{|x|\to\infty} |\varphi(x)x^n| = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Положим

$$U_*(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}} \frac{|x|^n}{M_n},$$

где $M_n = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |x^n \varphi(x)|$, $n = 0, 1, \dots$, и пусть $u_*(x) = \ln U_*(x)$.

Теорема. *Предположим, что существует постоянная* $L_0 > 0$ *такая, что для любого* $x \in \mathbb{R}$ *найдется* $x' \in \mathbb{R}$ *со свойствами* $|x - x'| \leqslant L_0 u_*(x)$ *и* $\ln|\varphi(x')| \geqslant -L_0 u_*(x')$.

Тогда подмодуль $\mathscr{J}_\varphi$ *слабо локализуем.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ, грант № 01201456408.

Литература

[1] Абузярова Н. Ф. *Спектральный синтез в пространстве Шварца бесконечно дифференцируемых функций* // Доклады РАН. – 2014. – Т. 457. – № 5. – С. 510–513.

[2] Абузярова Н. Ф. *Замкнутые подмодули в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси* // Уфимский матем. журнал. – 2014. – Т. 6. – № 4. – С. 3–18.

[3] Абузярова Н. Ф. *Некоторые свойства главных подмодулей в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси* // Уфимский матем. журнал. – 2016. – Т. 8. – № 1. – С. 3–14.

КОЛЬЦА, НАД КОТОРЫМИ КАЖДЫЙ МОДУЛЬ ЯВЛЯЕТСЯ I_0^*-МОДУЛЕМ

А. Н. Абызов[1]

---

[1] *aabyzov@kpfu.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

Модуль M называется I_0*-модулем,* если каждый его немалый подмодуль содержит ненулевое прямое слагаемое модуля M. Кольцо, над которым каждый правый модуль является I_0-модулем, называется *правым обобщенным* SV*-кольцом.* Описание правых обобщенных SV-колец предствлено в монографии [1]. Двойственно определяется понятие I_0^*-модуля. Модуль M называется I_0^**-модулем,* если каждый его несущественный подмодуль содержится в собственном прямом слагаемом модуля M.

Теорема 1. *Для полуартинового справа (слева) кольца R следующие условия равносильны:*

1) *каждый правый модуль над кольцом R является I_0^*-модулем;*
2) *каждый правый R-модуль является либо V-модулем, либо содержит ненулевое проективное прямое слагаемое;*
3) *каждый правый R-модуль N, у которого $J(N) \neq 0$, содержит ненулевое проективное прямое слагаемое;*
4) *в кольце R существует семейство правых идеалов $(A_i)_{i\in I}$, для которого выполнены следующие условия:*
    a) *A_i – локальный инъективный модуль длины два для каждого $i \in I$;*
    b) *$J(R) = \oplus_{i\in I} J(A_i)$*
    c) *$R/J(R)$ – правое SV-кольцо.*

Теорема 2. *Для кольца R следующие условия равносильны:*

1) *над кольцом R каждый модуль одновременно является I_0-модулем и I_0^*-модулем;*
2) *R – полуартиново справа (слева) кольцо, над которым каждый модуль является прямой суммой проективного модуля и V-модуля;*

3) *R – полуартиново справа (слева) кольцо, над которым каждый модуль является прямой суммой инъективного модуля и V-модуля;*

4) *R – прямое произведение SV-кольца и артинового полуцепного кольца, у которого квадрат радикала Джекобсона равен нулю.*

Литература

[1] Jain S. K., Srivastava A. K., Tuganbaev A. A. *Cyclic Modules and the Structure of Rings*. — Oxford : Oxford Mathematical Monographs, Oxford Univ. Press, 2012.

КОРРЕКТНАЯ ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю. Р. Агачев[1], М. Ю. Першагин[2]

---

[1] *jagachev@gmail.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет
[2] *mpershagin@mail.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

Рассматривается общая краевая задача

$$R_i(x) = 0,\ i = \overline{1,m}, \tag{1}$$

для интегро-дифференциального уравнения

$$Kx \equiv \Gamma x + Gx + Hx \equiv x^{(m)}(t) + \sum_{k=1}^{m} g_k(t)x^{(m-k)}(t) +$$
$$+ \sum_{j=0}^{r} \int_{-1}^{+1} h_j(t,s)x^{(j)}(s)\,ds = y(t), \quad -1 \leqslant t \leqslant 1,\ r > m, \tag{2}$$

где $\{R_i\}$ — линейно-независимые функционалы на пространстве $(m-1)$-раз непрерывно-дифференцируемых на $[-1,1]$ функций, $y(t), g_k(t), k = \overline{1,m}$, и $h_j(t,s), j = \overline{0,r}$, – известные функции в своих областях определения.

Известно, что задача (1), (2) является, вообще говоря, некорректно поставленной по Адамару. Поэтому в общем случае для нахождения решения необходимо применять известные методы регуляризации. В некоторых случаях при определенных гладкостных свойствах коэффициентов уравнения (2) удается задачу (1), (2) ставить корректно за счет выбора пространств искомых элементов и правых частей. Здесь предлагается новая пара таких пространств.

Задачу (1), (2) будем рассматривать в паре пространств (X, Y), где $Y = W^{r-m}L_p(-1,+1)$ – пространство функций $y(t)$, имеющих абсолютно-непрерывную производную порядка $r-m-1$ и производную порядка $r-m$ в промежутке $(-1,+1)$, принадлежащую пространству Лебега $L_p(-1,1), 1 \leqslant p \leqslant \infty$, а $X \subset W^r L_p(-1,+1)$ – соответствующее пространство функций, удовлетворяющих краевым условиям (1). В указанных пространствах нормы зададим следующим образом:

$$\|y\|_Y = \|y\|_{L_p} + \|y^{(r-m)}\|_{L_p},\ y \in Y, \quad \|x\|_X = \|x^{(m)}\|_Y,\ x \in X.$$

Теорема 1. *Пусть* $1 \leqslant p, q \leqslant \infty, 1/p + 1/q = 1$ *и выполнены предположения:*

1) $g_k, k = \overline{1, m}, y \in Y$*;*

2) $h_j \in Y \times L_1$, $j = \overline{0, r-1}$*;*

3) $h_r \in Y \times L_q$*;*

4) уравнение $\Gamma x = 0$ *при краевых условиях (1) имеет лишь нулевое решение.*

Тогда задача решения (1), (2) в паре пространств (X, Y) *поставлена корректно по Адамару.*

Будем решать задачу (1), (2) полиномиальным проекционным методом

$$K_n x_n \equiv \Gamma x_n + P_n G x_n + P_n H x_n = P_n y \ (x_n \in X_n), \tag{3}$$

где X_n — подпространство алгебраических полиномов степени $n > r$ из X, Y_n — подпространство алгебраических полиномов степени $n - m$, а $P_n : Y \to Y_n$ — оператор проектирования.

Теорема 2. *Если, в условиях теоремы 1, последовательность проекционных операторов* P_n *сходится к единичному оператору в пространстве* Y*, то уравнение (3) имеет единственное решение (хотя бы при* $n \geqslant n_0 \in N$*). При этом приближенные решения сходятся к точному решению задачи (1), (2) со скоростью*

$$\|x - x_n\|_X = O\{E_{n-m}(x^{(m)})_p\},$$

где $E_{n-m}(z)_p$ *— наилучшее приближение функции* $z \in L_p$ *алгебраическими полиномами степени не выше* $n - m$*.*

Исследуется также случай разностных ядер в интегральных операторах уравнения (2).

К РЕШЕНИЮ ДРОБНО–ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю. Р. Агачев[1], А. Ф. Галимянов[2]

---

[1] *jagachev@gmail.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

[2] *anis_59@mail.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

Рассматривается дробно–интегральное уравнение вида

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-1}^{x} \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + (T\varphi)(x) = f(x), \ -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, α $(0 < \alpha < 1)$ — заданный числовой параметр, T — данный линейный оператор, f и φ — известная и искомая функции. Предполагается, что в уравнении (1) главным является дробно–интегральный оператор J^{α}_{-1}, задаваемый первым слагаемым в левой части.

Уравнение (1) будем рассматривать в паре (Φ, F), где $\Phi = L_2 = L_2(-1, 1)$ есть пространство Лебега квадратично–суммируемых на $[-1, 1]$ функций с обычной нормой, а $F = H^{\lambda}_{2,\rho} = H^{\lambda}_{2,\rho}(-1, 1)$ — пространство квадратично–суммируемых на $[-1, 1]$ функций с весом $\rho(x) = (x+1)^{-2\alpha}$, $0 < \alpha < 1/2$, для которых интегральный модуль непрерывности[1] в L_2 удовлетворяет неравенству $\omega(f;\delta)_2 \leqslant c_f\delta^{\lambda}, \alpha < \lambda \leqslant 1$. Норму в пространстве F введем следующим образом (см. также [1], с. 200): $\|f\|_F = \|f\|_{2,\rho} + H(f;\lambda), f \in F$, где $\|f\|^2_{2,\rho} = \int_{-1}^{1} \rho(x)|f(x)|^2 dx, H(f;\lambda) = \sup\limits_{0<\delta\leqslant 2} \delta^{-\lambda}\left\{\int_{-1}^{1-\delta} |f(x+\delta) - f(x)|^2 dx\right\}^{1/2}$ — наименьшая постоянная Гельдера функции $f(x)$ в L_2.

Как известно, для функций $\varphi \in L_2$ дробно–интегральный оператор J^{α}_{-1} имеет левый обратный $(J^{\alpha}_{-1})_l \equiv D^{\alpha}_{-1}$, являющийся дробно–дифференциальным оператором порядка α:

$$D^{\alpha}_{-1} f \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_{-1}^{x} \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ \frac{f(x)}{(x+1)^{\alpha}} + \alpha \int\limits_{-1}^{x} \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{\alpha+1}} dt \right\}.$$

Теорема. *Пусть числовые параметры* α *и* λ *удовлетворяют условиям:* $0 < \alpha < 1/2$ *и существует* $\varepsilon > 0$, *такое что* $\alpha < 1/2 - \varepsilon < \lambda \leqslant 1$.

Тогда оператор $D^{\alpha}_{-1} : F \to \Phi$ *является непрерывным.*

С помощью этого результата уравнение (1) может быть сведено к уравнению второго рода в пространстве L_2, причем в случае вполне непрерывного оператора $T : \Phi \to F$ оно относится к уравнениям второго рода с вполне непрерывным оператором. Следовательно, к последнему уравнению применима теория Фредгольма. Такая методика сведения уравнения (1) к уравнению второго рода в ряде случаев позволяет доказать применимость полиномиальных проекционных методов к исходному уравнению (1).

Литература

[1] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. А. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск.: Наука и техника, 1987. – 688 с.

К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Ю. Р. Агачев[1], А. В. Савина[2]

[1] *jagachev@gmail.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет
[2] *AVSavina@kpfu.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

Ряд прикладных задач (в частности, механики, физики, биологии) приводит (см., напр., [1, 2]) к необходимости решения дифференциальных уравнений, содержащих производные дробного порядка, вида

$$x^{(m)}(t) + g(t)(D^{\alpha}_{-1}x)(t) = y(t), \quad -1 < t < 1,\ 0 < \alpha < m, \tag{1}$$

---

[1] Заметим, что функция $f \in F$ принадлежит и пространству L_2.

где g, y – известные, x – искомая функции на $[-1,+1]$; здесь $D^{\alpha}_{-1}x$ есть производная (левосторонняя) Римана-Лиувилля порядка α функции $x(t)$:

$$(D^{\alpha}_{-1}x)(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(r-\alpha)}\frac{d^r}{dt^r}\int\limits_{-1}^{t}\frac{x(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-r+1}}, \quad r=[\alpha]+1,$$

$\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Для определенности будем рассматривать для уравнения (1) задачу Коши

$$x^{(i)}(-1)=0, \quad i=\overline{0,m-1}. \tag{2}$$

Пусть $Y = L_{2,\rho} \equiv L_{2,\rho}(-1,+1)$ есть пространство квадратично-суммируемых на $[-1,+1]$ функций с весом $\rho(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $X=\overset{\circ}{W}{}^m L_{2,\rho}$ – пространство абсолютно-непрерывных на $[-1,+1]$ функций, удовлетворяющих условиям (2) и имеющих производную m-го порядка на $L_{2,\rho}$. Нормы в этих пространствах возьмем согласованными: $\|y\|_Y=\|y\|_{2,\rho}$, $\quad y\in Y$; $\quad \|x\|_X=\|x^{(m)}\|_Y$, $\quad x\in X$. Через Y_n будем обозначать подпространство H_n алгебраических полиномов степени не выше n, а через X_n – подпространство $H_{m+n}\subset X$.

Отметим, что при $0<\alpha<m-\frac{1}{2}$ и $g,y\in L_{2,\rho}$ задача (1), (2) поставлена корректно по Адамару в паре пространств (X,Y), а при $g\in C[-1,+1]\equiv C$ корректность имеет место и при $m-\frac{1}{2}\leqslant\alpha<m$.

Будем решать задачу (1), (2) общим полиномиальным проекционным методом:

$$K_n x_n \equiv Vx_n + P_nGx_n = P_ny \quad (x_n\in X_n), \tag{3}$$

где $P_n : Y\to Y_n$ — произвольно фиксированный оператор проектирования, V — оператор m-кратного дифференцирования, а $Gx\equiv gD^{\alpha}_{-1}x$.

Рассматриваются два класса методов (3); первый класс характеризуется проекционностью оператора P_n $\left(P_n^2=P_n\right)$, для второго класса оператор P_n является лишь линейным.

Теорема 1. *Пусть* $P_n : Y\to Y$ *— ограниченный оператор,* $P_n^2=P_n$*, причем* $\|P_n\|=O(1)$, $\quad n\to\infty$. *Тогда, если задача* (1), (2) *имеет единственное решение при любой правой части из* $L_{2,\rho}$*, то уравнение* (3) *также имеет единственное решение (хотя бы при всех* n*, начиная с некоторого* $n_0\in N$*). При этом,* $x_n\to x$ *(*$n\to\infty$*) по норме пространства* X *со скоростью* $\|x-x_n\|_X=O\left\{E_n(Vx)_{2,\rho}\right\}$*, где* $E_n(z)_{2,\rho}$ *— наилучшее среднеквадратичное приближение функции* $z\in L_{2,\rho}$ *полиномами из* H_n.

Как следствие, отсюда вытекает сходимость полиномиальных методов Галеркина, подобластей и наименьших квадратов.

Теорема 2. *Пусть* $P_n^2=P_n$, $P_n : Y\to Y$ *— неограничены при каждом фиксированном* n*, но* $P_n : C\to Y$ *ограничены по норме в совокупности. Тогда при* $g,y\in C$ *имеет место сходимость проекционного метода* (3) *со скоростью* $\|x-x_n\|_X=O\{E_n(Vx)\}$*, где* $E_n(z)$ *— наилучшее равномерное приближение функции* $z\in C$ *полиномами* H_n*; в частности, полиномиальный метод коллокации по узлам Чебышева первого рода* (*или экстремальным точкам полинома Чебышева первого рода*) *сходится.*

Теорема 3. *Пусть* $P_n^2 \neq P_n$, *но* $\|z - P_n z\|_{2,\rho} = O\{E_n(z)_{2,\rho}\}$, $\forall z \in L_{2,\rho}$. *Тогда справедливы утверждения из теоремы* 1. *В частности, имеет место сходимость метода* (3) *с оператором* P_n, *полученным на основе конкретного* λ*-метода суммирования рядов по системе полиномов Чебышева первого рода.*

Заметим, что указанные результаты сохраняют силу, если в уравнении (1) добавлены слагаемые с младшими производными целого порядка и правосторонняя дробная производная порядка α, при этом коэффициенты при указанных производных принадлежат $L_{2,\rho}$.

Литература

[1] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. А. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск.: Наука и техника, 1987. – 688 с.

[2] Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение* – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.

ПОВЕДЕНИЕ РЯДА ДИРИХЛЕ С НЕРЕГУЛЯРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПОКАЗАТЕЛЕЙ В ПОЛУПОЛОСАХ

Н. Н. Аиткужина[1], А. М. Гайсин[2]

---

[1] *yusupovan@rambler.ru*, Башкирский государственный университет

[2] *gaisinam@mail.ru*, Институт математики с ВЦ УНЦ РАН

Для всюду сходящихся рядов Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it),\ 0 < \lambda_n \uparrow \infty, \tag{1}$$

обычно вводится понятие R–порядка — аналог обычного порядка для степенных рядов.

Пусть $\Pi_0 = \{s = \sigma + it : \sigma < 0\}$ — полуплоскость сходимости ряда (1), $S(a, t_0) = \{s = \sigma + it : |t - t_0| \leqslant a,\ \sigma < 0\}$. Величина

$$\rho_s = \overline{\lim_{\sigma \to 0-}} \frac{\ln^+ \ln M_s(\sigma)}{|\sigma|^{-1}},\ M_s(\sigma) = \max_{|t-t_0| \leqslant a} |F(\sigma + it)|\ (\sigma < 0),$$

называется порядком функции F в полуполосе $S(a, t_0)$. Пусть $\Lambda(t) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant t} 1$, $\psi : \mathbb{R}_+ \to [0, 1]$, $0 < \psi(r) \uparrow 1$, $[1 - \psi(r)] \ln\ln r \to 0$ при $r \to \infty$. Положим $D(t) = \Lambda(t) t^{-1}$, $\psi_1(r) = \min\limits_{\lambda_1 \leqslant t \leqslant r} D(t)$, $\psi_2(r) = \max\limits_{r \leqslant t} D(t)$.

Пишем $\Lambda \in \Lambda[\psi]$, если [1]:

1) существует конечный предел $\Delta = \lim\limits_{r \to \infty} \Lambda(r) r^{-1} \ln r$;

2) $\psi_2(r) - \psi_1(r) = O[(1 - \psi(r)) \ln^{-1} r]$ при $r \to \infty$.

Например, $\Lambda \in \Lambda[\psi]$, если выполняется условие 1), и $n\lambda_n^{-1} \downarrow$ при $n \to \infty$. В [1] доказано, что если $\Lambda \in \Lambda[\psi]$, то порядки ρ_1 и ρ_2 в любых полуполосах $S(a_i, t_i)$ $(a_i > 0,\ i = 1, 2)$ равны.

Пусть K — класс функций $h:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $h(0)=0$, $h(t)\uparrow\infty$, $h(t)t^{-1}\downarrow 0$ при $t\to\infty$,

$$R=\left\{h\in K:\ h(x)\ln\frac{x}{h(x)}=o\left(\frac{x}{\ln x}\right),\ x\to\infty\right\}.$$

R–плотностью последовательности Λ называется

$$G(R)=\inf_{h\in R}\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\mu_\Lambda(\omega(t))}{h(t)},\ \omega(t)=[t,t+h(t)),$$

где $\mu_\Lambda(\omega(t))$ — число точек $\lambda\in(\Lambda\cap\omega(t))$. Через $D(R)$ обозначим точную нижнюю грань тех чисел b $(0<b<\infty)$, таких, что: существует $\Gamma=\{\mu_n\}$ $(0<\mu_n\uparrow\infty,\ \Lambda\subset\Gamma$, причем $|M(t)-bt|\leqslant h(t)$ $(t>0)$ для некоторой функции $h\in R$, $M(t)=\sum\limits_{\mu_n\leqslant t}1$. Как известно, $D(R)=G(R)$ [2].

Теорема. *Если $G(R)=0$, то порядки функции F в любых полуполосах $S(a,t_0$ $(a>0)$ равны (они, вообще говоря, отличны от порядка F в Π_0).*

В условиях теоремы аналог этого утверждения для горизонтальных лучей не верен. Теорема усиливает результат из [1]: если $\Lambda\in\Lambda[\psi]$, то $G(R)=0$, однако, обратное не имеет места.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 14-01-00720, 15-01-01661).

Литература

[1] Гайсин А. М. *Поведение суммы ряда Дирихле в полуполосах* // Матем. заметки. – 1987. – Т. 42. – № 5. – С. 660–669.

[2] Гайсин А. М., Сергеева Д. И. *Оценка ряда Дирихле в полуполосе в случае нерегулярного распределения показателей II* // Сиб. матем. журн. – 2008. – Т. 49. – № 2. – С. 280–298.

ПАРАКОМПАКТНОСТЬ ЛИПШИЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ НАД ПРОСТРАНСТВАМИ ФРЕШЕ

З. Д. Аль Нафие[1]

Пусть X – топологическое пространство. Его покрытие называется локально конечным, если любая точка x имеет окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом покрывающих множеств. Пространство X называется паракомпактным, если оно хаусдорфово и каждое его открытое покрытие допускает локально конечное измельчение.

Пусть F – векторное пространство. Хаусдорфово топологическое пространство M со счетной базой называется многообразием над F (или многообразием с простанством моделей F), если каждая точка $x\in M$ обладает окрестностью, гомеоморфной

---

[1] *zahirmath20_ru @yahoo.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им.Н.И.Лобачевского

открытому множеству в F. На пересечениях этих открытых множеств естественным образом возникают отображения согласования. Если пространство F метрическое и эти отображения удовлетворяют условию Липшица с показателем k, то M называют Lip^k– многообразием. Подробное описание этих понятий можно найти в работах [1-4]. В работе [5] получен критерий паракомпактности многообразия над банаховым пространством. В данной работе этот вопрос изучается для случая, когда F – пространство Фреше. Введем следующие понятия:

Определение. *Назовем метрическое пространство F Lip^k-нормальным, если для любой пары его замкнутых подмножеств $A_{0;1}$ можно указать функцию $f: F \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую условию Липшица с показателем k и такую, что $f|_{A_0} \equiv 0$, $f|_{A_1} \equiv 1$.*

Определение. *Lip^k-разбиение единицы на метризуемом пространстве X – это разбиение единицы, состоящее из функций, удовлетворяющих условию Липшица с показателем k.*

Определение. *Метризуемое пространство X назовем Lip^k-паракомпактным, если всякое его открытое покрытие имеет локально конечное измельчение, допускающее подчиненное ему Lip^k-разбиение единицы.*

Основной результат работы таков:

Теорема. *Метризуемое многообразие M над пространством Фреше F является Lip^k-паракомпактным тогда и только тогда, когда F паракомпактно и Lip^k-нормально.*

Литература

[1] Ленг С. *Введение в теорию дифференцируемых многообразий* – М.: Мир, 1967. – 203 с.

[2] Фрёлихер А., Бухир В., *Дифференциальное исчисление в векторных пространствах без нормы.* – М.: Мир, 1970. – 165 с.

[3] Энгелькинг Р. *Общая топология.* – М.: Мир, 1986. – 751 с.

[4] Frolicher A., Kriegl A. *Linear Spaces and differentiation theory, Pure and Applied Mathematics.* – J. Wiley: Chichester, 1988. – 259 c.

[5] Аль Нафие З. Д.,Климентов С. В., *О паракомпактности бесконечномерных многообразий.* // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2014. – Т. 4. – № 2. – С. 5–7.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ *K*-АРНОГО АЛГОРИТМА ЕВКЛИДА

И.Ф. Амер[1], М.К. Аль Анни[2], А.М. Аль Халиди[3]

---

[1] *safadi121979@yahoo.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет
[2] *maadk_anni@live.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет
[3] *arkan4443@yahoo.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

В нашем докладе мы рассмотрим одну модификацию k-арного алгоритма для вычисления наибольшего общего делителя Н.О.Д. трех или более натуральных чисел. Такая задача возникает, например, при вычислении строго псевдопростых чисел (см. [1]).

Напомним, что k-арный алгоритм является обобщением бинарного алгоритма вычисления Н.О.Д. и был разработан в 1990 году Д. Соренсоном ([2],[3]).

Выберем натуральное число $k = 2^s$, имеющее меньший размер по сравнению с числами A и B, $A > B > 1$, для которых ищется Н.О.Д. Предположим, что эти числа являются нечетными. Основная идея k-арного алгоритма состоит в вычислении на произвольной итерации небольших множителей x и y таких , что выполняется тождество

$$Ax + By \equiv 0 \mod k. \tag{1}$$

Тогда полагая $C = (Ax + By)/k$, мы сможем перейти к меньшей паре $(B;C)$, Н.О.Д которой либо равен Н.О.Д. исходной пары, либо является его кратным. Процедура повторяется до тех пор, пока второй аргумент пары не станет равным нулю, тогда первый аргумент A' будет равен кратному искомого Н.О.Д. Чтобы отсечь посторонние атрибуты, в конце алгоритма происходит вычисление Н.О.Д. A' с исходными A и B по стандартному алгоритму Евклида.

По теореме Соренсона коэффициенты x и y можно выбрать из интервала $[-\sqrt{k};\sqrt{k}]$, поэтому величина C не превысит $2A/\sqrt{k}$.

В целом, сложность вычисления k-арного алгоритма оценивается величиной $O(n^2/\ln k)$, где n-длина большего из чисел (A,B).

В нашей докладе мы покажем, что для случая трех и более чисел эта оценка может быть улучшена.

Теорема. *Пусть заданы три натуральных числа A, B, C, взаимно простых с натуральным числом k. Найдутся числа x, y и z, удовлетворяющие условию $|x|, |y|, |z| \leqslant k^{1/3}$ такие, что выполняется условие*

$$Ax + By + Cz \equiv 0 \mod k. \tag{2}$$

Определяя $D = (Ax+By+Cz)/k$, получим существенный выигрыш по отношению к стандартному k-арному алгоритму.

Следствие. *Отношение A/C на каждой итерации k-арного алгоритма для трех аргументов не меньше величины $k^{2/3}/3$. При этом число операций на одной итерации увеличивается в два раза. Общая производительность нашего алгоритма оценивается той же величиной, что и сложность исходного алгоритма, но количество итераций существенно меньше.*

Литература

[1] Ishmukhametov S., Mubarakov B., Mochalov A. *Euclidian algorithm for recurrent sequences.//* Applied Discrete Mathematics and Heuristic Algorithms, International Scientific Journal. – Samara. – 2015. – **1**. –N2. –p.57-62.

[2] Sorenson J. *The k-ary GCD Algorithm.//* Universitet of Wisconsin-Madison. – Tecn.Report. – 1990. –p.1–20

[3] Sorenson J. *Two fast GCD Algorithms.//* J.Alg.1994. –**16**. –N1. – 110–144

О ПОСТРОЕНИИ 4-МЕРНЫХ НЕЛОРЕНЦЕВЫХ H-ПРОСТРАНСТВ

А. В. Аминова[1], Г. А. Серякин[2]

---

[1] *avaminova@gmail.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет
[2] *George.Seryakin@kpfu.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

Работа посвящена исследованию 4-мерных нелоренцевых многообразий нулевой сигнатуры, обладающеих симметриями в форме проективных движений. С каждым проективным движением связана сохраняющаяся величина, которая остается постоянной вдоль каждой 4-геодезической и определяет закон сохранения.

Для того, чтобы векторное поле X было проективным движением, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$(L_X G_{AB})_{;C} = 2G_{AB}\varphi_{;C} + G_{AC}\varphi_{;B} + G_{BC}\varphi_{;A}, \tag{1}$$

здесь $A, B = [1, ..., 4]$, $L_X G_{AB}$– производная Ли метрики G_{AB} в направлении проективного движения X, φ есть 1-форма, и точка с запятой означает ковариантное дифференцирование относительно метрики G_{AB}. Уравнения (1) разбиваются на две группы: уравнения Эйзенхарта

$$h_{AB;C} = 2G_{AB}\varphi_{;C} + G_{AC}\varphi_{;B} + G_{BC}\varphi_{;A} \tag{2}$$

и обобщенные уравнения Киллинга

$$(L_X G_{AB})_{;C} = h_{AB}. \tag{3}$$

Метрики, допускающие нетривиальные решения $h_{AB} \neq cG_{AB}$ уравнений Эйзенхарта, называются h-метриками, а соответствующие пространства — h-пространствами.

В работе рассматриваются 4-мерные h-пространства с характеристикой Сегре $[2, 2]$ и $[4]$. При помощи метода косонормального репера А. В. Аминовой [1] были получены h-метрики указанного типа и исследована их структура.

Литература

[1] Аминова А. В. *Проективные преобразования псевдоримановых многообразий*, М.: “Янус-К”, 2003.

О ПРОЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ПЯТИМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА

А. В. Аминова[1], Д. Р. Хакимов[2]

[1] *asya.aminova@kpfu.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет
[2] *dzhamoliddink@mail.ru*, Курган-Тюбинский госуниверситет имени Носира Хусрава

С помощью метода косонормального репера [1] определяются пятимерные псевдоримановы многообразия (M^5, g), допукающие негомотетические проективные движения X типа $\{221\}$ (“h-пространства типа $\{221\}$”). Тип проективного движения X и тип метрики g в области $V \subseteq M^5$ определяются алгебраической структурой производной Ли $L_X g$ метрики g в направлении проективного движения X, задаваемой в каждой точке $p \in V$ характеристикой Сегре $\chi = \{221\}$ тензора $h = L_X g$.

В адаптированном неголономном косонормальном репере вычислены формы связности и кривизны h-пространства типа $\{221\}$. Определены метрика h-пространства и производная Ли проективного движения типа $\{221\}$ в подходящей голономной системе координат.

Литература

[1] Аминова А. В. *Проективные преобразования псевдоримановых многообразий.* – М.: Янус-К, 2003. – 619 с.

О ГЕОМЕТРИИ СУБМЕРСИЙ НАД ОРБИТАМИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Н. Аннаев[1]

[1] *nuriddin.annayev.91@mail.ru*, Национальный Университет Узбекистана

Рассмотрим некоторе множество $D \subset V(M)$, и для точки $x \in M$ через $L(x)$ обозначим орбиту семейства D, проходящую через точку x. В работе [2] доказано, что каждая орбита является гладким подмногообразием M.

Множество всех векторных полей Киллинга $K(M)$ на многообразии M образует конечномерную алгебру Ли [1]. Обозначим через $A(D)$ наименьшую подалгебру Ли алгебры $K(M)$, содержащую множество D. Так как алгебра $K(M)$ конечномерна, то существуют конечное число векторных полей $X_1, X_2, ..., X_m$ из $A(D)$, таких, что векторы $X_1(x), X_2(x), ..., X_m(x)$ образуют базис для подпространства $A_x(D)$ для каждого $x \in M$.

В [1] доказана следующая теорема, которая показывает, что каждая точка из орбиты $L(x_0)$ достижима из x_0 с помощью конечного числа ”переключений” с использованием векторных полей $X_1, X_2, ..., X_m$ в определенном порядке.

Теорема 1. *Множество точек вида*

$$y = X_m^{t_m}(X_{m-1}^{t_{m-1}}...(X_1^{t_1}(x_0)...)),$$

где $(t_1, t_2, ..., t_m) \in R^m$, *совпадает с орбитой* $L(x_0)$.

Рассмотрим семейство D векторных полей Киллинга на двумерной сфере, состоящее из следующих двух векторных полей:

$$X_1 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, X_2 = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}.$$

Нетрудно проверить, что базисом минимальной алгебры $A(D)$ являются векторные поля

$$X_1, X_2, X_3 = [X_2, X_1],$$

и поэтому орбита семейства для каждой точки сферы по теореме 1 совпадает со всей сферой.

Определим отображение $\pi : R^3 \to S^2$ следующим образом

$$\pi(t_1, t_2, t_3) = X_3^{t_3}(X_2^{t_2}(X_1^{t_1}(p))),$$

где $p-$ точка с координатами $(1,0,0)$ сферы S^2.

Теорема 2.

1) Отображение π является субмерсией.

2) Субмерсия $\pi : R^3 \to S^2$ порождает на R^3 одномерное слоение, слои которого имеют положительные кривизны и кручения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства высшего и среднего специального образования республики Узбекистан (проект Ф4-04).

Литература

[1] Нарманов А. Я., Саитова С. С. *О геометрии орбит векторных полей Киллинга.//* Дифференциальные уравнения, 2014. – Т. 50. – №12. – С. 1582–1589.

[2] Sussmann H. *Orbits of family of vector fields and integrability of systems with singularities. //* Bull. Amer. Math. Soc. – 1973. – Т. 79. – С. 197–199.

О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯХ В ГРУППОВЫХ АЛГЕБРАХ

А. А. Арутюнов[1]

---

[1] *andronick.arutyunov@gmail.com*, МФТИ

Результаты получены совместно с профессором А. С. Мищенко и доцентом А. И. Штерном.

Пусь G — некоторая дискретная группа и $C[G]$ соответствующая ей групповая алгебра. Назовем линейный оператор $d : C[G] \to C[G]$ — оператором дифференцирования (или деривацией) если для него выполнено тождество Лейбница

$$d(uv) = d(u)v + ud(v), \forall u, v \in C[G].$$

По группе G может быть построен группоид Γ следующим образом. В качестве объектов $Obj(\Gamma)$ возьмем множество элементов группы G, а в качестве морфизмов

$Mor(\Gamma)$ множество всевозможных пар элементов группы. Морфизм (u,v) определим как стрелку из объекта $v^{-1}u$ в объект uv^{-1}. На множестве морфизмов определим частичную операцию $\circ$. Если конец морфизма $\phi_1=(u_1,v_1)$ совпадает с началом морфизма $\phi_2=(u_2,v_2)$ то

$$\phi_1\circ\phi_2=(u_2v_1,v_2v_1).$$

Теорема 1. *Определенная таким образом струкура* Γ *является группоидом.*

В терминах построенного таким образом группоида удобно изучать дифференцирования на групповой алгебре. Отображение $\chi: Mor(\Gamma)\to C$ мы будем называть характером на группоиде Γ если для любой пары морфизмов ϕ_1,ϕ_2 между которыми определена операция $\circ$ выполняеся $\chi(\phi_1\circ\phi_2)=\chi(\phi_1)+\chi(\phi_2)$.

Действие Деривации d на элемент групповой алгебры $u=\sum\limits_{g\in G}\lambda^g g$, может быть записано в виде

$$d(u)=\sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G}d_h^g\lambda^h\right)g.$$

Теорема 2. *Для любой деривации* d *существует такой характер* χ, *что* $d_h^g=\chi(g,h)$.

Оказывается, что характеры могут быть изучены в групповых терминах, а именно при помощи централизаторов элементов группы G.

В частности имеет место

Теорема 3. *Если* d *— оператор внутреннего дифференцирования (коммутатор с элементом группы) то* $\chi(\phi)=0$ *для всех морфизмов* ϕ *у которых начало и конец совпадают.*

ЛОГАРИФМЫ ФОРМАЛЬНЫХ A-МОДУЛЕЙ В СЛУЧАЕ МАЛОГО ВЕТВЛЕНИЯ

С. С. Афанасьева[1]

---

[1] *cheery_sonya@mail.ru*, Санкт-Петербургский государственный университет

В настоящей работе описаны формальные группы над $\mathcal{O}$ с кольцом эндоморфизмов, включающим фиксированное кольцо $\mathcal{O}_0$.

Пусть K_0 — локальное поле (конечное расширение $\mathbb{Q}_p$) с кольцом целых $\mathcal{O}_0$ и простым элементом π_0; q — порядок поля вычетов поля K_0; K — конечное расширение поля K_0, с кольцом целых $\mathcal{O}$ и простым элементом π; N — подполе инерции в K/K_0, $\mathcal{O}_N$ — его кольцо целых; e_0 — индекс ветвления K/K_0; $X=(X_1,\dots,X_m)$. Как и в [2], $M_m(\mathfrak{A})$ обозначает кольцо матриц размера $m\times m$ над кольцом $\mathfrak{A}$, I_m - единичная матрица размера $m\times m$, v_K — нормирование в поле K.

Будем предполагать, что

$$v_K(\pi_0)<q.$$

Хорошо известно, что m-мерные формальные $\mathcal{O}_0$-модули над $\mathcal{O}$ с точностью до изоморфизма классифицируются парами рядов (u,v), где $u\in M_m(\mathcal{O}_N[[\Delta]])$,
$v\in M_m(\mathcal{O}[[\Delta]])$ и $u\equiv\pi_0 I_m \mod \Delta$, $v=\pi_0 I_m-\pi r_1-\ldots-\pi^{e_0-1}r_{e_0-1}$, $r_i\in M_m(\mathcal{O}_N[[\Delta]]\Delta)$,
$1\leqslant i\leqslant e_0-1$.

Следующая теорема позволяет определить тип $\mathcal{O}_0$-модуля по виду логарифма, а также дает способ построения формальных $\mathcal{O}_0$-модулей.

Теорема. *Пусть* $\lambda(X) \in K[[X]]^m$, $\lambda(X) \equiv X \mod \deg 2$ *и* $\lambda(X) = \sum_{k=0}^{e_0-1} \pi^k \lambda_k(X)$, *где* $\lambda_k(X) \in N[[X]]^m$. *Тогда* $\lambda(X)$ *является логарифмом* m*-мерного формального* $\mathcal{O}_0$*-модуля над* $\mathcal{O}$ *тогда и только тогда, когда для некоторых элементов* $u \in M_m(\mathcal{O}_N[[\Delta]]')$, $v \in M_m(\mathcal{O}[[\Delta]])$, *где* $u \equiv \pi_0 I_m \mod \Delta$, $v = \pi_0 I_m - \pi r_1 - \ldots - \pi^{e_0-1} r_{e_0-1}$, $r_i \in M_m(\mathcal{O}_N[[\Delta]]'\Delta)$, $1 \leqslant i \leqslant e_0 - 1$ *выполнены сравнения*

$$\begin{cases} u\lambda_0(X) \equiv 0 \mod \pi_0 \\ r_i\lambda_0(X) + \pi_0\lambda_i(X) \equiv 0 \mod \pi_0,\ 1 \leqslant i \leqslant e_0 - 1. \end{cases}$$

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-01-00393.

Литература

[1] Honda T. *On the theory of commutative formal groups* // J. Math. Soc. Japan, 1970, v. 22, p. 213–243.

[2] Бондарко М. В., Востоков С. В. *Явная классификация формальных групп над локальными полями* // Теория чисел, алгебра и алгебраическая геометрия, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Игоря Ростиславовича Шафаревича, Тр. МИАН, 241, Наука, М., 2003, с. 43–67.

[3] Hazewinkel M., *Formal groups and applications* // Acad. Press, New York, 1978.

[4] Афанасьева С. С., Востоков С. В. *Классификация формальных A-модулей в малом ветвлении* // Вопросы теории представлений алгебр и групп. 27, Зап. научн. сем. ПОМИ, 430, ПОМИ, СПб., 2014, с. 5–12.

К ЗАКОНУ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА В ЛИНЕЙНО-ИНВАРИАНТНЫХ СЕМЕЙСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. И. Афонина[1], И. Р. Каюмов[2]

---

[1] *sanyagirl89@mail.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет
[2] *ikayumov@kpfu.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

Предположим, что функция f аналитична и однолистна в круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$. Макаров [1] доказал, что существует такая абсолютная положительная постоянная C, что

$$\limsup_{r\to 1-} \frac{|\log f'(r\zeta)|}{\sqrt{|\log(1-r)| \log\log|\log(1-r)|}} \leqslant C$$

для почти всех ζ на окружности $|\zeta| = 1$. Поммеренке [2, с.188] показал, что это неравенство верно при $C = 6$, но существует аналитическая и однолистная в круге $\mathbb{D}$ функция, для которой это неравенство перестает быть верным при $C \leqslant 0{,}685$.

В статье [3] показано, что закон повторного логарифма справедлив при $C = 2\sqrt{3}$. В работе [5] установлено, что $0.91 < C \leqslant 2\sqrt{\frac{\sqrt{24}-3}{5}} = 1.2326.....$

Поммеренке ввел и исследовал понятие линейно-инвариантного семейства $\mathfrak{M}$ функций как класса аналитических в круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций таких, что

1) $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f'(z) \neq 0$ в $\mathbb{D}$,

2) для каждой $f \in \mathfrak{M}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ $f(ze^{i\theta})e^{-i\theta} \in \mathfrak{M}$,

3) для каждой $f \in \mathfrak{M}$ и $a \in \mathbb{D}$

$$f_a(z) = \frac{f(\frac{z+a}{1+\overline{a}z}) - f(a)}{f'(a)(1-|a|^2)} = z + \cdots \in \mathfrak{M}.$$

При этом, порядком функции f, удовлетворяющей условию 1), называется число

$$\mathrm{ord} f = \sup_{a \in \mathbb{D}} \frac{|f_a''(0)|}{2},$$

а порядком семейства $\mathfrak{M}$ – число

$$\mathrm{ord}\mathfrak{M} = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \mathrm{ord} f.$$

Универсальным линейно-инвариантным семейством U_α называется объединение всех линейно-инвариантных семейств $\mathfrak{M}$ таких, что $\mathrm{ord}\mathfrak{M} \leqslant \alpha$:

$$U_\alpha = \bigcup \{\mathfrak{M} : \mathrm{ord}\,\mathfrak{M} \leqslant \alpha\}.$$

Пусть теперь $f \in U_\alpha$, $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$. Результатом данной работы является

Теорема. *Закон повторного логарифма в линейно-инвариантных семействах аналитических функций справедлив при* $C = 2\sqrt{\alpha^2 - 1}$.

Доказательство данной теоремы основывается на результатах работы Н.Г. Макарова [1] и И.Р. Каюмова [3].

Литература

[1] Makarov N. G., *On the distortion of boundary sets under conformal mappings* // Proc. London Math. Soc. – T.51. – №3. –1985. – C. 369–384.

[2] Pommerenke Ch., *Boundary Behaviour of Conformal Maps* – Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[3] Каюмов И. Р., *К закону повторного логарифма для конформных отображений* // Мат.заметки –2006. – Т.79. – С. 150–153.

[4] Kayumov I. R., *The law of the iterated logarithm for locally univalent functions* // Ann. Acad. Sci. Fennicae. – 2002. – V. 27. – P. 357–364.

[5] Hedenmalm H., Kayumov I., *On the Makarov law of the iterated logarithm* // Proceedings of the american mathematical society. –2007. T.135. – №7. – P. 2235–2248.

[6] Годуля Я., Старков В. В., *Линейно-инвариантные семейства функций, аналитических в поликруге.* // Труды ПГУ. Математика. –1995. Т.2. – С. 11–18.

ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ КАТЕГОРИЧНОСТИ ДЛЯ ДИСТРИБУТИВНЫХ РЕШЕТОК И ГЕЙТИНГОВЫХ АЛГЕБР

Н. А. Баженов[1]

---

[1] *bazhenov@math.nsc.ru*, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет

В работе исследуются алгоритмические свойства изоморфизмов между вычислимыми копиями для дистрибутивных решёток и гейтинговых алгебр.

Пусть α — вычислимый ординал. Δ^0_α*-размерностью* вычислимой структуры $\mathscr{S}$ называется число вычислимых копий структуры $\mathscr{S}$ с точностью до Δ^0_α-вычислимого изоморфизма.

Предположим, что n — натуральное число, такое что $n \geqslant 2$. В работе [1] построен вычислимый жёсткий граф, имеющий вычислимую размерность n. В работе [2] доказано, что для любого вычислимого ординала-последователя α существует вычислимая жёсткая структура, имеющая Δ^0_α-размерность n.

Из результатов [2,3] следует, что для любого вычислимого ординала-последователя α и любого ненулевого натурального числа n существует вычислимая недистрибутивная решётка, имеющая Δ^0_α-размерность n. В работе получен следующий результат.

Теорема. *Пусть n — это ненулевое натуральное число, α — вычислимый ординал-последователь, такой что $\alpha \geqslant 4$. Тогда существует вычислимая дистрибутивная решётка (вычислимая гейтингова алгебра), имеющая Δ^0_α-размерность n.*

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-60058 мол_а_дк.

Литература

[1] Гончаров С. С. *Проблема числа неавтоэквивалентных конструктивизаций* // Алгебра и логика. – 1980. – Т. 19. – № 6. – С. 621–639.

[2] Goncharov S., Harizanov V., Knight J., McCoy C., Miller R., Solomon R. *Enumerations in computable structure theory* // Ann. Pure Appl. Logic. – 2005. – V. 136. – № 3. – P. 219–246.

[3] Hirschfeldt D. R., Khoussainov B., Shore R. A., Slinko A. M. *Degree spectra and computable dimensions in algebraic structures* // Ann. Pure Appl. Logic. – 2002. – V. 115. – № 1–3. – P. 71–113.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Д. Б. Базарханов[1]

---

[1] *dauren.mirza@gmail.com*, Институт математики и математического моделирования

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{z}_k = \{1, \dots, k\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Как обычно, $L_r = L_r([0,1]^k)$ — пространство функций $f : [0,1]^k \to \mathbb{C}$, суммируемых в степени r (при $r = \infty$ существенно ограниченных) на $[0,1]^k$, с нормой $\| f \mid L_r \|$.

Для $x = (x_1, \dots, x_k), y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ положим $xy = x_1 y_1 + \ldots + x_k y_k$, $|x| = |x_1| + \cdots + |x_k|$. Пусть $n \in \mathbb{N}:\ n \leqslant k$. Фиксируем мультииндекс $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ с $|m| = k$ и представление $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ в виде $x = (x^1, \dots, x^n)$, где $x^\nu \in \mathbb{R}^{m_\nu}$.

Положим $\mathrm{e}^k = \mathrm{e}^k(0) = \{\mathit{0}, \mathit{1}\}^k$, $\mathrm{e}^k(1) = \mathrm{e}^k \setminus \{(\mathit{0}, \dots, \mathit{0})\}$; $\Lambda(k, j) = \mathbb{Z}^k \cap [0, 2^j - 1]^k$, $j \in \mathbb{N}_0$. Пусть

$$\chi^{(0)}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1); \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus [0,1), \end{cases}$$

$$\chi^{(1)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t \in [0, \frac{1}{2}); \\ -\frac{1}{2}, & t \in [\frac{1}{2}, 1); \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus [0,1); \end{cases}$$

далее, m–кратную систему Хаара $\chi^{(m)}$ определим следующим образом: $\chi^{(m)} = \{\chi^\iota_{\alpha\lambda}(x) \ \mid\ \iota \in \mathrm{e}^m(\alpha),\ \lambda \in \Lambda(m, \alpha),\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$, где $\chi^\iota_{\alpha\lambda}(x) = \prod_{\nu=1}^n \chi^{\iota^\nu}_{\alpha_\nu \lambda^\nu}(x^\nu)$, $\chi^{\iota^\nu}_{j\lambda^\nu}(x^\nu) = 2^{\frac{j m_\nu}{2}} \chi^{\iota^\nu}(2^j x^\nu - \lambda^\nu)$; $\chi^{\iota^\nu}(x^\nu) = \prod_{\kappa \in \mathrm{k}_\nu} \chi^{(\iota_\kappa)}(x_\kappa)$; здесь $\mathrm{e}^m(\alpha) = \mathrm{e}^{m_1}(\mathrm{sign}(\alpha_1)) \otimes \cdots \otimes \mathrm{e}^{m_n}(\mathrm{sign}(\alpha_n))$, $\Lambda(m, \alpha) = \Lambda(m_1, \alpha_1) \times \ldots \times \Lambda(m_n, \alpha_n)$.

Пусть $1 \leqslant p,\ q \leqslant \infty$; $\ell_q \equiv \ell_q(\mathbb{N}_0^n)$ — пространство числовых последовательностей $(c_\alpha) = (c_\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n)$ с конечной нормой

$$\|(c_\alpha) \,|\, \ell_q\| = \Big(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} |c_\alpha|^q \Big)^{1/q} \ (1 \leqslant q < \infty), \ \ \|(c_\alpha) \,|\, \ell_\infty\| = \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} |c_\alpha|;$$

$\ell_q(L_p) \equiv \ell_q(L_p([0,1]^k))$ (соотв., $L_p(\ell_q) \equiv L_p([0,1]^k; \ell_q)$) — пространство функциональных последовательностей $(g_\alpha(x)) = (g_\alpha(x) \,|\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n)$ $(x \in [0,1]^k)$ с конечной нормой

$$\| (g_\alpha(x)) \,|\, \ell_q(L_p) \| = \| (\| g_\alpha \,|\, L_p \|) \,|\, \ell_q \|$$

$$(\text{соотв.}, \ \| (g_\alpha(x)) \,|\, L_p(\ell_q) \| = \| \, \| (g_\alpha(\cdot)) \,|\, \ell_q \| \,|\, L_p \| \ ).$$

Для $f \in \widetilde{L}_1$ определим “двоичную пачку”

$$\Delta^\chi_\alpha(f, x) = \sum_{\iota \in \mathrm{e}^m(\alpha)} \ \sum_{\lambda \in \Lambda(m,\alpha)} f^\iota_{\alpha\lambda} \chi^\iota_{\alpha\lambda}(x), \, f^\iota_{\alpha\lambda} = \int_{[0,1]^k} f(x) \, \chi^\iota_{\alpha\lambda}(x) \, dx.$$

Пусть $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. Тогда пространство типа Никольского–Бесова $\chi B^{sm}_{pq} \equiv \chi B^{sm}_{pq}([0,1]^k)$ (соотв., Лизоркина–Трибеля $\chi L^{sm}_{pq} \equiv \chi L^{sm}_{pq}([0,1]^k)$), ассоциированное с системой $\chi^{(m)}$, состоит из всех функций $f \in L_p$, для которых конечна норма

$$\| f \,|\, \chi B^{sm}_{pq} \| = \|(2^{\alpha s} \Delta^{\chi}_{\alpha}(f,x)) \,|\, \ell_q(L_p)\|;$$

$$(\text{соотв.}, \| f \,|\, \chi L^{sm}_{pq} \| = \|(2^{\alpha s} \Delta^{\chi}_{\alpha}(f,x)) \,|\, L_p(\ell_q)\|).$$

Получены точные по порядку оценки наилучших N-членных приближений по системе $\chi^{(m)}$ единичных шаров пространств χB^{sm}_{pq} и χL^{sm}_{pq} в пространстве $L_r([0,1]^k)$ для ряда соотношений между p, q, r.

Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы 0085/PTSF-14 МОиН Республики Казахстан.

О ГОМОЛОГИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ГРАДУИРОВАННЫХ КОЛЕЦ

И. Н. Балаба[1]

---

[1] *ibalaba@mail.ru*, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого

Свойства модулей над каким-либо кольцом отражаются на свойствах самого кольца, а в ряде случаях характеризуют это кольцо [1]. Для стуктурной теории градуированных колец, активно развивающейся в последние годы, важна характеризация градуированных колец при помощи гомологических свойств категории градуированных модулей над ними.

К настоящему времени известен ряд результатов, устанавливающих связь между свойствами ассоциативного кольца с единицей, градуированного группой, и свойствами градуированных модулей над ним.

Отметим, что кольцо A является градуированным телом в том и только том случае, если все правые (левые) градуированные A-модули являются gr-свободными [2].

Известна гомологическая классификация классически полупростых градуированных колец [3], градуированных квазифробениусовых [4], регулярных [5] и полусовершенных колец [6].

В докладе будет представлен обзор известных результатов, их систематизация и некоторые обобщения; дана характеристика градуированных артиновых и нётеровых колец.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 5-01-01540 а, 16-41-710194 р_а).

Литература

[1] Скорняков Л. А. *Гомологическая классификация колец* // Математ. вестник. – 1967. – Т. 19. – № 4. – С. 415–434.

[2] Балаба И. Н. *Изоморфизмы градуированных колец линейных преобразований градуированных векторных пространств* // Чебышевский сб. – 2005. – Т. 6. – № 4. – С. 6–23.

[3] Балаба И. Н., Краснова Е. Н. *Полупростые градуированные кольца* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13. – № 4(2). – С. 23–28.

[4] Краснова Е. Н. *Градуированные квазифробениусовы кольца* // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: Материалы XII Междунар. конф., посвященной 80-летию В. Н. Латышева - Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого. – 2014. – С. 168–171.

[5] Năstăsescu C., van Oystaeyen F. *Graded Ring Theory.* – Amsterdam: North-Holland, 1982. – 340 p.

[6] Dăscălescu S. *Graded semiperfect rings* // Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanine. – 1992. – V. 36. – P. 247–255.

КАНОНИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА ОБОБЩЕННЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

В. В. Балащенко[1]

---

[1] *balashchenko@bsu.by*, Белорусский государственный университет

Обобщенные симметрические пространства $(G/H,\Phi)$ изучались с середины 1960-х годов многими авторами (В.И.Ведерников, Н.А.Степанов, A.Ledger, A.Gray, J.A.Wolf, А.С.Феденко, O.Kowalski и др.). Такие пространства обладают коммутативной алгеброй канонических аффинорных структур, содержащей структуры почти произведения P, почти комплексные J, обобщающие их f-структуры К.Яно и ряд других [1]. Отметим основные приложения канонических структур на однородных k-симметрических пространствах $(\Phi^k = id)$:

Обобщенная эрмитова геометрия (В.Ф.Кириченко, с 1980-х). Предъявлен обширный ресурс приближенно келеровых **NKf**, эрмитовых **Hf** и f-структур класса $\mathbf{G_1 f}$, которые содержат и обобщают соответствующие классы **NK**, **H** и $\mathbf{G_1}$ в классификации Грея-Хервеллы почти эрмитовых структур [2]. Например, приближенно келеровыми яляются все базовые f-структуры на k-симметрических пространствах [3], что широко обобщает классический результат А.Грея для $k = 3$.

Группы Ли. Построены левоинвариантные канонические структуры на нильпотентных группах Ли индекса 2, в частности, на некоторых обобщенных группах Гейзенберга [4].

Однородная риманова геометрия. Получены критерии принадлежности канонических распределений на G/H классам **AF** (анти-слоение), **F** (слоение), **TGF** (вполне геодезическое слоение) [5]. Предъявлен широкий спектр инвариантных примеров для классификации А.Навейры [6].

Эллиптические интегрируемые системы. Эффективное использование канонических структур и распределений на однородных k-симметрических пространствах см. в [7].

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ “Конвергенция” (2011–2015) Республики Беларусь (№ госрегистрации проекта 20115455).

Литература

[1] Балащенко В. В., Степанов Н. А. *Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Ф-пространствах* // Мат. сб. – 1995. – Т. 186. – № 11. – С. 3–34.

[2] Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В. *Однородные пространства: теория и приложения: монография.* – Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008. – 280 с.

[3] Балащенко В. В., Самсонов А. С. *Приближенно келеровы и эрмитовы f-структуры на однородных k-симметрических пространствах* // Докл. РАН. – 2010. – Т. 432. – № 3. – С. 295–298.

[4] Balashchenko V. V. *Invariant structures on the* 6*-dimensional generalized Heisenberg group* // Kragujevac Journal of Mathematics. – 2011. – V. 35. – № 2. – P. 209–222.

[5] Balashchenko V. V. *Canonical distributions on Riemannian homogeneous k-symmetric spaces* // Journal of Geometry and Physics. – 2015. – V. 87. – P. 30–38.

[6] Naveira A.Ṁ. *A classification of Riemannian almost-product manifolds* // Rend. Mat. – 1983. – V. 73. – № 3. – P. 577–592.

[7] Khemar I. *Elliptic integrable systems: a comprehensive geometric interpretation* // Memoirs of the AMS. – 2012. – V. 219. – № 1031. – x+217 p.

ОЦЕНКИ ПОПЕРЕЧНИКОВ ФУРЬЕ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННОЙ МАЖОРАНТОЙ СМЕШАННОГО МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ

Ш. А. Балгимбаева[1], Т. И. Смирнов[2]

---

[1] *balsholpan@yandex.ru*, Институт математики и математического моделирования

[2] *sc_s@mail.ru*, Институт математики и математического моделирования

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e}_d = \{1,\dots,d\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$; $\mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$ — d–мерный тор; $L_p(\mathbb{T}^d)$ — пространство функций $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{C}$, суммируемых в степени p (при $p = \infty$ существенно ограниченных) на $\mathbb{T}^d$, с нормой $\| f \mid L_p(\mathbb{T}^d) \|$; ℓ_θ — пространство (комплексных) числовых последовательностей $(c_j) = (c_j)_{j\in\mathbb{N}_0^d}$ с конечной нормой $\|(c_j) \mid \ell_\theta\|$; $\ell_\theta(L_p(\mathbb{T}^d))$ — пространство функциональных последовательностей $(g_\nu(x))_{\nu\in\mathbb{N}_0^d}$ $(x \in \mathbb{T}^d)$ с конечной нормой $\|(g_\nu(x)) \mid \ell_\theta(L_p(\mathbb{T}^d))\| = \|(\|g_\nu \mid L_p(\mathbb{T}^d)\|) \mid \ell_\theta\|$.

Поперечником Фурье порядка N множества $F \subset L_q$ называется величина

$$\varphi_N(F, L_q) = \inf_{\{h_\iota\}_{\iota=1}^N} \sup_{f\in F} \| f - \sum_{\iota=1}^{N} \langle f, h_\iota\rangle h_\iota | L_q \|,$$

где нижняя грань берется по всем ортонормированным системам $\{h_\iota\}_{\iota=1}^N \subset L_\infty$.

Пусть $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ — функция типа смешанного модуля непрерывности порядка l, удовлетворяющая известным условиям Бари–Стечкина.

Обозначим через $V_n(t)$ ядро Валле–Пуссена порядка $2n-1$. Положим

$$A_s(x) = \prod_{j\in e_d} (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)),\ \ s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{N}_0^d;$$

для $f \in L_p$ $A_s(f,x) = f * A_s(x)$.

Определение. *Пусть* $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. *Тогда пространство Никольского–Бесова* $SB^{\Omega,l}_{p\theta}(\mathbb{T}^d)$ *состоит из всех функций* $f \in L_p$, *для которых конечна следующая норма*

$$\|f\,|\,SB^{\Omega,l}_{p\theta}\| = \left\|\left\{A_s(f,\cdot)/\Omega(2^{-s})\right\}\Big|\,\ell_\theta(L_p)\right\|,\ 1 \leqslant \theta < \infty;$$

$$\|f\,|\,SB^{\Omega,l}_{p\infty}\| = \sup_s \|A_s(f,\cdot)\,|\,L_p\|/\Omega(2^{-s}),\ \ \theta = \infty.$$

Рассматривается модуль гладкости вида

$$\Omega(t) = \begin{cases} \prod_{j\in e_d} \dfrac{t_j^r}{(\log 1/t_j)_+^{b_j}}, & \text{если } t_j > 0,\ j \in e_d, \\ 0, & \text{если } \prod_{j\in e_d} t_j = 0, \end{cases}$$

где $b_1 \leqslant \dots \leqslant b_d < r$; $(\log 1/t_j)_+ = \max\{1, \log 1/t_j\}$.

В докладе приводятся точные по порядку оценки поперечников Фурье единичных шаров пространства Никольского–Бесова $SB^{\Omega,l}_{p\infty}(\mathbb{T}^d)$ периодических функций с заданной мажорантой смешанного модуля гладкости в пространстве $L_q(\mathbb{T}^d)$ для ряда соотношений между параметрами p, q, θ при некоторых условиях на Ω.

Оценки сверху следуют из точных по порядку оценок приближения классов $\mathrm{SB}^{\Omega,l}_{p\theta}(\mathbb{T}^d)$ всплесками системы Ψ_d, спектр которых находится под поверхностью уровня функции Ω. Доказательство оценок снизу следует классической схеме В.Н. Темлякова и основано на построении так называемых “примеров” : для каждого оператора приближения (из определения поперечника) строится тригонометрический полином специального вида, называемый примером, который плохо приближается этим полиномом.

Работа выполнена при поддержке грантов 5130/ГФ4 и 5129/ГФ4 МОН РК.

О НИКОЛАЕ ВАСИЛЬЕВИЧЕ СТЕПАНОВЕ И ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г. А. Банару[1]

---

[1] *mihail.banaru@yahoo.com*, Смоленский государственный университет

В сентябре 2016 года исполнится 90 лет со дня рождения известного отечественного геометра Николая Васильевича Степанова (1926–1991), профессора, доктора физико-математических наук. Последние 10 лет своей жизни Н.В. Степанов заведовал кафедрой геометрии Смоленского государственного педагогического института им. К. Маркса (ныне этот вуз именуется Смоленским государственным университетом).

Практически вся научная деятельность Н.В. Степанова связана с одним направлением — геометрической теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. Им опубликовано около 40 значительных работ по этой тематике. Наиболее полно его результаты представлены в двух обзорах [1], [2], которые чаще всего цитируются специалистами в данной области. Достижениям Н.В. Степанова в геометрической теории обыкновенных дифференциальных уравнений уделено значительное место в обзоре [3] выдающегося отечественного специалиста Л.Е. Евтушика.

Доклад будет посвящен основным результатам Н.В. Степанова и их связи с результатами других известных отечественных геометров. Некоторые построения Н.В. Степанова будут проиллюстрированы на примере обыкновенных дифференциальных уравнений третьего и пятого порядков [4], [5], [6], [7].

Помимо этого, будет представлен ряд новых результатов автора, также относящихся в основном к геометрии обыкновенных дифференциальных уравнений третьего и пятого порядков (группы преобразований, относительно которых уравнения инвариантны; расслоенные пространства со связностью, присоединенные к уравнениям и др.). Эти результаты, полученные как с использованием методов, разработанных Н.В. Степановым, так и другими средствами, развивают и дополняют дифференциально-геометрические построения этого замечательного отечественного геометра.

Литература

[1] Степанов Н.В. *Дифференциально-геометрическая теория уравнения* $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$ // Итоги науки и техники. – Сер. Проблемы геометрии. – 1977. – Т. 8. – С. 47–66.

[2] Степанов Н.В. *Геометрия дифференциальных уравнений* // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. – 1981. – Т. 12. С. 127–164.

[3] Евтушик Л.Е. *Геометрия обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследования в семинаре Лаптева-Васильева при Московском университете (1980–1992 гг.)* // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2002. – Т. 11. – С. 24–81.

[4] Банару Г.А. *Обыкновенные дифференциальные уравнения 3-го порядка с 6-мерной и 7-мерной группами точечных симметрий* // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 1994. – № 3. – С. 31–36.

[5] Банару Г.А. *О проективной связности, допускаемой обыкновенным дифференциальным уравнением пятого порядка* // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1996. – № 2. – С. 3–9.

[6] Banaru G.A. *A note on third-order ordinary differential equations* // Известия Академии наук Республики Молдова. Математика. – 2002. – Т. 39. № 2. – С. 65–70.

[7] Banaru G.A. *Some remarks on groups of pointwise symmetries of third-order ordinary differential equations* // Studia Univ. Babes-Bolyai. Math. – 2002. – V. 47. – № 1. – P. 3–10

О ГЕОМЕТРИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЭРМИТОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

М. Б. Банару[1]

---

[1] *mihail.banaru@yahoo.com*, Смоленский государственный университет

1. Одной из самых цитируемых статей по геометрии почти эрмитовых многообразий является знаменитая работа выдающегося американского геометра Альфреда Грея и его испанского коллеги Луиса Хервеллы [1], в которой они выделили 16 классов почти эрмитовых многообразий. Среди выделенных типов почти эрмитовых структур есть хорошо изученные (такие как, например, классы келеровых, приближенно келеровых, почти келеровых и локально конформно келеровых многообразий). Отметим, что класс специальных эрмитовых (special Hermitian, SH-) многообразий также относится к так называемым «малым» классам Грея-Хервеллы, как и упомянутые выше другие классы. Однако изучен он гораздо меньше этих классов. Главная причина этого, на наш взгляд, состоит в том, что класс SH-многообразий является подклассом класса эрмитовых многообразий. При этом работ, учитывающих особенности именно специальных эрмитовых многообразий совсем немного.

2. Напомним, что почти эрмитовым называют многообразие M^{2n}, оснащенное римановой метрикой $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ и почти комплексной структурой J, которые согласованы условием

$$\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}),$$

где через $\aleph(M^{2n})$ обозначен модуль гладких векторных полей на многообразии M^{2n} [1]. Также напомним, что фундаментальная (или келерова) форма почти эрмитова многообразия определяется равенством

$$F(X, Y) = \langle X, JY\rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Почти эрмитово многообразие называется специальным эрмитовым (или W_3-) многообразием, если выполняются следующие условия:

$$\delta F = 0, \ \nabla_X(F)(Y,Z) - \nabla_{JX}(F)(JY,Z) = 0, \ X, Y, Z \in \aleph(M^{2n}),$$

где δ — оператор кодифференцирования [1].

3. В докладе предполагается провести краткий обзор основных результатов, полученных в последние годы различными математиками в геометрии специальных эрмитовых многообразий, а также представить несколько результатов автора (как опубликованных [2], [3], так и неопубликованных). В основном эти результаты связаны с почти контактными метрическими гиперповерхностями SH-многообразий, в частности, с гиперповерхностями Сасаки и Кенмоцу специальных эрмитовых и келеровых многообразий. В частности, автором получены простые критерии минимальности таких гиперповерхностей и их характеризация в терминах типового числа.

Отметим, что методы исследования SH-многообразий разработаны в ходе исследования 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли [4], а большая часть результатов, полученных автором в геометрии специальных эрмитовых многообразий, является обобщением соответствующих результатов для 6-мерных подмногообразий алгебры октав.

Литература

[1] Gray A., Hervella L.M. *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants* // Ann. Mat. Pura Appl. – 1980. – V. 123. – № 4. – P. 35–58.

[2] Banaru M. *On minimality of a Sasakian hypersurface in a W_3–manifold* // Saitama Math. Journal. – 2002. – V.20. – P. 1–7.

[3] Банару М.Б. *Об эрмитовых многообразиях, удовлетворяющих аксиоме U-косимплектических поверхностей* // Фундаментальная и прикладная математика. – 2002. – Т. 8. – Вып. 3. – С. 934–937.

[4] Банару М.Б. it Геометрия 6-мерных почти эрмитовых подмногообразий алгебры октав // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. – 2014. – Т. 126. – С. 10–61.

ПОНИМАНИЕ ГЕОМЕТРИИ П.К. РАШЕВСКИМ

Н. Г. Баранец[1]

---

[1] *ngbaranetz@gmail.com*, Ульяновский государственный университет

Яркий советский геометр, профессор МГУ Пётр Константинович Рашевский (1907–1983) неоднократно писал о предмете и методе своей науки [1]. Не касаясь онтологии математики, он объяснял реалистическую в платоновском смысле позицию в ней слишком ранним ознакомлением с предметом. Геометрия отражает свойства и законы материального мира. Т.н. “идеальность” — есть абстрагирование от несущественных аспектов вещей. *“Законы геометрии обязательны для природы потому и постольку, поскольку они из неё извлечены”* [1, с. 2]. Важно, что истины геометрии, отражая действительность, воспроизводят её приближённо, в упрощённом виде. Отказ от многих запутанных факторов дарит теории стройность. Поэтому геометрия Евклида лишь ограниченно приложима к материальному миру. Обнаружение новых фактов потребовало более гибких абстракций, точнее отражающих свойства протяжённости, рассматривающих ранее исключённое.

Геометрия не есть набор отдельно значимых фактов. Все её положения логически связаны. Возможность охватить всю систему связей геометрии даёт её аксиоматическое построение. Оно позволяет получить в теории всё логически возможное. Часть положений берётся в качестве аксиом, а из них выводятся теоремы. Благодаря аксиоматике содержание геометрии обретает ясный вид, появляется возможность описать её немногими аксиомами. Здесь есть и оборотная сторона — аксиоматика приводит к окостенению геометрии, фиксируя её содержание. Природа сложна и многообразна — не следует искать универсальную систему, отражающую геометрические свойства вещей идеально точно и однозначно. Идеализация протяжённости в математике многовариантна — есть разные геометрические системы. Одни геометрии получены обобщением экспериментов. Они особо значимы для физики — евклидова геометрия, геометрия СТО и ОТО. Другие возникли путём сложных, многоступенчатых абстракций, являясь предметом математического изучения. В современной науке наиболее важны геометрии, аксиоматика которых строится на аналитической основе.

Рашевский писал, что до появления в конце 19 в. современной аксиоматики не было критерия строгого геометрического доказательства. Допускалась наглядность без понимания пределов её законности. Состоятельность доказательства угадывалась “наиболее сильными умами”. После осознания ограниченности интуиции и наглядности в различных геометриях перешли к аксиоматическому способу их построения. Рашевский ценил аксиоматику Гильберта и строгость доказательств, ею открываемую. Но казавшийся поначалу простым и гладким путь Гильберта, — отметил Рашевский, — обнаружил немало трудностей, усложнивших поставленную им задачу [2].

Литература

[1] Рашевский П.К. *Геометрия и её аксиоматика* // Матем. просв.. – В. 5. – М.: ГИФМЛ, 1960. – С. 73–98.

[2] Баранец Н.Г., Верёвкин А.Б. *Образы математики. Советские математики о науке.* – Ульяновск, 2015. – С. 138–144.

ОБ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ВИДА

А. Н. Барменков[1], Н. А. Барменков[2]

---

[1] *anbarmenkov@mail.ru*, Научно-Исследовательский Ядерный Университет «МИФИ»

[2] *nbarmenkov@at-consulting.ru*, «AT-CONSULTING»

К. Шайдуков в 1953 г. в [3] доказал методом теории функций действительного переменного полноту в $L_2[0,2\pi]$ последовательности

$$cos(nt+bt); sin(nt+bt), n=0,1,2,..., \tag{1}$$

при b⩽2/3, положив начало целому направлению исследований таких систем. В [1], [2] методами монографии [4] показано, что полнота, минимальность в $L_p[0;2\pi]$, $p>1$ более общей системы функций

$$\{cos(nt+\alpha(t))); sin(nt+\alpha(t)\}_{n=0}^{\infty} \tag{2}$$

зависит только от разности значений гельдеровской функции $\alpha(t)$ на концах отрезка $[0;2\pi]$. Так, что последовательность (2) полна в $L_p[0;2\pi]$, $p>1$ при $\frac{\alpha(2\pi)-\alpha(0)}{2\pi} \leq$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}$. То есть система К. Шайдукова (1) полна в $L_2[0;2\pi]$ для $\alpha(t)=bt$ при $b\leqslant\frac{3}{4}$. Доклад посвящен описанию полных и ортогональных последовательностей вида

$$\{e^{\beta(t)}\cos(nt+\alpha(t)); e^{\beta(t)}\sin(nt+\alpha(t))\}_{n=0}^{\infty}, \qquad (3)$$

где $\alpha(t),\beta(t)$ — действительные функции на $[0;2\pi]$.

Теорема. *Пусть $\alpha(t),\beta(t)$ — действительные гельдеровские функции, ограниченной вариации на отрезке $[0;2\pi]$, причем $\alpha(t)$ отлична от константы.*

Для того, чтобы система функций (3) была полна и ортогональна в $L_2[0;2\pi]$, необходимо и достаточно выполнение условий

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}2\beta(s)ctg\frac{s-t}{2}ds=2\alpha(t)-\arg B_a(e^{it})+\ln\Psi(e^{it}), \qquad (4)$$

где $B_a(z)=\frac{|a|}{a}\frac{a-z}{1-\bar{a}z}$, при $a\in C,|a|<1,a\neq 0$ и

$B_a(z)=z$, при $a=0$, причем $\frac{1}{4}<\frac{\alpha(2\pi)-\alpha(0)}{2\pi}\leqslant\frac{3}{4},\Psi(z)$ — функция, аналитическая в $(|z|<1)$ и непрерывная в $(|z|\leqslant 1)$, $\Psi(z)\neq 0$ $(|z|<1)$.

Замечание. *Соотношение (4) позволяет выбирать полные ортогональные последовательности вида (3), наиболее удобные для конкретных прикладных задач. Например, взяв $2\beta(t)=2\cos(t)$, $\Psi(e^{it})\equiv 1$, $a=0$, то*

$$\left\{e^{\cos(t)}\cos(nt+\sin(t)+\frac{t}{2});\ e^{\cos(t)}\sin(nt+\sin(t)+\frac{t}{2})\right\}_0^{\infty}$$

является довольно простым примером полной и ортогональной последовательности вида (3).

Литература

[1] Барменков А. Н. Казьмин Ю. А. *О полноте двух систем функций* // Теория отображений, ее отображения и приложения. Сборник научных трудов. — Киев : Наукова думка, 1982. – С. 29–43.

[2] Барменков А. Н. *Об аппроксимативных свойствах некоторых систем функций* // Дисс. … канд. физ.-мат. наук. – Москва, 1983. – 154 с.

[3] Шайдуков К. *О полноте одной тригонометрической системы* // Успехи. матем. наук, 1953. — №6. — С. 143–153.

[4] Данилюк И. И. *Нерегулярные граничные задачи на плоскости.* — М : «Наука», 1975. — С. 296.

РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ПОСТРОЕНИЯ МАСШТАБИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

А. А. Барышев[1], Ю. С. Крусс[2]

---

[1] *BaryshevAA@gmail.com*, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

[2] *KrussUS@gmail.com*, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

В последние годы вырос интерес к построению кратномасштабного анализа (КМА) и всплесковых базисов на локально-компактных абелевых группах и на локальных полях. Данный интерес обусловлен возможностью применения полученных всплесков в цифровой обработке дискретной информации.

Для групп Виленкина G алгоритмы построения масштабирующей функции φ, порождающей КМА на $L_2(G)$, а также методы построения ортогональных всплесков $\{\psi_l\}_{l=1}^{p}$ изложены в работах [1], [2]. Для локальных полей $F^{(s)}$ положительной характеристики p известна схема построения всплесков $\{\psi_l\}_{l=1}^{p^s}$ [3], при условии, что масштарибующая функция φ известна. Способ построения масштабирующей функции φ появился в работе [4].

Если функция $\varphi \in \mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$ порождает ортогональный КМА, то она является решением масштабирующего уравнения

$$\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathscr{A}^{-1}), \tag{1}$$

где функция $m_0(\chi)$ – маска данного уравнения, $\chi \in X$, X – группа характеров аддитивной группы $F^{(s)+}$ локального поля $F^{(s)}$, $\mathscr{A}$ – оператор растяжения.

Уравнение (1) можно переписать в виде

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi\mathscr{A}^{-k}). \tag{2}$$

Основные этапы построения φ [4]:

1. Выбираем простое число p. Строим N-валидное дерево T.
2. По дереву T строим граф Г.
3. По графу Г определяем значения маски $m_0(\chi)$.
4. Строим $\hat{\varphi}(\chi)$, используя равенство (2).
5. Вычисляем функцию φ по $\hat{\varphi}$, используя обратное преобразование Фурье $\varphi(x) = \int\limits_X \hat{\varphi}(\chi)(\chi, x)d\mu(\chi)$.

На основе данного алгоритма написана программа, позволяющая пользователю выбрать простое число p и создать граф Г. По графу Г рассчитываются значения функций $m_0(\chi)$, $\hat{\varphi}(\chi)$, $\varphi(x)$. При этом графики функций выводятся на экран.

Работа подготовлена в рамках государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014/K).

Литература

[1] Фарков Ю. А. *Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп* // Матем. заметки. –2007. – Т. 82. – № 6. – С. 934–952.

[2] Berdnikov G., Lukomskii S. *N-Valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups* // Int. J. Wavelets Multiresolut Inf. Process. –2015. – V. 13. – 1550037. DOI: 10.1142/S021969131550037X.

[3] Jiang H., Li D., Jin N. *Multiresolution analysis on local fields* // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – V. 294. – Pp. 523–532.

[4] Berdnikov G., Kruss Iu., Lukomskii S. *On orthogonal systems of shifts of scaling function on local fields of positive characteristic* // Turk. J. Math. –2016. DOI: 10.3906/mat-1504-7.

О ПОСТРОЕНИИ ИЗОЛЯТОРА ПОДГРУППЫ В НЕКОТОРОМ КЛАССЕ ГРУПП КОКСТЕРА

В. Н. Безверхний[1], И. В. Добрынина[2]

---

[1] *vnbez@yandex.ru*, Академия гражданской защиты МЧС России

[2] *dobrynirina@yandex.ru*, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Тостого

Пусть G – конечно порожденная группа Кокстера с копредставлением $G = \langle a_1, \dots, a_n;\ (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1, i, j = \overline{1,n}\rangle$, где m_{ij} – элементы симметрической матрицы Кокстера: $\forall i, j \in \overline{1,n}$, $m_{ii} = 1$, $m_{ij} \geqslant 2$, $i \neq j$.

Если группе G соответствует конечный дерево-граф Г такой, что вершинам графа Г соответствуют образующие $a_i, i = \overline{1,n}$, а всякому ребру e, соединяющему вершины с образующими a_i и a_j, соответствует соотношение $(a_i a_j)^{m_{ij}} = 1$, то мы имеем группу Кокстера с древесной структурой [1].

Определение 1 [2]. *Подгруппа A группы G называется изолированной в G, если для любого элемента g из G из того, что g^k принадлежит A, $g^k \neq 1$, следует, что g принадлежит A.*

Определение 2 [2]. *Подгруппа, равная пересечению всех изолированных в G подгрупп, содержащих подгруппу A, называется изолятором или корневым замыканием A в G.*

Теорема 1 [3]. *В группах Кокстера с древесной структурой разрешима проблема вхождения.*

Теорема 2 [1]. *Пересечение двух конечно порожденных подгрупп группы Кокстера с древесной структурой конечно порождено и существует алгоритм, выписывающий образующие данного пересечения.*

Теорема 3 [5]. *В группах Кокстера с древесной структурой разрешима проблема пересечения конечного числа классов смежности конечно порожденных подгрупп.*

Используя изложенное выше и результат [5], доказывается

Теорема 4. *В группах Кокстера с древесной структурой изолятор всякой конечно порожденной подгруппы конечно порожден. Существует алгоритм, выписывающий образующие данного изолятора.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-41-03222 р_центр_а).

Литература

[1] Безверхний В. Н., Инчено О. В. *Проблема пересечения конечно порожденных подгрупп в группах Кокстера с древесной структурой* // Известия ТулГУ. Естественные науки. – 2009. – № 2. – С. 16–31.

[2] Конторович П. Г. *Группы с базисом расщепления. III* // Математический сборник. – 1948. – Т. 21. – № 1. – С. 79–100.

[3] Безверхний В. Н. *Решение проблемы вхождения в некоторых классах групп с одним определяющим соотношением* // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. – Тула: Изд-во ТГПИ, 1986. – С. 3–22.

[4] Безверхняя И. С. *О сопряженности конечных множеств подгрупп в свободном произведении групп* // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. – Тула: Изд-во ТГПИ, 1981. – С. 102–116.

[5] Инченко О. В. *О проблеме пересечения классов смежности конечно порожденных подгрупп в группе Кокстера с древесной структурой* // Чебышевский сборник (принята к печати).

АНАЛОГ СВЯЗНОСТИ НЕЙФЕЛЬДА ПРОСТРАНСТВА ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

О. О. Белова[1]

---

[1] *olgaobelova@mail.ru*, Балтийский федеральный университет имени И. Канта, Институт прикладной математики и информационных технологий

В n-мерном проективном пространстве P_n рассмотрим пространство П всех центрированных m-плоскостей.

Произведем специализацию подвижного репера $\{A, A_a, A_\alpha\}$: вершину A поместим в центр m-мерной плоскости L_m, а вершины A_a — на плоскость L_m. Базисные формы пространства П удовлетворяют вытекающим из структурных уравнений Картана [1] уравнениям

$$D\omega^\alpha = \omega^a \wedge \omega_a^\alpha + \omega^\beta \wedge \Omega_\beta^\alpha, \quad D\omega^a = \omega^b \wedge \Omega_b^a + \omega^\alpha \wedge \Omega_\alpha^a,$$

$$D\omega_a^\alpha = \omega_b^\beta \wedge \Omega_{\beta a}^{\alpha b} + \omega^\alpha \wedge \Omega_a;$$

где $\Omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha$, $\Omega_b^a = \omega_b^a$, $\Omega_\alpha^a = \omega_\alpha^a$, $\Omega_a = -\omega_a$, $\Omega_{\beta a}^{\alpha b} = \delta_a^b \omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \omega_a^b$.

Над пространством центрированных плоскостей П возникает главное расслоение $\mathfrak{L}(\Pi)$, типовым слоем которого является группа Ли $\mathfrak{L}$, действующая в касательном пространстве к П. В расслоении $\mathfrak{L}(\Pi)$ зададим аналог связности Нейфельда [2] способом Лаптева–Лумисте. Вводя новые формы

$$\tilde{\Omega}^{\alpha}_{\beta} = \Omega^{\alpha}_{\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta a}\omega^{a} - L^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}_{a},$$

$$\tilde{\Omega}^{a}_{b} = \Omega^{a}_{b} - \Gamma^{a}_{b\alpha}\omega^{\alpha} - \Gamma^{a}_{bc}\omega^{c} - L^{ac}_{b\alpha}\omega^{\alpha}_{c},$$

$$\tilde{\Omega}^{a}_{\alpha} = \Omega^{a}_{\alpha} - \Gamma^{a}_{\alpha\beta}\omega^{\beta} - \Gamma^{a}_{\alpha b}\omega^{b} - L^{ab}_{\alpha\beta}\omega^{\beta}_{b},$$

$$\tilde{\Omega}_{a} = \Omega_{a} - L_{a\alpha}\omega^{\alpha} - L_{ab}\omega^{b} - \Pi^{b}_{a\alpha}\omega^{\alpha}_{b},$$

$$\tilde{\Omega}^{\alpha b}_{\beta a} = \Omega^{\alpha b}_{\beta a} - L^{\alpha b}_{\beta a\gamma}\omega^{\gamma} - L^{\alpha b}_{\beta ac}\omega^{c} - \Pi^{\alpha bc}_{\beta a\gamma}\omega^{\gamma}_{c}$$

и находя их дифференциалы, получаем, что связность в главном расслоении $\mathfrak{L}(\Pi)$ задается с помощью поля объекта связности Г на базе П.

Аналог сильной нормализации Нордена [3] данного многообразия позволяет охватить компоненты объекта связности Г

$$L^{\alpha a}_{\beta\gamma} = -\delta^{\alpha}_{\gamma}\lambda^{a}_{\beta},\ \Gamma^{\alpha}_{\beta a} = -\delta^{\alpha}_{\beta}\lambda_{a},\ \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = -\delta^{\alpha}_{\gamma}\lambda_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}\mu_{\gamma},$$

$$L^{ac}_{b\alpha} = \delta^{c}_{b}\lambda^{a}_{\alpha},\ \Gamma^{a}_{bc} = -\delta^{a}_{b}\lambda_{c} - \delta^{a}_{c}\lambda_{b},\ \Gamma^{a}_{b\alpha} = -\delta^{a}_{b}\mu_{\alpha} + \lambda^{a}_{\alpha}\lambda_{b},$$

$$L^{ab}_{\alpha\beta} = -\lambda^{b}_{\alpha}\lambda^{a}_{\beta},\ \Gamma^{a}_{\alpha b} = -\delta^{a}_{b}\mu_{\alpha},\ \Gamma^{a}_{\alpha\beta} = -\lambda_{b}\lambda^{b}_{\alpha}\lambda^{a}_{\beta},$$

$$\Pi^{b}_{a\alpha} = -\delta^{b}_{a}\lambda_{\alpha},\ L_{ab} = \lambda_{a}\lambda_{b},\ L_{a\alpha} = -\lambda_{a}\lambda_{b}\lambda^{b}_{\alpha},$$

$$\Pi^{\alpha bc}_{\beta a\gamma} = -\delta^{b}_{a}\delta^{\alpha}_{\gamma}\lambda^{c}_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}\delta^{c}_{a}\lambda^{b}_{\gamma},\ L^{\alpha b}_{\beta ac} = \delta^{\alpha}_{\beta}\delta^{b}_{c}\lambda_{a},$$

$$L^{\alpha b}_{\beta a\gamma} = -\delta^{b}_{a}\delta^{\alpha}_{\gamma}\lambda_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}\lambda_{a}\lambda^{b}_{\gamma} \quad (\mu_{\alpha} = \lambda_{\alpha} - \lambda^{a}_{\alpha}\lambda_{a}).$$

Теорема. *Аналог сильной нормализации пространства центрированных плоскостей индуцирует аналог связности Нейфельда в ассоциированном расслоении* $\mathfrak{L}(\Pi)$.

Литература

[1] Belova O. *Connections in fiberings associated with the Grassman manifold and the space of centered planes* // Journal of Mathematical Sciences. – New York: Springer, 2009. – Vol. 162. – № 5. – Pp. 605–632.

[2] Нейфельд Э. Г. *Аффинные связности на нормализованном многообразии плоскостей проективного пространства* // Изв. вузов. Матем. – 1976. – № 11. – С. 48–55.

[3] Норден А. П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 464 с.

ОБ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ В ИЗУЧЕНИИ ОДНОГО ОТОБРАЖЕНИЙ СЛЕДА

С. С. Бельмесова, Л. С. Ефремова[1]

---

[1] *lefunn@gmail.com*, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Понятие интегрируемости непрерывного отображения в плоскости, введенное авторами в [1], обобщено на случай полунепрерывного сверху двузначного отображения, заданного в некотором выпуклом неограниченном подмножестве плоскости.

Доказан критерий интегрируемости такого рода многозначного отображения, основанный на сведении этого отображения к полунепрерывному сверху двузначному косому произведению отображений интервала, заданному в неограниченном (по второй переменной) прямоугольнике плоскости.

Полученные результаты применены к изучению некоторого двузначного полунепрерывного сверху, отображения, связанного с отображением следа

$$F(x, y) = (xy, (x-2)^2),$$

возникающим в физике квазикристаллов.

Рассмотрения данной работы основаны на использовании локальной ламинации, построенной для указанного выше отображения следа в статье [1].

Исследования второго автора по обобщению понятия интегрируемости на случай двузначных полунепрерывных сверху отображений в плоскости выполнены за счет гранта № 16-11-10036 РНФ в МГУ им. М.В.Ломоносова.
Исследования первого автора по применению вопросов интегрируемости к исследованию динамики отображения следа выполнены за счет гранта № 14-10 Минобрнауки РФ.

Литература

[1] Belmesova S. S., Efremova L. S. *On the Concept of Integrability for Discrete Dynamical Systems. Investigation of Wandering Points of Some Trace Map//* Nonlinear Maps and their Applic. Springer Proc. in Math. and Statist. –2015. – V. 112. – P.127–158.

СВЯЗЬ МЕЖДУ НЕОБХОДИМЫМ И ДОСТАТОЧНЫМ УСЛОВИЯМИ МАСШТАБИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ НА ГРУППАХ ВИЛЕНКИНА

Г. С. Бердников[1]

---

[1] *evrointelligent@gmail.com*, Саратовский Государственный Университет

Пусть $(G_n, \dot{+})$ – локально компактная группа Виленкина, элементами которой являются бесконечные в обе стороны последовательности $x = (\ldots, 0_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots)$, $x_j = \overline{0, p-1}$, где p – любое простое число. Операция сложения $\dot{+}$ определяется как покоординатное сложение по модулю p, т. е. $x\dot{+}y = (x_j\dot{+}y_j)(x_j + y_j \bmod p)$. Пусть

$$G_n = \{x \in G\colon\ x = (\ldots, 0_{n-1}, x_n, X_{n+1}, \ldots)\}, n \in \mathbb{Z},$$

основная цепочка подгрупп, $G_n^{\perp}$ – совокупность аннуляторов.

На группах Виленкина возможно построить ортогональный кратномасштабный анализ. Задача построения кратномасштабного анализа сводится к нахождению масштабирующей функции φ, которая удовлетворяет равенству $\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathscr{A}^{-1})$, где $\mathscr{A}$ – оператор растяжения, а функция $m_0(\chi)$ называется маской. Мы будем рассматривать ступенчатые финитные функции. В работе [1] найден алгоритм, позволяющий строить такие масштабирующие функции на локальных полях положительной характеристики по особым образом построенному графу. Аддитивная группа таких полей при $s = 1$ является группой Виленкина. Таким образом найдено достаточное условие масштабирующей функции на группах Виленкина.

Далее представлен результат, показывающий, что вышеупомянутый алгоритм является не только достаточным, но и необходимым условием.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi(x)$ *– масштабирующая функция, причем* $\hat{\varphi}(\chi)$ *имеет носитель в* $\mathfrak{G}_M^{\perp}$ *и постоянна на смежных классах по* $\mathfrak{G}_{-N}^{\perp}$*. Тогда орграф* Γ *с вершинами вида* $\overline{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1}^N$*, построенный по функции* $\hat{\varphi}(\chi)$*, обладает следующими свойствами:*

1) *Если имеется дуга* $\overline{\alpha}^j \to \overline{\alpha}^k$*, то* $\forall i = \overline{1, N-1}$*,* $\alpha_{i+1}^j = \alpha_i^k$*.*
2) *Из любой вершины орграфа, отличной от* $\overline{0} = (0, 0, \ldots, 0)$*, есть путь в вершину* $\overline{0}$*.*
3) *Граф не содержит контуров, то есть замкнутых путей.*
4) *Из вершины* $\overline{0}$ *не исходит дуг.*

Теорема 2. *Классы графов, описанных в работе* [1]*, и графов, обладающих свойствами из теоремы* 1*, совпадают.*

Таким образом, алгоритм из работы [1] описывает все возможные масштабирующие функции с компактным носителем, а не некий узкий их класс. Благодаря теоремам 1 и 2 появляется два эквивалентных описания таких функций, каждое из которых можно рассматривать как необходимое и достаточное условие.

Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки РФ (проект № 1.1520.2014/К).

Литература

[1] С.Ф. Лукомский, Г. С. Бердников, Ю. С. Крусс, “Об ортогональности системы сдвигов масштабирующей функции на группах Виленкина”, Матем. заметки, 98:2 (2015), 310–313.

О ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ПОЧТИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПЕРВОГО ТИПА

В. Е. Березовский[1], Й. Микеш[2]

---

[1] *berez.volod@rambler.ru*, Уманский национальный университет садоводства, Умань, Украина

[2] *josef.mikes@upol.cz*, Palacky University of Olomouc, Czech Republic

Рассмотрим частный случай канонических почти геодезических отображений пространств аффинной связности $f\colon A_n \to \bar{A}_n$, который характеризуется условиями на тензор деформациии связностей

$$P^h_{i(j,k)} + P^\alpha_{i(j}P^h_{k)\alpha} = \delta^h_{(j}a_{k)i}, \tag{1}$$

где P^h_{ij} – тензор деформации связностей, a_{ij} – некоторый симметрический тензор, δ^h_i – символы Кронекера, “ , ” – ковариантная производная по связности в пространстве A_n и круглыми скобками обозначаем симметрирование индексов без деления.

Из уравнений (1) получены уравнения

$$P^h_{ij,k} = -P^\alpha_{ij}P^h_{\alpha k} + \delta^h_k a_{ij}, \tag{2}$$

$$(n-1)\ a_{ij,k} = P^\alpha_{ij}R_{\alpha k} - P^\beta_{\alpha(i}R^\alpha_{j)\beta k} - (n-1)\ P^\alpha_{ij}a_{\alpha k}, \tag{3}$$

где R_{ij} и R^h_{ijk} – тензоры Риччи и Римана пространства A_n.

Очевидно, уравнения (2) и (3) в данном пространстве A_n представляют собой замкнутую систему типа Коши относительно неизвестных функций $P^h_{ij}(x)$ и $a_{ij}(x)$, которые, естественно, должны удовлетворять еще конечным условиям алгебраического характера

$$P^h_{ij}(x) = P^h_{ji}(x) \quad \text{и} \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x). \tag{4}$$

Тем самым доказана

Теорема 1. *Для того чтобы пространство аффинной связности A_n допускало почти геодезическое отображение, определяемое уравнениями* (1)*, на пространство аффинной связности $\bar{A}_n$, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовало решение смешанной системы типа Коши* (2)*,* (3)*,* (4) *относительно неизвестных функций $P^h_{ij}(x)$ и $a_{ij}(x)$.*

Введем в рассмотрение тензоры

$$\tilde{W}^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}\ (R_{ij}\delta^h_k - R_{ik}\delta^h_j),$$

$$W_{ij} = R_{ij} - R_{ji}.$$

Нами доказана

Теорема 2. *Тензоры $\tilde{W}^h_{ijk}$ и W_{ij}, а также тензор проективной кривизны Вейля, являются инвариантными геометрическими объектами пространств аффинной связности относительно почти геодезических отображений первого типа, определяемых уравнениями* (1).

Литература

[1] Н. С. Синюков, *Геодезические отображения римановых пространств.* – М.: Наука, 1979. – 256 с.

[2] В. Е. Березовский, Й. Микеш, *О канонических почти геодезических отображениях первого типа пространств аффинной связности.* – Изв. вузов. Матем. 2, 2014. – P. 3–8.

[3] V. E. Berezovski, J. Mikeš, A. Vanžurová, *Fundamental PDE's of the canonical almost geodesic mappings of type* $\tilde{\pi}_1$. – Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) 37 (3), 2014. – P. 647–659.

[4] J. Mikeš, at al, *Differential geometry of special mappings.* – Olomouc: Palacky Univ. Press, 2015. – 566 p.

ПРОБЛЕМА ЛИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ПОДГРУПП В ГРУППАХ КРЕМОНЫ

П. В. Бибиков[1], А. И. Малахов[2]

---

[1] *tsdtp4u@proc.ru*, Институт проблем управления РАН

[2] *amalakhov2011@gmail.com*, Институт проблем управления РАН

В работе решается проблема Софуса Ли о вычислении алгебры дифференциальных инвариантов действия псевдогруппы точечных симметрий на классе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка $y'' = F(x, y)$, а также предлагается новый подход к изучению дифференциальных уравнений и бесконечномерных подгрупп в группе Кремоны.

Рассмотрим дифференциальные уравнения вида $y'' = F(x, y)$. Эти уравнения являются особыми с точки зрения классификации Трессе–Кругликова [3], поэтому они требуют отдельного изучения. С. Ли предпринял попытку вычислить алгебру дифференциальных инвариантов действия псевдогруппы точечных симметрий таких уравнений, однако не сумел найти ни одного дифференциального инварианта, доказав лишь, что инвариантов порядка $\leqslant 3$ не существует.

В первой части работы мы полностью решаем эту проблему Ли, вычислив количество независимых дифференциальных инвариантов во всех порядках, указав базисные дифференциальные инварианты, инвариантные дифференцирования и сизигии этой алгебры.

Тем не менее, даже знания всей алгебры дифференциальных инвариантов недостаточно для того, чтобы решить проблему эквивалентности двух дифференциальных уравнений вида $y'' = F(x, y)$ относительно действия псевдогруппы симметрий. Это связано с тем, что группа симметрий бесконечномерна, поэтому стандартные рассуждения, применимые в конечномерном случае [1] здесь не работают.

Для преодоления этой проблемы предложен новый подход к изучению дифференциальных уравнений, основанный на неожиданной связи между дифференциальными уравнениями и алгебраической геометрией. А именно, рассмотрим лишь те дифференциальные уравнения вида $y'' = F(x, y)$, у которых правая часть является рациональной функцией. Тогда группа точечных симметрий такого класса дифференциальных уравнений является подгруппой в группе Кремоны [2].

Во второй части работы вычислена алгебра дифференциальных инвариантов действия этой подгруппы, а также с помощью базисов Гребнера будут подсчитаны соотношения между инвариантами для различных дифференциальных уравнений, являющиеся полиномами и задающие в пространстве инвариантов алгебраические многообразия.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект мол_а_дк 16-31-60018).

Литература

[1] Bibikov P., Lychagin V. $GL_2(\mathbb{C})$*-orbits of binary rational forms.* – Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2011. – Vol. 32. – № 1. – P. 95–102.

[2] Dolgachev I., Iskovskikh V. *Finite subgroups of the plane Cremona group.* – Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin, Progr. Math. – Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA. – 2009. – Vol. 269. – P. 443–558.

[3] Kruglikov B. *Point Classification of Second Order ODEs: Tresse Classification Revisited and Beyond.* – Springer, Proceedings of the Fifth Abel Symposium, Tromso, Norway, June 17–22, 2008.

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ИНВАРИАНТАХ ГРУПП ДИФФЕОМОРФИЗМОВ

П. В. Бибиков[1], И. С. Стрельцова[2]

---

[1] *tsdtp4u@proc.ru*, Институт проблем управления РАН
[2] *strelzova_i@mail.ru*, Астраханский государственный университет

Пусть $\mathbb{R}P^1$ — проективная прямая и PGL(2) — группа проективных автоморфизмов этой прямой. Рассмотрим группу Diff($\mathbb{R}P^1$) всевозможных гладких диффеоморфизмов проективной прямой. Проективная группа PGL(2) действует на ней сопряжениями: $\varphi \mapsto g \circ \varphi \circ g^{-1}$.

Представляет интерес задача нахождения (глобальных) инвариантов подобного действия (в идеале — вычисление всей алгебры таких инвариантов). Эта задача тесно связана с такими классическими понятиями, как производная Шварца, когомологии группы Diff($\mathbb{R}P^1$), алгебра Вирасоро и др. (подробнее об этих вопросах можно узнать из [1]).

Целью данной работы является построение двух интегральных проективных инвариантов группы Diff($\mathbb{R}P^1$). Для этого мы применим конструкцию, аналогичную определению инварианта Калаби для симплектической группы автоморфизмов двумерного диска (см. [2]). А именно, мы вычислим две дифференциальные 1-формы, зависящие от 1- и 2-джетов данного диффеоморфизма $\varphi\colon x \mapsto y$ и инвариантные относительно проективной группы, а затем проинтегрируем их по $\mathbb{R}P^1$.

Таким образом, возникает задача нахождения дифференциальных инвариантов и инвариантных дифференциальных 1-форм действия проективной группы PGL(2) на группе $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}P^1)$ сопряжениями.

Теорема 1. *Функция* $J := \frac{y_2(x-y)+2y_1(y_1+1)}{|y_1|^{3/2}}$ *и 1-форма* $\omega := \frac{\sqrt{|y_1|}}{x-y}dx$ *являются* PGL(2)*-инвариантными (здесь через* y_1*,* y_2 *обозначены координаты 1- и 2-джетов диффеоморфизма* φ*).*

С помощью найденных инвариантов построим глобальные интегральные инварианты проективной группы PGL(2).

Теорема 2. *Пусть диффеоморфизм* $\varphi \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}P^1)$ *не имеет неподвижных точек. Тогда функции*

$$I_1 := \int\limits_{\mathbb{R}P^1} \omega \quad и \quad I_2 := \int\limits_{\mathbb{R}P^1} J\omega$$

являются вещественнозначными проективными инвариантами.

Отметим, что знание инварианта J и формы ω позволяет описать всю алгебру дифференциальных инвариантов действия проективной группы на $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}P^1)$. Однако с помощью этой алгебры невозможно построить новые интегральные инварианты, т.к. любая инвариантная 1-форма, зависящая от 3-джетов диффеоморфизма φ, выражается через ω, $J\omega$ и полный дифференциал $\widehat{d}J$, интеграл от которого равен 0.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект мол_а 16-31-00044).

Литература

[1] Овсиенко В., Табачников С. *Проективная дифференциальная геометрия.* – М.: МЦНМО. – 2008.

[2] Calabi E. *On the group of automorphisms of a symplectic manifold.* – Probl. Analysis. Sympos. in Honor of Salomon Bochner, Princeton Univ. 1969. – 1970. – P. 1–26.

О ПРОЕКТИВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТАХ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ 2-ТКАНЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

П. В. Бибиков[1], И. С. Стрельцова[2]

---

[1] *tsdtp4u@proc.ru*, Институт проблем управления РАН

[2] *strelzova_i@mail.ru*, Астраханский государственный университет

Рассмотрим упорядоченную 2-ткань на плоскости $M = \mathbb{R}^2(x,y)$, состоящую из двух прямолинейных слоений. Каждое такое слоение можно задать линиями уровня функции $u(x,y)$, которая удовлетворяет уравнению флекса

$$u_y^2 u_{xx} - 2u_y u_x u_{xy} + u_{yy} u_x^2 = 0.$$

Это уравнение имеет группу симметрий $SL_3(\mathbb{R}) \times Diffeo(\mathbb{R})$, где $SL_3(\mathbb{R})$ – группа проективных преобразований плоскости, а $Diffeo(\mathbb{R})$ – группа калибровочных преобразований вида $u \to f(u)$ [1],[3]. После факторизации уравнения флекса по группе калибровочных преобразований мы получаем уравнение Эйлера. Это позволяет находить проективные дифференциальные инварианты прямолинейных тканей на плоскости [2].

Пусть $u^1(x,y)$, $u^2(x,y)$ – гладкие функции общего положения на плоскости, задающие 2-ткань. Каждая из этих функций является решением уравнения Эйлера. Проективное действие группы $SL_3(\mathbb{R})$ индуцирует действие на решениях уравнения Эйлера, а его инварианты дают проективные инварианты прямолинейных слоений.

Теорема. *Функция*

$$J_2 = \frac{(vv_{yy} - 2v_y^2)w^3}{(ww_{yy} - 2w_y^2)v^3},$$

где

$$w = \frac{u_x^1}{u_y^1}, \quad v = \frac{u_x^2}{u_y^2},$$

и дифференцирования

$$\delta_1 = \frac{1}{\nabla_1(J_2)}\nabla_1, \quad \delta_2 = \frac{1}{\nabla_2(J_2)}\nabla_2,$$

где

$$\nabla_1 = w\frac{d}{dx} - \frac{d}{dy}, \quad \nabla_2 = v\frac{d}{dx} - \frac{d}{dy},$$

инвариантны относительно действия проективной группы $SL_3(\mathbb{R})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект мол_а 16-31-00044).

Литература

[1] Goldberg V.V., Lychagin V.V. *Geodesic webs on a two-dimensional manifold and Euler equations.* // Acta Applicandae Mathematicae. 04/2012; 109(1):5-17. DOI 10.1007/s10440-009-9437-1.

[2] Kruglikov B.S., Lychagin V.V. *Global Lie-Tresse theorem.* // Selecta Mathematica. 02/2016; DOI 10.1007/s00029-015-0220-z.

[3] Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N. *Contact geometry and nonlinear differential equations.* – Cambridge: Cambridge University Press. – 2007. – xxii+496 P.

О СХОДИМОСТИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К КОНЕЧНОЙ АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА

А.М. Бикчентаев[1]

---

[1] *Airat.Bikchentaev@kpfu.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

Пусть τ — точное нормальное следовое состояние на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ — решетка проекторов в $\mathcal{M}$, I — единица $\mathcal{M}$. Нами исследована сходимость в банаховом пространстве $L_1(\mathcal{M},\tau)$ интегрируемых относительно τ операторов [1], [2]. Введена дисперсия $\mathbb{D}(X) = \|X - \tau(X)I\|_2^2$ оператора $X \in L_2(\mathcal{M},\tau)$ и установлены ее основные свойства. Показано, что $\inf\limits_{a\in\mathbb{C}} \|X - aI\|_2^2 = \mathbb{D}(X)$ для всех $X \in L_2(\mathcal{M},\tau)$. Предложен критерий сходимости последовательностей операторов из $L_2(\mathcal{M},\tau)$ в терминах дисперсии. Пусть $\mathcal{K}_0 = \{X \in L_2(\mathcal{M},\tau) : \tau(X) = 0\}$. Для $X_n, X \in \mathcal{K}_0$ $(n \in \mathbb{N})$ доказана эквивалентность условий: (i) $X_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} X$ при $n \to \infty$; (ii) $X_n \xrightarrow{\tau} X$ и $\mathbb{D}(X_n) \to \mathbb{D}(X)$ при $n \to \infty$. Показано, что для $X \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ следующие условия эквивалентны: (i) $\tau(X) = 0$; (ii) $\|I + zX\|_1 \geqslant 1$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

Дополнен результат А.Р. Падманабхана [3] об одном свойстве нормы пространства $L_1(\mathcal{M},\tau)$: если оператор $A \in L_1(\mathcal{M},\tau)^+$ несингулярен, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}} \quad (\tau(P) \geqslant \varepsilon \Rightarrow \|PAP\|_1 \geqslant \delta).$$

Установлена сходимость в $L_2(\mathcal{M},\tau)$ мнимых компонент некоторых ограниченных последовательностей операторов из $\mathcal{M}$. Получены приложения к сходимости дисперсий. Доказательства приведенных фактов см. в [4].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Республики Татарстан (грант 15-41-02433).

Литература

[1] Segal I. E., *A non-commutative extension of abstract integration* // Ann. Math. – 1953. – Vol. 57. – № 3. – P. 401–457.

[2] Nelson E., *Notes on non-commutative integration* // J. Funct. Anal. – 1974. – Vol. 15. – № 2. – P. 103–116.

[3] Padmanabhan A. R., *Probabilistic aspects of von Neumann algebras* // J. Funct. Anal. – 1979. – Vol. 31. – № 2. – P. 139–149.

[4] Бикчентаев А. М., *О сходимости интегрируемых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана* // Труды Матем. института им. В.А. Стеклова. – 2016. – Т. 293 (в печати).

РОЛЬ ПОЧТИ ВПОЛНЕ РАЗЛОЖИМЫХ ГРУПП В ТЕОРИИ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ

Е. А. Благовещенская[1]

---

[1] *kblag2002@yahoo.com*, (Петербургский Государственный университет путей сообщения императора Александра I)

Более полувека назад теория *почти вполне разложимых* групп выделилась в самостоятельную ветвь общей теории абелевых групп без кручения, см. [1]. Её истоки следует искать в давних результатах, в которых было открыто существование абелевых групп без кручения, не являющихся прямыми суммами групп ранга 1. Александр Геннадьевич Курош в своей знаменитой книге «Теория групп» писал: «Мы увидим позже, что вполне разложимыми группами далеко не исчерпываются все абелевы группы без кручения».

Традиционным инструментом алгебраических исследований является разложение аддитивных структур в прямую сумму неразложимых объектов. Для абелевых групп без кручения, естественно определяемых как аддитивные подгруппы элементов линейного пространства над полем рациональных чисел Q, такие разложения определяются неоднозначно. Простота определения этих групп обеспечивает их присутствие во многих прикладных исследованиях, а сложность строения создаёт препятствия в связанных с ними вычислениях.

Класс «почти вполне разложимых групп», безусловно, по строению является наиболее близким к классу вполне разложимых групп конечного ранга, так как состоит из групп X, содержащих единственным образом определенную вполне характеристическую подгруппу A конечного индекса, называемую «регулятором», которая является вполне разложимой.

В отличие от вполне разложимых групп, однозначно с точностью до изоморфизма представимых в виде прямых сумм неразложимых слагаемых ранга 1, в классе почти вполне разложимых групп реализуется все многообразие неизоморфных прямых разложений, выраженное в терминах рангов слагаемых, которое существует в абелевых группах без кручения конечного ранга.

Многие свойства абелевых групп, в том числе, их прямых разложений, определяются строением их колец эндоморфизмов. Для почти вполне разложимых групп X с «циклическим регуляторным фактором» X/A и некоторыми ограничениями на типы прямых слагаемых ранга 1 регулятора A доказана теорема в форме Бэра-Капланского, свидетельствующая о максимально допустимой взаимосвязи групп из этого класса и их колец эндоморфизмов («почти изоморфизм», используемый в формулировке теоремы, представляет собой некоторое уже ставшее традиционным в теории абелевых групп без кручения ослабление понятия изоморфизма, необходимое для получения классификационных результатов в теории абелевых групп без кручения ввиду их сложной структуры):

Теорема (Е. Благовещенская, Г. Иванов, Ф. Шультц) *Пусть X, Y — почти вполне разложимые группы с циклическим регуляторным фактором. Тогда X и Y почти изоморфны, если и только если их кольца эндоморфизмов $End X$ и $End Y$ изоморфны.*

Литература

[1] Благовещенская Е. А. *Почти вполне разложимые абелевы группы и их кольца эндоморфизмов.* – Спб. : Издательство Политехнического Университета, 2009. – 216 с.

О НЕРЕАЛИЗУЕМОСТИ НЕКОТОРЫХ РАСПОЛОЖЕНИЙ РАСПАДАЮЩИМИСЯ ПЛОСКИМИ ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КРИВЫМИ СТЕПЕНЕЙ 7 И 8

И. М. Борисов[1], Г. М. Полотовский[2]

[1] *i.m.borisov@mail.ru*, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

[2] *polotovsky@gmail.com*, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Мы продолжаем топологическую классификацию проективных плоских распадающихся вещественных алгебраических кривых данной степени n при определённых условиях максимальности и обшего положения кривых-сомножителей. Для $n = 6$ такая классификация была получена в [1], для $n = 7$ в случае двух сомножителей этой задаче посвящена серия работ С.Ю. Оревкова, Е.И. Шустина, А.Б. Корчагина, Г.М. Полотовского и др. (см. [2]–[6] и библиографию в [5].)

В данной работе рассматриваются кривые степени 7, распадающиеся в произведение двух коник и M-кубики при условиях, что коники пересекаются друг с другом в четырёх точках, а нечётная ветвь кубики пересекает каждую из коник в шести точках, причём все эти 16 точек вещественны и попарно различны. Доказана нереализуемость такими кривыми ряда расположений (см. пример на рис.1, где внешняя окружность – граница модели Пуанкаре проективной плоскости). В настоящий момент остаётся открытым вопрос о реализуемости 23 подобных расположений.

Рассмотрена также серия кривых степени 8, распадающихся в произведение коники и M-секстики, пересекающихся в 12 попарно различных точках, лежащих на одном из овалов секстики. Доказана нереализуемость такими кривыми семи не запрещённых ранее расположений, одно из которых приведено для примера на рис.2.

Доказательства состоят в использовании топологических следствий теоремы Безу и в применении метода Оревкова (см. [2]), основанного на теории кос и зацеплений.

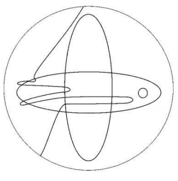

Рис.1

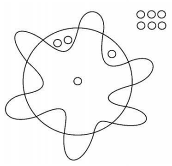

Рис.2

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект 1.1410.2014/К).

Литература

[1] Полотовский Г. М. *Каталог M-распадающихся кривых 6-го порядка* // ДАН СССР. – 1977. – Т. 256. – № 3. – С. 548–551.

[2] Orevkov S. Yu. *Link theory and oval arrangements of real algebraic curves* // Topology. – 1999. – Т. 38. – P. 779–810.

[3] Оревков С. Ю., Полотовский Г. М. *Проективные M-кубики и M-квартики в общем положении с максимально пересекающейся парой овалов* // Алгебра и анализ. – 1999. – Т.11. – № 3. – С. 166–184.

[4] Оревков С. Ю. *Расположения M-квинтики относительно коники, максимально пересекающей её нечётную ветвь* // Алгебра и анализ. – 2007. – Т.19. – № 4. – С. 174–242.

[5] Корчагин А. Б., Полотовский Г. М. *О расположениях плоской вещественной квинтики относительно пары прямых* // Алгебра и анализ. – 2009. – Т.21. – № 2. – С. 92–112.

РОСТ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ С НУЛЯМИ НА ЗАДАННЫХ МНОЖЕСТВАХ, ИМЕЮЩИМИ ФИКСИРОВАННЫЕ ПЛОТНОСТИ

Г. Г. Брайчев[1]

---

[1] *braichev@mail.ru*, Московский педагогический государственный университет

Пусть $f(z)$ – целая функция с нулями $\Lambda_f = \Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$, $n_\Lambda(r)$ – считающая функция этой последовательности.

Зададим $\rho > 0$. Верхняя и нижняя ρ-плотности последовательности Λ определяются равенствами

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) := \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho}, \qquad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) := \underline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho}.$$

Замена здесь $n_\Lambda(r)$ на $N_\Lambda(r) := \int\limits_0^r \frac{n_\Lambda(t)}{t}\,dt$ определяет усредненные верхнюю и нижнюю ρ-плотности $\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)$, $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)$.

Типом и нижним ρ-типом целой функции $f(z)$ называют величины

$$\sigma_\rho(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} r^{-\rho} \ln \max_{|z|=r} |f(z)|, \; \underline{\sigma}_\rho(f) = \underline{\lim_{r\to+\infty}} r^{-\rho} \ln \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

В докладе даются точные оценки типа и нижнего ρ-типа целой функции через ρ-плотности или усредненные ρ-плотности ее нулей в следующих случаях: все нули лежат в угле; между двумя параллельными или пересекающимися прямыми; на лучах, разделяющих комплексную плоскость на равные углы, а также в областях, асимптотически близких к указанным.

В качестве примера приведем такие результаты

Теорема 1. *Тип целой функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0,1)$ с нулями, расположенными в угле раствора $2\theta \in [0,\pi]$ и имеющими усредненные ρ-плотности $\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_f) = \beta^*$, $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_f) \geqslant \alpha^*$, удовлетворяет точным, достижимым оценкам*

$$\sigma_\rho(f) \geqslant \frac{\beta^* e\rho}{2} \max_{a>0} \frac{\ln(a^2+2a\cos\theta+1)}{a^\rho}, \qquad \sigma_\rho(f) \geqslant$$

$$\geqslant \rho \left(\frac{\pi\alpha^* \cos\rho\theta}{\sin\pi\rho} + \max_{a>0} \int\limits_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{\left(\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* \tau^{-\rho}\right)(\tau+\cos\theta)}{\tau^2+2\tau\cos\theta+1} d\tau \right),$$

где a_1, a_2 $(0 \leqslant a_1 \leqslant 1 \leqslant a_2 \leqslant e)$ –корни уравнения $a \ln\dfrac{e}{a} = \dfrac{\alpha^*}{\beta^*}$.

Теорема 2. *Нижний ρ-тип целой функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0,1)$ с нулями, имеющими усредненные ρ-плотности $\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_f) = \beta^*$ и $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_f) = \alpha^*$, расположенными произвольно в комплексной плоскости, удовлетворяет точным, достижимым оценкам*

$$\alpha^* \leqslant \underline{\sigma}_\rho(f) \leqslant \rho\beta^* \left(\frac{\pi}{\sin\pi\rho} - \sup_{b>0} \rho \int\limits_{ba_2^{-\frac{1}{\rho}}}^{ba_1^{-\frac{1}{\rho}}} \tau^{-\rho-1} \ln\frac{\tau+1}{b+1} d\tau \right),$$

где a_1, a_2 — корни уравнения $a \ln\dfrac{e}{a} = \dfrac{\alpha^*}{\beta^*}$.

Если же нули функции $f(z)$ лежат на одном луче, то выполняется точная оценка

$$\underline{\sigma}_\rho(f) \geqslant \frac{\pi\rho}{\sin\pi\rho} \alpha^*,$$

причем равенство здесь может достигаться при любом значении верхней усредненной ρ-плотности $\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_f) = \beta^* \geqslant \alpha^*$.

О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ

В. М. Брук[1]

---

[1] *vladislavbruk@mail.ru* , Саратовский государственный технический университет

На отрезке $[a,b]$ рассматривается уравнение

$$y(t) = x + \int_s^t (d\mathbf{p}) y(\xi) + \lambda \int_s^t y(\xi) d\xi + \int_s^t f(\xi) d\xi, \tag{1}$$

где y – неизвестная функция, $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in H$, $f \in L_1(H; a, b)$, H – конечномерное гильбертово пространство, $\mathbf{p}$ – мера, определенная на борелевских множествах $\Delta \subset [a,b] \subset \mathbb{R}$ и принимающая значения в множестве линейных операторов, действующих в H.

Меру $\mathbf{p}$ продолжаем на некоторый отрезок $[a,b_0]$ $(b_0>b)$, полагая $\mathbf{p}(\Delta)=0$ для всех борелевских множеств $\Delta\subset(b,b_0]$. Функцию f продолжаем нулем на $(b,b_0]$. В (1) считаем $t,s\in[a,b_0]$. Символ $\int\limits_s^t$ обозначает $\int\limits_{[s,t)}$, если $s<t$; $-\int\limits_{[t,s)}$, если $s>t$; 0, если $s=t$.

Теорема 1. *Для любой функции* $f\in L_1(H;a,b)$ *и любого* $x\in H$ *существует единственное решение уравнения* (1) *на отрезке* $[s-\delta,b_0]$, *где* $\delta=\delta(s)>0$ *достаточно мало и* $\delta=0$ *при* $s=a$.

Следствие 1. *Если* $s=a$, *то существует единственное решение уравнения* (1) *на* $[a,b_0]$.

Отметим, что решение уравнения (1) непрерывно слева. Обозначим через $U(t,s,\lambda)$ оператор, ставящий в соответствие каждому элементу $x\in H$ значение $y(t)$ решения y уравнения (1).

Теорема 2. *Пусть в* (1) $s=a$. *Тогда решение уравнения* (1) *имеет вид* $y(t)=U(t,a,\lambda)x+\int_{[a,t)}U(t,s,\lambda)f(s)ds$.

В пространстве $L_1(H;a,b)$ определим максимальный L и минимальный L_0 операторы, порожденные уравнением (1) при $s=a$, $\lambda=0$. Функцию $y\in L_1(H;a,b)$ отнесем к области определения оператора L, если найдутся элемент $x\in H$ и функция $f\in L_1(H;a,b)$ такие, что выполняется (1) при $s=a$, $\lambda=0$. Полагаем $Ly=f$. Оператор L_0 – это сужение L на множество функций y, удовлетворяющих условию $y(a)=y(b_0)=0$.

Поставим в соответствие каждой функции $y\in D(L)$ пару граничных значений $\gamma_1 y$, $\gamma_2 y$ по формулам: $\gamma_1 y=y(a)$, $\gamma_2 y=y(b_0)-U(b_0,a,0)y(a)$. Тогда четверка (H,H,γ_1,γ_2) является пространством граничных значений в смысле работы [1]. Между сужениями $\widetilde{L}$ оператора L такими, что $L_0\subset\widetilde{L}\subset L$, и линейными отношениями $\theta\subset H\times H$ существует взаимно однозначное соответствие, определяемое соотношением: $y\in D(\widetilde{L})$ тогда и только тогда, когда пара $(\gamma_1 y,\gamma_2 y)\in\theta$. В этом случае обозначаем $\widetilde{L}=L_\theta$. Положим $\Phi_\lambda=U(b_0,a,\lambda)-U(b_0,a,0)$. Из [1] следует

Теорема 3. *Точка* $\lambda\in\mathbb{C}$ *тогда и только тогда является собственным значением оператора* L_θ, *когда* $\ker(\theta-\Phi_\lambda)\neq\{0\}$. *Точка* λ *принадлежит резольвентному множеству оператора* L_θ *в том и только том случае, когда отношение* $(\theta-\Phi_\lambda)^{-1}$ *является всюду определенным оператором.*

Литература

[1] Bruk V. M. *On Linear Relations Generated by Nonnegative Operator Function and Degenerate Elliptic Differential-Operator Expression* // Journal of Math. Physics, Analysis, Geometry. – 2009. – V. 5. – No. 2. – P. 123–144.

ДИСКРЕТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В КАНОНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

В. Б. Васильев[1]

---

[1] *vbv57@inbox.ru*, Липецкий государственный технический университет

Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$ – острый выпуклый конус в многомерном пространстве. Обозначим: $D_d \equiv D \cap \mathbb{Z}^m, L_2(D_d)$ – пространство функций дискретного аргумента на D_d, $A(\tilde{x})$ – заданная функция дискретного аргумента $\tilde{x} \in \mathbb{Z}^m$, и рассмотрим следующие типы операторов

$$(Au_d)(\tilde{x}) = \int_{\mathbb{T}^m} \sum_{\tilde{y} \in D_d} e^{i(\tilde{y}-\tilde{x})\cdot\xi} \tilde{A}(\xi)\tilde{u}_d(\xi)d\xi, \quad \tilde{x} \in D_d,$$

где знак $\sim$ над функцией обозначает дискретное преобразование Фурье

$$\tilde{A}(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in \mathbb{Z}^m} e^{i\tilde{x}\cdot\xi} A(\tilde{x}), \quad \xi \in \mathbb{T}^m.$$

Функцию $\tilde{A}(\xi)$ назовем символом оператора A и эллиптическим символом, если $\tilde{A}(\xi) \neq 0 \; \forall \xi \in \mathbb{T}^m$.

Описывается периодический вариант волновой факторизации эллиптического символа [1] и демонстрируется его работа при исследовании обратимости оператора A. Обозначим через $\overset{*}{D}$ сопряженный конус к D, т. е. $\overset{*}{D} = \{x \in \mathbb{R}^m : x \cdot y > 0, \; y \in D\}$, и определим $T(D) \subset \mathbb{C}^m$ как множество вида $\mathbb{T}^m + iD$. В случае $\mathbb{T}^m \equiv \mathbb{R}^m$ такая область многомерного комплексного пространства называется радиальной трубчатой областью над конусом D.

Определение. *Периодической волновой факторизацией эллиптического символа* $\tilde{A}(\xi)$ *называется его представление в виде* $\tilde{A}(\xi) = \tilde{A}_{\neq}(\xi)\tilde{A}_{=}(\xi)$, *где сомножители допускают ограниченное аналитическое продолжение в области* $T(\pm \overset{*}{D})$.

Нетрудно построить примеры эллиптических символов, допускающих периодическую волновую факторизацию.

Теорема. *Если эллиптический символ* $\tilde{A}(\xi) \in C(\mathbb{T}^m)$ *допускает периодическую волновую факторизацию, то оператор* A *обратим в пространстве* $L_2(D_d)$.

Предполагается в дальнейшем измельчение решетки $\mathbb{Z}^m$ и обоснование предельного перехода от дискретных уравнений к континуальным. Первые результаты для относительно простых конусов были получены в работах [2–4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и администрации Липецкой области (проект 14-41-03595-р-центр-а).

Литература

[1] Васильев В. Б. *Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи.* – М.: КомКнига, 2010. 2-е изд. – 136 с.

[2] Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. *Discrete singular operators and equations in a half-space* // Azerb. J. Math. – 2013. – V.3. – No. 1. – P. 84–93.

[3] Васильев А. В., Васильев В. Б. *Разностные и дискретные уравнения на прямой и полупрямой* // Изв. Инст. математики и информатики УдГУ. – 2015. – Вып. 2 (46). – С. 29–37.

[4] Vasilyev A. V., Vasilyev V. B. *On solvability of some difference-discrete equations* // Opusc. Math. – 2016. – V. 36. – No. 4. – P. 525–539.

$\mathfrak{F}^{\omega}$-НОРМАЛИЗАТОРЫ И $\mathfrak{F}^{\omega}$-ПОКРЫВАЮЩИЕ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В. А. Ведерников[1], М. М. Сорокина[2]

---

[1] *vavedernikov@mail.ru*, Московский городской педагогический университет

[2] *mmsorokina@yandex.ru*, Брянский государственный университет имени И. Г. Петровского

Многие исследования в теории групп показали, что между множеством всех $\mathfrak{F}$-нормализаторов конечной группы G и множеством всех ее $\mathfrak{F}$-покрывающих подгрупп, где $\mathfrak{F}$ — локальная формация, существует тесная связь (см., например, [1, глава V]). Следуя соответственно [1] и [2], авторы ввели определения $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатора и $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппы конечной группы G. В теоремах 1 и 2 получены результаты в отмеченном направлении в случае, когда $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация.

Рассматриваются только конечные группы. Пусть ω — непустое множество простых чисел, $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$формации групп$\}$ — ωF-функция. Формация $\mathfrak{F} = (G : G/O_{\omega}(G) \in f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G))$ называется ω-локальной формацией с ω-спутником f.

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация.*

(1) Нормальная подгруппа R группы G называется $\mathfrak{F}^{\omega}$-предельной нормальной подгруппой в G, если $R \leqslant G^{\mathfrak{F}}$ и $R/R \cap \Phi(G) \cap O_{\omega}(G)$ является главным фактором группы G. Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}^{\omega}$-критической в G, если $G = MR$ для некоторой $\mathfrak{F}^{\omega}$-предельной нормальной подгруппы R из G.

(2) $\mathfrak{F}$-подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатором в G, если существует цепь подгрупп группы G вида $H = H_t \subset H_{t-1} \subset \ldots \subset H_1 \subset H_0 = G$, где $t \geqslant 0$, такая, что H_i – $\mathfrak{F}^{\omega}$-критическая подгруппа в группе H_{i-1} для любого $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$.

Определение 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппой в G, если $H \in \mathfrak{F}$ и из того, что $H \leqslant U \leqslant G$, V — нормальная ω-подгруппа в U и $U/V \in \mathfrak{F}$, следует, что $U = HV$.*

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — непустые ω-локальные формации, G — группа, у которой множество всех $\mathfrak{F}_1^{\omega}$-покрывающих подгрупп совпадает с множеством всех ее $\mathfrak{F}_2^{\omega}$-покрывающих подгрупп, $G^{\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2}$ — нильпотентная ω-группа. Тогда множество всех $\mathfrak{F}_1^{\omega}$-нормализаторов группы G совпадает с множеством всех ее $\mathfrak{F}_2^{\omega}$-нормализаторов.*

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— непустая* ω*-локальная формация,* $G^{\mathfrak{F}}$ *— нильпотентная* ω*-подгруппа группы* G*. Тогда множество всех* $\mathfrak{F}^{\omega}$*-нормализаторов группы* G *совпадает с множеством всех ее* $\mathfrak{F}^{\omega}$*-покрывающих подгрупп.*

Теорема 3. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— непустая* ω*-локальная формация и* $G^{\mathfrak{F}}$ *—* $\pi(\mathfrak{F})$*-разрешимая* ω*-подгруппа группы* G*. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) всякая $\mathfrak{F}^{\omega}$*-покрывающая подгруппа из* G *содержит, по крайней мере, один* $\mathfrak{F}^{\omega}$*-нормализатор группы* G*;*

(2) каждый $\mathfrak{F}^{\omega}$*-нормализатор группы* G *содержится, по крайней мере, в одной* $\mathfrak{F}^{\omega}$*-покрывающей подгруппе группы* G*.*

При $\omega = \pi(G)$ из теорем 2 и 3 непосредственно следуют известные результаты Картера, Хоукса, Л. А. Шеметкова о $\mathfrak{F}$-нормализаторах и $\mathfrak{F}$-покрывающих подгруппах (см., например, [1, 3]).

Литература

[1] Шеметков Л. А. *Формации конечных групп.* – М.: Наука, 1978. – 272 с.

[2] Gaschütz W. *Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen* // Math. Z. – 1963. – V. 80. № 4. – P. 300–305.

[3] Carter R. W., Hawkes T. O. *The* $\mathfrak{F}$*-normalizers of a finite soluble group* // J. Algebra. – 1967. – V. 5. № 2. – P. 175–201.

О ПОЧТИ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ

А. Б. Верёвкин[1]

---

[1] *abverevkin@gmail.com*, Ульяновский государственный университет

Функции вида $f(x) = x + o(x)$, регулярные в окрестности нуля, назовём “почти тождественными”. Относительно композиции они образуют неабелеву группу. Группа степенных рядов вида $s(x) = x + o(x)$ относительно подстановок является её расширением. Их общий нейтральный элемент – тождественная функция $e(x) = x$. Рассматриваемые функции и ряды представимы произведениями:

$$E_a(x) = x \Big/ \prod\nolimits_{n\geqslant 1}(1 - x^n)^{a_n}$$

с вычисляемыми показателями (a_n). Регулярность $E_a(x)$ в окрестности нуля равносильна регулярности в окрестности нуля ряда $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$. Композиция почти тождественных функций и рядов задаёт нетривиальную групповую операцию на показателях произведений: $E_a(E_b(x)) = E_{a*b}(x)$.

Примеры.

- $(1,0,0,0,\dots)^{-1} = (-1,1,0,0,\dots)$;
- $(1,0,0,\dots) * (1,0,0,\dots) = (2,1,2,\dots) = (u_n)$, *где* u_n *– количество унитальных неприводимых над* $\mathbb{F}_2$ *полиномов степени* n;

- $(0,1,0,0,\ldots)*(1,0,0,0,\ldots)=(u_1-1,u_2,u_3,\ldots)$;
- $(1,0,0,0,\ldots)*(0,1,0,0,\ldots)=(c_n)$, *где*

$$c_n=\frac{1}{n}\sum\nolimits_{m\backslash n}\mu(\frac{n}{m})\cdot(F_m+F_{m-2}),$$

а F_n *– числа Фибоначчи:* $F_{-1}=0$, $F_0=1$, $F_1=1,\ldots$

Лемма. *Для* $k\geqslant 1$ *и любых* α, β *выполняется:*

$$\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\cdot\binom{\alpha\cdot m+\beta}{k-1}\cdot\binom{k}{m}=0.$$

Следствие. *Для любого* a *выполняется:*

$$\sum_{m=1}^{k}\binom{am}{m}\cdot\binom{-am}{k-m}=a\cdot(a-1)^{k-1},\text{ при }\quad k\geqslant 1;$$

$$\sum_{m=1}^{k}\binom{am}{m}\cdot\binom{-am}{k-m}\cdot\frac{1}{m}=(-1)^{k-1}\cdot\frac{a}{k},\text{ при }\quad k\geqslant 1;$$

$$a\cdot\ln(1-x)=\sum\nolimits_{m\geqslant 1}\frac{(-1)^m}{m}\cdot\binom{am}{m}\cdot\frac{x^m}{(1-x)^{am}};$$

$$\frac{-ax}{1+(a-1)x}=\sum\nolimits_{m\geqslant 1}(-1)^m\cdot\binom{am}{m}\cdot\frac{x^m}{(1-x)^{am}}.$$

Эти формулы также следуют из теоремы обращения Лагранжа ([1, с. 568]). Они позволяют композиционно обращать рассматриваемые произведения простого вида:

$$y=x\Big/(1-x)^a\quad\Leftrightarrow\quad x=y\Big/\prod\nolimits_{n\geqslant 1}(1-y^n)^{b_n}\ .\qquad(1)$$

Теорема. *Для любого* a *имеем* $(a,0,0,\ldots)^{-1}=(b_n)$, *где*

$$b_n=\frac{1}{n}\sum_{m\backslash n}\mu(\frac{n}{m})\cdot(-1)^m\cdot\binom{am}{m}.$$

Обращение произведения $y=x\Big/(1-x^d)^a$ получается из этой теоремы подстановкой в (1) : $x=x^d$, $y=y^d$ и $a=ad$.

Литература

[1] Аски Р., Рой Р., Эндрюс Дж. *Специальные функции.* – М.: МЦНМО, 2013. – 652 с.

ЛОКАЛЬНЫЕ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПОЛЯМИ РАСЩЕПЛЕНИЯ

С. В. Вершина[1]

---

[1] *svetlanavershina@gmail.com*, Московский Педагогический Государственный Университет

Пусть $\widehat{\mathbb{Z}}_p, \widehat{\mathbb{Q}}_p$ — кольцо целых p-адических чисел и его поле частных, $K \subset \widehat{\mathbb{Q}}_p$ — конечное алгебраическое расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Кольцо $R = K \cap \widehat{\mathbb{Z}}_p$ называется кольцом расщепления для группы A, если $A \otimes R \cong F \oplus D$, где F — свободный R-модуль, D — делимый R-модуль. В этом случае поле K называется полем расщепления.

Заметим, что аддитивная группа R^+ кольца R является сильно неразложимой группой, имеет p-ранг 1, является E-модулем над кольцом дискретного нормирования $\mathbb{Z}_p$ — локализации кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ относительно простого p. Локальные абелевы группы являются модулями над $\mathbb{Z}_p$ для некоторого p. Локальная группа называется вполне редуцированной, если она редуцирована и не имеет свободных $\mathbb{Z}_p$-модулей в качестве прямых слагаемых.

Теорема 1. *Всякая вполне редуцированная неразложимая p-локальная группа без кручения с квадратичным полем расщепления K изоморфна группе R^+.*

Теорема 2. *Всякая вполне редуцированная неразложимая p-локальная группа без кручения с кубическим полем расщепления K изоморфна группе из следующих классов:*

1) R^+;

2) $R_u^+ = \{(a,b) \mid a = ub, K = \mathbb{Q}(u)\}_* \subset \widehat{\mathbb{Z}}_p u$;

3) $P_k = \{(a,b_1,b_2) \mid a = ub_1 + p^k u^2 b_2\} \subset \widehat{\mathbb{Z}}_p b_1 \oplus \widehat{\mathbb{Z}}_p b_2$,

$P_s = \{(a,b_1,b_2) \mid a = p^s ub_1 + u^2 b_2\} \subset \widehat{\mathbb{Z}}_p b_1 \oplus \widehat{\mathbb{Z}}_p b_2$.

Заметим, что $A(P_k) = A(P_s) = R^+$, где A — функтор двойственности Арнольда в категории локальных групп.

О КАТЕГОРИИ ПОЛУКОЛЕЦ НЕПРЕРЫВНЫХ ЧАСТИЧНЫХ ЧИСЛОВЫХ ФУНКЦИЙ

Е. М. Вечтомов[1], Е. Н. Лубягина[2]

---

[1] *vecht@mail.ru*, Вятский государственный университет (г. Киров)

[2] *shishkina.en@mail.ru*, Вятский государственный университет (г. Киров)

Рассматривается одна двойственность для категории полуколец $CP(X)$ на T_1-пространствах X. Пусть X — топологическое пространство и $CP(X) = \bigcup\{C(Y) : Y \subseteq X\}$ — полукольцо всех непрерывных частичных $\mathbf{R}$-значных функций на X с поточечными операциями сложения и умножения частичных функций f и g на их общей области определения $D(f) \cap D(g)$.

Важную роль в полукольцах $CP(X)$ играют *унитарные идемпотенты* e_A, $A \subseteq X$:

$$D(e_A) = A \text{ и } e_A(x) = 1 \text{ для всех } x \in A.$$

На $CP(X)$ существует естественный порядок $\leqslant$:

$$f \leqslant g \text{ означает, что } D(f) \subseteq D(g) \text{ и } \forall x \in D(f)\, f(x) \leqslant g(x).$$

Любое непрерывное отображение $\varphi : Y \to X$ топологических пространств индуцирует полукольцевой гомоморфизм $\overline{\varphi} : CP(X) \to CP(Y)$ по формуле

$$\overline{\varphi}(f) = f \circ \varphi \text{ для всех } f \in CP(X).$$

Ясно, что индуцированные гомоморфизмы унитарные идемпотенты e_A, $A \subseteq X$, переводят в унитарные идемпотенты e_B, где $B = \varphi^{-1}(A) \subseteq Y$.

Полукольцевой гомоморфизм $\alpha : CP(X) \to CP(Y)$, сохраняющий $\mathbf{1}$, назовем $\vee$-*полным*, если α сохраняет точную верхнюю грань любого множества $\{e_A : A \in F\}, F \subseteq B(X)$, унитарных идемпотентов:

$$\alpha(\vee e_A) = \vee \alpha(e_A) \text{ по всем } A \in F.$$

Предложение. *Полукольцевой гомоморфизм $CP(X) \to CP(Y)$ будет индуцированным тогда и только тогда, когда он является $\vee$-полным.*

Следствие. *Для любых T_1-пространств X и Y каждый полукольцевой $\vee$-полный изоморфизм $CP(X) \to CP(Y)$ индуцирован некоторым однозначно определенным гомеоморфизмом $Y \to X$.*

Обозначим через **K** категорию всех T_1-пространств X и их непрерывных отображений φ, а через **C** - категорию всех полуколец $CP(X)$ и их $\vee$-полных гомоморфизмов α. Для любых непрерывных отображений $\psi : Z \to Y$ и $\varphi : Y \to X$ имеем $\overline{\varphi \circ \psi} = \overline{\psi} \circ \overline{\varphi}$. Поэтому соответствие **F**, $\mathbf{F}(X) = \mathbb{C}$ и $\mathbf{F}(\varphi) = \overline{\varphi}$, является контрвариантным функтором из категории **K** в категорию **C**.

Теорема. *Категория* **K** *антиэквивалентна (двойственна) категории* **C**.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проектная часть госзадания Минобрнауки РФ «Функциональная алгебра и полукольца», проект
№ 1.1375.2014/К).

Литература

[1] Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н. *Полукольца частичных функций* // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения: материа-лы XIII Международной конференции, посв. 85-летию со дня рождения проф. С. С. Рышкова. – Тула, 2015. – С. 148–150.

О ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ ПОЛУКОЛЕЦ НЕПРЕРЫВНЫХ $(0,\infty]$-ЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Е. М. Вечтомов[1], Н. В. Шалагинова[2]

---

[1] *vecht@mail.ru*, Вятский государственный университет (г. Киров)
[2] *korshunnv@mail.ru*, Вятский государственный университет (г. Киров)

В 1948 г. было введено понятие $\mathbb{R}$-компактного (хьюиттовского) пространства и доказана двойственность между категориями хьюиттовских пространств X и колец $C(X)$ непрерывных $\mathbb{R}$-значных функций на X [1]. Была установлена двойственность категории хьюиттовских пространств X и категории полуколец $C^+(X)$ непрерывных неотрицательных функций на X [2]. При изучении полуколец $C(X,S)$ непрерывных функций со значениями в топологических полукольцах S встает вопрос о двойственности категории таких полуколец и категории соответствующих топологических пространств X.

В качестве полукольца S возьмем топологическое полукольцо $(0,\infty]$, в котором элемент ∞ является поглощающим. Полукольца $C^\infty(X) = C(X,(0,\infty])$ непрерывных функций со значениями в топологическом полукольце $(0,\infty]$ начали изучаться в [3]. В терминах полуколец функций $C^\infty(X)$ установим двойственность для категории всевозможных хьюиттовских пространств X и их непрерывных отображений φ.

Каждое непрерывное отображение $\varphi\colon Y \to X$ индуцирует гомоморфизм $\bar{\varphi}\colon C^\infty(X) \to C^\infty(Y)$, где $\bar{\varphi}(f) = f\circ\varphi$ для всех $f \in C^\infty(X)$. Гомоморфизм $\bar{\varphi}$ сохраняет константы, в частности $\bar{\varphi}(1) = 1$, и сохраняет точные верхние грани и точные нижние грани непустых подмножеств функций в случае их существования.

Назовем гомоморфизм $\alpha\colon C^\infty(X) \to C^\infty(Y)$ supc-*гомоморфизмом*, если он сохраняет константы и существующие точные верхние грани любых счетных семейств $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ функций $f_n \in C^\infty(X)$: $\alpha(\sup_{n\in\mathbf{N}} f_n) = \sup_{n\in\mathbf{N}}\alpha(f_n)$.

Предложение. *Для любых хьюиттовского пространства X и топологического пространства Y всякий supc-гомоморфизм $\alpha\colon C^\infty(X) \to C^\infty(Y)$ индуцируется однозначно определенным непрерывным отображением $\varphi\colon Y \to X$, то есть $\alpha = \bar{\varphi}$.*

В качестве морфизмов категории полуколец $C^\infty(X)$ возьмем supc-гомоморфизмы.

Теорема. *Категория всех полуколец $C^\infty(X)$ с supc-гомоморфизмами в качестве морфизмов антиэквивалентна (двойственна) категории всех хьюиттовских пространств и их непрерывных отображений.*

В частности, любое хьюиттовское пространство X однозначно определяется своим полукольцом $C^\infty(X)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проектная часть госзадания Минобрнауки РФ «Функциональная алгебра и полукольца», проект
1.1375.2014/К).

Литература

[1] Hewitt E. *Rings of real-valued continuous functions* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1948. – T. 64. – № 1. – P. 45–99.

[2] Вечтомов Е. М., Сидоров В. В., Чупраков Д. В. *Полукольца непрерывных функций.* – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2011. – 312 с.

[3] Шалагинова Н. В. *О полукольцах непрерывных функций со значениями в* $(0,\infty]$ // Лобачевские чтения-2015: Материалы XIV Всероссийской молодежной научной школы-конференции. – Казань, 2015. – Т. 52. – С. 170–171.

К ЗАДАЧЕ ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ МАТРИЦЕ ИЗ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ф. Х. Вильданова[1]

---

[1] *fvildanova@mail.ru*, ГУ им. Шакарима города Семей, РК

Линейные дифференциальные системы

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x,\ x \in R^n,\ t \geqslant t_0$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(t)y,\ y \in R^n,\ t \geqslant t_0$$

с кусочно-непрерывными и ограниченными $(n \times n)$-матрицами коэффициентов называются асимптотически эквивалентными [1], если существует преобразование Ляпунова $x = L(t)y$, где

$$\sup_{t \geqslant t_0}(||L(t)|| + ||L^{-1}(t)|| + ||\dot{L}(t)||) < +\infty,$$

переводящее первую из этих систем в другую.

При решении вопроса об асимптотической эквивалентности двух данных линейных дифференциальных систем особую роль играет матрица C, связывающая начальные значения базисного решения одной системы с начальными значениями соответствующего базисного решения другой. Конструктивных методов построения требуемой матрицы не существует, поэтому представляет интерес исследования частных приемов поиска матрицы C. Иногда значение C можно получить как предельное (в том или ином смысле) значение некоторой многозначной матричной функции $C(t)$, определяемой из минимаксного соотношения на конечном промежутке изменения аргумента t.

В сообщении приводятся результаты исследования поведения множества $\{C(t)\}$ и связанного с ним вопроса асимптотической эквивалентности двух данных линейных дифференциальных систем.

Литература

[1] Богданов Ю. С. *Об асимптотически эквивалентных линейных дифференциальных системах* // Ю.С.Богданов // Дифференциальные уравнения. – 1965. – Т. 1. – №6, – С. 707–716.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ЛЕВИ И КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ

Б. О. Волков[1]

[1] *borisvolkov1986@gmail.com*, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана

В 20-е годы прошлого века Поль Леви предложил несколько определений лапласиана, действующего на пространстве функций на $L_2(0,1)$. Значение лапласиана Леви можно определить как среднее Чезаро вторых производных вдоль векторов из ортонормированного базиса. По-другому лапласиан Леви можно задать как интегральный функционал, порожденный специальным видом второй производной. Аналогичные конструкции используются для определения лапласианов на различных функциональных пространствах. Такие операторы также называют лапласианами Леви. Показано, что в важном случае два разных подхода приводят к определению не совпадающих операторов.

Одна из основных причин интереса к лапласианам Леви — это их связь с калибровочными полями. В [3] был определен лапласиан Леви как интегральный функционал, порожденный более сложным видом второй производной, чем оригинальный лапласиан Леви. При этом в [3] было доказано, что связность в тривиальном векторном расслоении над $\mathbb{R}^d$ является решением уравнений Янга-Миллса тогда и только тогда, когда соответствующий связности параллельный перенос является решением уравнения Лапласа для такого лапласиана Леви. В [4] была доказана аналогичная теорема для стохастического параллельного переноса и стохастического лапласиана Леви, определенного как интегральный функционал. В детерминистском случае лапласиан Леви, введенный в [3], совпадает с лапласианом Леви, определенным с помощью чезаровского усреднения (см. [2]). Определение второго оператора естественным образом переносится на стохастический случай. Найдено значение стохастического лапласиана Леви, определенного с помощью чезаровского усреднения, на стохастическом параллельном переносе и показано, что оно не равно нулю, если соответствующая связность — решение уравнений Янга-Миллса. Следовательно, в стохастическом случае лапласиан Леви, определенный с помощью чезаровского усреднения, не совпадает с лапласианом, введенным в [4].

Введена стохастическая дивергенция Леви. Показано, что стохастический перенос является решением уравнения, содержащего такую дивергенцию, тогда и только тогда, когда соответствующая связность — решение уравнений Янга-Миллса. Полученное уравнение является бесконечномерным аналогом уравнения движения кирального поля (ср. [1]).

Литература

[1] Арефьева И. Я., Волович И. В., *Функциональные высшие законы сохранения в калибровочных теориях//* в Тр. Междунар. конф. “Обобщенные функции и их применения в математической физике”. М.: ВЦ АН СССР, 1981.

[2] Волков Б. О. *Лапласианы Леви и инстантоны* // Тр. МИАН. – 2015. – Т. 290. – С. 226–238.

[3] Accardi L., Gibilisco P., Volovich I. V. *Yang-Mills gauge fields as harmonic functions for the Levy-Laplacians* // Russ. J. Math. Phys. –1994. – Vol. 2. – № 2. – Pp. 235–250.

[4] Leandre R., Volovich I. V. *The Stochastic Levy Laplacian and Yang-Mills equation on manifolds*// IDAQPRT. —2001. — Vol. 4. – № 2. —Pp. 151–172.

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАТЕНЕННЫХ УЧАСТКОВ МОРСКОГО ДНА

П. А. Ворновских[1], А. А. Сущенко[2]

---

[1] *vornovskikh.polina@gmail.com*, Дальневосточный федеральный университет

[2] *sushchenko.aa@dvfu.ru*, Дальневосточный федеральный университет, Институт прикладной математики ДВО РАН

Изучению вопросов картографирования морского дна посвящен целый ряд работ [1-2], основной целью которых является определение отклонения высоты донной поверхности от некоторого заданного уровня. Стоит отметить, задача рассматривалась только при условии видимости каждой точки морского дна с носителя антенны. Однако при моделировании процесса акустического зондирования морского дна гидролокатором бокового обзора возникают зоны невидимых участков донной поверхности. В данной работе авторы описывают алгоритм определения невидимых участков морского дна в случае нестационарного источника и приемника и узкой диаграммы направленности приемной антенны.

Функция $u \in C^1(-\infty, +\infty)$ описывает некоторые отклонения донной поверхности от среднего уровня l. Пусть $\mathbf{n} = (u'(y_i, vt_j), 0, -1)$ определяет вектор нормали к поверхности γ' в точке y_i. Тогда скалярное произведение $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) = -y_i u'(y_i, vt_j) - l + u(y_i, vt_j)$. Геометрия задачи представлена на рисунке 1. Таким образом, необходимо найти функцию

$$\hat{u}(y_i, vt_j) = \begin{cases} u(y_i, vt_j), & \text{если } \mathbf{y_i} \text{ видна с аппарата,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

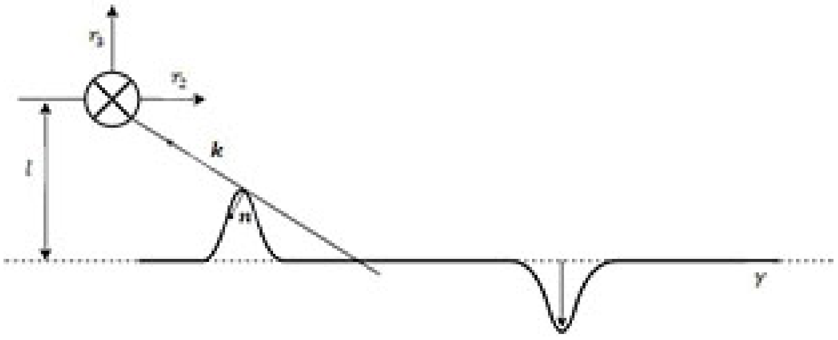

Рис. 1: Геометрия задачи

Для проведения вычислительного эксперимента аппарат помещаем на высоту $l = 10$ м над поверхностью дна. В качестве функции, описывающей морское дно, авторы используют

$$u(y) = e^{\frac{-(y-100)^2+(vt-20)^2}{10^2}} - e^{\frac{-(y-200)^2+(vt-20)^2}{10^2}}.$$

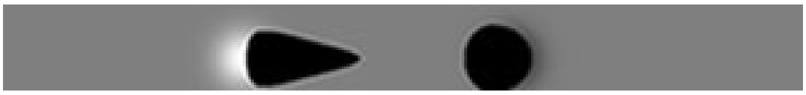

Рис. 2: $\hat{u}(y_i, vt_j)$.

Таким образом, разработан эффективный алгоритм для определения затененных участков морского дна в случае нестационарного источника и приемника.

Литература

[1] Prokhorov I., Sushchenko A., Kan V., Kovalenko E. *Simulation of sonar signal propagation in a fluctuating ocean* // Physics Procedia. – 2015. – V. 70. – P. 690—694.

[2] Прохоров И. В., Сущенко А. А., Кан В. А. *Об одной задаче определения рельефа дна флуктуирующего океана* // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2015. – Т. – 62. – № 2. – С. 99–110.

О СВОБОДНЫХ КОММУТАТИВНЫХ ОПЕРАДАХ

А. Р. Гайнуллина[1]

---

[1] *GaynullinaAlina@gmail.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

Изучается один естественно определяемый класс операд (см. [1]) — коммутативные операды, введенные в [2]. Коммутативные операды образуют подмногообразие в многообразии всех операд, рассматриваемых как многосортные универсальные алгебры.

Свободная Σ-операда с базисом $\Omega = \{\Omega(n) \mid n \geqslant 0\}$ — это Σ-операда $FO_\Omega = \{FO_\Omega(n) \mid n \geqslant 0\}$ вместе с семейством отображений $\eta_{\Omega}, n\colon \Omega(n) \to FO_\Omega(n)$, причем выполнено универсальное свойство: для любой операды R и любого семейства отображений $\xi = \{\xi_n \mid \xi_n\colon \Omega(n) \to R(n), n \geqslant 0\}$ существует единственный гомоморфизм операд $h\colon FO_\Omega \to R$ такой, что $h\eta_\Omega = \xi$. Аналогично можно определить свободную коммутативную операду FCO_Ω. Свободные коммутативные операды являются свободными алгебрами многообразия коммутативных операд.

Пусть G — свободная полугруппа, порожденная множеством $Y = \bigcup\limits_{n\geqslant 0} \Omega(n)$. Зададим операду $G^{\blacktriangleright}$ с компонентами $G^{\blacktriangleright}(n) = G^n$. Операдные композиции определяются как совокупность отображений вида:

$$G^{\blacktriangleright}(m) \times G^{\blacktriangleright}(n_1) \times \cdots \times G^{\blacktriangleright}(n_m) \longrightarrow G^{\blacktriangleright}(n_1 + \cdots + n_m),$$

$$(\overline{a}, \overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_m) \mapsto (a_1\overline{b}_1, \ldots, a_m\overline{b}_m),$$

где $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_m)$, $\overline{b}_i = (b_{i,1}, \ldots, b_{i,n_i})$ и $a_i\overline{b}_i = (a_ib_{i,1}, \ldots, a_ib_{i,n_i})$.

Операда префиксных кодов PC_S в линейно упорядоченном алфавите S задается следующим образом. Элементы $PC_S(n)$ — это упорядоченные последовательности $(w_1,\dots,w_n)$ слов в алфавите S такие, что совокупность $\{w_1,\dots,w_n\}$ является префиксным кодом, то есть ни одно слово w_i не является левым начальным отрезком другого слова w_j. Если положить $\Omega(n) = X_{S,n}$, где $X_{S,n}$ состоит из элементов $(s_1,\dots,s_n)$ таких, что $s_1,\dots,s_n \in S$ и $s_1 < \dots < s_n$, то PC_S — подоперада операды $G^{\blacktriangleright}$. Можно показать, что она является свободной Σ-операдой с базисом $X_S = \bigcup\limits_n X_{S,n}$, и что все свободные операды можно считать подоперадами операд вида PC_S.

Лемма. *Пусть Z — свободная коммутативная полугруппа с базисом Y. Тогда естественная проекция $\pi\colon G \to Z$ продолжается до гомоморфизма операд $G^{\blacktriangleright} \to Z^{\blacktriangleright}$.*

Теорема. *Образ операды $FO_\Omega \subset G^{\blacktriangleright}$ в $Z^{\blacktriangleright}$ — свободная коммутативная операда FCO_Ω.*

Литература

[1] Loday J.-L. and Valette B. *Algebraic Operads.* – Grundlehren Math. Wiss. – Vol. 346. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012. – 634 p.

[2] Тронин С. Н. *Операды и многообразия алгебр, определяемые полилинейными тождествами* // Сиб. матем. журн. – 2006. – Т. 47. – № 3. – С. 670–694.

КРИТЕРИИ КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТИ КЛАССОВ КАРЛЕМАНА ДЛЯ СЛАБО РАВНОМЕРНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Р. А. Гайсин[1]

---

[1] *rashit.gajsin@mail.ru*, Башкирский государственный университет

Пусть D — жорданова область в $\mathbb{C}$, $M_n > 0$ $(n \geqslant 0)$,

$$H(D, M_n) = \{f \in H(D) : \sup_{z\in D} |f^{(n)}(z)| \leqslant c_f A^n M_n \quad (n \geqslant 0)\}.$$

Понятие *равномерной области* использовалось в ряде работ Лехто (Lehto O.). Односвязную ограниченную область D будем называть *слабо равномерной*, если существует постоянная b такая, что любую пару точек $z_1, z_2 \in D$ можно соединить дугой $\alpha \subset D$ со свойством $|\alpha| \leqslant b\,|z_1 - z_2|$ ($|\alpha|$ — длина α). В этом случае все производные функции $f \in H(D, M_n)$ продолжаются до непрерывных в $\overline{D}$ функций.

Класс Карлемана $H(D, M_n)$ называется *квазианалитическим в точке* $z_0 \in \partial D$, если в данном классе нет функции f, такой, что $f^{(n)}(z_0) = 0$ $(n \geqslant 0)$, но $f(z) \not\equiv 0$.

Задача о квазианалитичности класса $H(D, M_n)$ для угла решена Р. Салинасом (1955), а для круга — Б. И. Коренблюмом (1965). Критерий квазианалитичности класса $H(D, M_n)$ для произвольной выпуклой области D установлен Р. С. Юлмухаметовым (1986). Для областей общего вида (не обязательно выпуклых и даже односвязных), каждая из которых вблизи граничной точки z_0 в некотором смысле близка к углу или сравнима с «двуугольниками», критерий типа Данжуа-Карлемана доказан в [1]. Для областей D со спрямляемой жордановой границей критерии неквазианалитичности регулярного класса $H(D, M_n)$ (определение см. в [1], [2]) получены и в [2], но они сформулированы в других терминах.

Здесь установлен в некотором смысле универсальный для всех слабо равномерных областей критерий квазианалитичности регулярных классов $H(D, M_n)$.

Теорема. *Для того чтобы для любой слабо равномерной области D со спрямляемой границей регулярный класс $H(D, M_n)$ был квазианалитичен в каждой граничной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Банга*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} = \infty.$$

Достаточность теоремы опирается на теорему Банга. Доказательство необходимой части теоремы основано на решении задачи Дирихле с неограниченной граничной функцией, где по существу использован один результат Берлинга об оценке гармонической меры.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-01661).

Литература

[1] Гайсин Р. А. *Критерии квазианалитичности типа Салинаса-Коренблюма для областей общего вида* // Уфимский матем. журнал. – 2013. – Т. 5. – № 3. – С. 28–40.

[2] Трунов К. В., Юлмухаметов Р. С. *Квазианалитические классы Карлемана на ограниченных областях* // Алгебра и анализ. – 2008. – Т. 20. – № 2. – С. 178–217.

ДОПУСТИМЫЕ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ СТРУКТУРЫ

С. В. Галаев[1]

Пусть M - гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$, $m \geqslant 1$ с заданной на нем почти контактной структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$. Если почти контактная структура согласована с псевдо-римановой метрикой g таким образом, что $g(\varphi\vec{x}, \varphi\vec{y}) = -g(\vec{x}, \vec{y}) + \eta(\vec{x})\eta(\vec{y})$, где $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(TM)$, $\Gamma(TM)$ - модуль векторных полей на многообразии M, то структура $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g, D)$ называется почти контактной структурой с метрикой Нордена, а многообразие M – почти контактным многообразием с метрикой Нордена [1]. Тензор Схоутена $R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]}\vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}]$ [2] будем называть тензором кривизны распределения D, а распределение D, в случае обращения в нуль тензора Схоутена, - распределением нулевой кривизны. Допустимая почти комплексная структура φ в случае выполнения условия $N_\varphi + 2(d\eta \circ \varphi) \otimes \vec{\xi} = 0$ называется интегрируемой или почти нормальной структурой. Почти контактная структура $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, D)$ будет называться интегрируемой, если интегрируема структура φ. Рассмотрим на гладком многообразии M размерности $n = 4m + 1$ почти контактную структуру $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi_1, D)$,

---

[1] *sgalaev@mail.ru*, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

где φ_1 - допустимая почти комплексная структура. Предположим, что на многообразии M заданы еще две такие допустимые почти комплексные структуры φ_2 и φ_3, что $\varphi_1 \circ \varphi_2 = -\varphi_2 \circ \varphi_1 = \varphi_3$. Назовем многообразие M, наделенное структурой $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi_i,D)$, $i = 1,2,3$, почти контактным почти гиперкомплексным многообразием. Если каждая из почти комплексных структур φ_i интегрируема (почти нормальна), т.е., если $N_{\varphi_i} + 2(d\eta \circ \varphi_i) \otimes \vec{\xi} = 0$, то допустимую почти гиперкомплексную структуру $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi_i,D)$ будем называть интегрируемой или допустимой гиперкомплексной структурой, а многообразие M - почти контактным гиперкомплексным многообразием. Пусть на многообразии M с почти контактной структурой $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi_1,D)$ задан метрический тензор g сигнатуры $(2m+1,2m)$ такой, что имеет место равенство: $g(\vec{x},\vec{y}) = g(\varphi_1\vec{x},\varphi_1\vec{y}) = -g(\varphi_2\vec{x},\varphi_2\vec{y}) = -g(\varphi_3\vec{x},\varphi_3\vec{y})$, где $\vec{x},\vec{y} \in \Gamma(D)$. Структуру $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi_i,g,D)$ назовем допустимой почти гиперкомплексной псевдо-эрмитовой структурой. Если структуры φ_i интегрируемы, то структура $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi_i,g,D)$ будет называться интегрируемой или допустимой гиперкомплексной псевдо - эрмитовой структурой. Пусть D - распределение почти контактной структуры [2] $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,D)$ с метрикой Нордена. Определим на распределении D допустимую почти гиперкомплексную псевдо-эрмитову структуру $(\widetilde{D},J_1,J_2,J_3,\vec{u},\lambda = \eta \circ \pi_*,\tilde{g},D)$, полагая, что $\vec{u} = \partial_n$, $J_1(\vec{\varepsilon}_a) = \partial_{n+a}$, $J_1(\partial_{n+a}) = -\vec{\varepsilon}_a$, $J_1(\vec{u}) = \vec{0}$, $J_2\vec{x}^h = -(\varphi\vec{x})^h$, $J_2\vec{x}^v = (\varphi\vec{x})^v$, $J_2(\vec{u}) = \vec{0}$, $J_3 = J_2 \circ J_1$, $\tilde{g}(\vec{x}^h,\vec{y}^h) = \tilde{g}(\vec{x}^v,\vec{y}^v) = g(\vec{x},\vec{y})$, $\tilde{g}(\vec{x}^h,\vec{y}^v) = \tilde{g}(\vec{x}^h,\vec{u}) = \tilde{g}(\vec{x}^v,\vec{u}) = 0$, $\vec{x},\vec{y} \in \Gamma(D)$.

Теорема. *Пусть* $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g,D)$ *– контактная структура с метрикой Нордена, заданная на многообразии* M *размерности* $n \geqslant 5$. *Допустимая почти гиперкомплексная псевдо-эрмитова структура* $(\widetilde{D},J_1,J_2,J_3,\vec{u},\lambda = \eta\circ\pi_*,\tilde{g},D)$ *интегрируема, если структура* $(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g,D)$ *является контактной кэлеровой структурой Нордена с распределением нулевой кривизны.*

Литература

[1] Manev M. *Tangent bundles with complete lift of the base metric and almost hypercomplex Hermitian-Norden structure* // C. R. Acad. Bulgare Sci. – 2014. – № 3. – С. 313–322.

[2] Галаев С. В. *Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны* // Изв. вузов. Матем. –2014. – № 8. – С. 42-52.

СЕТОЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПАКОВОК И ПОКРЫТИЙ

Ш. И. Галиев[1], М. С. Лисафина, А. В. Хорьков

Пусть G — ограниченное выпуклое множество на плоскости P и имеются фигуры, являющиеся равными или неравными кругами, эллипсами с взаимно параллельными или ортогональными большими осями, или выпуклыми многоугольниками. Предлагается метод приближенного решения задач упаковок указанных фигур в G и

---

[1] *sh.galiev@mail.ru*, КНИТУ им. А.Н. Туполева — КАИ

покрытий G фигурами заданных видов. На множестве G строится сетка и на ее основе предложены целочисленные линейные модели задач упаковок и покрытий. Разработаны алгоритмы решения полученных задач целочисленного линейного программирования больших размерностей и проведены расчеты.

Семейство открытых фигур образует упаковку в G если каждая точка из G принадлежит не более одной из фигур. Семейство замкнутых фигур образует k-покрытие $(k \geqslant 1)$ множества G если каждая точка из G принадлежит не менее чем k фигурам.

Построим математическую модель для упаковок в G равных выпуклых правильных многоугольников P. Пусть на G построена прямоугольная сетка с шагом Δ по осям Ox и Oy. Узлы сетки порождают конечное множество $T = \{t_1, \dots, t_m\}$, $t_i \in G$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Пусть c — центр многоугольника P, тогда P запишем как $P(c)$. Полагаем переменные z_i равными 1, если c совпадает с точкой t_i, а иначе они равны 0. Пусть $intX$ — внутренность множества X. Положим, что для точки t_i имеется m_i точек t_j, $i \neq j$, для которых выполняется условие: $P(t_i) \cap P(t_j) \neq \emptyset$ и $P(t_i) \in int\,G$ и $P(t_j) \in int\,G$. Введем коэффициенты:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } P(t_i) \cap P(t_j) \neq \emptyset \text{ и } P(t_i) \in intG \text{ и } P(t_j) \in intG \\ 0, \text{если } P(t_i) \cap P(t_j) = \emptyset \text{ и } P(t_i) \in intG \text{ и } P(t_j) \in intG \end{cases}$$

$$i \neq j, a_{ii} = m_i, 1 \leqslant i, j \leqslant m.$$

Пусть Z и M — m-мерные векторы с координатами z_i и m_i соответственно, A является $(m \times m)$-матрицей с элементами a_{ij}. Поставим задачу о нахождении величины

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{m} z_i : AZ \leqslant M, z_i \in \{0,1\}, 1 \leqslant i \leqslant m\right\}. \tag{1}$$

Она является задачей упаковки в G наибольшего возможного числа равных выпуклых правильных многоугольников заданного размера.

При решении задачи возникают проблемы: а) как сосчитать коэффициенты матрицы A, б) как решать задачу (1) при больших размерностях. В работе преодолены указанные проблемы. Для расчета коэффициентов матрицы A использовались разные приемы для разных фигур. Так, например, для упаковки эллипсов использовалась l_p-метрика с подбираемым параметром p, а для упаковки многоугольников – блок нормы или специальный алгоритм. Для решений задачи (1) введены уровни возможных положений решений, веса уровней и разбивка G на части.

Во многом аналогичный подход реализован для задач k-покрытия. Здесь тоже возникают проблемы как для расчета коэффициентов матриц ограничений, так и для решения задач больших размерностей. Эти проблемы преодолены, в частности, для решения задач больших размерностей эффективной оказалась модификация релаксации целочисленной задачи линейного программирования, аналогичной задаче (1).

ТОЖДЕСТВА КРИВИЗНЫ AC-МНОГООБРАЗИЙ КЛАССА NC_{11}

С. А. Герасименко[1], А. Р. Рустанов[2]

---

[1] *gsa_57@mail.ru*, Оренбургский государственный университет
[2] *aligadzhi@yandex.ru*, Московский педагогический государственный университет

Определение 1 [1]. *Почти контактная метрическая структура называется структурой класса NC_{11}, если выполнено тождество*

$$\nabla_X(\Phi)Y+\nabla_Y(\Phi)X=\eta(X)\Phi\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi Y+\eta(Y)\Phi\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi X;\forall X,Y\in\mathbf{X}(M).$$

Почти контактное метрическое многообразие, снабженное структурой класса NC_{11}, называется многообразием класса NC_{11}, коротко NC_{11}-многообразием.

Определение 2. *AC-многообразие класса NC_{11} назовем NC_{11}-многообразием класса R_1, если его тензор римановой кривизны удовлетворяет тождеству*

$$R(\Phi^2X,\Phi^2Y)\Phi^2Z+R(\Phi^2X,\Phi Y)\Phi Z+$$
$$+R(\Phi X,\Phi^2Y)\Phi Z-R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z=0;\forall X,Y,Z\in\mathbf{X}(M).$$

Теорема 1. *AC-многообразие класса NC_{11} является NC_{11}-многообразием класса R_1 тогда и только тогда, когда*

$$\nabla_{\Phi^2Z}(B)(\Phi^2X,\Phi^2Y)+\nabla_{\Phi Z}(B)(\Phi^2X,\Phi Y)+$$
$$+\nabla_{\Phi Z}(B)(\Phi X,\Phi^2Y)-\nabla_{\Phi^2Z}(B)(\Phi X,\Phi Y)=0;$$

$\forall X,Y,Z\in\mathbf{X}(M)$.

Теорема 2. *AC-многообразие класса NC_{11} является NC_{11}-многообразием класса R_1 тогда и только тогда, когда является многообразием класса C_{11}.*

Определение 3. *AC-многообразие класса NC_{11} назовем NC_{11}-многообразием класса R_2, если его тензор римановой кривизны удовлетворяет тождеству*

$$R(\Phi^2X,\Phi^2Y)\Phi^2Z+R(\Phi^2X,\Phi Y)\Phi Z-R(\Phi X,\Phi^2Y)\Phi Z+$$
$$+R(\Phi X,\Phi Y)\Phi^2Z=0;\forall X,Y,Z\in\mathbf{X}(M).$$

Теорема 3. *AC-многообразие класса NC_{11} является NC_{11}-многообразием класса R_2 тогда и только тогда, когда*

$$A(Z,X,Y)=\frac{1}{4}\{\nabla_{\Phi Y}(B)(\Phi^2Z,\Phi X)+\nabla_{\Phi Y}(B)(\Phi Z,\Phi^2X)+$$
$$+\nabla_{\Phi^2Y}(B)(\Phi Z,\Phi X)-\nabla_{\Phi^2Y}(B)(\Phi^2Z,\Phi^2X)\};\forall X,Y,Z\in\mathbf{X}(M).$$

Литература

[1] Рустанов А. Р., Щипкова Н. Н. *Дифференциальная геометрия почти контактных метрических многообразий класса NC_{11}* // Вестник ОГУ. – 2013. – №1 (150). – С. 132–139.

О НЕКОТОРЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЯХ, СОДЕРЖАЩИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

А. А. Гималтдинова[1]

---

[1] *alfiragimaltdinova@mail.ru*, Башкирский государственный университет, Стерлитамакский филиал

При нахождении собственных значений спектральных задач для дифференциальных уравнений приходится решать достаточно сложные трансцендентные уравнения.

Например, при изучении задачи о поперечных колебаниях тонкого упругого стержня [1, с. 298] возникает трансцендентное уравнение $\cos m \cdot \operatorname{ch} m = 1$ относительно собственных значений m. Отмечено, что в силу физических свойств поставленной задачи собственными значениями будут только действительные и чисто мнимые числа. Однако с математической точки зрения также интересен вопрос о наличии других комплексных корней уравнения (или доказательство отсутствия таких корней).

В монографии [2] рассмотрены задачи на собственные значения, приводящие к уравнениям $\operatorname{cth} m - \operatorname{ctg} m = C_1 / m^3$, $\operatorname{tg} m - \operatorname{th} m = C_2 / m$, $\sin m = m$. Графическим способом доказано существование счетного множества действительных корней, для некоторых уравнений показано существование комплексных корней. В [3] решены некоторые трансцендентные уравнения, например, $\sin z = (\ln z)^{-1}$, $e^z = az$, $a \neq 0$.

В настоящей работе изучаются уравнения

$$\cos\mu \operatorname{ch}\mu - \sin\mu \operatorname{sh}\mu = 0,$$

$$\cos\mu \operatorname{ch}\mu + \sin\mu \operatorname{sh}\mu = 0,$$

$$\cos\mu \operatorname{sh}\mu - \sin\mu \operatorname{ch}\mu = 0,$$

$$\cos\mu \operatorname{ch}\mu + \sin\mu \operatorname{sh}\mu = 1,$$

$$\cos\mu \operatorname{ch}\mu - \sin\mu \operatorname{sh}\mu = 1,$$

$$\cos\mu \operatorname{ch}\mu = 1.$$

Найдены счетные множества их действительных и чисто мнимых корней, показано, что других корней нет. Получено асимптотическое представление для корней этих уравнений.

Литература

- [1] Дж. В. Стретт (Лорд Рэлей). *Теория звука. Т. 1.* – М.: Гос. изд-во технико-теоретич. литер., 1955. – 504 с.
- [2] Л. Коллатц. *Задачи на собственные значения (с техническими приложениями).* – М.: Наука, 1968. – 504 с.
- [3] М. В. Федорюк. *Асимптотика: Интегралы и ряды.* – М.: Наука, 1987. – 544 с.

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ НА ПРОСТРАНСТВА ЭЙНШТЕЙНА

И. Гинтерлейтнер[1], Н. И. Гусева[2], Й. Микеш[3]

---

[1] *hinterleitner.i@fce.vutbr.cz*, Brno University of Technology
[2] *ngus12@mail.ru*, МГПУ, Москва
[3] *josef.mikes@upol.cz*, Palacky University of Olomouc

В работе [1] доказано, что (псевдо-) риманово пространство V_n допускает конформное отображение на пространство Эйнштейна $\bar{V}_n$ тогда и только тогда, когда в V_n существует решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений в ковариантных производных типа Коши относительно инвариантов $u(x)$ и $s(x)\,(>0)$:

$$s_{,ij} = u g_{ij} - s L_{ij}, \tag{1}$$

где $L_{ij} = \frac{1}{n-2}\,(R_{ij} - \frac{R}{2(n-1)}\,g_{ij})$, R_{ij} — тензор Риччи, R — скалярная кривизна, запятой обозначена ковариантная производная.
При этом метрики пространств V_n и $\bar{V}_n$ связаны условиями:

$$\bar{g}_{ij}(x) = s^{-2} g_{ij}(x)$$

в общей по конформному отображению системе координат x.

Условия (1) выполняются при минимальных требованиях на класс гладкости рассматриваемых функций, то есть когда при этом функция $s(x) \in C^2$ и $u(x)$ является непрерывной функцией. Очевидно, что тогда V_n и $\bar{V}_n \in C^2$, т.е. $g_{ij}(x)$ и $\bar{g}_{ij}(x) \in C^2$.

В работе [1], при условии V_n и $\bar{V}_n \in C^3$, доказано, что риманово пространство V_n допускает конформное отображение на пространство Эйнштейна $\bar{V}_n \in C^3$ тогда и только тогда, когда в V_n существует решение замкнутой системы линейных однородных дифференциальных уравнений в ковариантных производных типа Коши относительно инвариантов $u(x)$, $s(x)\,(>0)$ и вектора $s_i(x)$:

$$s_{,i} = s_i; \quad s_{i,j} = u g_{ij} - s L_{ij}; \quad u_{,i} = -s_\alpha L_i^\alpha. \tag{2}$$

Мы доказали (совместно с Л.Е. Евтушиком), что подобные уравнения имеют место при более слабых условиях на дифференцируемость метрик изучаемых пространств. Имеют место

Теорема 1 *(Псевдо-) риманово пространство $V_n \in C^2$, в котором тензор $L_{ij} \in C^1$, допускает конформное отображение на пространство Эйнштейна $\bar{V}_n \in C^2$ тогда и только тогда, когда в V_n существует решение замкнутой системы линейных однородных дифференциальных уравнений в ковариантных производных типа Коши относительно инвариантов $u(x)$, $s(x)\,(>0)$ и вектора $s_i(x)$, при этом $s \in C^3$.*

$$s_{,i} = s_i; \quad s_{i,j} = u g_{ij} - s L_{ij}; \quad u_{,i} = -s_\alpha L_i^\alpha - s \cdot P_i,$$

где $P_{ijk} = L_{ij,k} - L_{ik,j}$, $P_k = \frac{1}{n-1}\,P_{ijk}g^{ij}$.

Теорема 2 *(Псевдо-) риманово пространство $V_n \in C^r$, $r > 2$, допускает конформное отображение на пространство Эйнштейна $\bar{V}_n \in C^2$ тогда и только тогда, когда в V_n существует решение замкнутой системы линейных однородных дифференциальных уравнений в ковариантных производных типа Коши (2) относительно инвариантов $u(x)$, $s(x)\,(>0)$ и вектора $s_i(x)$. В этом случае $\bar{V}_n \in C^r$.*

Литература

[1] Й. Микеш, М. Л. Гаврильченко, Е. И. Гладышева, *О конформных отображениях на пространства Эйнштейна.* – Вестник Моск. ун-та, 3, 1994. – С. 13–17.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ ЭЙНШТЕЙНА

И. Гинтерлейтнер[1], Й. Микеш[2], С. Формелла[3]

---

[1] *Hinterleitner.I@fce.vutbr.cz*, Brno University of Technology
[2] *Josef.Mikes@upol.cz*, Palacky University of Olomouc
[3] *Stanislaw.Formella@zut.edu.pl*, Szczecin University of Technology

П. А. Широков изучал геодезические отображения (*ГО*). Его методы нашли развитие в работах казанских ученых А. З. Петрова, А. П. Широкова, А. В. Аминовой и др. В 1961г. А. З. Петров, а затем с И. В. Голиковым, начал изучать *ГО* 4-мерных пространств Эйнштейна (*ПЭ*), см. [1], а также [2].

Й. Микеш [3] установил, что *ПЭ* допускает нетривиальное *ГО* только на *ПЭ* и при этом доказано, что в *ПЭ* существует проективное преобразование, найдены основные уравнения.

Используя [3], в [4] доказано, что четырехмерные *ПЭ* (непостоянной кривизны) не допускают нетривиальные *ГО* и С. Формелла и Й. Микеш [9] нашли все метрики *ПЭ*, допускающие *ГО*. См. также, например, [1–12].

Эти результаты были получены в предположении, что метрики пространств имеют класс дифференцируемости C^3. Глобальность этих и многих других результатов тривиально вытекает из работы [13], см. [12], где установлено, что в *ПЭ* всегда существует координатная система, в которой компоненты метрического тензора реальные аналитические функции.

Нами доказано, что выше приведенные результаты справедливы, когда при *ГО* метрика *ПЭ* имеет класс C^3 и ему соответствующее пространство – класс C^1. Тогда существует общая по *ГО* отображению система координат, в которой соответствующие Эйнштейновы метрики аналитичны.

Литература

[1] Петров А. З. *Новые методы в теориии относительности.* – М.: Наука, 1966.

[2] Mikeš J. at al. *Differential geometry of special mappings.* – Olomouc: Palacky University Press. – 2015. – 566 p.

[3] Микеш Й. *О геодезических отображениях пространств Эйнштейна* // Матем. заметки. – 1980. – Т. 28. – С. 935–938.

[4] Микеш Й., Киосак В. А. *О геодезических отображениях четырехмерных пространств Эйнштейна* // Одесск. ун-т. Деп. в ВИНИТИ. – 1982. – 9.4.82. – № 1678-82. – С. 19.

[5] Formella S. *Geodätische Abbildungen der Riemannschen Mannigfaltigkeiten auf Einsteinsche Mannigfaltigkeiten* // Tensor. – 1982. – Vol. 39. – P. 141–147. 3, 1994. – C. 13–17.

[6] Mikeš J. *Geodesic mappings of special Riemannian spaces* // Coll. Math. Soc. J. Bolyai. – 1984. – Vol. 46. – P. 793–813.

[7] Formella S. *On geodesic mappings in Einstein manifolds* // Coll. Math. Soc. J. Bolyai. – 1984. – Vol. 46. – P. 483–492.

[8] Formella S. *Geodesic mappings between Einstein manifolds* // Pr. Nauk. Politech. Szczec. – 1987. – Vol. 323. – № 9. – P. 41–47.

[9] Formella S., Mikeš J. *Geodesic mappings of Einstein spaces* // Ann. Sci. Stetinenses. – 1994. – № 9. – P. 31–40.

[10] Mikeš J., Hinterleitner I., Kiosak V. *On the theory of geodesic mappings of Einstein spaces and their generalizations* // AIP Conf. Proc. – 2006. – Vol. 861. – P. 428–435.

[11] Hinterleitner I., Mikeš J. *Geodesic mappings and Einstein spaces* // Trends in Mathematics. – 2013. – Vol. 19. – P. 331–335.

[12] Бессе А. *Многообразия Эйнштейна.* – М.: Мир, 1990.

[13] DeTurck D. M., Kazdan J. L. *Some regularity theorems in Riemannian geometry* // Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. – 1981. – Vol. 14. – № 3. – P. 249–260.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА В АНИЗОТРОПНОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

Ю. А. Гладышев[1], В. В. Калманович

---

[1] *v572264@yandex.ru*, Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского

Пусть многослойная пластина имеет прямоугольную форму. Слои ограничены параллельными плоскостями и имеют различные свойства. Направим ось x нормально к плоскости слоев, а оси y, z вдоль плоскости слоев. Точки x_i, $i = \overline{1, n+1}$, определяют границы между слоями, x_1 и x_{n+1} – внешние границы системы. Слои нумеруем по меньшей координате. Размеры пластины по осям x, y, z соответственно a, b, c.

Потенциал стационарного процесса переноса $\Phi^{(i)}(x)$ в i-м слое определен уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1^{(i)}\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_2^{(i)}\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_3^{(i)}\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial z}\right)=0. \tag{1}$$

На границах между слоями предполагаем условия идеального контакта, т.е. непрерывность потенциала и потока

$$\Phi^{(i)}|_{x_i}=\Phi^{(i+1)}|_{x_{i+1}},\ J^{(i)}|_{x_i}=J^{(i+1)}|_{x_{i+1}},$$

где $J^{(i)} = -\lambda_1^{(i)} \frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial x}$.

Поставим краевую задачу, когда задано распределение потенциала на гранях

$$\Phi^{(i)}|_{x_1} = f_1(y,z),\ \Phi^{(n)}|_{x_{n+1}} = f_2(y,z).$$

Пусть система по боковым граням полностью изолирована, т.е. $J_y = J_z = 0$. Поставленная граничная задача имеет единственное решение в избранном классе функций.

Решим задачу традиционным методом Фурье, применяя аппарат K-матрицы [1, 2]. Будем искать частные решения в виде:

$$\Phi^{(i)}(x,y,z) = g^{(i)}(x)h(y,z) = g^{(i)} \cos\frac{\pi k y}{b} \cos\frac{\pi l z}{c},\ k,l = 0,1,2,\ldots$$

Функция $g^{(i)}(x)$, согласно (1), определяется уравнением вида

$$\lambda_1^{(i)} \frac{d^2 g^{(i)}}{dx^2} - \pi^2 \left(\frac{k^2 \lambda_2^{(i)}}{b^2} + \frac{l^2 \lambda_3^{(i)}}{c^2} \right) g^{(i)} = 0. \tag{2}$$

Решение (2) удовлетворяет условию адиабатической изоляции на боковых гранях. В силу независимости $h(y,z)$ от слоя, условия согласования примут вид

$$\lambda^{(i)} \frac{dg^{(i)}}{dx} = \lambda^{(i+1)} \frac{dg^{(i+1)}}{dx},\ i = \overline{1,n-1}.$$

Разложим функции $f_1(y,z)$, $f_2(y,z)$ в ряд

$$f_s(y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{skl} \cos\frac{\pi k y}{b} \cos\frac{\pi l z}{c},\ s = 1,2.$$

Далее методом K-матрицы ищем решение (2), удовлетворяющее условиям $g^{(1)}(x,k,l)|_{x_1} = a_{1kl}$, $g^{(n)}(x,k,l)|_{x_{n+1}} = a_{2kl}$.

Литература

[1] Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Степович М. А. *Приложение методов аппарата Берса к задачам процессов переноса в многослойной среде* // Вестник Калужского университета. 2015. – № 3 (28). – С. 5-10.

[2] Калманович В. В., Степович М. А. *О методе расчета задачи переноса в многослойной среде при наличии распределенных источников* // Материалы Международной научной конференции “Теория приближений функций и родственные задачи анализа”, посвященной памяти доктора физико-математических наук, профессора П. П. Коровкина. – Калуга: Издательство КГУ им. К. Э. Циолковского, 2015. – С. 44-45.

ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ НЕКОТОРЫХ РАССЛОЕННЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Т. А. Гончар[1], Е. И. Яковлев[2]

[1] *gonchar.t.a@yandex.ru*, Нижегородский государственный университет
[2] *evgeniy.yakovlev@itmm.unn.ru*, Нижегородский государственный университет

Пусть $\xi = (E, p, B, G)$ – гладкое главное расслоение с проекцией $p : E \to B$ и структурной группой G, на тотальном пространстве E задана риманова метрика g, инвариантная относительно правого действия группы G. Векторы, ортогональные слоям расслоения, образуют G-связность H на E с формой связности ω и формой кривизны Ω.

Рассмотрим алгебру Ли $Alg(G)$ группы G и пространство $\mathscr{E}$ симметричных билинейных форм на $Alg(G)$. Заданные конструкции порождают риманову метрику h на базе B и отображение $\gamma : E \to \mathscr{E}$ такие, что $g(X, Y) = \gamma_v(\omega(X), \omega(X)) + h(dp(X), dp(Y))$ для всех $v \in E$ и $X, Y \in T_v E$. При этом $\gamma_{v\cdot a}(P, Q) = \gamma_v(ad(a)P, ad(a)Q)$ для любых $a \in G$ и $P, Q \in Alg(G)$. Форма γ_v определяет левоинвариантную риманову метрику $\hat{\gamma}_v$ на G.

В терминах описанных объектов для риманова многообразия (E, g) вычислены связность Леви-Чивита, операторы О'Нейла, а также секционные кривизны в некоторых направлениях. Установлены связи между геометрическими и топологическими свойствами расслоения.

В случае, когда группа G абелева, аналогичные задачи решались в [1] и [2].

Теорема 1. *Пусть g – полная риманова метрика, все секционные кривизны многообразия (E, g) неотрицательны и найдется точка, в которой они положительны. Тогда*

- *если группа G некомпактна, то многообразия B и G стягиваемы, а расслоение ξ тривиально;*
- *если группа G компактна, то многообразия E и B компактны, их фундаментальные группы $\pi_1(E)$ и $\pi_1(B)$ конечны и, если $\pi_1(G)$ – бесконечная группа, то расслоение ξ нетривиально.*

Пусть Λ – ядро гомоморфизма $\imath_* : \pi_1(G) \to \pi_1(E)$ из гомотопической последовательности расслоения ξ и $\lambda : \hat{G} \to G$ – регулярное накрытие с инвариантом Λ. Тогда имеется главное расслоение $\hat{\xi} = (\hat{E}, \hat{p}, \hat{B}, \hat{G})$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\hat{E} \arrow[r, "\hat{p}"] \arrow[d, "\epsilon"] & \hat{B} \arrow[d, "\beta"] \\
E \arrow[r, "p"] & B,
\end{tikzcd}$$

где ϵ и β – универсальные накрытия.

Теорема 2. *Если (E, g) – полное риманово многообразие неположительной кривизны, то многообразия $\hat{B}$, $\hat{G}$ и $\hat{E}$ гомеоморфны арифметическим пространствам, $\Lambda = 0$ и расслоение $\hat{\xi}$ тривиально.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-01-00312а).

Литература

[1] Яковлев Е. И. *Секционные кривизны многообразий типа Калуцы-Клейна* // Известия вузов. Математика. – 1997. – №. 9. – С. 75–82.

[2] Яковлев Е. И. *Расслоения и геометрические структуры, ассоциированные с гироскопическими системами* // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2007. – Т. 22. – С. 100–126.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ФИЛЬТРАЦИИ ДВУХФАЗНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

А. А. Горинов[1], А. Г. Кушнер[2]

---

[1] *antong@t-human.com*, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
[2] *kushner@physics.msu.ru*, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

При моделировании процесса добычи нефти путем вытеснения ее водой возникает проблема управления границей раздела двух сред. Это связано с тем, что решения дифференциальных уравнений, описывающих задачу, имеют разрывы.

В докладе предлагается метод построения разрывных решений системы нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} s_t + A(s)B(s)qs_x = 0, \\ B_s(s)qs_x + B(s)q_x = 0, \end{cases}$$

описывающей процесс фильтрации двух несжимаемых несмешивающихся жидкостей [1,5].

Здесь t — время, x — пространственная координата, s — водонасыщенность, q — градиент давления. Начальные и граничные условия имеют вид:

$$\begin{array}{ll} s(0,x) = s_0(x), & q(0,x) = q_0(x), \\ s(t,0) = s^0(t), & q(t,0) = q^0(t). \end{array}$$

Метод основан на геометрическом представлении системы в терминах дифференциальных 2-форм

$$\begin{cases} \omega_1 = A(s)B(s)q\,dt \wedge ds + dx \wedge ds, \\ \omega_2 = B_s(s)q\,dt \wedge ds + B(s)\,dt \wedge dq \end{cases}$$

в пространстве $\mathbb{R}^4$ с координатами t, x, s, q (см. [4]).

Аналогичная задача при предположении о постоянном градиенте давления рассматривалась в работе [3].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 15-19-00275).

Литература

[1] Ахметзянов А. В., Кушнер А. Г., Лычагин В. В. *Управление фронтом вытеснения в двухфазной модели фильтрации несмешивающих жидкостей.* – ДАН. – 2016. (в печати).

[2] Горинов А. А., Кушнер А. Г. *Эволюция границ раздела двух сред в задачах нелинейной фильтрации* // Сборник тезисов докладов конференции “ Ломоносовские чтения – 2016” МГУ им. М. В. Ломоносова, 2016.

[3] Горинов А. А.*Многозначные решения двухмерного уравнения Эйлера в MAPLE //* Тезисы докладов международной конференции “Компьютерно-аналитические методы в теории управления и математической физике” (Сочи, 2013). Сочи: Издательство СГУ, 2013. С. 7-8.

[4] Kushner A. G., Lychagin V. V., Rubtsov V. N. *Contact geometry and nonlinear differential equations* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 101. – Cambridge: Cambridge University Press. – 2007. – xxii+496 p.

[5] Akhmetzianov A. V., Kushner A. G., Lychagin V. V. *Integrability of Buckley–Leverett’s Filtration Model* (Invited Paper) // Proc. of 8th IFAC Conference on Manufacturing Modelling, Management and Control (Submission number: 345) 28-20 June 2016, Troyes, France.

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА-БИЦАДЗЕ

Т. Ю. Горская[1], Р. Б. Салимов[2]

---

[1] *tatyana_gorskaya@mail.ru*, Казанский государственный архитектурно-строительный университет

[2] *salimov.rsb@gmail.com*, Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Пусть $u(x,y)$ – функция, удовлетворяющая уравнению смешанного типа Бицадзе-Лаврентьева

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sign} y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

в области $D = D_1 \cup D_2$ плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, состоящей из полукруга D_1: $|z - \frac{1}{2}| \leqslant \frac{1}{2}$, $y > 0$, с диаметром, соединяющим точки $A(0,0)$, $B(1,0)$, и треугольника D_2, стороны которого AC и BC являются отрезками характеристик уравнения (1), определяемых уравнениями соответственно $x + y = 0$ $(y \leqslant 0)$ и $x - y = 1$ $(y \leqslant 0)$. Так как $u(x,y)$ является гармонической в области D_1 функцией, для неё существует гармонически сопряженная функция $v(x,y)$ в указанной области. Для этих функций будем использовать также обозначения соответственно $u(z)$, $v(z)$. Обозначим через τ произвольную точку полуокружности l: $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, $y > 0$ части границы области D_1. Введем в рассмотрение функцию $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналитическую в области D_1.

Рассмотрим решение следующей краевой задачи для уравнения (1). Требуется найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (1) всюду в области D, исключая точки отрезка AB, непрерывную в области D и непрерывно продолжимую на границу области D, частные производные которой $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ непрерывны в области D, если для граничных значений этой функции выполняются условия

$$a(\tau)u(\tau) - b(\tau)v(\tau) = c(\tau),\; u|_{AC} = \psi(x), \tag{2}$$

где $a(\tau)$, $b(\tau)$, $c(\tau)$ – заданные на l действительные функции, удовлетворяющие условию Гёльдера всюду на l, включая концы, $a^2(\tau) + b^2(\tau) \neq 0$ всюду на l, $\psi(x)$ – заданная функция, обладающая непрерывной в интервале $[0, \frac{1}{2}]$ производной.

Начало изучению решений уравнений смешанного типа, аналогичных (1), было положено появившимися на свет в 20-е годы 20 века работами Ф. Трикоми, которые впоследствии стали частью его монографии [1] (с. 372-415). Изучению решения уравнения (1) посвящены статьи [2], [3], в которых постановка задачи отличается от используемой в настоящей работе. Обзор работ по решению уравнений смешанного типа дан в [4].

Поступая так же как в статьях [2], [3], для точек $\tau = x \in AB$ получаем условие вида (2), в котором $a(\tau) = 1$, $b(\tau) = -1$, $c(\tau) = 2\psi(\frac{\tau}{2})$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$.

Итак, для нахождения аналитической в области D_1 функции $w(z) = u(z) + iv(z)$ мы пришли к краевой задаче Гильберта с условием (2), заданным на всей границе этой области [5]. Из решения последней задачи находим искомую в области D_1 функцию $u(x,y)$. Далее, как и в [2], [3] определяется искомая в области D_2 функция $u(x,y)$. Рассмотрен также случай, когда индекс задачи Гильберта бесконечен.

Литература

[1] Трикоми Ф. *Лекции по уравнениям в частных производных.* – М.: Издательство иностранной литературы, 1957. – 443 с.

[2] Жегалов В. И. *Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих харкатеристиках и с разрывами на переходной линии.* Ученые записки Казанского университета. –1962. – Т. 122, кн. 3. –С. 3–16.

[3] Крикунов Ю. М. *О задаче Трикоми с производными в краевом условии.* Ученые записки Казанского университета. –1962. – Т. –122, кн. 3. С. 30–51.

[4] Жегалов В. И. *Об одном направлении в теории уравнений с частными производными.* Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2014. Т. 49. – С. 13–35.

[5] Мусхелишвили Н. И. *Сингулярные интегральные уравнения* – М.: Наука, 1968.

ГРАДИЕНТНЫЙ ВЗРЫВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

А. Д. Грехнева[1]

---

[1] *alice-prohorses@yandex.ru*, Российский Университет Дружбы Народов

Изучается эффект конечности времени существования решения задачи Коши для нелинейного уравнения Шредингера, гамильтониан которого содержит особенности типа сдвига пространственного аргумента. Рассмотрим задачу Коши

$$i\,\frac{du}{dt} = \mathbf{L}u(t),\ t>0; \qquad (1); \quad u(+0)=u_0;\ u_0 \in H \equiv L_2(R^d). \qquad (2)$$

в которой u_0 – заданная функция из гильбертова пространства$H = L_2(R^d)$ (либо $H = L_2(\Omega)$, где Ω – область или гладкое многообразие в пространствеR^d),u – искомое отображение промежутка [0,T) при некотором $T \in (0,+\infty]$ в пространство H, удовлетворяющее уравнению (1) и условию (2). Оператор **L** является нелинейным дифференциально-разностным оператором второго порядка эллиптического типа вида (1), заданным на подпространстве $X = W_2^1(R^d)\bigcap L_{p+2}(R^d)$ при некотором $p \in (0,+\infty)$.

Нелинейный оператор уравнения (1) определим равенством

$$\mathbf{L}u \equiv \Delta u + \mathbf{G}u, \qquad (3)$$

где при некотором $h \in R^d$ оператор **G** задан равенством

$$\mathbf{G}u = V(|u|^2)u + [f(|S_h u|^2 + |u|^2) + f(|u|^2 + |S_{-h}u|^2)]u.$$

Зададим $V(s) = s^{\frac{p}{2}},\ s \geqslant 0,\ |f(s)| \leqslant c|s|^{\frac{p}{2}},\ s \in R.$

Определение. *Функцию u будем называть H^l-решением задачи* (1), (2), (3) ($l \in \{0\}\bigcup\mathbf{N}$)*, если* $u \in C([0,T), H^l \bigcap L_{p+2}(\Omega))$ *и выполнено равенство*

$$u(t) = e^{-it\Delta}u_0 - i\int\limits_0^t e^{-i(t-s)\Delta}\mathbf{G}u(s)ds,\ t \in [0,T).$$

Теорема локального существования решения доказывается, как и в работе [1], методом сжимающих оторбажений.

Зададим функционалы в банаховом пространстве $X^l = H^l \bigcap L_{p+2}$:

$$E(u) = \int\limits_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{p+2}W(|u|^2) - F(|u_{\frac{h}{2}}|^2 + |u_{-\frac{h}{2}}|^2)\right]dx;$$

$$J(u) = \operatorname{Im}\int\limits_\Omega (\nabla u, x)\bar{u}dx.$$

Здесь $W(y) = \int\limits_0^y V(s)ds$ и $F(y) = \int\limits_0^y f(s)ds.$

Теорема. *Пусть* $p > 4$ *и начальная функция* $u_0 \in H^3(-l,l)$ *удовлетворяет условиям* $E(u_0) < 0$, $J(u_0) < 0$. *Тогда длина интервала существования* H^3*-решения задачи Коши* (1) – (2) *ограничена сверху величиной* $T_*(u_0)$. *Причем если* T^* *– точная верхняя грань существования* H^3*-решения, то выполняются равенства для пределов* $\lim\limits_{t\to T_*-0} \|u(t,\cdot)\|_{H^1} = +\infty$, $\lim\limits_{t\to T_*-0} \|u(t,\cdot)\|_{L_{p+2}} = +\infty$ *и* $\lim\limits_{t\to T_*-0} \|u(t,\cdot)\|_{L_\infty} = +\infty$.

Литература

[1] Сакбаев В. Ж. *Градиентный взрыв решений задачи Коши для уравнения Шрёдингера* // Тр. МИАН. – 2013. – Т. 283. – С. 171–187.

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ОБЕРТЫВАЮЩИЕ АЛГЕБРЫ РОТА—БАКСТЕРА ПРЕКОММУТАТИВНЫХ, ПРЕАССОЦИАТИВНЫХ И ПРЕЛИЕВЫХ АЛГЕБР

В. Ю. Губарев[1]

---

[1] *vsevolodgu@math.nsc.ru*, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет

Пусть A — алгебра многообразия Var. Линейный оператор R на A называется оператором Рота—Бакстера, если для любых $x, y \in A$ выполнено

$$R(x)R(y) = R(R(x)y + xR(y) + xy).$$

Алгебра A называется Var-алгеброй Рота—Бакстера.

Прелиевы алгебры были независимо введены Кожулем, Винбергом и Герштенхабером в 1960-х годах, такие алгебры задаются тождеством $(xy)z - x(yz) = (yx)z - y(xz)$. В 1990 и 2000-х годах Лодей определил прекоммутативные [1] и преассоциативные [2] алгебры. В [3] и [4] было дано эквивалентное друг другу определение пре-Var-алгебры для многообразия Var.

Агуиар в 2000 г. заметил [5], что ассоциативная алгебра Рота—Бакстера относительно новых операций $x \succ y = R(x)y$, $x \prec y = xR(y)$ будет преассоциативной алгеброй. В [3] это было распространено на произвольное многоообразие Var.

Теорема [6]. *Любая пре-*Var*-алгебра инъективно вкладывается в* Var*-алгебру Рота—Бакстера.*

В работе найден базис универсальной обёртывающей алгебры Рота—Бакстера коммутативных, ассоциативных и лиевых преалгебр. Для описания базиса в лиевом случае используется конструкция свободной лиевой алгебры Рота—Бакстера [7, 8].

Доказано, что пара многообразий (RBLie, preLie) является PBW-парой [9]. Доказана нешрайеровость многообразий коммутативных, ассоциативных и лиевых алгебр Рота—Бакстера.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 14-21-00065).

Литература

[1] Loday J.-L. *Cup-product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras* // Math. Scand. – 1995. – Vol. 77. – No 2. – P. 189–196.

[2] Loday J.-L. *Dialgebras, Dialgebras and related operads*. Berlin: Springer-Verl., 2001. – P. 1–61.

[3] Bai C., Bellier O., Guo L., Ni X. *Splitting of operations, Manin products, and Rota—Baxter operators* // Int. Math. Res. Not. IMRN. – 2013. – P. 485–524.

[4] Gubarev V. Yu., Kolesnikov P. S. *Operads of decorated trees and their duals* // Comment. Math. Univ. Carolin. – 2014. – Vol. 55. – No. 4. – P. 421–445.

[5] Aguiar M. *Pre-Poisson algebras* // Lett. Math. Phys. – 2000. – Vol. 54. – P. 263–277.

[6] Gubarev V., Kolesnikov P. *Embedding of dendriform algebras into Rota—Baxter algebras* // Cent. Eur. J. Math. – 2013. – Vol. 11. – No. 2. – P. 226–245.

[7] Губарев В. Ю. *Свободные лиевы алгебры Рота—Бакстера* // Сиб. матем. журн. – (на рассмотрении) 13 с.

[8] Gubarev V. Yu., Kolesnikov P. S. *Groebner—Shirshov basis of the universal enveloping Rota—Baxter algebra of a Lie algebra*, arXiv:1602.07409 [math.QA]. 16 p.

[9] Mikhalev A. A., Shestakov I. P. *PBW-pairs of varieties of linear algebras* // Communications in Algebra. –2014. – Vol. 42. – No. 2. – P. 667–687.

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ДВУХ НЕЛИНЕЙНО СВЯЗАННЫХ МАЯТНИКОВ

Е. В. Губина[1], С. О. Хрисанфова[2]

---

[1] *gubinael@mail.ru*, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

[2] *sveta.hri@mail.ru*, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В работе рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} \ddot{\phi}_1 + \lambda\dot{\phi}_1 + \beta\sin\phi_1 = \gamma_1 + d\sin(\phi_2 - \phi_1), \\ \ddot{\phi}_2 + \lambda\dot{\phi}_2 + \beta\sin\phi_2 = \gamma_2 + d\sin(\phi_1 - \phi_2), \end{cases}$$

описывающая динамику двух упруго связанных между собой математических маятников, находящихся под действием внешнего вращательного момента. Кроме стандартного приложения маятниковых систем в механике, системы связанных осциллирующих элементов позволяют описывать процессы в электрических цепях, в полупроводниковых структурах, в молекулярной биологии и др.

Предполагается, что колебания маятников происходят в сильно вязкой среде (коэффициент затухания $\lambda >> 1$), параметр d показывает величину связи между маятниками, параметры γ_1, γ_2 отражают действие вращательного момента на каждый из маятников, а коэффициент β является показателем асинхронности во вращении маятников.

В работе изучены периодический и квазипериодический режимы колебаний. Получена аналитическая оценка границы области синхронизации в плоскости (d, α), где α – параметр синхронизации. Эта оценка подтверждена путем прямого численного интегрирования системы. Построены бифуркационные диаграммы в плоскости (γ_1, γ_2), отвечающие различным режимам синхронизации. Показано влияние всех параметров на изменение площади области синхронизации.

Литература

[1] Матросов В. В. *Динамика двух фазоуправляемых генераторов с малоинерционными цепями управления, связанных через нелинейный элемент* // Изв. Вузов, Прикладная нелинейная динамика. – 2007. – Т. 15. – № 3. – С. 15–32.

[2] Osipov G., Kurths J., Zhou Ch. *Synchronizachion in Oscillatory Networks.* – Springer: Berlin, 1 edition. 2007. – 368 p.

ГИПОТЕЗА СТОКЕРА ВЕРНА ДЛЯ ШЕСТИВЕРШИННИКОВ

А. М. Гурин[1]

---

[1] *alexgu@yandex.ru*, Белгородский государственный университет

Гипотеза Стокера состоит в утверждении двойственном к лемме Коши для выпуклых многогранников, а именно: Пусть в трехмерном евклидовом пространстве даны два выпуклых изоморфных друг другу многогранника и двугранные углы при соответствующих по изометрии парах ребер многогранников равны между собой. Тогда и соответствующие по изометрии пары плоских углов многогранников равны друг другу.

Гипотеза Стокера была опубликована в 1968 году и до настоящего времени не имеет полного решения. Имеются частные решения [Каршер (1968), Милка (1971), Гурин (1981, 2012), Погорелов (2002)], которые получены при тех или иных дополнительных условиях. Автором данного сообщения предпринята попытка продолжить план Каршера доказательства гипотезы Стокера следуя алгоритму перечисления многогранников с данным числом граней. Реализуя этот путь доказательства, автор обнаружил, что возможно некоторое обобщение понятие ”комбинаторный тип многогранника” в виде создания множества графов-прообразов комбинаторных типов многогранников с заданным числом вершин, которые названы геометрологическим множеством.

Теорема. *Если представитель геометрологического множества имеет меньше семи вершин, то найдется его реализация в виде выпуклого многогранника, для которого гипотеза Стокера верна.*

МНОГОМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

А. К. Гуц[1]

---

[1] *aguts@mail.ru*, Омский государственный университет имени Ф.М. Достоевского

Памяти А.П. Широкова, подтвердившего
умение автора преподавать геометрию.

В современной теории пространства-времени и космологии широко используются многомерные (псевдо)римановы многообразия. При этом многомерие, т.е. размерность пространства-времени большая 4, как правило, постулируется, вводится априори и ее выбор определяется намерением получить желанные физические следствия. Например, 5-мерная теория Калуцы-Клейна обеспечивала одновременное описание гравитации и электромагнетизма.

Человеческая практика, физический опыт, однако, упорно указывают на 4 - мерность пространства-времени. Можно ли построить теорию, базирующуюся на постулате 4-мерности пространства-времени, и в рамках такой теории иметь возможность воспринимать при необходимости исходное 4-мерное пространство-время как $(4+k)$-мерное (псевдо)риманово многообразие, в котором разворачивается желанная физическая картина Реальности?

Ответ утвердительный, если базовую 4-мерную теорию пространства-времени излагать как теорию, основанную на интуиционистской логике [1]. Такой ответ неудивителен для тех, кто живет в Казани. Именно в Казани появилась воображаемая неевклидова геометрия Лобачевского, предваряющая теорию римановых многообразий, и воображаемая неаристотелева логика Васильева [2]. Н.А. Васильев отказался в свой логике и от закона исключенного третьего, что ведет к интуиционистской логике, и от закона (не)противоречия.

Переформулировка [1] общей теории относительности Эйнштейна (ОТО) в рамках синтетической геометрии Кока-Ловера [3] дает 4-мерное базовое пространство-время. Если при этом принять, что скорость света $c = c_0 + d$ и гравитационная постоянная Ньютона $G = G_0 + \delta$, где c_0, G_0 – классические их значения, а d, δ – так называемые инфинитозималы ($d^2 = 0, \delta^2 = 0$), то метрика g_{ik} $(i,k = 0,1,2,3)$ пространства-времени, являющаяся решением уравнений Эйнштейна, будет зависить от этих инфинитозималов. При интерпретации такой «воображаемой» ОТО в топосе $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{\mathbf{op}}}$ [1,4] метрика будет зависить от многомерного параметра a^A $(A = 1, ..., k)$. Другими словами, появляется $(4+k)$-мерное пространство-время с метрикой

$$dS^2 = h_A da^{A^2} + 2h_{iA} dx^i da^A + g_{ik}(x,a) dx^i dx^k,$$

в которое вложено классическое 4-мерное пространство-время.

Литература

[1] Гуц А. К. *Элементы теории времени.* – М.: УРСС, 2012. – 376 с.

[2] Васильев Н. А. *Воображаемая логика. Избранные труды.* – М.: Наука, 1989. – 284 с.

[3] Kock A. *Synthetic Differential Geometry.* – Cambridge University Press, 1981. – 241 p.

[4] Гуц А. К. *Физика реальности.* – Омск: Изд-во КАН, 2012. – 424 с.

О СУЩЕСТВОВАНИИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ НА ШЕСТИМЕРНОМ $\mathscr{G}_1$-МНОГООБРАЗИИ

Н. А. Даурцева[1]

---

[1] *natali0112@ngs.ru*, Кемеровский государственный университет

Пусть (M,g,J,ω) – 6-мерное почти эрмитово многообразие. Напомним, что в этом случае риманова метрика g инвариантна относительно почти комплексной структуры J:

$$g(J\cdot,J\cdot)=g(\cdot,\cdot),$$

а 2-форма ω однозначно определяется парой (g,J) по формуле

$$g(\cdot,\cdot)=\omega(\cdot,J\cdot) \tag{1}$$

Очевидно, что J положительно ассоциирована с 2-формой ω, т.е.

$$\omega(J\cdot,J\cdot)=\omega(\cdot,\cdot),\quad \omega(X,JX)>0,\text{ для всех } X\neq 0 \tag{2}$$

Для почти комплексной структуры существуют и другие инвариантные относительно нее метрики g_J, каждая из которых, в паре с почти комплексной структурой J по формуле (1) определяет 2-форму ω_J, удовлетворяющую условиям (2).

В работе [2] было доказано, что на строго приближенно келеровом 6-многообразии (M,g,J) почти комплексная структура J не может быть согласована с симплектической формой, даже локально. Далее мы будем использовать обозначения принятые в [1] для классификации почти эрмитовых многообразий. А именно, $\mathscr{K}$ обозначает класс келеровых многообразий, $\mathscr{W}_1$ – класс приближенно келеровых многообразий, $\mathscr{W}_2$ – класс почти келеровых, $\mathscr{W}_3$ – класс эрмитовых полу-келеровых многообразий и $\mathscr{W}_4$ – класс, содержащий локально конформно келеровы многообразия. В этих обозначениях результат [2] говорит о том, что если $(M,g,J)\in\mathscr{W}_1$ и $(M,g,J)\notin\mathscr{K}$, то $(M,g_J,J)\notin\mathscr{W}_2$ для любой римановой метрики g_J, инвариантной относительно J.

В докладе представлен более сильный результат.

Теорема. *Если $(M,g,J)\in\mathscr{W}_1\oplus\mathscr{W}_3\oplus\mathscr{W}_4$, и почти комплексная структура J не интегрируема, то для любой римановой метрики g_J, инвариантной относительно J, почти эрмитово многообразие $(M,g_J,J)\notin\mathscr{W}_2$.*

Работа поддержана грантом Президента РФ по поддержке научных школ, проект НШ-4382.2014.1

Литература

[1] Gray A., Hervella L. M. *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants//* Ann. Mat. Pura Appl. – 1980. –V. 123. –P. 35–58.

[2] Lejmi M. *Strictly Nearly Kähler 6-manifolds are not compatible with symmetric forms//* Comp. Rend. Math. Acad. Sci. Paris. –2006. –Ser.I. –V. 343. –P. 759–762.

ВЫЧИСЛЕНИЕ НОД В ЗАДАЧЕ ПОИСКА ПСЕВДОПРОСТЫХ И СИЛЬНО ПСЕВДОПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Д. А. Долгов[1]

---

[1] *Dolgov.kfu@gmail.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

В данной статье рассказывается об использовании рекурентных последовательностей при вычислении НОД. Это можно применить для вычисления псевдопростых и сильно псевдопростых чисел (см. [1]).

Возьмём k последних бит в каждом из чисел. Построим линейную аппроксимацию между полученными k-битными числами u_k, $v_k : (\alpha_k * u_k + \beta_k * v_k)/2^s$, для этого необходимо найти соответствующие коэффициенты α, β. Коэффициенты α, β вычисляются заранее в ходе фазы предвычисления. Эта фаза начинается с построения последовательности C_i:

$$C_i = (A_i - B_i)/2^{s_i}, A_i = B_{i-1}, B_i = C_{i-1}, \tag{1}$$

где $A_1 = max(u_k, v_k), B_1 = min(u_k, v_k)$, u_k и v_k - k наименее значащих бит чисел u,v. На каждом шаге мы находим s_i, которое является максимальной степенью двойки, так что $C_i > 0$. Условие выхода: $C_i = 0$ или $C_i < 0$.
После этого находим α, β, находим линейную аппроксимацию, но уже над исходными числами. Данное преобразование сохраняет НОД, уменьшая порядок числа.

$$C_i = \frac{1}{\prod_{k=1}^{i} 2^{s_k}}((-1)^i * \beta_i * B_1 + (-1)^{i+1} * \alpha_i * A_1) \tag{2}$$

Формулы для вычисления α, β имеют рекурсивный вид:

$$\alpha_i = \alpha_{i-2} * 2^{s_{i-1}} + \alpha_{i-1},\ i > 3, \tag{3}$$

$$\beta_i = \beta_{i-2} * 2^{s_{i-1}} + \beta_{i-1},\ i > 2. \tag{4}$$

По умолчанию $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 2^{s_2} + 1, \beta_1 = 1,\ \beta_2 = 2^{s_1} + 1$.

В ходе линейной аппроксимации уменьшается длина числа, при этом накапливаются дополнительные небольшие простые множители. Поэтому после получения конечного результата необходимо ещё раз выполнить НОД: d=$GCD(GCD(A_n, B_n), B_n)$.

При использовании данного преобразования модифицированный алгоритм Евклида работает быстрее оригинального на числах длины больше 600 бит, имеет меньшее число операций.

Литература

[1] Ishmukhametov S., Mochalov A., Mubarakov B.. *Euclidean algoritm for recurrent sequences.* // Applied Discrete Mathematics and Heuristic Algorithms, International Scientific Journal, Samara, SamGU, Vol. 1, No. 2, 2015, p. 57–62

Название/Размер числа	600 bit	800 bit	1000 bit	10000 bit
Euclid	57	92	153	3618
New GCD	61	87	135	3408

Таблица 1: Время выполнения

[2] Sorenson J. *The k-ary GCD Algorithm* // University of Wisconsin-Madison. Techn. Report. — 1990. — P. 1–20.

[3] Sorenson J.*Two fast GCD Algorithms* // J. Alg., 1994. — 16. — N1. — P. 110–144.

О ГЕОМЕТРИИ СЛОЕНИЙ С ТРАНСВЕРСАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

А. Ю. Долгоносова[1]

---

[1] *annadolgonosova@gmail.com*, Национальный исследовательский университет, “Высшая школа экономики”

Объектом исследования являются слоения произвольной коразмерности q на n-мерных многообразиях, допускающие в качестве трансверсальной структуры линейную связность, называемые слоениями с трансверсальной линейной связностью. Изучению топологии и геометрии данного класса слоений посвящены работы П. Молино, Ф. Камбера и Ф. Тондеура, И.В. Белько и других авторов. Слоения с трансверсальной линейной связностью включают в себя псевдоримановы, лоренцевы и римановы слоения.

Напомним, что LF-пространством называется индуктивный предел пространств Фреше. Доказано, что в категории слоений группа автоморфизмов произвольного слоения с трансверсальной линейной связностью является бесконечно мерной группой Ли, моделируемой на LF-пространствах [1]. Этот результат обобщает соответствующую теорему Масиас-Виргоса и Санмартина Карбона для римановых слоений.

Для q-мернго распределения $\mathfrak{M}$, трансверсального к слоению (M,F), на многообразии M построена специальная, трансверсально проектируемая линейная связность $\nabla^{\mathfrak{M}}$, относительно которой оба распределения $\mathfrak{M}$ и TF являются вполне геодезическими.

Доказана эквивалентность различных подходов к понятию полноты слоений с трансверсальной линейной связностью [2].

Для слоения (M,F) на псевдоримановом многообразии (M,g), метрика на слоях которого не вырождается, доказано, что (M,F) псевдориманово тогда и только тогда, когда геодезическая, ортогональная слою в одной точке, остается ортогональной слоению в любой своей точке. Отсюда вытекает известное утверждение Б. Рейнхарта для слоений на собственно римановых многообразиях, доказанное им другим способом, не применимым для псевдоримановых многообразий.

Исследуется структура графиков $G(F)$ слоений (M,F) с трансверсальной линейной связностью и индуцированных на них слоений $\mathbb{F} := \{\mathbb{L}_\alpha = p_1^{-1}(L_\alpha)\,|\,L_\alpha \in F\}$. Показано, что график $G(F)$ является хаусдорфовым $(2n-q)$-мерным многообразием, а специальная линейная связность $\nabla^{\mathfrak{M}}$ индуцирует линейную связность $\nabla^{\mathfrak{N}}$ на $G(F)$, относительно которой $(G(F),\mathbb{F})$ является вполне геодезическим слоением с трансверсальной линейной связностью, а его слои — приводимыми многообразиями аффинной связности. Дано описание структуры слоев этого слоения.

Построены примеры.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2016 году, проект № 98.

Выражаю благодарность Н.И. Жуковой за руководство данной работой.

Литература

[1] Zhukova N. I., Dolgonosova A. Yu. *The automorphism groups of foliations with transverse linear connection* // Cent. Eur. J. Math. 2013. – V. 11. – № 12. – P. 2076–2088.

[2] Долгоносова А. Ю., Жукова Н. И. *Эквивалентные подходы к понятию полноты слоений с трансверсальной линейной связностью* // Журнал СВМО. – 2015. – V. 4. – С. 14–23.

КОЛЧАНЫ С СООТНОШЕНИЯМИ КОНЕЧНОЙ ГОМОЛОГИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Д. В. Дубнов[1]

---

[1] *ddubnov@yandex.ru*, Московский технический университет связи и информатики

Колчаны с соотношениями конечной гомологической размерности играют важную роль в теории представлений конечномерных алгебр. Важным примером алгебр колчанов с соотношениями конечной гомологической размерности являются наследственные алгебры и их обобщение — квазинаследственные алгебры. Как выяснили Длаб и Рингель [1], производная категория модулей над квазинаследственной алгеброй порождена исключительным набором, гомологическая размерность квазинаследственной алгебры не превосходит $2n-2$, где n — число вершин. Всякая алгебра гомологической размерности 2 является квазинаследственной.

Принадлежащая автору конструкция композиции колчанов с соотношениями [2] позволяет получать колчаны с соотношениями сколь угодно большой гомологической размерности уже для 2-х вершин.

Пусть A, B — алгебры колчанов с соотношениеми над полем k с изоморфной полупростой частью C, то есть $A = C \oplus J(A)$, $B = C \oplus J(B)$, $C = k^n = ke_1 \oplus \ldots \oplus ke_n$. Радикал Джекобсона алгебры A (аналогично B) разлагается в сумму векторных пространств $J(A) = C \oplus A_{ij}$, где $A_{ij} = p_i J(A) p_j$. Композицией $A \circ_C B$ алгебр A и B называется векторное пространство $A \otimes_C B = C \oplus J(A) \oplus J(B) \oplus \bigoplus_{i,j,k=1,\ldots n} A_{i,j} \otimes B_{j,k}$ с полупростой частью C и умножением в радикале

$$a_{ij} b_{kl} = \delta_{jk} a_{ij} \otimes b_{kl}, \qquad b_{kl} a_{ij} = 0, \qquad a_{ij} \in A, \quad b_{kl} \in B.$$

Гомологическая размерность алгебры $A \circ_C B$ не превосходит суммы гомологических размерностей алгебр A и B.

Ограничения на гомологическую размерность колчана с соотношениями возникают в случае, если ограниченная производная категория его представлений порождена исключительным набором — семейством объектов $\{E_i | i = 1, \ldots, n\}$, в котором $End(E_i) = k$ и $Ext^k(E_i, E_j) = 0$ при $i \geqslant j$ (n — это число вершин колчана с соотношениями; исключительный набор, порождающий производную категорию, называется полным). Автором было доказано, что при $n = 2$ алгебры колчанов с соотношениями с полным исключительным набором (т.е. исключительной парой) имеют гомологическую размерность не больше 3, и описаны все такие алгебры. При этом алгебры гомологической размерности 3 производно эквивалентны алгебрам гомологической размерности 2 [3].

Литература

[1] Dlab V., Ringel C M, *Quazi-Hereditary algebras*// Illinois. J. of Math. –1989. –V. 33. –№2. – P. 280-291.

[2] Дубнов Д. В., *О базисных алгебрах конечной гомологической размерности*// Вестник Моск. Ун-та, сер. 1, математика, механика. –1997. –No 2, –С. 15-17.

[3] Дубнов Д. В., *Представления конечномерных ассоциативных алгебр.* Диссертация кандидата физ.-мат. наук. Москва, –2000.

О ФИНИТНОЙ НЕАППРОКСИМИРУЕМОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В СВОБОДНЫХ ГРУППАХ, РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕИЗВЕСТНЫХ

В. Г. Дурнев[1], О. В. Зеткина[2], А. И. Зеткина

---

[1] *durnev@uniyar.ac.ru*, Ярославский государственный университет

[2] *oks_68@mail.ru*, Ярославский государственный университет

Обозначим через F_n свободную группу ранга n со свободными образующими a_1, ..., a_n. Хорошо известно, что свободная группа F_n является финитно аппроксимируемой [1]. А. И. Мальцев [2] указал на важность изучения свойств финитной аппроксимируемости групп относительно различных предикатов. Г. Баумслаг [3] установил финитную аппроксимируемость свободных групп относительно сопряженности и возможности извлечения корня простой степени, т.е. относительно разрешимости уравнений вида $x^{-1}hx = g$ и $x^p = g$, где h и g — элементы свободной группы. В работе [4] отмечается финитная аппроксимируемость свободных групп относительно разрешимости уравнений вида $[x, y] = g$ и $x^n = g$. В этой же работе построено уравнение вида $w(x_1, \ldots, x_4, a_1, a_2) = 1$ такое, что оно не имеет решения в свободной группе F_2 со свободными образующими a_1 и a_2, но уравнение $w(x_1, \ldots, x_4, \overline{a_1}, \overline{a_2}) = 1$ имеет решение в любой конечной факторгруппе F_2/N, где $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ — образы в факторгруппе F_2/N при естественном гомоморфизме свободных образующих a_1 и a_2 группы F_2.

В настоящей заметке усиливается этот результат, что составляет содержание следующей теоремы.

Теорема. *При любом* $n \geqslant 2$ *и любых неотрицательных* m, p *и* q *уравнение*

$$((x^2u)^{2+p}(z^{-1}y^2vz)^{2+q}t^{2m+3})^4[u,v] = [a_1, a_2]$$

не имеет решения в свободной группе F_n*, однако уравнение*

$$((x^2u)^{2+p}(z^{-1}y^2vz)^{2+q}t^{2m+3})^4[u,v] = [\overline{a_1}, \overline{a_2}]$$

имеет решение в любой конечной факторгруппе F_n/N*, где через* $\overline{a_1}$ *и* $\overline{a_2}$ *обозначены образы свободных образующих* a_1 *и* a_2 *свободной группы* F_n *относительно ее естественного гомоморфизма на факторгруппу* F_n/N.

Построенное в теореме уравнение имеет вид $w(x_1,\ldots,x_6) = g$, где g — элемент g длины 4. Можно показать, что дальнейшее уменьшение длины элемента g невозможно: для уравнений с любым числом неизвестных вида $w(x_1,\ldots,x_m) = g$, в произвольной свободной группе F_n, где элемент g свободной группы F_n имеет длину меньше 4, имеет место финитная аппроксимируемость. Открытым остается вопрос для уравнений, разрешенных относительно неизвестных, с числом неизвестных 2, 3, 4 и 5.

Литература

[1] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. *Основы теории групп.* – М: Наука, 1982. – 288 с.

[2] Мальцев А. И. *О гомоморфизмах на конечные группы* // Ученые записки Ивановского пед. ин-та. – Иваново, 1958. – Т. 18. – С. 49–60.

[3] Baumslag G. *Residual nilpotency and relations in free groups* // J. of Algebra. – 1965. – Vol. 2. – P. 271–282.

[4] Coulbois T., Khelif A. *Equations in free groups are not finitely approximable* // Proceedings of the American mathematical society. – 1999. – Volume 127. –№4. – P. 963–965.

ОБ УРАВНЕНИЯХ И НЕРАВЕНСТВАХ В СЛОВАХ И ДЛИНАХ

В. Г. Дурнев[1], О. В. Зеткина, А. И. Зеткина

---

[1] *durnev@uniyar.ac.ru*, Ярославский государственный университет

Обозначим через Π_m свободную полугруппу с пустым словом в качестве нейтрального элемента ранга m со свободными образующими a_1, ..., a_m (вместо a_1 и a_2 будем, как обычно, писать a и b соответственно), а через $X = \{x_1,\ldots,x_n,\ldots\}$ – алфавит неизвестных.

Г. С. Маканин [1] построил алгоритм, позволяющий для произвольной системы уравнений в словах

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i = u_i, \tag{1}$$

где w_i и u_i $(i = 1,\dots,k)$ – слова в алфавите $\{a_1,\dots,a_m\} \cup X$, определить, имеет ли она решение в полугруппе Π_m.

В настоящее время остается открытым известный уже почти полвека вопрос об алгоритмической разрешимости проблемы совместности для систем уравнений в словах и длинах, т.е. систем вида

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i = u_i \;\&\; \mathop{\&}_{\{i,j\}\in A} |x_i| = |x_j|. \tag{2}$$

Системы вида (2) с дополнительными условиями рассматривались, например, в работах [2]–[4].

V. Diekert предложил изучать в свободных полугруппах системы неравенств вида

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i(x_1,\dots,x_n,a_1,\dots,a_m) \leqslant u_i(x_1,\dots,x_n,a_1,\dots,a_m), \tag{3}$$

где для слов w и u в алфавите образующих свободной полугруппы запись $w \leqslant u$ означает, что *последовательность букв w является подпоследовательностью букв u*, т. е. существуют такие число $n \leqslant |w|$ и слова w_1, ..., w_n, u_1, ..., u_n, u_{n+1}, что

$$w = w_1 \dots w_n, \quad u = u_1 w_1 u_2 \dots u_n w_n u_{n+1},$$

рассматривая их как обобщение систем уравнений (1), так как $w = u$ тогда и только тогда, когда $w \leqslant u \,\&\, u \leqslant w$.

Отношение $w \leqslant u$ является отношением частичного порядка на полугруппе Π_m, т.е. оно транзитивно и антисимметрично. Это еще один довод для обоснования естественности рассмотрения систем неравенств вида (3).

Вопрос об алгоритмической разрешимости проблемы совместности для систем неравенств (3) в настоящее время открыт. Но если к отношению $w \leqslant u$ добавить предикат равенства длин, то получим алгоритмически неразрешимую задачу.

Теорема *Невозможен алгоритм, позволяющий для произвольной системы неравенств вида*

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i \leqslant u_i \;\&\; \mathop{\&}_{\{i,j\}\in A} |x_i| = |x_j|$$

определить, имеет ли она решение.

Заметим, что $\exists$-теория отношения равенства = на полугруппе Π_m алгоритмически разрешима. Это следует из фундаментальной теоремы Г. С. Маканина [1], так как отрицание равенства из формул можно удалить с помощью позитивной $\exists$-формулы.

В то же время $\exists$-теория отношения частичного порядка $\leqslant$ на полугруппе Π_2 алгоритмически неразрешима. Это доказывается по той же схеме, что и приведенная выше теорема.

Литература

[1] Маканин, Г. С. *Проблема разрешимости уравнений в свободной полугруппе* // Математический сборник. – 1977. – Т. 103(145), No. 2(6). – С. 147–236.

[2] Дурнев, В. Г. *Об уравнениях на свободных полугруппах и группах* // Математические заметки. – 1974. – Т. 16, No. 5. – С. 717–724.

[3] Косовский Н. К. *Некоторые свойства решений уравнений в свободной полугруппе* // Записки научных семинаров Ленинградского отделения Математического института АН СССР. Ленинград, 1972. – Т. 32. – С. 21–28.

[4] Косовский Н. К. *О решении систем, состоящих одновременно из уравнений в словах и неравенств в длинах слов* // Записки научных семинаров Ленинградского отделения Математического института АН СССР. – Ленинград, 1973. – Т. 33. – С. 24–29.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА НА ПЛОСКОСТИ

А. А. Дуюнова[1], В. В. Лычагин[2], С. Н. Тычков[3]

---

[1] *duyunova_anna@mail.ru*, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН

[2] *valentin.lychagin@uit.no*, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН

[3] *sergey.lab06@gmail.com*, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН

Рассмотрим уравнения движения идеальной жидкости [1] на плоскости

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y + \dfrac{p_x}{\rho} = 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + \dfrac{p_y}{\rho} = 0, \\ \rho_t + u\rho_x + v\rho_y + \rho\left(u_x + v_y\right) = 0, \\ T\left(s_t + us_x + vs_y\right) - \dfrac{k}{\rho}\left(T_{xx} + T_{yy}\right) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $(u(t,x,y), v(t,x,y))$ — поле скоростей жидкости, $\rho(t,x,y)$ — плотность жидкости, $s(t,x,y)$ — энтропия на единицу массы, $p(t,x,y)$ — давление, $T(t,x,y)$ — температура и k — коэффициент теплопроводности, который считается постоянным.

Система (1) недоопределена, поэтому необходимы дополнительные два уравнения, например, уравнения термодинамического состояния

$$\begin{cases} F(p,\rho,s,T) = 0, \\ G(p,\rho,s,T) = 0, \end{cases}$$

Теорема 1. *Алгебра симметрий системы уравнений состоит из векторных полей*

$$X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = \partial_y, \qquad X_3 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v,$$
$$X_4 = t\partial_x + \partial_u, \qquad X_5 = t\partial_y + \partial_v, \qquad X_6 = \partial_t$$

и линейных комбинаций векторных полей

$$\begin{aligned}&X_7=\partial_s, \quad X_8=\partial_p, \quad X_9=T\partial_T,\\&X_{10}=t\partial_t+x\partial_x+y\partial_y-s\partial_s,\\&X_{11}=t\partial_t-u\partial_u-v\partial_v-2p\partial_p+s\partial_s,\\&X_{12}=p\partial_p+\rho\partial_\rho-s\partial_s\end{aligned}$$

при условии, что эти линейные комбинации сохраняют термодинамические состояния.

Теорема 2. *Поле дифференциальных инвариантов решений системы относительно алгебры Ли, заданной векторными полями $X_1,\dots,X_6$, порождается инвариантами*

$$\begin{aligned}&J_1^0=\rho, \quad J_1^1=u_x+v_y, \quad J_5^1=\rho_x s_y-\rho_y s_x,\\&J_1^0=s, \quad J_2^1=u_y-v_x, \quad J_6^1=s_t+s_x u+s_y v,\\&J_3^1=\rho_x^2+\rho_y^2, \quad J_7^1=\rho_x(\rho_x u_x+\rho_y u_y)+\rho_y(\rho_x v_x+\rho_y v_y),\\&J_4^1=s_x^2+s_y^2, \quad J_8^1=s_x(\rho_x u_x+\rho_y u_y)+s_y(\rho_x v_x+\rho_y v_y)\end{aligned}$$

и тремя независимыми инвариантными дифференцированиями

$$\nabla_1=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}, \quad \nabla_2=\rho_x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\rho_y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}, \quad \nabla_3=s_x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+s_y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y},$$

если $\rho_x s_y-\rho_y s_x\neq 0$.

Литература

[1] Ландау Л., Лифшиц Е. *Теоретическая физика. Гидродинамика* 3-е изд., испр. –М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. - 736 с. (т. VI)

[2] Kruglikov B., Lychagin V. *Global Lie-Tresse theorem*. ArXiv:1111.5480v2 [math.DG], 2013.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ СЛОЕНИЙ ИЗ ОКРУЖНОСТЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

А. А. Дуюнова[1]

Рассматривается задача классификации слоений из окружностей относительно действия конформной группы на плоскости. Такие слоения задаются линиями уровня функции $z=v(x,y)$.

Теорема 1. *Функция, задающая слоения из окружностей на плоскости, удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\varphi_{xx}-2\varphi_{xy}\tan\varphi+\varphi_{yy}\tan^2\varphi-\left(\varphi_x\tan\varphi+\varphi_y\right)\left(\varphi_x-\varphi_y\tan\varphi\right)=0, \qquad (1)$$

---

[1] *duyunova_anna@mail.ru*, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН

где функция

$$\varphi = \arctan \frac{v_x}{v_y}$$

— это угол между осью абцисс и касательными к линиям уровня.

Теорема 2. *1. Алгебра Ли преобразований плоскости, сохраняющих слоения из окружностей, совпадает с алгеброй Ли* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$*, рассмотренной как вещественная алгебра Ли группы преобразований Мёбиуса* $SL_2(\mathbb{C})$*.*

2. Уравнение (1) имеет четыре дополнительные симметрии:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \sin\varphi\,\partial_x + \cos\varphi\,\partial_y,\\
X_2 &= y\sin\varphi\,\partial_x + y\cos\varphi\,\partial_y + \sin\varphi\,\partial_\varphi,\\
X_3 &= x\sin\varphi\,\partial_x + x\cos\varphi\,\partial_y - \cos\varphi\,\partial_\varphi,\\
X_4 &= \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)\left(\sin\varphi\,\partial_x + \cos\varphi\,\partial_y\right) - (x\cos\varphi - y\sin\varphi)\partial_\varphi.
\end{aligned}$$

Теорема 3. *Поле рациональных инвариантов Мёбиуса порождается инвариантом второго порядка*

$$J = \frac{\varphi_{xx} + \varphi_{yy}}{2\tan\varphi\left(\varphi_{yy} + \varphi_x\varphi_y\right) - \varphi_x^2 - 2\varphi_{xy} + \varphi_y^2}$$

и инвариантными дифференцированиями

$$\nabla_1 = k\frac{d}{dx} - k\tan\varphi\frac{d}{dy}, \qquad \nabla_2 = k\tan\varphi\frac{d}{dx} + k\frac{d}{dy},$$

где k *— рациональная функция на пространстве джетов 3 порядка. Это поле разделяет регулярные орбиты.*

Литература

[1] Blaschke W., Bol G., *Geometrie der Gewebe.* Topologische Fragen der Differentialgeometrie. Grundlehren Math. Wiss, 49, J. Springer, Berlin, 1938. viii+339 pp.

[2] Kruglikov B., Lychagin V., *Global Lie-Tresse theorem.* ArXiv:1111.5480v2 [math.DG], 2013.

РАВЕНСТВО ЕМКОСТИ И МОДУЛЯ КОНДЕНСАТОРА В СУБФИНСЛЕРОВЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ю. В. Дымченко[1]

---

[1] *dymch@mail.ru*, Дальневосточный федеральный университет

Равенство емкости и модуля конденсатора имеет важное значение в геометрической теории функций. Оно позволяет связать теоретико-функциональные и геометрические свойства множеств. Для конформных емкостей и модулей на плоскости равенство было доказано Л. Альфорсом и А. Бёрлингом в работе [1]. В случае евклидовой метрики равенство емкости и модуля в самых общих предположениях было доказано В. А. Шлыком [2], затем это доказательство было немного упрощено в [3].

Субфинслеровы пространства определяются как обобщение римановых пространств, с одной стороны, и пространств Карно-Каратеодори — с другой. Подробнее см. [4]. Там же приведены основные обозначения.

Пусть G — открытое множество в субфинслеровом пространстве, F_0, F_1 — замкнутые непересекающиеся множества из $\bar{G}$, $p > 1$. Определим p-емкость конденсатора (E_0, E_1, G):

$$C_{p,F}(E_0,E_1,G) = \inf\int\limits_G H(x,Xu)^p\,d\sigma,$$

где инфимум берется по всем функциям из $L^1_{p,F}(G) \cap C(G)$, равным нулю (единице) в некоторой окрестности E_0 (E_1). Здесь $d\sigma$ — элемент объема в G.

Определим p-модуль конденсатора (E_0, E_1, G) следующим образом:

$$M_{p,F}(E_0,E_1,G) = \inf\int\limits_G \rho^p\,d\sigma,$$

где инфимум берется по всем борелевским функциям ρ таким, что $\int\limits_\gamma \rho F(x,dx) \geqslant 1$ для любой кривой γ, соединяющей F_0 и F_1 в G.

Доказана следующая

Теорема. $M_{p,F}(F_0,F_1,G) = C_{p,F}(F_0,F_1,G)$ *для любого конденсатора* (F_0,F_1,G).

Литература

[1] Ahlfors L., Beurling A. *Conformal invariants and function-theoretic null-sets.* // Acta Mathematica. – 1950. – vol. 83. – P. 101–129.

[2] Шлык В. А *О равенстве p-емкости и p-модуля.* // Сиб. мат. журн. – 1993. – т. 34. – № 6. – С. 216–221.

[3] Aikawa H., Ohtsuka M. *Extremal length of vector measures* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. – 1999. – vol. 24. – P. 61–88.

[4] Дымченко Ю. В. *Условие малости обхвата в субфинслеровом пространстве.* // Аналитическая теория чисел и теория функций. 30 (Зап. научн. семин. ПОМИ). – 2015. – т. 440. – С. 57–67.

КОМБИНАТОРНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ КОРНЕЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ВЫЧИСЛЕНИЮ КОММУТАТОРОВ В ГРУППАХ ШЕВАЛЛЕ

Г. П. Егорычев[1], С. Г. Колесников[2]

---

[1] *gegorych@mail.ru*, Сибирский федеральный университет
[2] *sklsnkv@mail.ru*, Сибирский государственный аэрокосмический университет

В работе исследуются комбинаторные задачи, возникающие при перенесении результатов о регулярности силовской p-подгруппы группы $GL_n(\mathbb{Z}_{p^m})$ (Коуровская тетрадь, вопрос Верфрица 8.3) на группы Шевалле.

Пусть Φ — приведенная неразложимая система корней, Π — подсистема простых корней, $\Phi(R)$ — группа Шевалле типа Φ над ассоциативно-коммутативным кольцом R с единицей. Если $r, s \in \Phi$ и существуют $q_1, \ldots, q_t \in \Pi$ такие, что $r = s + q_1 + \ldots + q_t$, причем $s + q_1 + \ldots + q_i \in \Phi$ для любого i, $1 \leqslant i \leqslant t-1$, то разложение r назовем s-разложением. Два s-разложения $r = s + r_1 + \ldots + r_t$ и $r = s + q_1 + \ldots + q_t$ считаем равными, если $r_i = q_i$ для всех i. Положим

$$K_{r,s} = \sum N_{s,q_1} N_{s+q_1,q_2} \ldots N_{s+q_1+\ldots+q_{t-1},q_t},$$

где сумма берется по всем различным s-разложениям корня r, $K_{r,s} = 0$, если s-разложениям r не существует; здесь N_{ab} — структурная константа алгебры Ли типа Φ.

Теорема 1. *Пусть* $s_1, \ldots, s_l \in \Phi^+$ *— корни одной высоты,* $r_1, \ldots, r_k \in \Pi$ *и* $A = x_{s_1}(a_1) \ldots x_{s_l}(a_l)$, $B = x_{r_1}(1) \ldots x_{r_k}(1) \in \Phi(R)$. *Положим* $[B, {}_1A] = [B, A]$, $[B, {}_iA] = [[B, {}_{i-1}A], A]$, $i = 2, 3 \ldots$. *Тогда*

$$[B, {}_tA] = \prod_{i=1}^{m} x_{r'_i}\left(\sum_{j=1}^{l} a_j K_{s_j, r'_i}\right) \ldots,$$

где $r'_1, \ldots, r'_m$ *все корни высоты* $\mathrm{ht}(s_1) + t$, *допускающие хотя бы одно* s_i*-разложение хотя бы для одного* $i \in \{1, \ldots, l\}$.

Теорема 2. *Пусть* $r, s \in \Phi$ *и* $r = s + r_1 + \ldots + r_t$, $r = s + q_1 + \ldots + q_t$ *— два* s*-разложения корня* r. *Тогда произведения* $N_{s,r_1} N_{s+r_1,r_2} \ldots N_{s+r_1+r_2+\ldots+r_{t-1},r_t}$ *и* $N_{s,q_1} N_{s+q_1,q_2} \ldots N_{s+q_1+q_2+\ldots+q_{t-1},q_t}$ *имеют один и тот же знак.*

Если все корни Φ имеют одинаковую длину, то из теоремы 2 следует, что $|K_{r,s}|$ совпадает с числом всех s-разложений корня r. Теоремы 1 и 2 редуцируют вопрос о регулярности силовских p-подгрупп групп $\Phi(\mathbb{Z}_p)$ и $\Phi(\mathbb{Z}_{p^2})$ к исследованию на делимость определенных сумм от чисел $K_{r,s}$, при вычислении которых регулярно используется метод Г. П. Егорычева интегрального представления и вычисления комбинаторных сумм.

Приведем примеры. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ выберем ортонормированный базис $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$. Векторы $\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, образуют систему корней типа D_n. При $(i, j) \neq (1, 2)$ справедливы равенства: $K_{-\epsilon_1-\epsilon_2, -\epsilon_i-\epsilon_j} =$

$$= \sum_{k=0}^{[(j-i-1)/2]} \frac{(-1)^k}{j-k-1} C_{j-i-k-1}^{k} C_{2j-2k-4}^{j-k-2} = C_{i+j-3}^{i-1} - C_{i+j-3}^{i-2}.$$

Показано, что коммутатор из теоремы 1, при $R = \mathbb{Z}_{p^2}$, $t = 2h-2$, $l = 1$, $a_1 = p$, s_1 — корень минимальной высоты, $\{r_1, \ldots, r_n\} = \Pi$, равен $x_{-s_1}(\theta)$, где θ — значение формы Киллинга от векторов, координаты которых выражаются через константы $K_{r,s}$. В частности, для Φ типа B_n

$$\theta = -C_{2n-1} - 3(C_{n-1} - C_{n-2})^2 + 3C_{n-2}^2 + 2(2n-1)^2 C_{n-1}^2,$$

здесь $C_m = \frac{1}{m+1} C_{2m}^m$ — m-е число Каталана. Если θ не делится на простое число p, когда $4n = p + 1$, силовская p-подгруппа группы $B_n(\mathbb{Z}_{p^2})$ не регулярна.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00707).

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНДЕКСОВ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ЦИКЛОВ И БАЗИСОВ ГРУПП КОГОМОЛОГИЙ ТРИАНГУЛИРОВАННЫХ ЗАМКНУТЫХ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В. Ю. Епифанов[1], Е. И. Яковлев[2]

---

[1] *vepifanov92@gmail.com*, Нижегородский государственный университет

[2] *evgeniy.yakovlev@itmm.unn.ru*, Нижегородский государственный университет

Рассматриваются полиэдры P с заданной триангуляцией, представляющие собой замкнутые трехмерные многообразия, их группы гомологий и когомологий с коэффициентами из $\mathbb{Z}_2$. Основная цель работы – разработка алгоритмов для вычисления индексов пересечения $Ind : H_m(P) \times H_l(P) \to \mathbb{Z}_2$, $m + l = 3$.

Решением задачи являются два алгоритма, соответствующие случаям $m = 1$ и $m = 2$. Входные данные состоят из симплициальной структуры полиэдра P и цикла $x \in Z_m(P)$. На выходе получается коцепь $J_x : C_l(P) \to \mathbb{Z}_2$, для которой справедлива

Теорема 1. *Для каждого $m = 1,2$ коцепь J_x является коциклом. Гомологический класс $[x] \in H_m(P)$ и когомологический класс $[J_x] \in H^l(P)$ связаны равенством $F_*([J_x]) = [x]$, где $F_* : H^l(P) \to H_m(P)$ – изоморфизм Пуанкаре. Для любого цикла $y \in Z_l(P)$ имеет место равенство $Ind([x],[y]) = J_x(y)$.*

Пусть N – количество трехмерных симплексов полиэдра P, а $n = \operatorname{card} x$.

Теорема 2. *В худшем случае алгоритм вычисления коцепи J_x имеет сложность $O(N + n)$ для $m = 1$ и $O(N + n \log n)$ для $m = 2$.*

Аналогичные результаты для двумерных замкнутых многообразий и $m = l = 1$ получены в [1]. В [2] одномерная коцепь J_x строится для простого цикла $x \in Z_{n-1}(P)$ на замкнутом многообразии P произвольной размерности n, в случае непростого x он неприменим.

Разработанные алгоритмы позволяют вычислить базис $[J_{x_1}], \ldots, [J_{x_r}]$ группы когомологий $H^l(P)$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}_2$ по заданному базису $[x_1], \ldots, [x_r]$ соответствующей группы гомологий $H_m(P)$.

При $m = 2$ и $l = 1$ коциклы $J_{x_1}, \ldots, J_{x_r}$ могут быть применены для построения регулярного симплициального накрытия $p : \hat{P} \to P$ с группой монодромии $G \cong H_1(P)$. Накрытие p в свою очередь может быть использовано в задаче минимизации реберных путей и одномерных циклов многообразия P в их классах гомологий. Этот подход для n-мерных многообразий разработан в [2]. Для случая $n = 2$ он также рассмотрен в [1], [3] и [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект 1.1410.2014).

Литература

[1] Яковлев Е. И. *Вычислительная топология.* – Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2005. – 214 с.

[2] Lapteva A. V., Yakovlev E. I. *Index Vector-Function and Minimal Cycles* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2006. – V. 22. – P. 35–46.

[3] Chambers E. W., de Verdiere E. C., Erickson J., Lazarus F., Whittlesey K. *Splitting (complicated) surfaces is hard* // Comput. Geom. Theory Appl. – 2008. – V. 41. – No. 1–2. – P. 94–110.

[4] Erickson J., Nayyeri A. *Minimum cuts and shortest non-separating cycles via homology covers* // Proc. 22nd Ann. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms. – 2011. – P. 1166–1176.

ВЗАИМНО-НЕСМЕШАННЫЕ БАЗИСЫ В 6-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПАРЫ В SL(6)

И. Ю. Ждановский[1]

---

[1] *ijdanov@mail.ru*, Московский физико-технический институт

Мой доклад опирается на совместную работу с А. Бондалом [4].

В 60-х годах физиком Швингером было введено понятие взаимно-несмешанных базисов в эрмитовом пространстве [1]. А именно, взаимно-несмешанными базисами называются базисы $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{f_j\}_{j=1}^n$ в эрмитовом комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, такие что $|(e_i, f_j)|^2 = \frac{1}{n}$ для любых i, j. Эти базисы применяются в квантовой механике, квантовой томографии, квантовой теории информации. Проблема нахождения максимального числа базисов, попарно взаимно-несмешанных является проблемой 13 Квантовой теории информации [2].

Параллельно, в 70-х годах было введено понятие ортогональной пары в простой алгебре Ли. Ортогональной парой в алгебре Ли L называется пара картановских подалгебр $(\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2)$, ортогональных по отношению к форме Киллинга. Ортогональные пары в простой алгебре Ли L изучаются с точностью до действия $Aut(L)$. Ортогональным разложением алгебры Ли L называется разложение $L = \oplus_{i=1}^{n+1} \mathscr{H}_i$, здесь $\mathscr{H}_i$ — картановские подалгебры, ортогональные друг другу в смысле формы Киллинга. Как ни странно, самым сложным случаем оказался случай алгебр $sl(n)$. Кострикиным А. И. и соавторами в серии работ велось активное изучение ортогональных разложений простых алгебр Ли, в том числе и $sl(n)$, и была сформулирована гипотеза Винни-Пуха [3]:

Гипотеза Винни-Пуха: Алгебра Ли $sl(n)$ имеет ортогональное разложение тогда и только тогда, когда $n = p^m$ для некторого простого p.

Для случая $n = p^m$ примеры ортогональных разложений были построены Кострикиным А. И. и соавторами. В случае $n = 6$ — первом, когда n не является степенью простого, до сих пор неизвестно существует ли ортогональное разложение $sl(6)$ или нет.

Классификация ортогональных пар — первый шаг к решению проблемы Винни-Пуха.

Понятия взаимно-несмешанных базисов в n-мерном пространстве и ортогональных пар в $sl(n)$ оказываются тесно связанными, а именно ортогональные пары в $sl(n)$ — «комплексификация» взаимно-несмешанных базисов.

Полная классификация этих двух связанных объектов (ортогональных пар и взаимно-несмешанных базисов) известна только в случае $n \leqslant 5$. Я расскажу о случае $n = 6$. А именно, я докажу, что существует 4-мерное семейство ортогональных пар в $sl(6)$. В качестве следствия, я покажу, что существует 4-хмерное семейство взаимно-несмешанных базисов в 6-мерном пространстве.

Литература

[1] Schwinger, J. *Unitary Operator Bases* // Harvard University, Proc. Natl. Acad. Sci., 1960, 46, p. 570–579.

[2] qig.itp.uni-hannover.de/qiproblems/Main Page

[3] Kostrikin, A. I., Kostrikin, I. A., Ufnarovskii V. A. *Orthogonal decompositions of simple Lie algebras (type An)* // Analytic number theory, mathematical analysis and their applications. Trudy Mat. Inst. Steklov. — 1981. — 158. — P. 105–120.

[4] Bondal A., Zhdanovskiy I. *Orthogonal pairs and mutually unbiased bases* // Teoriya predstavlenii, dinamicheskie sistemy, kombinatornye metody. XXVI, Zap. nauchn. sem. POMI, 437, POMI, SPb., 2015, p. 35–61. arXiv: 1510.05317

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМЫ ШАР ЧАПЛЫГИНА С РОТОРОМ

А. И. Жила[1]

---

[1] *saffeya@yandex.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Московский Государственный Университет им. Ломоносова

В классической механике существует большое количество систем с неголономными связями. Изучение динамики неголономных систем было выделено в независимую область исследования теоретической механики, когда стало понятно, что стандартный формализм Лагранжа не применим к системам с неголономными связями. Однако, некоторые неголономные системы, называемые конфомно — гамильтоновыми сохраняют интеграл энергии и другие тензорные инварианты. Таким образом, для их анализа применимы методы обычной гамильтоновой механики, в том числе и новые топологические.

Мы рассматриваем задачу о качении сбалансированного динамически несимметричного шара с ротором по шероховатой горизонтальной плоскости. Данная система является конформно — гамильтоновой. Ранее А. Ю. Москвиным [1] были построены бифуркационные диаграммы отображения момента и бифуркационные комплексы для изучения динамики системы и нахождения особых решений. Интерес представляет проведение тонкого лиувиллевого анализа данной системы. Сделан один из шагов для этого, а именно найдены инварианты Фоменко и проведен грубый топологический анализ системы.

Движение шара в проекциях на главные оси, связанные с шаром, описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dot{M} = (M+K)\times\omega, \qquad M = J\omega - d(\gamma,\omega)\gamma, \qquad J = I + dE, \\ \dot{\gamma} = \gamma\times\omega, \qquad d = mr^2 \geqslant 0, \qquad E = \|\delta_{ij}\|, \end{cases}$$

где ω — вектор угловой скорости, γ — орт вертикали, $I =\mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции шара относительно его центра, m — масса шара, r — его радиус. Вектор M имеет смысл кинетического момента шара относительно точки контакта.

Изучается топология слоения Лиувилля, то есть пространство замыканий решений системы. С помощью топологических инвариантов можно выявлять эквивалентные и неэквивалентные интегрируемые системы. Все исследования проводятся в рамках теории Фоменко классификации интегрируемых систем, основанной на инвариантах Фоменко, использующих бифуркационные комплексы (подробнее см. [2]).

Теорема. *Система шар Чаплыгина с ротором без нулевых компонент грубо лиувиллево эквивалентна системе Жуковского при значениях параметра с, таких что* $c^2 \geqslant d^2 \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{J_i^2}$ *(т.е. обе эти системы имеют одинаковые замыкания решений). При этом для малых уровнях энегрии (что соответствует* $c^2 < d^2 \sum_{i=1}^3 \frac{K_i^2}{J_i^2}$*) данные системы лиувиллево неэквивалентны.*

Литература

[1] Москвин А. Ю.*Шар Чаплыгина с гиростатом: особые решения* // Нелинейная динамика. – 2009. – Т. 5. – № 3. – С. 345–356.

[2] Болсинов А. В. Фоменко А. Т. *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация.* – Ижевск: РХД, 1999.

ПОЛНЫЕ КАРТАНОВЫ СЛОЕНИЯ И ГРУППЫ ИХ БАЗОВЫХ АВТОМОРФИЗМОВ

Н. И. Жукова[1], К. И. Шеина[2]

---

[1] *nzhukova@hse.ru*, Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”

[2] *ksheina@hse.ru*, Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”

Слоения, допускающие трансверсальную картанову геометрию, называются картановыми. Исследование картановых слоений мотивировано тем, что такие широкие классы слоений как параболические, конформные, проективные, псевдоримановы, лоренцевы, римановы, трансверсально подобные, трансверсально однородные и слоения с трансверсальной линейной связностью являются картановыми. Поэтому исследование картановых слоений позволяет с единой точки зрения изучать общие свойства указанных слоений, в то время как многие авторы изучают их по отдельности.

В категории картановых слоений $\mathfrak{CF}$ изоморфизмы сохраняют не только слоения, но и их трансверсальную геометрию.

Пусть $A^{\xi}(M,F)$ — группа всех автоморфизмов картанова слоения (M,F) с трансверсальной картановой геометрией ξ в категории $\mathfrak{CF}$, которая является некоторой группой автоморфизмов поднятого слоения $(\mathcal{R},\mathcal{F})$. Группой базовых автоморфизмов картанова слоения (M,F) называется фактор-группа $A^{\xi}_B(M,F) := A^{\xi}(M,F)/A^{\xi}_L(M,F)$ группы $A^{\xi}(M,F)$ по нормальной подгруппе слоевых автоморфизмов $A^{\xi}_L(M,F) := \{f \in A^{\xi}(M,F) \mid f(\mathcal{L}) = \mathcal{L}\ \forall \mathcal{L} \in \mathcal{F}\}$.

Нами показано, что группа базовых автоморфизмов $A^{\xi}_B(M,F)$ картанова слоения (M,F) зависит от трансверсальной картановой геометрии ξ.

В данной работе мы находим достаточные условия для того, чтобы группа базовых автоморфизмов полного картанова слоения (M,F) допускала структуру конечномерной группы Ли.

Впервые подобная задача решалась Дж. Лесли (1972 г.). Эта задача поставлена И. В. Белько и рассматривалась им в классе слоений с трансверсальной проектируемой аффинной связностью (1983 г.). Для слоений с трансверсальной жесткой геометрией она решалась первым автором (2009 г.).

В отличие от предыдущих работ мы не предполагаем эффективности трансверсальной картановой геометрии. Для слоений с неэффективной трансверсальной картановой геометрией ξ мы строим две структурные алгебры Ли $\mathfrak{g}_0(M,F)$ и $\mathfrak{g}_1(M,F)$, являющиеся алгебраическими инвариантами в категории $\mathfrak{CF}$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_0(M,F)$ соответствует трансверсальной картановой геометрии ξ, а $\mathfrak{g}_1(M,F)$ — ассоциированной эффективной картановой геометрии $\hat{\xi}$.

Мы доказали, что равенство нулю инварианта $\mathfrak{g}_0(M,F)$ является достаточным условием для существования и единственности структуры группы Ли в группе базовых автоморфизмов $A^{\xi}_B(M,F)$ и нашли точную оценку размерности этой группы.

Исследовано также влияние алгебры Ли $\mathfrak{g}_1(M,F)$ и некоторых топологических свойств слоения (M,F) на группу $A^{\xi}_B(M,F)$. В частности, получены достаточные условия для того, чтобы группа базовых автоморфизмов полного картанова слоения являлась дискретной. Построены примеры вычисления групп базовых автоморфизмов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 16-01-00132, и Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ 2016 году, проект № 98.

ОЦЕНКИ С АСИМПТОТИЧЕСКИ РАВНОМЕРНО МИНИМАЛЬНЫМ D-РИСКОМ

А. А. Заикин[1]

---

[1] *Kaskrin@gmail.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

Пусть наблюдается выборка $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ с наблюдениями из $\mathfrak{X} \subseteq \mathbb{R}$. Пусть далее распределение $\mathbf{P}_\theta$ наблюдения происходит из класса распределений, индексированного одномерным параметром $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$. Кроме того, у распределения с.в. X_1 существует плотность $p(x|\theta) = d\mathbf{P}_\theta/d\nu$. Обозначим $p_n(\mathbf{X}|\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(X_i|\theta)$. Пусть θ есть реализация случайной величины ϑ из распределения $\mathbf{G}$ с плотностью $g(\theta)$ по лебеговской мере. Обозначим символом $\mathbf{P}$ совместное распределение ϑ и $\mathbf{X}$. Тогда $\mathbf{P}_\theta$ будет условным распеделением $\mathbf{X}$ при значении $\vartheta = \theta$.

Пусть задана некоторая функция потерь на $L : \Theta \times \Theta \mapsto \mathbb{R}$, такая, что $L(\theta, \theta) = 0$. Для произвольной оценки T_n можно определить d-риск как величину $\mathscr{R}(T_n) = \mathbf{E}\{L(T_n, \vartheta)|T_n\}$ (в данной записи предполагается, что соответствующая регулярная вероятность существует). Оценка θ_n^* называется оценкой с равномерно минимальным d-риском (ОРМdР), если $\mathbf{P}(\mathscr{R}(\theta_n^*) \leqslant \mathscr{R}(T_n)) = 1$ для любой другой оценки T_n. Общая теория и подход к построению подобных оценок указаны в [1].

К сожалению, работа с ОРМdР сопряжена со значительными трудностями. В частности вопрос о широких условиях существования оценки остается открытым. Поэтому имеет смысл работать с оценками, которые близки к ОРМdР в плане значений d-риска. Пусть задана некоторая функция $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, такая, что $\phi(n) \to 0, n \to \infty$. Определим оценку с $\phi(n)$-асимптотически равномерно минимальным d-риском в классе оценок $\mathscr{K}$ как оценку θ_n^*, которая удовлетворяет $\mathbf{P}(\mathscr{R}(\theta_n^*) \leqslant \mathscr{R}(T_n) + \phi(n)) \to 1$ для любого $T_n \in \mathscr{K}$. Функцию $\phi(n)$ можно понимать как уровень допустимого отклонения функции d-риска асимптотически оптимальной оценки от истинно оптимального уровня.

В докладе рассматривается степенная функция потерь $L(d, \theta) = |d - \theta|^k, k > 1$. Основным результатом является следующая

Теорема 1. *При выполнении определенных условий регулярности оценка максимального правдоподобия $\widehat{\theta}_n$ является оценкой с $n^{-k/2}$-асимптотически равномерно минимальным d-риском среди всех оценок T_n, которые удовлетворяют*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b > 0 : \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{n} \mathbf{P}_\theta \left(\sqrt{n}|T_n - \theta| > b\right) < \varepsilon.$$

Ограничение на класс $\sqrt{n}$-состоятельности оценок довольно естественно, однако не обязательно. Подобное утверждение справедливо и для класса всех оценок параметра θ (в том числе и несостоятельных в привычном понимании этого слова), однако утверждение слабее.

Теорема 2. *При выполнении определенных условий регулярности существует последовательность $\varepsilon_n \to 0$ такая, что оценка максимального правдоподобия $\widehat{\theta}_n$ является оценкой с ε_n-асимптотически равномерно минимальным d-риском среди всех оценок T_n.*

Литература

[1] Simushkin S.V., Volodin I.N. *Statistical inference with a minimal d-risk.* // Lect. Notes Math., No. 1021. — 1983. — P. 629–636.

ПРЕДЕЛЬНО МОНОТОННАЯ СВОДИМОСТЬ И ЕЕ СВОЙСТВА

Д. Х. Зайнетдинов[1]

---

[1] *damir.zh@mail.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Данная работа посвящена изучению основных свойств предельно монотонных множеств и последовательностей, состоящих из бесконечных множеств, а также исследованию предельно монотонной сводимости (будем обозначать через lm-сводимость) множеств и последовательностей множеств.

И. Ш. Калимуллин и В. Г. Пузаренко [1] ввели понятие Σ-сводимости на семействах подмножеств натуральных чисел, позволяющее рассматривать семейство само по себе, не фиксируя при этом его представление с помощью натуральных чисел. В докладе будет представлено полное описание lm-сводимости в терминах Σ-сводимости семейств специального вида. Кроме того, будет установлена связь между предельно монотонной сводимостью множеств и Σ-определимостью абелевых групп специального вида.

Предварительные сведения, касающиеся предельно монотонных функций и их приложений, можно найти в обзорной работе [2].

В докладе планируется представить алгоритмические свойства предельно монотонной сводимости множеств, принадлежащих классу Σ^0_2 арифметической иерархии. В данном направлении можно выделить следующие основные результаты:

1. Показано существование максимальной пары множеств относительно lm-сводимости; в то же время, несмотря на данное утверждение, установлено отсутствие максимального множества относительно lm-сводимости. Доказано отсутствие наибольшего Σ^0_2-множества относительно lm-сводимости.

2. Построена пара несравнимых Σ^0_2-множеств относительно lm-сводимости. Кроме того, данный результат был обобщен на последовательность множеств, а именно, построена бесконечная равномерная последовательность несравнимых Σ^0_2-множеств относительно lm-сводимости. Установлена вложимость каждого счётного частичного порядка в lm-степень.

3. Доказано, что не существует наименьшего не предельно монотонного Σ^0_2-множества относительно lm-сводимости.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты №15-01-08252, №15-31-20607 и

№15-41-02507-р_поволжье_а.

Литература

[1] Калимуллин И. Ш., Пузаренко В. Г. *О сводимости на семействах* // Алгебра и логика. – 2009. – Т. 48. – № 1. – С. 31–53.

[2] Downey R., Kach A., Turetsky D. *Limitwise monotonic functions and their applications* // Proceedings of the 11th Asian Logic Conference. World Scientific. – 2011. – P. 59–85.

[3] Faizrahmanov M., Kalimullin I., Zainetdinov D. *Maximality and Minimality under Limitwise Monotonic Reducibility* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2014. – Vol. 35. – № 4. – P. 333–338.

[4] Зайнетдинов Д. Х. *Σ-сводимость и lm-сводимость множеств и последовательностей множеств* // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ-матем. науки. – 2016. – Т. 158. – кн. 1. – С. 51–65.

ЗАДАЧА ТИПА КЕЛДЫША ДЛЯ B-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРВОГО РОДА

Н. В. Зайцева[1]

---

[1] *n.v.zaiceva@yandex.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Пусть $D = \{(x,t)|0 < x < l, 0 < t < T\}$ – прямоугольная область координатной плоскости Oxt, где $l, T > 0$ – заданные действительные числа. Обозначим части границы области через $\Gamma_0 = \{(x,t)|t = 0, 0 \leqslant x \leqslant l\}$, $\Gamma_l = \{(x,t)|x = l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$.

Рассмотрим в области D гиперболическое уравнение с оператором Бесселя

$$\Box_B u(x,t) \equiv u_{tt} - x^{-k}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^k u_x\right) = 0, \tag{1}$$

где $k \geqslant 1$ – заданное действительное число.

Постановка задачи. Найти функцию $u(x,t)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_l) \cap C^2(D), \tag{2}$$

$$\Box_B u(x,t) \equiv 0, \qquad (x,t) \in D, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{4}$$

$$\int\limits_0^l u(x,t)\, x^k\, dx = A = \text{const}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

где A – заданное число, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные, достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$\int\limits_0^l \varphi(x)\, x^k\, dx = A, \qquad \int\limits_0^l \psi(x)\, x^k\, dx = 0. \tag{6}$$

Из постановки задачи (2) – (6) видно, что граничное условие (5) является нелокальным. Такое интегральное условие ранее возникло в работах [1] – [3] для уравнения теплопроводности, например, в [3] при изучении вопроса об устойчивости разрежения плазмы. Физически нелокальное условие (5) означает постоянство внутренней энергии системы.

В данной работе изучается краевая задача (2) – (6) без локальных граничных условий на боковых сторонах прямоугольной области D. Методом спектрального анализа [4, 5] доказаны теоремы единственности и существования решения задачи (2) – (6). При этом решение построено в виде суммы ряда Фурье-Бесселя и приведено обоснование сходимости ряда в классе регулярных решений (2) и (3).

Литература

[1] Cannon I. R. *The solution of heat equation subject to the specification of energy* // Quart. Appl. Math. – 1963. – T. 21. – № 2. – P. 155–160.

[2] Камынин Л. И. *Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями* // Журн. ВМ и МФ. – 1964. – Т. 4. – № 6. – С. 1006–1024.

[3] Ионкин Н. И. *Решение одной краевой задачи теплопроводности с неклассическим краевым условием* // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13. – № 2. – С. 276–304.

[4] Сабитов К. Б. *Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием* // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46. – № 10. – С. 1468–1478.

[5] Сабитов К. Б. *Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области* // Матем. заметки. – 2011. – Т. 89. – Вып. 4. – С. 596–602.

ГЕОМЕТРИЯ ПСЕВДОРИМАНОВА ПРОСТРАНСТВА СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА, ДОПУСКАЮЩЕГО ПРОЕКТИВНЫЕ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

З. Х. Закирова[1]

---

[1] *zolya_zakirova@mail.ru*, Казанский государственный энергетический университет

В настоящее время имеется устойчивый интерес к многомерным теориям пространства с нестандартными сигнатурами метрики. В основном он ассоциирован с теорией струн, где временное(ые) направление(ия) в пространстве-времени связано(ы) с нестандартным знаком кинетического члена в действии лиувиллевского(их) поля(ей). Поэтому изучение таких теорий привлекает много внимания.

В данной работе исследуются n-мерные псевдоримановы пространства $V^n(g_{ij})$ с сигнатурой $[++---....--]$, которые допускают проективные инфинитезимальные преобразования, то есть группы непрерывных преобразований, сохраняющих геодезические. Общий метод определения псевдоримановых многообразий, которые допускают негомотетическую проективную группу G_r, был развит А. В. Аминовой. В работе [1] А. В. Аминова классифицировала все лоренцевы многообразия размерности $\geqslant 3$, которые допускают негомотетические проективные или афинные преобразования. Эта проблема не решена для псевдоримановых пространств с произвольной сигнатурой.

Для того, чтобы найти псевдориманово пространство, допускающее негомотетическое инфинитезимальное проективное преобразование, нужно проинтегрировать уравнение Эйзенхарта [2]

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}.$$

Задача определения таких пространств зависит от типа h-пространств, т.е. от типа билинейной формы $L_X g$, определяемой характеристикой Сегре λ-матрицы $(h-\lambda g)$ [1]. Если характеристика тензора $L_X g$ есть $[abc...]$, то будем называть соответствующее пространство h-пространством типа $[abc...]$. Эти идеи впервые были высказаны П. А. Широковым [3]. Таким образом, псевдориманово пространство, для которого существует нетривиальное решение $h \neq cg$ уравнения Эйзенхарта, называется *h-пространством*. Псевдоримановы многообразия, для которых существуют нетривиальные решения $h_{ij} \neq cg_{ij}$ уравнений Эйзенхарта, называются *h - пространствами*.

Используя технику интегрирования в косонормальном репере [1], в работе были найдены метрики h-пространств типов [22111...1], [32111...1], [33111...1], а также доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Аффинная группа в h-пространствах типов* [22111...1], [32111...1], [33111...1] *непостоянной кривизны состоит из гомотетий.*

Теорема 2. *Если h-пространства типов* [22111...1], [32111...1], [33111...1] *допускают негомотетическую проективную алгебру Ли P_r, то эта алгебра содержит подалгебру H_{r-1} инфинитезимальных гомотетий размерности $r-1$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00291-а).

Литература

[1] Аминова А. В. *Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий* // Успехи мат. наук. –1995. – Т. 50. – № 1. – С. 69–142.

[2] Эйзенхарт Л. П. *Риманова геометрия* // М.: ИЛ, – 1948. – 316 с.

[3] Широков П. А. *Постоянные поля векторов и тензоров 2-го порядка в римановых пространствах* // Изв. Казанск. физ.-мат. общ. – 1925(25). – № 2. – С. 86–114.

КОМПАКТИФИКАЦИЯ И КЛЕТОЧНАЯ СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В. И. Звонилов[1], С. Ю. Оревков[2]

---

[1] *zvonilov@gmail.com*, Чукотский филиал Северо-восточного федерального университета

[2] *orevkov@mi.ras.ru*, Математический институт Российской академии наук

Односвязное объединение конечного числа двумерных сфер, любая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную открытому кругу или букету открытых кругов, назовём *поверхностью рода* 0. Введение комплексной структуры на такой поверхности, даёт *кривую рода* 0.

Осоэдром называется сфера с двумя полюсами и несколькими меридианами, причём, если меридианов больше одного, то на каждом из них отмечено несколько точек. Если отмеченные точки и, возможно, полюсы образуют множество всех критических значений рациональной функции на кривой рода 0, то прообраз осоэдра, рассматриваемого как граф на сфере, называется *осографом* на кривой рода 0.

Известны компактификации пространств рациональных функций, критические значения которых невырождены либо все (см. [1], [2]), либо все, кроме одного (см. [3]). Мы компактифицируем пространство X_n классов изоморфизма рациональных функций степени n на сфере, у которых кратности критических значений не фиксированы. При этом к X_n добавляются рациональные функции не только на кривых с простыми двойными точками, но и на кривых рода 0. Компактификация $\bar{X}_n$ пространства X_n описывается в терминах осографов и их возмущений. Она является хаусдорфовым пространством со счётной базой, в котором X_n всюду плотно. Эта компактификация является клеточным пространством, произвольной открытой клеткой которого является множество классов рациональных функций с фиксированным осографом.

Тригональная кривая на поверхности Хирцебруха Σ_e задаётся в некоторой аффинной карте уравнением $y^3 + b(x)y + w(x) = 0$, где b и w - многочлены степеней не выше $2e$ и $3e$. Функция $j = \frac{4b^3}{d} = 1 - \frac{27w^2}{d}$, где $d = 4b^3 + 27w^2$ – дискриминант, называется j-*инвариантом* кривой. Мы доказываем, что *компактификация фактор-пространства пространства j-инвариантов тригональных кривых по действию группы $PGL(2,\mathbb{C})$ является клеточным подпространством пространства $\bar{X}_n$.*

Литература

[1] Knudsen F. *Projectivity of the moduli space of stable curves. II.* // Math. Scand. – 1983. – V. 52. – P. 1225–1265.

[2] Natanzon S., Turaev V. *A compactification of the Hurwitz space* // Topology. – 1999. – V. 38. – No. 4. – P. 889–914.

[3] Ekedahl T., Lando S. K., Shapiro M., Vainshtein A. *Hurwitz numbers and intersections on moduli spaces of curves* // Invent. math. – 2001. – V. 146. – P. 297—327.

СЛАБАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ АЛЬФА–МОДЕЛИ ЛЕРЭ С ВЯЗКОСТЬЮ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

А. В. Звягин[1]

---

[1] *zvyagin.a@mail.ru*, Воронежский государственный университет

Пусть Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассматривается следующая задача, описывающая альфа–модель Лерэ, с вязкостью, зависящей от температуры:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu(\theta)\Delta v + (u \cdot \nabla) v + \nabla p = f; \tag{1}$$

$$v = u - \alpha^2 \Delta u; \quad \nabla \cdot v = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \chi\Delta\theta + (v \cdot \nabla)\theta = 2\nu(\theta)\mathscr{E}(v) : \mathscr{E}(v) + g; \tag{3}$$

$$v|_{t=0} = v_0; \quad v|_{\partial\Omega} = 0; \quad \theta|_{t=0} = \theta_0; \quad \theta|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Здесь $u(t,x)$ – вектор–функция скорости, $p(t,x)$ – функция давления, $f(t,x)$ – плотность внешних сил, $v(t,x)$ – отфильтрованная скорость. Через $\mathscr{E} = (\mathscr{E}_{ij}(v)), \mathscr{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$, обозначим тензор скоростей деформации, ν – вязкость среды, $\alpha > 0$ – длина подсеточного (фильтрующего) масштаба, v_0 и θ_0 – начальные значения. Введем пространства $E_1 = \{v : v \in C([0,T], V^1), v' \in L_2(0,T;V^{-1})\}$, $E_2 = \{v : v \in L_p(0,T;$ $W_p^1(\Omega)), v' \in L_1(0,T;\, W_p^{-1}(\Omega)),\ 1 < p < +\infty\}$.

Определение 1. *Слабым решением задачи* (1) – (4) *называется пара* $(v,\theta) \in E_1 \times E_2$, *удовлетворяющая начальным условиям и при всех* $\varphi \in V$, $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ *и п. в.* $t \in [0,T]$ *соотношениям:*

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\varphi\, dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + 2\int\limits_\Omega \nu(\theta)\mathscr{E}(v) : \mathscr{E}(\varphi)\, dx = \langle f, \varphi \rangle;$$

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial \theta}{\partial t}\phi\, dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_i\theta_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}\, dx + \chi\int\limits_\Omega \mathscr{E}(\theta) : \mathscr{E}(\phi)\, dx = \\ = 2\int\limits_\Omega \big(\nu(\theta)\mathscr{E}(v) : \mathscr{E}(v)\big) : \phi\, dx + \langle g, \phi \rangle,$$

Теорема 1. *Пусть функция* $\nu(\theta) \in C^2(-\infty, +\infty)$ *является монотонно возрастающей и* $0 \leqslant \nu(\theta) \leqslant M$, $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $g \in L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $v_0 \in V^0$, $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$. *Тогда при* $1 < p < 4/3$ *для* $n = 2$ *и для* $1 < p < 5/4$ *при* $n = 3$ *существует слабое решение задачи* (1) – (4).

Данные исследования являются продолжением работ по существованию слабых решений термовязкоупругих моделей неньютоновской гидродинамики [1]–[4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 16–31–60075 мол_а_дк).

Литература

[1] Звягин А. В., Орлов В. П. *Разрешимость задачи термовязкоупругости для одной модели Осколкова* // Изв. вузов. Матем. – 2014. – В. 9. – С. 69–74.

[2] Звягин А. В., Орлов В. П. *Исследование разрешимости задачи термовязкоупругости для линейно упруго-запаздывающей жидкости Фойгта* // Матем. заметки – 2015. – Т. 97. – В. 5. – С. 681–698.

[3] Звягин А. В. *Аттракторы для модели движения полимеров с объективной производной в реологическом соотношении* // Док. Акад. Наук. – 2013. – Т. 453. – В. 6. – С. 599–602.

[4] Звягин А. В. *Исследование разрешимости стационарной модели движения слабых водных растворов полимеров* // Вестн. ВГУ. Серия: Физ.Мат. – 2011. – В. 1. – С. 147–156.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ СВЕРТКИ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

К. Р. Зименс[1]

---

[1] *karinazabirova@gmail.com*, Уфимский государственный авиационный технический университет

Пусть $\eta > 0$, $D = \{z : Rez < \eta\}$. Обозначим через $H(D)$ пространство аналитических функций в области D с топологией равномерной сходимости на компактах, через $H^*(D)$ – сопряженное к $H(D)$ пространство с сильной топологией. Через P_D обозначим пространство, состоящее из функций, получающихся преобразованием Лапласа всех функционалов из $H^*(D)$.

Пусть $F \in H^*(D)$, $\varphi(z) = (F, e^{zt})$ – преобразование Лапласа функционала F, через D_1 обозначим сопряженную диаграмму функции $\varphi(z)$ [1]. Тогда для $\forall\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $|\varphi(z)| \leqslant C(\varepsilon)e^{(h_\varphi(\theta)+\varepsilon)|z|}$ (см. [1]), где $h_\varphi(\theta)$ – индикатриса роста функции φ.

Определим топологию в P_D. Пусть Q_j – последовательность выпуклых компактов таких, что $Q_j \subseteq Q^0_{j+1}$, где Q^0_j – внутренние точки Q_j и $\cup Q_j = D$. Для каждого Q_j опорную функцию обозначим $h_{Q_j}(-\theta)$. По теореме Полиа [1] $h_{Q_j}(\theta) = h_{Q_j}(-\theta)$. Введем нормированные пространства B_j

$$B_j = \{\beta \in H(\mathbb{C}) : ||\beta||_j = \sup_{z\in\mathbb{C}} |\beta(z)|e^{-h_{Q_j}(\theta)|z|} < \infty\}, \quad j = 1, 2, ...$$

Тогда топология в P_D есть индуктивный предел нормированных пространств B_j. По известным свойствам этой топологии (см. [2]) последовательность $\varphi_k \in P_D$ сходится к 0 при $k \to \infty$, если выполняются условия: существует компакт J и $C > 0$ такие, что $|\varphi_k(z)| \leqslant Ce^{h_J(\theta)|z|}$ и $\varphi_k(z) \to 0$ равномерно на компактах плоскости $\mathbb{C}$.

Введем оператор свертки. По определению, $M_\varphi[f(z)] = (F, f(z + t))$, где $f(z + t)$ – сдвиг функции. Пусть $\varphi(z)$ – функция вполне регулярного роста [3]. Будем считать, что D_2 такая вертикальная полуплоскость, которая удовлетворяет условию

$D_1 + D_2 = D$. Оператор $M_\varphi[f(z)]$ линейный, непрерывный, а так как $\varphi(z)$ – вполне регулярного роста, то и сюръективный, действующий из $H(D)$ в $H(D_2)$.

Рассмотрим оператор свертки $M_\varphi[\psi \cdot f(z)], \psi \in H(D)$. Он действует линейно и непрерывно из $H(D)$ в $H(D_2)$.

Для оператора M_φ рассмотрим следующую интерполяционную задачу. Пусть в каждой точке μ_k задан конечный набор комплексных чисел $a_{kj}, j = 0, 1, ..., s_k - 1$. Необходимо найти функцию $u(z) \in Ker M_\varphi$ такую, что $u^{(j)}(\mu_k) = a_{kj}$.

Теорема 1. *Интерполяционная задача в ядре оператора M_φ разрешима тогда и только тогда, когда сюръективен оператор $M_\varphi[\psi\cdot]$ в $H(D_2)$.*

Теорема 2. *Пусть нули $\psi \in H(D)$ μ_k кратности s_k такие, что $\mu_k \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_k = \eta$, $k = 1, 2, .$ Функция $\varphi(z)$ вполне регулярного роста и имеет бесконечно много положительных нулей λ_k. Тогда оператор $M_\varphi[\psi\cdot]$ будет сюръективен в $H(D_2)$.*

Литература

[1] Леонтьев А. Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука. 1989. 176 с.

[2] Себастьян-и-Сильва Ж. *О некоторых классах локально-выпуклых пространств, важных в приложениях.* // Сб. пер. Математика.– 1957. – Т. 1.– С. 60–77.

[3] Левин Б. Я. *Распределение корней целых функций.* М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1956. 632 с.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ $\mathbf{0}'$-ПРЕДЕЛЬНО МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ВЫЧИСЛИМЫХ η-СХОЖИХ ЛИНЕЙНЫХ ПОРЯДКОВ

М. В. Зубков[1]

---

[1] *maxim.zubkov@kpfu.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского

Представимость порядкового типа в виде $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G(q)$, где $\mathbb{Q}$ множество рациональных чисел, а F некоторая функция, можно взять в качестве одного из возможных эквивалентных определений η-схожих линейных порядков.

Фроловым А. Н. и Зубковым М. В. [1] было показано, что существование $\mathbf{0}'$-предельно монотонной функции G (т.е. имеющей $\mathbf{0}'$-вычислимую аппроксимацию $g(x, s)$ не убывающую по аргументу s) для η-схожего линейного порядка эквивалентно существованию вычислимой копии с Π^0_1 отношением блока (два элемента находятся в одном блоке если между ними конечное число элементов). С другой стороны, Д. Турецким [2] был построен пример вычислимого η-схожего линейного порядка $\mathscr{L}$, который не представим в виде $\sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G(q)$ ни для какой $\mathbf{0}'$-предельно монотонной функции G. Таким образом, существование вычислимой копии порядка не достаточно для существования $\mathbf{0}'$-предельно монотонной функции. Естественным образом возникает вопрос, а для каких X-вычислимых η-схожих линейных порядков существуют соответствующие X'-предельно монотонные функции?

Ряд результатов в этом направлении ранее был получен Фроловым А. Н. [3], [4].

В данной работе найдены новые достаточные условия. Введем понятие левых и правых максимальных блоков.

Определение. *Блок* $[x]_{\mathscr{L}}$ *будем называть левым (правым) локальным максимумом, если существует* $[y]_{\mathscr{L}} <_{\mathscr{L}} [x]_{\mathscr{L}}$ *(*$[y]_{\mathscr{L}} >_{\mathscr{L}} [x]_{\mathscr{L}}$*) такой, что для любого* $[z]_{\mathscr{L}}$ *если* $[y]_{\mathscr{L}} <_{\mathscr{L}} [z]_{\mathscr{L}} <_{\mathscr{L}} [x]_{\mathscr{L}}$ *(*$[y]_{\mathscr{L}} >_{\mathscr{L}} [z]_{\mathscr{L}} >_{\mathscr{L}} [x]_{\mathscr{L}}$*), то выполняется* $|[z]_{\mathscr{L}}| < |[x]_{\mathscr{L}}|$.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. Пусть η-схожий линейный порядок в котором размеры левых и правых локальных максимумов ограничены. Порядок $\mathscr{L}$ имеет низкую копию тогда и только тогда, когда существует $\mathbf{0}'$-предельно монотонная функция $G : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ такая, что $\mathscr{L} \cong \sum\limits_{q\in\mathbb{Q}} G(q)$.

Класс порядков удовлетворяющих этому условию существенно шире, чем объединение классов сильно η-схожих линейных порядков и η-схожих линейных порядков не содержащих сильно η-схожих подинтервалов. В частности, содержит все конечные суммы порядков из указанных классов.

Литература

[1] Frolov A. N., Zubkov M. V. *Increasing η-Representable Degrees* // Math. Log. Quart. – 2009. – V. 55. – P. 633–636.

[2] Downey R. G., Kach A. M., Turetsky D. *Limitwise monotonic functions and their applications* // Proceedings of the 11th Asian Logic Conference. – 2012. – P. 59–85.

[3] Фролов А. Н. Δ^0_2 *копии линейных порядков* // Алг. и лог. – 2006. – Т. 45, № 3. – 354–370 с.

[4] Frolov A. N. *Low linear orderings* // J. Log. Comp. – 2002. – V. 22, No 4. – P. 745–754.

ЛИФТЫ ПРОЕКТИРУЕМЫХ ЛИНЕЙНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ НА ТРАНСВЕРСАЛЬНЫЕ РАССЛОЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

С. К. Зубкова[1], В. В. Шурыгин[2]

---

[1] *kuzmina_s@list.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского

[2] *Vadim.Shurygin@kpfu.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского

Пусть $(M,\mathscr{F})$ — многообразие размерности $n+m$ со слоением коразмерности n [1]. Трансверсальное расслоение $T^2_{tr}M$ многообразия $(M,\mathscr{F})$ [1] принадлежит к классу полукасательных расслоений [2] и несет на себе естественную структуру гладкого многообразия над алгеброй $\mathbb{D}^2$ усеченных многочленов $a+b\varepsilon+c\varepsilon^2$ степени $\leqslant 2$ одного переменного ε, моделируемого $\mathbb{D}^2$-модулем $(\mathbb{D}^2)^n \oplus \mathbb{R}^m$ [2,3]. Локальная карта

$\{x^i, y^\alpha\}$ из атласа слоения (x^i, $i = 1,\dots,n$, — базовые координаты, y^α, $\alpha = 1,\dots,m$, — слоевые) индуцирует локальную карту $\{X^i = x^i + \varepsilon\dot{x}^i + \varepsilon^2\ddot{x}^i, y^\alpha\}$ на $T^2_{tr}M$. Расслоение $T^2_{tr}M$ несет на себе слоение $\mathscr{F}_{tr}$ с базовыми координатами X^i, называемое лифтом [1] слоения $\mathscr{F}$. Проектируемая линейная связность ∇ на $(M,\mathscr{F})$ в локальных координатах в простой по отношению к слоению окрестности задается коэффициентами $\Gamma^i_{jk}(x^\ell)$, $\Gamma^\alpha_{\beta k}(x^\ell, y^\delta)$, $\Gamma^\alpha_{j\gamma}(x^\ell, y^\delta)$, $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x^\ell, y^\delta)$, $\Gamma^\alpha_{jk}(x^\ell, y^\delta)$, $\Gamma^i_{j\gamma} = \Gamma^i_{\beta k} = \Gamma^i_{\beta\gamma} = 0$. Применение функтора T^2_{tr} к связности ∇ приводит к $\mathbb{D}^2$-гладкой $\mathbb{D}^2$-линейной связности $T^2_{tr}\nabla$ на $T^2_{tr}M$, называемой лифтом [2] связности ∇. Коэффициенты связности $T^2_{tr}\nabla$ получаются из коэффициентов связности ∇ заменой $\Gamma^i_{jk}(x^\ell)$ на $\widetilde{\Gamma}^i_{jk}(X^\ell) = \Gamma^i_{jk}(x^\ell) + \varepsilon\dot{x}^\ell\partial_\ell\Gamma^i_{jk} + \varepsilon^2\left(\ddot{x}^j\partial_\ell\Gamma^i_{jk} + \frac{1}{2}\dot{x}^\ell\dot{x}^p\partial^2_{\ell p}\Gamma^i_{jk}\right)$.

Ставится вопрос о нахождении условий, при которых $\mathbb{D}^2$-диффеоморфизм $F : T^2_{tr}M \to T^2_{tr}M'$ между двумя трансверсальными расслоениями, являющийся морфизмом слоений, переводит лифт проектируемой связности $T^2_{tr}\nabla$ в лифт некоторой проектируемой связности. Этот вопрос сводится к случаю диффеоморфизма $F : T^2_{tr}M \to T^2_{tr}M$, проектирующегося в тождественный диффеоморфизм многообразия M. Такой $\mathbb{D}^2$-диффеоморфизм в локальных координатах задается уравнениями $X'^i = F^i(X^k) = x^i + \varepsilon(\dot{x}^i + g^i(x^k)) + \varepsilon^2(\ddot{x}^i + \dot{x}^j\partial_j g^i + h^i(x^k))$, $y'^\alpha = y^\alpha$. Кроме того, с ним можно ассоциировать два проектируемых сечения g и w трансверсального расслоения (первого порядка) $T_{tr}M$, определяемых в локальных координатах уравнениями $\dot{x}^i = g^i$ и $\dot{x}^i = h^i - \frac{1}{2}g^k\partial_k g^i$.

Теорема. *Лифт $T^2_{tr}\nabla$ проектируемой линейной связности ∇ инвариантен относительно $\mathbb{D}^2$-гладкого диффеоморфизма $F : T^2_{tr}M \to T^2_{tr}M$, сохраняющего слоение $\mathscr{F}_{tr}$ и проектирующегося в тождественный диффеоморфизм многообразия M, тогда и только тогда, когда обращаются в нуль производные Ли $\mathscr{L}_g\nabla$ и $\mathscr{L}_w\nabla$ объекта связности ∇ по отношению к сечениям g и w, ассоциированным с диффеоморфизмом F.*

Литература

[1] Molino P. *Riemannian foliations.* –Birkhäuser, 1988. – 339 p.

[2] Вишневский В. В. *Интегрируемые аффинорные структуры и их плюральные интерпретации.* // Итоги науки и техники ВИНИТИ. – 2002. – Т. 73. – Соврем. мат. и ее прил. Темат. обзоры. – С. 5–64.

[3] Шурыгин В. В. *Гладкие многообразия над локальными алгебрами и расслоения Вейля.* // Итоги науки и техники ВИНИТИ. – 2002. – Т. 73. – Соврем. мат. и ее прил. Темат. обзоры. – С. 162–236.

ФУНКЦИИ С ВАРИАЦИОННО-КООРДИНАТНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОСТЬЮ НАД ГРУППОЙ

А. И. Зуева[1], А. В. Карпов[2]

---

[1] *blackhawksif@gmail.com*, Томский Государственный Университет
[2] *karpov@isc.tsu.ru*, Томский Государственный Университет

В работе [1] определен класс функций с вариационно-координатной полиномиальностью (ВКП-функций) над примарным кольцом вычетов. Настоящая работа обобщает класс ВКП-функций на случай, когда полиномы рассматриваются над группой с нормальным рядом. Пусть далее $\mathbb{G}$ — группа с нормальным рядом

$$\mathbb{G} = H_0 \trianglerighteq H_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq H_n = e. \tag{1}$$

Определение 1. *Функции* $\gamma_k : \mathbb{G} \to H_k$, *для* $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, *будем называть координатными функциями группы* $\mathbb{G}$ *относительно нормального ряда (1), если произвольный элемент* $g \in \mathbb{G}$ *однозначно представляется в виде произведения своих координат* $g = \gamma_0(g)\gamma_1(g)\cdots\gamma_{n-1}(g)$.

Координатные функции определяются способом выбора представителей в факторах ряда (1).

Определение 2. *Полиномом над группой* $\mathbb{G}$ *от переменной x будем называть выражение вида* $p(x) = g_1 x^{\varepsilon_1} g_2 x^{\varepsilon_2} \ldots g_m x^{\varepsilon_m}$, *где все «коэффициенты»* g_i *— элементы группы* $\mathbb{G}$, *а экспоненты* ε_i *принимают значения 1 либо -1.*

Определение 3. *Функцию* $f : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ *будем называть функцией с вариационно-координатной полиномиальностью или, коротко, ВКП-функцией, если существуют полиномы* $p_0, \ldots, p_{n-1}$, *такие что для произвольных* $g \in \mathbb{G}, k \in \{0, \ldots, n-1\}$ *выполняется* $\gamma_k(f(g)) = \gamma_k(p_k(g))$.

Очевидно, что класс ВКП-функций включает в себя класс полиномиальных функций. Обратное включение не выполняется.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbb{G} = UT_n(\mathbb{Z}_p) \geqslant UT_n^2(\mathbb{Z}_p) \geqslant \cdots \geqslant UT_n^n(\mathbb{Z}_p) = e$, *и* $n \geqslant 3$. *Тогда класс ВКП-функций над* $\mathbb{G}$ *не совпадает с классом полиномиальных функций.*

Таким образом, ВКП-функции над группой дают новый конструктивный пример дифференцируемых функций, изучавшихся в [2]. В частности, критерий биективности для ВКП-функций над $UT_n(\mathbb{Z}_p)$ дает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbb{G} = UT_n(\mathbb{Z}_p) \geqslant UT_n^2(\mathbb{Z}_p) \geqslant \cdots \geqslant UT_n^n(\mathbb{Z}_p) = e$, $f : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ *— ВКП-функция, заданная полиномами* $p_0, \ldots, p_{n-2}$. *Тогда* f *биективна на* $\mathbb{G}$, *если и только если выполняются следующие два условия:*

1. p_0 *биективен по модулю* $UT_n^2(\mathbb{Z}_p)$,
2. *степени полиномов* $p_0, \ldots, p_{n-2}$ *взаимно просты с* p.

Литература

[1] Заец М. В. *О классе вариационно-координатно-полиномиальных функций над примарным кольцом вычетов* // Прикладная дискретная математика. – 2014. – № 3. – С. 12–27.

[2] Карпов А. В. *Обращение дифференцируемых перестановок над группой* // Прикладная дискретная математика. Приложение. – 2015. – № 8. – С. 30–33.

К РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНОЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ Г. П. ЧЕРЕПАНОВА

А. Р. Зулькарняев[1], Ю. В. Обносов[2]

---

[1] *aiki256@gmail.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И.Лобачевского

[2] *yobnosov@kpfu.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И.Лобачевского

В работах [1], [2] рассматривалась задача о построении функции $w(z)$, голоморфной в верхней полуплоскости $\overline{\mathbb{C}^+} = \{z : \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ и непрерывной в ее замыкании $\overline{\mathbb{C}^+}$, по следующим краевым условиям:

$$\operatorname{Re}\left\{\overline{A(x)}\,w(x)\right\} = 0,\ x \in L, \tag{1}$$

$$|w(x)| = a(x), \quad x \in M, \tag{2}$$

где $L = \cup_{k=1}^{n} l_k$, $M = \cup_{k=1}^{n} m_k = \mathbb{R}/\overline{L}$, $l_k = (x_{2k-1}, x_{2k})$, $m_k = (x_{2k}, x_{2k+1})$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n}$, $x_1 = x_{2n+1}$, $m_n = (-\infty, x_1) \cup (x_{2n}, \infty)$. Непрерывные по Гельдеру коэффициенты $A(x)$ и $a(x)$ не обращаются в ноль на $\overline{L}$ и $\overline{M}$ соответственно. Г.П. Черепанов привел общий вид решения задачи (1), (2) в классе функций с фиксированными внутренними и граничными нулями при условии выполнения $n-1$ условий разрешимости.

В частных случаях $n = 1$ и $n = 2$ полное решение задачи (1), (2) было дано в [3] и [4] соответственно. В настоящей работе доказывается, что условия разрешимости, полученные Черепановым, сводятся к вещественному аналогу проблемы обращения Якоби на гиперэллиптической Римановой поверхности $\mathfrak{R}$, определяемой уравнением

$$\chi^2(z) = \prod_{k=1}^{2n} (z - x_k).$$

Тем самым устанавливается факт безусловной разрешимости поставленной задачи в классе мероморфных в верхней полуплоскости функций, суммарное число нулей и полюсов которых не превышает $n-1$, а их местоположение определяется решением проблемы обращения. С помощью построенного таким образом частного решения находится общее мероморфное решение задачи (1), (2), которое затем сужается до голоморфного.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (тема 14-46).

Литература

[1] Черепанов Г. П. *Упруго-пластическая задача в условиях антиплоской деформации* // ПММ – 1962. – № 4. – С. 697–708.

[2] Черепанов Г. П. *Об одной нелинейной задаче теории аналитических функций, встречающейся в некоторых упруго-пластических задачах* // ДАН СССР –1962. – Т. 147. – № 3. – С. 566–568

[3] Обносов Ю. В. *Решение одной нелинейной смешанной краевой задачи теории аналитических функций* // Извю вузов Матем. –1975. – № 6. – С. 96-102.

[4] Обносов Ю. В. *Решение нелинейной смешанной краевой задачи Г.П.Черепнова в классе голоморфных функций в случае $n \leqslant 2$* // Теория функц. компл. перем. и краевые задачи. Межвуз. сб. – Чебоксары, 1982. – В. 4. – С. 70-76.

О СТРУКТУРНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ РАВНОМЕРНО РЕКУРСИВНО ОТДЕЛИМЫХ МОДУЛЯРНЫХ РЕШЕТОК

Ф. Н. Ибрагимов[1]

---

[1] *farkh-i@yandex.com*, Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

С неопределяемыми понятиями можно ознакомиться в [1,2].

Пусть $(\mathfrak{A}, \nu), (\mathfrak{B}, \mu)$ — нумерованные алгебры и φ — гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Тогда φ называется морфизмом (из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$), если он эффективен на номерах, т.е. $\varphi\nu = \mu f$ для подходящей вычислимой функции f. Все рассматриваемые нами гомоморфизмы, вполне естественно, являются морфизмами [1]. Если $(\mathfrak{A}, \nu)$ — нумерованная алгебра и K — класс нумерованных алгебр, то говорят, что $(\mathfrak{A}, \nu)$ аппроксимируется К-алгебрами, если для всякой пары различных элементов алгебры $\mathfrak{A}$ найдется гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в некоторую $K-$алгебру, различающий эти элементы.

Нумерованная алгебра $(\mathfrak{A}, \nu)$ называется рекурсивно отделимой, если для всякой пары различных элементов этой алгебры существует отделяющее их ν-вычислимое подмножество. Если отделяющие подмножества не просто существуют, но и строятся равномерно эффективно (по заданной паре различных элементов), то нумерованная алгебра называется равномерно рекурсивно отделимой.

Соответственно, нумерованная алгебра называется равномерно K-аппроксимируемой (в фиксированном классе K нумерованных алгебр некоторого типа), если существует единообразная эффективная процедура построения системы K-разделяющих гомоморфизмов. Известна следующая характеризация равномерно рекурсивно отеделимых алгебр [2]:

Нумерованная алгебра равномерно рекурсивно отделима тогда и только тогда, когда она равномерно аппроксимируется негативными алгебрами.

Эта основная теорема структурной характеризации равномерно рекурсивно отделимых универальных алгебр, приложенная к классам конкретных алгебраических систем, как оказалось, позволяет получать более тонкие свойства аппроксимирующих алгебр как с алгебраической, так и с алгоритмической точек зрения.

Теорема 1. *Для произвольной не более чем счетной нумерованной модулярной решётки* $(\mathfrak{L}, \nu)$ *следующие условия равносильны:*

(1) $(\mathfrak{L}, \nu)$ *— равномерно рекурсивно отделима;*

(2) $(\mathfrak{L}, \nu)$ *равномерно аппроксимируется модулярными негативными решётками.*

Заметим, что фактор-решетка модулярной решетки вообще говоря немодулярна.

В теории конечно-определенных алгебр важные приложения имеют финитно аппроксимируемые алгебры [2].

Следствие 1. *Пусть* $\mathfrak{L}$ *— модулярная решётка, обладающая равномерно рекурсивно отделимой нумерацией* ν *с иммунной характеристической трансверсалью (т.е. иммунным множеством* $\{m \mid \nu m = \nu n \Rightarrow m < n\}$*). Тогда* $\mathfrak{L}$ *финитно аппроксимируется модулярными решётками.*

Литература

[1] Ершов Ю. Л. *Теория нумераций.* – М.: Наука, 1977.

[2] Касымов Н. Х. *Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры.* // УМН. – 1996. – Т. 51. – № 3. – С. 145–176.

КАНОНИЧЕСКИЙ БАЗИС ГЕНЗЕЛЯ–ШАФАРЕВИЧА ДЛЯ ФОРМАЛЬНЫХ МОДУЛЕЙ ХОНДЫ

Е. В. Иконникова[1]

Пусть K_0 — полное дискретно нормированное поле, $\mathrm{char}\, K_0 = 0$, O_0 — кольцо целых K_0, k_0 — поле вычетов K_0, $\mathrm{char}\, k_0 = p \neq 2$.

Предположим, что K — полное дискретно нормированное поле, содержащее K_0, с произвольным полем вычетов k характеристики p.

Пусть $F(X,Y)$ — формальная группа Хонды над O_0, $F(M)$ — формальный O_0-модуль, натянутый на максимальный идеал M поля K.

В данной работе строится система образующих для $F(M)$, являющаяся обобщением широко известной конструкции базиса Гензеля–Шафаревича.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант №14-21-00035.

Литература

[1] Honda T. *On the theory of commutative formal groups* // J. Math. Soc. Japan. — 1970. — V. 22. — P. 213–243.

[2] Hazewinkel M. *Formal groups and applications*. — New York : Acad. Press, 1978.

[3] Демченко О. В. *Формальные группы Хонды: арифметика группы точек* // Алгебра и анализ, 12:1 (2000), с. 132–149.

---

[1] *ikonnikovaev@gmail.com*, Лаборатория им. П. Л. Чебышева, Санкт-Петербургский государственный университет

О ПОЛУКОЛЬЦАХ, НАД КОТОРЫМИ ВСЕ ПРОСТЫЕ ПОЛУМОДУЛИ ПРОЕКТИВНЫ

С. Н. Ильин[1]

---

[1] *Sergey.Ilyin@kpfu.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

Сравнительно недавно в [1] и [2] был представлен ряд результатов о V-полукольцах, то есть полукольцах, над которыми все простые полумодули инъективны. Рассмотрим полукольца, обладающие "двойственным" свойством, а именно, назовем полукольцо S правым (левым) V^*-полукольцом, если все простые правые (левые) S-полумодули проективны. Известно (см., напр., [3, п. 7.6]), что в кольцевом случае указанное свойство характеризует классически полупростые кольца, в связи с чем естественный интерес представляют вопросы о возможности обобщения известных фактов о полупростых кольцах на случай V^*-полуколец. Ниже представлены некоторые результаты в данном направлении.

Напомним, что полукольцо S называется зероидным, если для любого $a \in S$ уравнение $a + x = x$ разрешимо в S. Элемент $z \in S$ называется бесконечным, если $a + z = z$ для всех $a \in S$. Положим $I(S) = \{e \in S : e + e = e, e^2 = e\}$; $V(S)$ есть идеал всех аддитивно-обратимых элементов из S и $\equiv_{V(S)}$ — конгруэнция Бёрна на S по $V(S)$, то есть $x \equiv_{V(S)} y \Leftrightarrow x + u = y + v$ для некоторых $u, v \in V(S)$.

Предложение 1. *Полукольцо S есть правое V^*-полукольцо ровно тогда, когда $S = R \oplus T$, где R — полупростое кольцо, а T — зероидное правое V^*-полукольцо.*

Теорема 2. *Всякое правое V^*-полукольцо является правым V-полукольцом.*

Теорема 3. *Зероидное полукольцо S является правым V^*-полукольцом ровно тогда, когда существуют взаимно ортогональные идемпотенты $z_1, \ldots, z_k \in I(S)$, такие что 1) $z_1 + \ldots + z_k$ — бесконечный элемент для S и 2) все простые правые S-полумодули с точностью до изоморфизма исчерпываются попарно неизоморфными друг другу простыми полумодулями $z_1S, \ldots, z_kS$.*

Предложение 4. *Пусть для фактор-полукольца $\bar{S} = S/\equiv_{V(S)}$ выполнено хотя бы одно из условий: 1) $\bar{S}$ конечно и 2) $\bar{S}$ содержит бесконечный элемент $\bar{z}$, такой что $\bar{z}\bar{s} = \bar{s}\bar{z}$ для всех $\bar{s} \in \bar{S}$. Тогда для S условия "быть правым V^*-полукольцом" и "быть левым V^*-полукольцом" равносильны.*

В дополнение к предложению 4 установлено, что в отличие от кольцевого случая классы правых и левых V^*-полуколец различны, а именно, построен пример зероидного правого V^*-полукольца, не являющегося левым V^*-полукольцом.

Работа выполнена за счет финансовых средств субсидии, выделенной Казанскому (Приволжскому) федеральному университету на выполнение гос. задания, проект №1.2045.2014

Литература

[1] Ильин С. Н. *V-полукольца* // Сиб. матем. журн. – 2012. – Т. 53. – № 2. – С. 277–290.

[2] Abuhlail J. Y., Il'in S. N., Katsov Y., Nam T. G. *On V-semirings and semirings all of whose cyclic semimodules are injective* // Commun. Algebra. – 2015. – V. 43. – N 11. – P. 4632–4654.

[3] Туганбаев А. А. *Теория колец. Арифметические модули и кольца.* – М.: МЦНМО, 2009. – 472 с.

О БЕЗУСЛОВНЫХ БАЗИСАХ ИЗ ЭКСПОНЕНТ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НА ИНТЕРВАЛЕ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

К. П. Исаев[1], Р. С. Юлмухаметов[2]

---

[1] *orbit81@list.ru*, Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра Российской академии наук

[2] *yulmukhametov@mail.ru*, Башкирский государственный университет

Нами рассматривается задача о существовании безусловных базисов из экспонент в гильбертовых пространствах

$$L_2(h) = \{f \in L_{\text{loc}}(-1,1) : ||f||^2 = \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 e^{-2h(t)} dt < \infty\},$$

где h — выпуклая функция на $(-1,1)$.

В классическом случае, когда $h(t) \equiv 0$, система Фурье $\{e^{\pi n i}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует ортонормированный базис. Очевидно, что в других случаях ортонормированных базисов из экспонент в пространствах $L_2(h)$ не существует. Понятие базиса Рисса введено в [1] и обозначает образ ортонормированного базиса при ограниченном обратимом операторе.

Базис $\{e_k,\ k = 1,2,...\}$ в гильбертовом пространстве Í называется безусловным базисом (см. [2]), если для некоторых постоянных $c, C > 0$ и для любого элемента $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$, выполняется соотношение

$$c \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 ||e_k||^2 \leqslant ||x||^2 \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 ||e_k||^2.$$

Безусловный базис $\{e_k,\ k = 1,2,...\}$ становится базисом Рисса тогда и только тогда, когда $0 < \inf ||e_k|| \leqslant \sup ||e_k|| < \infty$.

В работе [3] доказано, что при определенных условиях регулярности роста весовой функции $h(t)$, если для любого $k \in \mathbb{N}$

$$e^{h(t)}(1-|t|)^k \to \infty,\ |t| \to 1,$$

то в пространстве $L_2(h)$ безусловных базисов из экспонент не существует.

Нами доказана следующая

Теорема. *Если для некоторого $\alpha < 0$*

$$(1-|t|)^{\alpha} = O(e^{h(t)}),\ t \to \pm 1,$$

то в пространстве $L_2(h)$ безусловных базисов из экспонент не существует.

Литература

[1] Бари Н. К. *О базисах в гильбертовом пространстве* // Доклады Академии наук. – 1946. –Т. 54. –С. 383–386.

[2] Никольский Н. К., Павлов Б. С., Хрущев С. В. *Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер. I.* –Препринт ЛОМИ. –Р-8–80.

[3] Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С. *О безусловных базисах из экспонент в гильбертовых пространствах* // Уфимский математический журнал. –2011. –Т.3. –№1. – С.3–15.

ЛОКАЛЬНАЯ СИСТЕМА КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ С МЕБИУСОВОЙ КООРДИНАТНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Г. Г. Исламов[1]

---

[1]*ggislamov@gmail.com*, Удмуртский государственный университет

Переменные изучаемой локальной системы координат образуют тройку (α,β,ϕ) с конечными пределами изменения $|\alpha| \leqslant A, |\beta| \leqslant B, \phi \in (0,2\pi)$. Здесь $A > B > 0$. Переход к декартовой системе (x,y,z) задаётся системой зависимостей

$$x = (\alpha+\beta\cos(\phi/2))cos\phi, y = (\alpha+\beta\cos(\phi/2))sin\phi, z = \beta\sin(\phi/2).$$

Координатные поверхности вида $\alpha = const$ представляют собой листы Мёбиуса.

При $x^2+y^2 \neq 0$ радиус-вектор $\vec{r} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, где $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ — единичный базис декартовой системы, определяет подвижный локальный репер $(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3) = (\frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha},\frac{\partial\vec{r}}{\partial\beta},\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi})$. Это неортогональный репер с отличным от нуля ориентированным объёмом

$$V = [\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3] = -(\alpha+\beta\cos(\phi/2))sin(\phi/2).$$

Вектора биортогонального к $(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3)$ базиса

$$\vec{e}_1 = (\vec{r}_2\times\vec{r}_3)/V, \quad \vec{e}_2 = (\vec{r}_3\times\vec{r}_1)/V, \quad \vec{e}_3 = (\vec{r}_1\times\vec{r}_2)/V$$

нельзя рассматривать в качестве подвижного репера некоторой сопутствующей локальной системы координат $\vec{R} = X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$, так как не выполнено необходимое условие совместности системы дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{\partial\vec{R}}{\partial\alpha},\frac{\partial\vec{R}}{\partial\beta},\frac{\partial\vec{R}}{\partial\phi}\right) = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3).$$

Матрица $G(\alpha,\beta,\gamma)$ перехода от биортогонального базиса $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ к подвижному реперу $(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & cos[\frac{\phi}{2}] & -\frac{1}{2}\beta\sin[\frac{\phi}{2}] \\ \cos[\frac{\phi}{2}] & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta\sin[\frac{\phi}{2}] & 0 & \alpha^2+\frac{3}{4}\beta^2+2\alpha\beta\cos[\frac{\phi}{2}]+\frac{1}{2}\beta^2 cos\phi) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что обратная матрица $M(\alpha,\beta,\gamma) = G^{-1}(\alpha,\beta,\gamma)$ совпадает с матрицей Грама биортогонального базиса, которая равна обратной матрице Грамма подвижного репера криволинейной системы координат.

В работе рассматриваются шесть типов решений спектральной задачи для ротора $\lambda\vec F = \mathrm{rot}\,\vec F$. Поля каждого типа оказываются ортогональными полями к соответствующим векторам подвижного репера $(\vec r_1,\vec r_2,\vec r_3)$ исходной системы координат, или же векторам биортогонального базиса $(\vec e_1,\vec e_2,\vec e_3)$.

В терминах координат F_1, F_2, F_3 разложения вектора $\vec F$ по векторам биортогонального базиса

$$\vec F = F_1(\alpha,\beta,\phi)\vec e_1 + F_2(\alpha,\beta,\phi)\vec e_2 + F_3(\alpha,\beta,\phi)\vec e_3$$

получены координаты G_1, G_2, G_3 разложения вектора $\vec F$ по векторам подвижного репера $(\vec r_1,\vec r_2,\vec r_3)$ и векторно-матричная форма спектральной задачи для ротора

$$\lambda F = A(\xi)\partial_\xi F_1 + B(\xi)\partial_\xi F_2 + C(\xi)\partial_\xi F_3.$$

Здесь $F = \mathrm{colon}(F_1,F_2,F_3)$ – вектор-столбец, $\xi = (\alpha,\beta,\phi)$ – набор локальных криволинейных координат, $A(\xi), B(\xi), C(\xi)$ – конкретные матрицы третьего порядка, $\partial_\xi F_k = \mathrm{colon}(\partial F_k/\partial\alpha, \partial F_k/\partial\beta, \partial F_k/\partial\phi)$, $k = 1,2,3$ – вектор-столбцы, составленные из частных производных по независимым переменным локальной системы криволинейных координат.

О ТРЕХ ТИПАХ РЕШЕНИЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ РОТОРА В КРИВОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Г. Г. Исламов[1]

---

[1] *ggislamov@gmail.com*, Удмуртский государственный университет

Решение $\vec F$ спектральной задачи для ротора $\lambda\vec F = \mathrm{rot}\,\vec F$ в общей криволинейной системе координат (α,β,γ) с подвижным локальным репером $(\vec r_1,\vec r_2,\vec r_3)$ запишем в виде разложения $\vec F = F_1(\alpha,\beta,\gamma)\vec e_1 + F_2(\alpha,\beta,\gamma)\vec e_2 + F_3(\alpha,\beta,\gamma)\vec e_3$ по векторам биортогонального к $(\vec r_1,\vec r_2,\vec r_3)$ базиса $\vec e_1 = (\vec r_2\times\vec r_3)/[\vec r_1,\vec r_2,\vec r_3], \vec e_2 = (\vec r_3\times\vec r_1)/[\vec r_1,\vec r_2,\vec r_3], \vec e_3 = (\vec r_1\times\vec r_2)/[\vec r_1,\vec r_2,\vec r_3]$, где $[\vec r_1,\vec r_2,\vec r_3]$ — смешанное произведение векторов подвижного репера.

Для ротора имеем разложение по векторам подвижного репера $\mathrm{rot}\,\vec F = \{(\partial F_3/\partial\beta - \partial F_2/\partial\gamma)\vec r_1 + (\partial F_1/\partial\gamma - \partial F_3/\partial\alpha)\vec r_2 + (\partial F_2/\partial\alpha - \partial F_1/\partial\beta)\vec r_3\}/[\vec r_1,\vec r_2,\vec r_3]$. Вычисляя матрицу $[\vec r_1,\vec r_2,\vec r_3]M(\alpha,\beta,\gamma)$, где $M(\alpha,\beta,\gamma)$ — матрица перехода от подвижного репера к биортогональному базису, можем получить систему трёх дифференциальных уравнений в частных производных для отыскания координат $F_1(\alpha,\beta,\gamma)$, $F_2(\alpha,\beta,\gamma)$, $F_3(\alpha,\beta,\gamma)$.

Заметим, что $M(\alpha,\beta,\gamma)$ совпадает с матрицей Грамма биортогонального базиса, которая равна обратной матрице Грамма подвижного репера криволинейной системы координат.

В случае ортогональной системы координат скалярная форма спектральной задачи для ротора принимает следующий вид

$$\begin{cases} \lambda F_1(\alpha,\beta,\gamma)g_1 = \partial F_3/\partial\beta - \partial F_2/\partial\gamma, \\ \lambda F_2(\alpha,\beta,\gamma)g_2 = \partial F_1/\partial\gamma - \partial F_3/\partial\alpha, \\ \lambda F_3(\alpha,\beta,\gamma)g_3 = \partial F_2/\partial\alpha - \partial F_1/\partial\beta. \end{cases}$$

Здесь сопутствующие коэффициенты g_1, g_2, g_3 определяются через коэффициенты Ламэ $h_1 = |\vec{r}_1|, h_2 = |\vec{r}_2|, h_3 = |\vec{r}_3|$ по формулам $g_1 = (h_2 * h_3)/h_1, g_2 = (h_1 * h_3)/h_2, g_3 = (h_1 * h_2)/h_3$. При этом решение спектральной задачи для ротора имеет следующее разложение по векторам подвижного репера $\vec{F} = (F_1(\alpha,\beta,\gamma)/h_1^2)\vec{r}_1 + (F_2(\alpha,\beta,\gamma)/h_2^2)\vec{r}_2 + (F_3(\alpha,\beta,\gamma)/h_3^2)\vec{r}_3$.

В локальной системе ортогональных криволинейных координат (α,β,γ), определяемом фиксированным тором с большой окружностью B и малой окружностью $A, B > A$, формулы перехода от криволинейной системы координат к декартовой выберем в виде $x = (B + \alpha\cos\beta)\cos\gamma, y = (B + \alpha\cos\beta)\sin\gamma, z = \alpha\sin\beta$. Здесь первая координата α (малый радиус вращения) удовлетворяет ограничению $0 \leqslant \alpha \leqslant A$. Вторая координата β (угол поворота в малой окружности) и третья координата γ (угол поворота в большой окружности) меняются в интервале $[0, 2\pi)$. Простые вычисления показывают, что в этом случае $g_1 = \alpha(B + \alpha\cos\beta), g_2 = (B + \alpha\cos\beta)/\alpha, g_3 = \alpha/(B + \alpha\cos\beta)$. В работе рассматриваются три класса решений спектральной задачи для ротора, определяемых соответственно условиями $F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = 0$. Поля каждого типа оказываются касательными полями к координатным поверхностям этой локальной системы координат.

Литература

[1] Исламов Г. Г. *Об одном классе векторных полей* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 19:4 (2015), 680–696.

ВРАЩЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А.А. Исмагилов, И. Р. Каюмов[1], Н.З. Шакиров

---

[1] *ikayumov@kpfu.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

Пусть $f = h + \overline{g}$ – гармоническое отображение круга $\mathbb{D}$ на однолистную область на комплексной плоскости. Здесь g и h – аналитические компоненты этого отображения. С. Поннусами [1] была выдвинута гипотеза, которая состоит в том, что найдется вещественное число α такое, что функция $h + e^{i\alpha}g$ является однолистной в круге $\mathbb{D}$.

Нами построены достаточно широкие классы гармонических отображений, в которых эта гипотеза справедлива.

Литература

[1] Ponnusamy S., Kaliraj A. S. *On the coefficient conjecture of Clunie and Sheil-Small on univalent harmonic mappings* // Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.). — Vol. 125. — No. 3. — P. 277–290.

УСЛОВИЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ СПЕКТРА КОМПЛЕКСНОГО АНГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Х. К. Ишкин[1]

---

[1] *ishkin62@mail.ru*, Башкирский государственный университет

Пусть H_θ – оператор, порожденный в $L^2(0,\infty)$ дифференциальным выражением $-y'' + e^{i\theta} x^\alpha y$ и краевым уловием $y(0) = 0$, где где $\theta \in (-\pi,\pi), \alpha \in (0,+\infty)$ – постоянные.

Известно [1], что при каждом $\theta \in (-\pi,\pi)$ спектр H_θ состоит из простых (алгебраической кратности 1) собственных чисел. Если $\{\lambda_k(\theta)\}_1^\infty$ – собственные числа H_θ, пронумерованные в порядке неубывания модулей, то (см. [2]) $\lambda_k(\theta) = \lambda_k(0) e^{\frac{2\theta i}{2+\alpha}}$, $\lambda_k(0) \sim C(\alpha) \cdot k^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}$, $k \to \infty$, где $C(\alpha) > 0$ – явно вычисляемая константа.

Пусть $L_\theta = H_\theta + V$, где V – оператор умножения на функцию $V(\cdot) \in L^1_{loc}[0,\infty)$, такую, что спектр L_θ дискретен. Обозначим через $\{\mu_k(\theta)\}_1^\infty$ – собственные числа L_θ, пронумерованные в порядке неубывания модулей. В работе [3] показано, что если функция V

А) локально суммируема на $[0,+\infty)$, допускает аналитическое продолжение в угол $U_\theta = \{-\theta/(2+\alpha) < \arg z < 0\}$, непрерывно продолжается до любой конечной точки границы угла U_θ,

Б) удовлетворяет оценке $V(z) = o(z^\alpha)$, $z \to \infty$, равномерно по $-\theta/(2+\alpha) \leqslant \arg z \leqslant 0$, то

$$\mu_k(\theta) \sim \lambda_k(\theta), \ k \to \infty. \tag{1}$$

Вместе с тем, при $\theta = 0$ для выполнения (1) достаточно, чтобы $V(x) = o(q(x))$, $x \to +\infty$. В связи с этим возникает вопрос о необходимости условий А) – Б).

Будем говорить, что спектр оператора T с компактной резольвентой локализован около луча $\arg\lambda = \varphi_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ $N(T,\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon, r) \sim N(T,r)$, $r \to \infty$, где $N(T,\eta,\zeta,r)$ и $N(T,r)$ — число собственных значений оператора T соответственно в секторе $\{\eta < \arg\lambda < \zeta, \ |\lambda| < r\}$ и круге $\{|\lambda| < r\}$.

Теорема. *Существует мероморфная в угле* $\{z : -\theta/(2+\alpha) < \arg z < 0\}$ *функция* V *такая, что*

1) *При некотором* $-\frac{\theta}{2+\alpha} < \beta < 0$ *точки* $z_k = e^{-i\beta} r_k$, $0 < r_k \to \infty$, $k \in \mathbb{N}$, *являются полюсами второго порядка функции* V*;*

2) *Собственные числа оператора* L_θ *локализованы около луча* $\arg\lambda = \frac{2\theta}{2+\alpha}$.

Работа поддержана грантами № 01201456408 Министерства образования и науки РФ и № 15-01-01095 Российского фонда фундаментальных исследований. Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 01201456408), РФФИ (проект № 15-01-01095).

Литература

[1] Лидский В Б. *Условия полноты системы корневых подпространств у несамосопряженных операторов с дискретным спектром* // Тр. ММО. –1959. – Т. 8. – С. 83—120.

[2] Davies B. *Wild spectral behaviour on anharmonic oscillators* // Bull. London Math. Soc. – 2000. – Vol. 32. – №. 4. – PP. 432–438.

[3] Ишкин Х. К. *О спектральной неустойчивости оператора Штурма–Лиувилля с комплексным потенциалом* // Дифф. уравнения. –2009. – Т. 45. – № 4. – С. 480–495.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ИНВАРИАНТНЫХ ПСЕВДОХАРАКТЕРОВ НА СВОБОДНЫХ ГРУППАХ

Д. З. Каган[1]

---

[1] *dmikagan@gmail.com*, Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II

Псевдохарактером на произвольной группе G называется функция φ из группы G в пространство действительных чисел R, для которой

1) выполняется неравенство $\varphi(xy) - \varphi(x) - \varphi(y) \leqslant \varepsilon$ для любых элементов $x, y \in G$ и некоторого положительного числа $\varepsilon > 0$;

2) $\varphi(x^n) = n\varphi(x)$ для любых $x \in G, n \in R$.

Нетривиальным называется псевдохарактер, для которого существуют элементы $a, b \in G$, такие, что $\varphi(ab) \neq \varphi(a) + \varphi(b)$.

Понятие псевдохарактеров было определено А. И. Штерном в 1983 году [1]. Псевдохарактеры связваны со многими важными характеристиками групп. Р. И. Григорчук [2] показал зависимость размерности второй группы когомологий от существования на группе нетривиальных псевдохарактеров. Также из существования нетривиальных псевдохарактеров следует бесконечность ширины вербальных подгрупп, определенных конечным собственном множеством слов из коммутанта [3].

В. А. Файзиев [4] доказал существование нетривиальных псевдохарактеров на свободных произведениях неединичных групп, за исключением $Z_2 * Z_2$. Р. И. Григорчук [2] выявил условия существования нетривиальных псевдохарактеров для свободных произведений с объединением и HNN-расширений. В работе [5] доказаны некоторые утверждения о нетривиальных псевдохарактерах на аномальных произведений различных групп с бесконечной циклической группой.

Р. И. Григорчук [2] сформулировал вопрос о наличии нетривиальных псевдохарактерах на свободных группах $F_n, n > 1$, инвариантных относительно изоморфизма свободной группы $\alpha\colon F \to F_0$ на свою подгруппу $F_0 \in F$. Пусть $F_n =< a_0, a_1, \dots, a_{n-1} >$, $n > 1$ — свободная группа. Рассматриваются эндоморфизмы, определенные следующими отображениями порождающих $a_0 \to a_1, \dots, a_{n-2} \to a_{n-1}, a_{n-1} \to U_0(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, где U_0 — некоторый элемент $F_n =< a_0, a_1, \dots, a_{n-1} >$.

Рассмотрим группу F_n, как свободное произведение бесконечных циклических групп $F_n =< a_0 > * < a_1 > * \ldots * < a_{n-1} >$. Зададим на каждой группе $< a_i >, i = 0, 1, \ldots, n-1$ отображение $s : s(a_i^p) = \{1,\ p > 0;\ -1, p < 0\}$. Функцию f определим, как сумму значений отображения s на слогах каждого элемента $f(a_{i_1}^{r_1} a_{i_2}^{r_2} \ldots a_{i_p}^{r_p}) = s(a_{i_1}^{r_1}) + s(a_{i_2}^{r_2}) + \ldots + s(a_{i_p}^{r_p})$.

Теорема 1. [6] *Пусть* $F_n =< a_0, \ldots, a_{n-1} >$ *— свободная группа ранга* $n > 1$, *и на ней определен эндоморфизм, при котором* $a_0 \to a_1, \ldots, a_{n-2} \to a_{n-1}, a_{n-1} \to U_0(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$. *Если несократимая запись* U_0 *начинается и заканчивается положительными степенями* a_0, *и* $f(U_0) = 1$, *то на свободной группе* F_n *существует нетривиальный псевдохарактер, инвариантный относительно рассматриваемого эндоморфизма.*

В качестве примера, подходящего под условия теоремы, можно рассмотреть эндоморфизм свободной группы $F_4 =< a_0, a_1, a_2, a_3 >$ определяемый следующими преобразованиями порождающих
$a_0 \to a_1, a_1 \to a_2, a_2 \to a_3, a_3 \to a_0 a_1^{-1} a_2^3 a_3^{-3} a_0$.

Литература

[1] Штерн А. И. //*Квазипредставления и псевдопредставления* Функц. анализ и его прил. – 1991. – Т. 25, – №2. – С. 70–73.

[2] Григорчук Р. И. *Ограниченные когомологии групповых конструкций* // Математические заметки. – 1996. – 59. – Н. 4. – С. 546–550.

[3] Добрынина И. В., Каган Д. З. *О ширине вербальных подгрупп в некоторых классах групп.* // Чебышевский сборник. – 2015. – Т. 16. – В. 4. – С. 150–163.

[4] Файзиев В. А. *Об устойчивости одного функционального уравнения на группах* // Успехи мат. наук. – 1993. – 48, №1. – С. 193–194.

[5] Каган Д. З. *Псевдохарактеры на аномальных произведениях локально индикабельных групп.* Фунд. и прикл. математика. – 2006. – Т.12. – В.3. – С. 55–64.

[6] Каган Д. З. *Псевдохарактеры на свободных группах, инвариантные относительно некоторых типов эндоморфизмов* // Фунд. и прикл. математика. – 2012. – Т. 17. – N. 2. – С. 167–176.

О ДИАЛГЕБРАХ КЭЛИ–ДИКСОНА

И. Б. Кайгородов[1]

Понятие диалгебры как векторного пространства с двумя операциями умножения восходит к работам Куроша, но основной интерес к диалгебрам возник в результате работ Лодея 90-х годов прошлого века. В работах Лодея ассоциативные диалгебры (или диассоциативные алгебры) появляются как универсальные обертывающие для алгебр Лейбница, которые являются обобщением алгебр Ли. В дальнейшем,

---

[1] *kib@math.nsc.ru*, Институт матеамтики им. С.Л. Соболева

в работах Колесникова и Пожидаева были предложены методы определения диалгебр (в том числе и с n-арными умножениями) для произвольного полиномиального семейства тождеств. Так появились диалгебры Мальцева, структуризуемые диалгебры, альтернативные диалгебры и другие. С тех пор широко изучаются различные свойсва ассоциативных и неассоциативных диалгебр. Так, в работе Рихсибоева, Рахимова и Басри были описаны дифференцирования ассоциативных диалгебр малых размерностей; в работе Бокутя, Чена и Лю были изучены базисы Гребнера-Ширшова для ассоциативных диалгебр. В работах Пожидаева и Колесникова были получены связи между диалгебрами и конформными алгебрами, n-арными алгебрами и алгебрами Рота-Бакстера.

Процесс Кэли-Диксона (это процедура которая позволяет построить из действительных чисел комплексные числа, кватернионы, октонионы, седенионы и т.д.) допускает естественный аналог в случае диалгебр. Данный процесс на случай диалгебр был обобщен в работе Фелипе-Соза, Фелипе, Санчес-Ортега, Бремнера и Киньона в 2014 году.

В настоящией работе изучается строение 2-, 4- и 8-мерных диалгебр, полученных в результате применения процесса Кэли–Диксона. Дается описание алгебр дифференцирований, групп автоморфизмов, идеалов и основных поддиалгебр этих диалгебр.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-31-00096).

ОБ ОПЕРАТОРАХ С НЕСОБСТВЕННЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

А. С. Калитвин[1], В. А. Калитвин[2]

---

[1] *kalitvinas@mail.ru*, Липецкий государственный педагогический университет
[2] *kalitvin@mail.ru*, Липецкий государственный педагогический университет

Основы теории линейных операторов с частными интегралами построены в случае частных интегралов в смысле Лебега. Это влечет суммируемоть функций по переменным интегрирования. Уравнения с частными интегралами Лебега могут не иметь решений, хотя эти же уравнения с несобственными частными интегралами имеют решения. Поэтому рассмотрим операторы с частными несобственными интегралами.

Пусть $D = [0,\infty) \times [0,\infty)$. Через X обозначим множество определенных на D измеримых функций $x(t,s)$, суммируемых по каждой из переменных t и s на каждом конечном отрезке $[0,a]$, суммируемых по (t,s) на каждом квадрате $[0,a] \times [0,a]$ и удовлетворяющих условиям: несобственные интегралы

$$\int_0^\infty x(\tau,s)d\tau = \lim_{a\to\infty}\int_0^a x(\tau,s)d\tau, \int_0^\infty x(t,\sigma)d\sigma = \lim_{a\to\infty}\int_0^a x(t,\sigma)d\sigma,$$

сходятся равномерно относительно $s \in [0,\infty)$; $t \in [0,\infty)$; на D ограничены функции

$$u(a,s) = \int_0^a x(\tau,s)d\tau,\ v(t,a) = \int_0^a x(t,\sigma)d\sigma.$$

Отметим, что несобственные интегралы сходятся для любых $s,t \in [0,\infty)$, если функция $x(t,s)$ суммируема по t при любом $s \in [0,\infty)$, и суммируема по s при любом $t \in [0,\infty)$ соответственно. Равномерная сходимость интегралов относительно $s \in [0,\infty)$ и $t \in [0,\infty)$ имеет место, если существуют суммируемые на $[0,\infty)$ функции $\varphi(t)$ и $\psi(s)$, такие, что $|x(t,s)| \leqslant \varphi(t)$ и $|x(t,s)| \leqslant \psi(s)$.

В множестве X можно ввести счетную систему полунорм $\|x\|_n = \int_0^n \int_0^n |x(\tau,\sigma)| d\tau d\sigma$, $n = 1,\ldots$, $x \in X$. В этом случае X является локально выпуклым пространством Фреше относительно растояния $\rho(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\|x-y\|_n}{2^n(1+\|x-y\|_n)}$, $x,y \in X$.

Через X_0 обозначим множество определенных на D измеримых функций, суммируемых по каждой из переменных t и s на каждом конечном отрезке $[0,a_0]$ и для которых $\left|\int_0^a x(\tau,s)d\tau\right| \leqslant \text{const}$, $\left|\int_0^a x(\tau,s)d\tau\right| \leqslant \text{const}$, где $a,t,s \in [0,\infty)$.

Из приведенных определений видно, что $X \subset X_0$.

Пусть K — линейный оператор с частными интегралами:

$$(Kx)(t,s) = \int_0^\infty l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_0^\infty m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma, \qquad (1)$$

где $l(t,s,\tau)$ и $m(t,s,\sigma)$ — измеримые на $D \times [0,\infty)$ функции.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия: функция* $l(t,s,\tau)$ *монотонна по* τ *и* $|l(t,s,\tau)| \leqslant L$ $(L = \text{const},\ t,s,\tau \in [0,\infty))$; *функция* $m(t,s,\sigma)$ *монотонна по* σ *и* $|m(t,s,\sigma)| \leqslant M$ $(M = \text{const},\ t,s,\sigma \in [0,\infty))$.

Тогда оператор K *определен на пространстве* X. *При этом каждый из частных интегралов правой части равенства* (1) *сходится равномерно относительно* $(t,s) \in D$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, функция* $l(t,s,\tau) \to 0$ *при* $\tau \to +\infty$ *равномерно относительно* $t,s \in [0,\infty)$, *функция* $m(t,s,\tau) \to 0$ *при* $\sigma \to +\infty$ *равномерно относительно* $t,s \in [0,\infty)$.

Тогда оператор K *определен на пространстве* X_0. *При этом каждый из частных интегралов правой части равенства* (1) *сходится равномерно относительно* $(t,s) \in D$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (Госзадание, проект № 2015/351, НИР № 1815).

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ И ГОЛОМОРФНО-ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ В КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ

Т. В. Капустина[1]

---

[1] *tv_kapustina@mail.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Елабужский институт

Пусть $T_r(M)$ — касательное расслоение порядка r дифференцируемого многообразия M размерности n, класса C^∞, с аффинной связностью ∇. В [1] указаны связи геометрии касательного расслоения $T_r(M)$ с алгеброй плюральных чисел $\mathscr{R}(\varepsilon^r)$ $(\varepsilon^{r+1} = 0)$. В $T_r(M)$ действует так называемая почти касательная структура порядка r с аффинором f, обладающим свойством $f^{r+1} = 0$, которая тесно связана с алгеброй плюральных чисел и которую можно использовать для построения лифтов тензорных полей и связностей из M в $T_r(M)$.

Нами рассмотрены геодезические относительно синектической связности без кручения $\underset{r}{\Gamma}$ в $T_r(M)$. Получены дифференциальные уравнения этих геодезических в инвариантной форме. Исследуются: естественная проекция π_r геодезической из $T_r(M)$ на базу и ее промежуточные проекции π_{rk} $(k = \overline{1, r-1})$ на касательные расслоения меньших порядков. Доказаны две теоремы о том, что эти проекции представляют собой геодезические (на M и на $T_k(M)$ соответственно) и обратно, при определенных условиях поднятие геодезической из M (из $T_k(M)$) в $T_r(M)$ представляет собой геодезическую в $T_r(M)$.

Далее, в касательном расслоении $T_r(M)$ с синектической связностью $\underset{r}{\Gamma}$ вводятся голоморфно-геодезические кривые. Кривая $x^\alpha = x^\alpha(t)$ в $\left(T_r(M), \underset{r}{\Gamma}\right)$ называется голоморфно-геодезической, если вдоль этой кривой абсолютная производная касательного вектора является вектором, принадлежащим в каждой точке распределению $(r+1)$-мерных площадок с базисными векторами $\dot{x}^\alpha$, $f^\alpha_\sigma \dot{x}^\sigma$, $\overset{2}{f}{}^\alpha_\sigma \dot{x}^\sigma, \ldots \overset{r}{f}{}^\alpha_\sigma \dot{x}^\sigma$ — голоморфных площадок. Соответствие двух синектических связностей называется голоморфно-проективным, если голоморфно-проективные кривые относительно первой связности переходят при этом соответствии в голоморфно-проективные кривые относительно второй связности. Найдено необходимое и достаточное условие голоморфно-проективного соответстия синектических связностей в $T_r(M)$.

Доказано, что проекции π_r и π_{rk} голоморфно-геодезической кривой представляют собой геодезические (на M и на $T_k(M)$ соответственно) и обратно, при определенных условиях поднятие геодезической из M (из $T_k(M)$) в $T_r(M)$ представляет собой голоморфно-геодезическую в $\left(T_r(M), \underset{r}{\Gamma}\right)$.

Литература

[1] Широков А. П. *Структуры на дифференцируемых многообразиях* / А. П. Широков // В сб.: Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 11 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). – М.: ВИНИТИ, 1974. – С. 153–207.

[2] Капустина Т. В. *Голоморфно-проективное соответствие в касательных расслоениях второго порядка риманова пространства* // Уч. записки ЕГПУ. Серия «Физ.-мат. науки» – 2010. – Т. 18. – № 5. – С. 10–31.

[3] Капустина Т. В. *Инфинитезимальные голоморфно-проективные преобразования синектических метрик в касательных расслоениях ввысших порядков риманова пространства* // Труды пятых Колмогоровских чтений – Ярославль: ЯГПУ, 2017. – С. 51–57.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЛИСТНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ НА ПОЛИГОНАЛЬНЫЕ ОБЛАСТИ

Э. Н. Карабашева[1], П. Л. Шабалин[2]

---

[1] *enkarabasheva@bk.ru*, Казанский государственный архитектурно-строительный университет

[2] *pavel.shabalin@mail.ru*, Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Авторами проведено исследование однолистности структурной формулы конформного отображения верхней полуплоскости D на полигональную область D_z, ограниченную двумя ломанными линиями L_z^1 и L_z^2 с бесконечным числом прямолинейных звеньев и общей точкой $A_0(0,0)$. Начиная с A_0 последовательно обозначены остальные вершины полигональной области на ломанных L_z^1 и L_z^2 вершины $A_1, A_2, A_3, \cdots$ и $A_{-1}, A_{-2}, A_{-3}, \cdots$ соответственно. При обходе границы области от точки A_0 вдоль L_z^1, область D_z остается слева, а вдоль L_z^2 – справа. Углы, образованные действительной осью и звеньями A_0, A_1 и A_0, A_{-1} обозначим $\eta_0^1\pi$ и $\eta_0^2\pi$, считая их известными $0 \leqslant \eta_0^1\pi < 2\pi$ и $0 < \eta_0^2\pi - \eta_0^1\pi < \pi/2$. Также, известны значения внутренних по отношению к области D_z углов при вершинах A_k и A_{-k}, их значения $\alpha_k\pi$ и $\alpha_{-k}\pi$, где $0 < \alpha_k < 1$, $1 < \alpha_{-k} < 2$, $k = \overline{1,\infty}$. Координаты A_k и A_{-k} не известны. Внутренний для полигональной области D_z угол A_0 равен разности $(\eta_0^2 - \eta_0^1)\pi$.

Конформное отображение (1) области D на D_z построено так, чтобы положительной полуоси $\xi > 0$ соответствовала ломаная L_z^1, а отрицательной полуоси $\xi < 0$ — ломанная L_z^2, а начало координат $\xi = 0$ переходило в начало координат A_0

$$z(\zeta) = a_0 \int\limits_0^\zeta \frac{e^{i\eta_0^1\pi}}{\zeta^{1-(\eta_0^2-\eta_0^1)}} \frac{\prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{\zeta}{t_{-k}}\right)^{\kappa_{-k}}}{\prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{\zeta}{t_k}\right)^{\kappa_k}} d\zeta. \quad (1)$$

Построенное решение $z(\zeta)$ обобщает формулу Кристоффеля–Шварца на случай бесконечного числа вершин. Функция $z(\zeta)$ получена с использованием решения однородной задачи Гильберта с разрывными коэффициентами и двусторонним завихрением на бесконечности вида $O(\ln^\alpha |x|)$. Идея построения конформного отображения с использованием решения однородной задачи Гильберта была заимствована из работ Р.Б. Салимова и П.Л. Шабалина [1], [2].

Доказано, что в случае $\alpha > 1$ обобщенный интеграл Шварца-Кристоффеля обязательно будет неоднолистным. И получены ограничения при выполнении которых для случая $0 < \alpha \leqslant 1$ конформное отображение $z(\zeta)$ верхней полуплоскости D на описанную полигональную область D_z будет однолистным.

Литература

[1] Салимов Р. Б. Шабалин П. Л. *Обратная задача М.А. Лаврентьева об ображении полуплоскости на многоугольник в случае бесконечного числа вершин* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2010. – Т. 10. – вып. 1. – С. 23– 31.

[2] Салимов Р. Б. Шабалин П. Л. *Отображение полуплоскости на многоугольник с бесконечным числом вершин* // Изв. вузов. Математика. – 2009. – № 10. – С. 76–80.

[3] Karabasheva E. N., Shabalin P. L. *Univalence of mappings from half-plane to a polygonal domains with infinite sets of vertices* // Lobachevskii Journal of Mathematics, April 2015, Volume 36, Issue 2, p. 144-153.

НИЖНИЕ ГРАНИЦЫ ДЛЯ СРЕДНЕГО ОБЪЕМА ВЫБОРКИ В ПРОЦЕДУРАХ ОТБОРА НАИБОЛЕЕ ВЕРОЯТНОГО МУЛЬТИНОМИАЛЬНОГО ИСХОДА

И. А. Кареев[1]

---

[1] *kareevia@gmail.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ — k-мерный мультиномиальный вектор с вероятностями успеха исходов $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \Theta$. Исследуется задача отбора *популяции* ξ_i с наибольшей вероятностью успеха θ_i по результатам наблюдений ξ. Рассматривается постановка с *зоной безразличия*, когда от процедуры требуется гарантировать заданный уровень $P^* > 1/k$ вероятности корректного отбора лишь при $\theta \in \Theta_\Delta = \{\vartheta \in \Theta\colon \Delta\vartheta_{[k-1]} < \vartheta_{[k]}\}$, где $\Delta > 1$ — размер зоны безразличия.

В работе решается проблема построения нижней оценки для минимального среднего объёма наблюдений, требуемого для гарантийного решения мультиномиальной задачи отбора. Ранее аналогичные задачи были рассмотрены для общих постановок задач отбора [1] и упорядочивания [2].

Пусть $Sp(P^*, \Delta)$ — множество всех процедур отбора с заданными ограничениями P^* и Δ; ν_φ — объём выборки, производимой процедурой φ.

Теорема. *Средний объём выборки любой процедуры отбора $\varphi \in Sp(P^*, \Delta)$ при $\theta \in \Theta_\Delta$ ограничен снизу величиной:*

$$\mathbb{E}_\theta \nu_\varphi \geqslant \omega(1-P^*, 1-P^*)\Big(\theta_{[k]} \ln \theta_{[k]} + \\ + (\theta_{[k-1]} + \theta_{[k]}) \ln \frac{1+\Delta}{\theta_{[k-1]} + \theta_{[k]}} + \theta_{[k-1]} \ln \frac{\theta_{[k-1]}}{\Delta}\Big)^{-1},$$

где $\omega(x,y) = x \ln \frac{x}{1-y} - (1-x) \ln \frac{1-x}{y}$.

Одно из естественных применений полученной нижней границы заключается в проблеме оценивания *эффективности* конкретных процедур отбора φ, понимаемой как отношение $\inf_{\psi \in Sp(P^*, \Delta)} \mathbb{E}_\theta \nu_\psi / \mathbb{E}_\theta \nu_\varphi$ при $\theta \in \Theta_\Delta$. Заменяя в формуле числитель на значение нижней границы, получим оценку снизу для эффективности φ. Эта методика была применена при исследовании эффективности некоторых классических процедур отбора, включая процедуру с фиксированным числом наблюдений Бекхофера-Элмаграби-Морсе [3] (в зависимости от значений параметров её эффективность варьируется от 0.1 до 0.5) и последовательную процедуру Бекхофера-Голдсмана [4] (эффективность — от 0.25 до 0.95).

Литература

[1] Кареев И. А. *Нижние границы для среднего объема выборки и эффективность последовательных процедур отбора* // ТВП. – 2012. – Т. 57. – № 2. – С. 278–295.

[2] Кареев И. А. *Нижние границы для среднего объема выборки и эффективность последовательных процедур упорядочивания* // ТВП. – 2013. – Т. 58. – № 3. – С. 591–597.

[3] Bechhofer R. E., Elmaghraby S., Morse N. *A single-sample multiple-decision procedure for selecting the multinomial event which has the highest probability* // The Annals of Mathematical Statistics. – 1959. – Т. 30. – № 1. – С. 102–119.

[4] Bechhofer R. E., Goldsman D. M. *Truncation of the Bechhofer-Kiefer-Sobel sequential procedure for selecting the multinomial event which has the largest probability (II): extended tables and an improved procedure* // Communications in Statistics — Simulation and Computation. – 1986. – Т. 15. – № 3. – С. 829–851.

ОБ АЛГЕБРАХ МНОГООБРАЗИЯ $\mathscr{B}_{1,1}$

В. К. Карташов[1]

Через $\mathscr{B}_{1,1}$ обозначается многообразие алгебр с двумя унарными операциями f и g, определяемое одним тождеством $fg(x) = x$. В работе [1] описаны сильно связные и конгруэнц-простые алгебры этого многообразия.

Любой полигон над *бициклической полугрупой* можно интерпретировать как алгебру многообразия $\mathscr{B}_{1,1}$ ([2, с. 68]).

Очевидно также, что $\mathscr{B}_{1,1}$ включает в себя многообразие $\mathscr{A}_{1,1}$ унарных алгебр с двумя операциями f и g, заданное тождествами $fg(x) = gf(x) = x$. В настоящее время получено значительное количество результатов об алгебрах многообразия $\mathscr{A}_{1,1}$ ([3]-[5]). Внимание к многообразию $\mathscr{B}_{1,1}$ в некоторой степени оправдывает следующая

Теорема 1. *Многообразие* $\mathscr{B}_{1,1}$ *является покрытием для многообразия* $\mathscr{A}_{1,1}$ *в решетке всех многообразий алгебр с двумя унарными операциями.*

Напомним, что алгебра называется *сильно связной*, если она порождается любым своим элементом. Унарная алгебра сигнатуры $\langle A, \Omega\rangle$, на которой для любых $f, g \in \Omega$ истинно тождество $fg(x) = gf(x)$, называется *коммутативной*.

Известно [6], что для любой сильно связной коммутативной унарной алгебры A имеет место равенство $End A = Aut A$, где через $End A$ и $Aut A$ обозначается полугруппа эндоморфизмов и группа автоморфизмов алгебры A, соответственно.

Этот результат можно распространить и на сильно связные алгебры многообразия $\mathscr{B}_{1,1}$.

Теорема 2. *Для любой сильно связной алгебры* A *многообразия* $\mathscr{B}_{1,1}$ *справедливо равенство* $End A = Aut A$.

---

[1] *kartashovvk@yandex.ru*, Волгоградский государственный социально-педагогический университет

Говорят, что алгебра A обладает *свойством Хопфа*, если каждый её эпиэндоморфизм является автоморфизмом.

В [7] показано, что любая конечнопорожденная коммутативная унарная алгебра обладает свойством Хопфа.

Теорема 3. *Существует счётное число однопорожденных алгебр многообразия $\mathscr{B}_{1,1}$, не обладающих свойством Хопфа.*

Литература

[1] Бощенко А. П. *Решетки конгруэнций унарных алгебр с двумя операциями f и g, удовлетворяющими тождествам $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ или $g(f(x)) = x$.* // Деп. в ВИНИТИ 20.04.98. – Волгоград, 1998. – № 1220-В98 – 32. с.

[2] Клиффорд А., Престон Г. *Алгебраическая теория полугрупп.* – Т. 1. – М.: Мир, 1972. – 285 с.

[3] Горбунов В. А. *Покрытия в решетке квазимногообразий и независимая аксиоматизируемость.* // Алгебра и логика. – 1977. – Т. 16. – № 5. – С. 507–548.

[4] Акатаев А. А., Смирнов Д. М. *Решетки подмногообразий многообразий алгебр.* // Алгебра и логика. – 1968. – Т. 7. – № 1. – С. 5–25.

[5] Карташов В. К. *Характеризация решетки квазимногообразий алгебр $\mathscr{A}_{1,1}$* // Алгебраические системы. Межвузовский сборник. – Волгоград, 1989. – С. 37–45.

[6] Esik Z., Imreh B. *Remarks on finite commutative automata.* // Acta Cybern. – 1981. – V. 5. – № 3. – С. 143–146.

[7] Карташов В. К. *Независимые системы порождающих и свойство Хопфа для унарных алгебр* // Дискретная математика. – 2008. – Т. 20. – № 4. – С. 79–84.

О МАЛЬЦЕВСКОМ УМНОЖЕНИИ АНТИМНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. В. Карташова[1]

---

[1] *kartashovaan@yandex.ru*, Волгоградский государственный социально-педагогический университет

Антимногообразием (см. [1]) называется всякий класс алгебраических систем фиксированной сигнатуры Ω, определяемый некоторым (возможно, пустым) множеством антитождеств, т.е. предложений вида

$$(\forall \bar{x}(\neg\alpha_1(\bar{x}) \vee \neg\alpha_2(\bar{x}) \vee \ldots \vee \neg\alpha_m(\bar{x})),$$

где $\alpha_i(\bar{x})$ – атомная формула сигнатуры Ω для любого целого числа $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Пусть теперь $\mathfrak{K}$ – произвольный класс алгебраических систем. Произведение $\mathfrak{M} \underset{\mathfrak{K}}{\circ} \mathfrak{N}$ его подклассов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{K}$ определено А.И. Мальцевым ([2]) как класс всех систем $\mathscr{A} \in \mathfrak{K}$, для которых

$$(\exists\theta)(\mathscr{A}/\theta \in \mathfrak{N}\ \&\ (\forall a \in \mathscr{A})(a\theta \in \mathfrak{K} \Rightarrow a\theta \in \mathfrak{M})),$$

где $a\theta$ обозначает смежный класс конгруэнции θ, содержащий элемент a.

В [2] показано, что подквазимногообразия произвольного квазимногообразия алгебраических систем конечной сигнатуры относительно умножения образуют группоид, найдены достаточные условия, при которых он является полугруппой.

Теорема 1. *Пусть множество функциональных символов сигнатуры Ω конечно. Тогда подантимногообразия каждого антимногообразия $\mathfrak{K}$ алгебраических систем сигнатуры Ω образуют полугруппу относительно умножения в классе $\mathfrak{K}$.*

Для любой сигнатуры Ω через $\mathfrak{U}_\Omega$ обозначим класс всех алгебраических систем данной сигнатуры, а через $\mathfrak{U}'_\Omega$ – класс всех алгебраических систем этой сигнатуры, не содержащих идемпотентов.

Теорема 2. *Если множество функциональных символов сигнатуры Ω бесконечно, то подантимногообразия антимногообразия $\mathfrak{U}_\Omega$ не образуют группоида относительно мальцевского умножения в классе $\mathfrak{U}_\Omega$.*

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{K}$ – антимногообразие алгебр сигнатуры Ω, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ – подантимногообразия антимногообразия $\mathfrak{K}$. Тогда*

$$\mathfrak{M} \underset{\mathfrak{K}}{\circ} \mathfrak{N} = \begin{cases} \mathfrak{U}'_\Omega, & \text{если} \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{U}_\Omega, \quad \mathfrak{M} \neq \mathfrak{U}_\Omega, \\ \mathfrak{N}, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

.

Следствие. *Антимногообразия алгебр конечной сигнатуры Ω образуют относительно умножения в классе $\mathfrak{U}_\Omega$ полугруппу с пустым центром без правых единиц, единственной левой единицей которой является элемент $\mathfrak{U}_\Omega$.*

Литература

[1] Горбунов В. А., Кравченко А. В. *Универсальные хорновы классы и антимногообразия алгебраических систем.* // Алгебра и логика. – 2000. – Т. 39. – № 1. – С. 3–22.

[2] Мальцев А. И. *Об умножении классов алгебраических систем* // Сиб. матем. журн. – 1967. – Т. 8. – № 2. – С. 346-365.

НОРМАЛЬНЫЙ ВИД ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОГО НЕРАВЕНСТВА В КЛАССЕ КОНФОРМНЫХ МЕТРИК РИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ

В. М. Кесельман[1]

[1] *vmkes@yandex.ru*, Университет машиностроения (МАМИ)

Некомпактные n-мерные ($n \geqslant 2$) римановы многообразия (M^n, g) разбиваются на два типа инвариантно относительно конформных замен метрики: *многообразия* *параболического конформного типа* (например, евклидово пространство $\mathbb{R}^n$) и многообразия *гиперболического конформного типа* (например, пространство Лобачевского $\mathbb{H}^n$).

(Не следует думать, что это связано с кривизной. Кривизна не является конформным инвариантом.)

В докладе рассматривается связь между конформным типом риманова многообразия (M^n, g) и нормальным видом, к которому на нём приводится изопериметрическое неравенство в классе метрик, конформных его исходной метрике g.

Изопериметрическое неравенство — это неравенство вида $\mathscr{P}_g(V_g(D)) \leqslant S_g(\partial D)$, справедливое для любой предкомпактной области $D \subset M^n$, имеющей в метрике g объем $V_g(D)$ и площадь $S_g(\partial D)$ границы ∂D области D. Здесь $\mathscr{P}_g = \mathscr{P}_g(x)$, $0 < x < V_g(M^n)$ — некоторая неотрицательная функция, которая называется *изопериметрической функцией многообразия M^n в метрике g.*

Хорошо известно, что в $\mathbb{R}^n$ выполняется евклидово изопериметрическое неравенство с изопериметрической функцией вида $\mathscr{P}(x) = c \cdot x^{\frac{n-1}{n}}$, а в $\mathbb{H}^n$ выполняется линейное изопериметрическое неравенство с изопериметрической функцией линейного вида $\mathscr{P}(x) = c \cdot x$.

При этом евклидово изопериметрическое неравенство в $\mathbb{R}^n$ является точным, а линейное изопериметрическое неравенство в $\mathbb{H}^n$ — асимптотически точным, причём указанная точность реализуется на шаровых исчерпаниях этих пространств.

В отличие от конформного типа многообразия, его изопериметрическая функция $\mathscr{P}_g(x)$ в классе конформных метрик g имеет разный вид, однако её асимптотическое поведение при $x \to +\infty$ связано с конформным типом многообразия.

Теорема. *Пусть M^n — произвольное связное некомпактное n-мерное $(n \geqslant 2)$ риманово многообразие.*

1) *Многообразие M^n имеет гиперболический конформный тип тогда и только тогда, когда на M^n можно построить конформную исходной метрике многообразия полную метрику g, в которой объём многообразия M^n бесконечен и существует изопериметрическая функция $\mathscr{P}_g$ линейного вида: $\mathscr{P}_g(x) = a \cdot x$ при всех $x > 0$, где $a > 0$ — некоторая постоянная.*

Более того, в этом критерии можно дополнительно считать, что для априори произвольно заданного $\varepsilon > 0$ изопериметрическая функция $\mathscr{P}_g$ является ε-асимптотически точной на исчерпании многообразия, сколь угодно близком к шаровому исчерпанию.

2) *Многообразие M^n имеет параболический конформный тип тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ можно построить конформную исходной метрике многообразия полную метрику g, в которой объём многообразия бесконечен и существует ε-асимптотически точная изопериметрическая функция $\mathscr{P}_g$ евклидова вида $\mathscr{P}_g(x) = b \cdot x^{\frac{n-1}{n}}$ (где $x > \varepsilon$, $b > 0$ — некоторая постоянная) при условии, что указанная ε-асимптотическая точность реализуется на исчерпании многообразия ε-близком к шаровому в метрике g.*

МАКСИМАЛЬНЫЕ ИДЕАЛЫ И АВТОМОРФИЗМЫ

Р. К. Керимбаев[1]

---

[1] *ker_im@mail.ru*, Казахский национальный университет имени аль-Фараби

Речь идет о максимальных идеалах и P-автоморфизмах кольца многочленов $P[x_1,...,x_n]$. Если многочлены $f_1,...,f_n \in P[x_1,...,x_n]$ задают P-автоморфизмы кольца многочленов, то они образуют в нем максимальные идеалы. Более того, данные многочлены имеют единственный общий корень кратности 1 и обладают обратимым якобианом. Как известно, максимальные идеалы являются простыми. А идеал является простым тогда и только тогда, когда соответствующее алгебраическое многообразие неприводимо. Над алгебраически замкнутым полем алгебраическое многообразие максимальных идеалов состоит из одной точки. В этой теории важную роль играют формула Тейлора и теорема Безу. Доказано, что келлеровые многочлены Ягжева-Басса-Коннелла-Райта задают инъективное полиномиальное отображение.

Формула Тейлора. Пусть $f(x_1,...,x_n)$ — многочлен из кольца $P[x_1,...,x_n]$, а $a = (a_1,...,a_n) \in P^n$ — произвольная точка. Тогда имеет место формула Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{k_1+...+k_n=k} \frac{\partial^k f(a)}{\partial_{x_1}^{k_1}...\partial_{x_n}^{k_n}} \frac{(x_1-a_1)^{k_1}...(x_n-a_n)^{k_n}}{k_1!...k_n!}.$$

Теорема (Безу). *Пусть $f \in P[x_1,...,x_n]$ — многочлен, $a \in P^n$ — точка. Тогда a является корнем многочлена f тогда и только тогда, когда $f \in I$. То есть $f(a) = 0 \Leftrightarrow f \in I$.*

Теорема (кратность корней). *Точка $a \in P^n$ является k кратным корнем многочлена $f \in P[x_1,...,x_n]$ тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\partial^{i-1} f(a)}{\partial_{x_1}^{k_1}...\partial_{x_n}^{k_n}} = 0,$$

где $i = 1,...,k,\ k_1 + ... + k_n = i - 1$ и $\frac{\partial^0 f(a)}{\partial_{x_1}^0...\partial_{x_n}^0} = f(a)$.

Проблема Келлера (1939)[1]. Если якобиан многочленов $f_1,...,f_n$ обратим, то они задают P-автоморфизмы кольца многочленов $P[x_1,...,x_n]$ и полиномиальный автоморфизм аффинного пространства $\mathbb{A}_n(P)$.

В [2], [3] установлено, что для обратимости полиномиального отображения, достаточно установить его инъективность.

В [4], [5] установлено, что проблему Келлера достаточно доказать для многочленов Ягжева-Басса-Коннелла-Райта.

Определение. *Многочлены вида*

$$f_i(x_1,...,x_n) = x_i + f_{i(3)}(x_1,...,x_n), \tag{1}$$

где $f_{i(3)}(x_1,...,x_n)$, $i = 1,...,n$, — однородные степени три, называются многочленами Ягжева-Басса-Коннелла-Райта.

Теорема. *Многочлены Келлера типа* (1) *образуют максимальный идеал в кольце* $P[x_1,...,x_n]$, *при этом все они имеют единственный общий корень кратности* 1.

Следствие 1. *Для келлеровых многочленов* $f_1,...,f_n$ *типа* (1) *и для любой точки* $a \in P^n$ *многочлены* $f_i(x+a)-f_i(a)$, $i=1,...,n$, *образуют максимальный идеал в кольце* $P[x_1,...,x_n]$.

Следствие 2. *Многочлены Келлера типа* (1) *устанавливают инъективное полиномиальное отображение.*

Литература

[1] Van den Essen A. *Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture.* – Birkhauser : Progress in Mathematics, 2000.

[2] Newmann D. J. *One-One Polynomial Maps* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1960. – V. 11. – P. 867–870.

[3] Bialynicki-Birula A., Rosenlicht V. *Injective morphisms of real algebraic varieties* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1962. –V. 13. – P. 200–203.

[4] Yagzhev A. V. *On Keller's problem* // Sib. Math. J. – 1980. – T. 21. – P. 747–754.

[5] Bass H., Connel E., Wright D. *The Jacobian conjecture: Reduction of Degree and Formal Expansion of the Inverse* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1982. –V. 7. – P. 287–330.

НАХОЖДЕНИЕ ИНВАРИАНТА ФОМЕНКО-ЦИШАНГА В СЛУЧАЕ КОВАЛЕВСКОЙ НА АЛГЕБРЕ ЛИ SO(4)

В. А. Кибкало[1]

---

[1] *slava.kibkalo@gmail.com*, Московский государственный университет

Работа посвящена анализу топологии интегрируемого аналога случая Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$. С историей вопроса и описанием системы можно ознакомиться в работе И. К. Козлова [3]. При исследовании системы будем пользоваться теорией топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем, разработанной А. Т. Фоменко (она подробно описана в [1]). Полным инвариантом слоения Лиувилля на трехмерном многообразии является меченая молекула (инвариант Фоменко–Цишанга). По теореме Фоменко–Цишанга эквивалентность меченых молекул изоэнергетических поверхностей двух систем равносильна совпадению их слоений и замыканий решений на этих поверхностях.

В случае нулевой постоянной площадей докладчиком (см. [4]) было обнаружено 9 попарно неэквивалентных слоений Лиувилля изоэнергетических поверхностей. Некоторые из них встречались в случаях интегрируемости Ковалевской, Ковалевской – Яхьи и Соколова на алгебре Ли $e(3)$ (см. [2], [6], [5]). В случае произвольного значения постоянной площадей докладчиком найдены допустимые базисы на торах, расположенных вблизи дуг бифуркационной диаграммы. Для произвольной допустимой трехмерной поверхности построена ее меченая молекула. Обнаружено, что для построения меченой молекулы кругового многообразия (см. [2], [5]) особенности типа центр-центр достаточно знать локальное устройство бифуркационной диаграммы, что оказалось полезным при вычислениях. В четырех из девяти возможных случаев, указанных в [3], найдены все инварианты Фоменко–Цишанга изоэнергетических поверхностей.

Теорема. *В случаях VI-IX найден полный список инвариантов Фоменко-Цишанга, состоящий из* 9 *меченых молекул. Четыре молекулы не встречались в случае нулевой постоянной площадей. Две из них эквивалентны меченым молекулам случая Соколова на алгебре Ли* $e(3)$ *(см. [5]).*

Литература

[1] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация.* – Ижевск.: Издат. дом “Удмурт. ун-т”, 1999.

[2] Болсинов А. В., Рихтер П. Х., Фоменко А. Т. *Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской* // Матем. сб. – 2000. – Т. 191. – № 2. – С. 3–42.

[3] Козлов И. К. *Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли so(4)* // Матем. сб. – 2014. – Т. 205. – № 4. – С. 79–120.

[4] Кибкало В. А. *Тонкий лиувиллев анализ интегрируемого аналога случая Ковалевской на алгебре Ли so(4) при нулевой постоянной площадей* // Матер. конф. “Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна–2016”. – Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2016. – С. 187–189.

[5] Морозов П. В. *Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа* // Матем. сб. – 2004. – Т. 195. – № 3. – С. 69–114.

[6] Славина Н. С. *Топологическая классификация систем типа Ковалевской-Яхьи* // Матем. сб. – 2014. – Т. 2005. – № 1. – С. 105–160.

О ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ОДНОРОДНЫХ C - ПРОСТРАНСТВАХ РАЗМЕРНОСТИ 4

П. Н. Клепиков[1], О. П. Хромова[2]

[1] *askingnetbarnaul@gmail.com*, Алтайский государственный университет
[2] *khromova.olesya@gmail.com*, Алтайский государственный университет

Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие размерности $n \geqslant 4$, R — тензор кривизны Римана, r — тензор Риччи, s — скалярная кривизна метрики g. Разделив тензор кривизны R на метрический тензор g в смысле произведения Кулкарни - Номидзу ⓧ, получим тензор Вейля W и тензор одномерной кривизны A [1]:

$$R = W + A \owedge g, \quad A = \frac{1}{n-2}\left(r - \frac{sg}{2(n-1)}\right).$$

Псевдориманово многообразие (M, g) размерности $n \geqslant 4$ будем называть C - *пространством*, если $\operatorname{div} W = 0$. Ряд примеров таких многообразий и необходимые сведения о них приведены в [1]. В размерности 3 тензор Вейля тривиален, а в размерности четыре и выше тензор Вейля, вообще говоря, отличен от нуля. Поэтому возникает вопрос о гармоничности тензора Вейля на однородных римановых многообразиях размерности $n \geqslant 4$. Четырехмерные группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой и $\operatorname{div} W = 0$ изучались в работах [2–5]. Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [2–5], в случае четырехмерных однородных псевдоримановых многообразий.

В данной работе, с использованием классификации четырехмерных однородных псевдоримановых многообразий (см. [8]), получена классификация четырехмерных однородных псевдоримановых C-пространств.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты: №16–01–00336A, №16–31–00048мол_а), Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

Литература

[1] Бессе А. *Многообразия Эйнштейна*: в 2 т. / пер. с англ. – М.: Мир, 1990.

[2] Гладунова О. П., Родионов Е. Д., Славский В. В. *О гармонических тензорах на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой* // ДАН. – 2008. – Т. 419. – № 6. – С. 733–736.

[3] Гладунова О. П., Славский В. В. *Гармонический тензор Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных унимодулярных группах Ли* // Мат. труды. – 2011. – Т. 14. – № 1. – С. 1–20.

[4] Гладунова О. П., Славский В. В. *Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных унимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля* // ДАН. – 2010. – Т. 431. – № 6. – С. 736–738.

[5] Воронов Д. С., Родионов Е. Д. *Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных неунимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцие тензора Вейля* // ДАН. – 2010. – Т. 432. – № 3. – С. 301–303.

[6] Komrakov B. B. *Einstein–Maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces* // Lobachevskii J. Math. – 2001. – V. 8. – P. 33–165.

О ПРЕДПИСАННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ОПЕРАТОРОВ КРИВИЗНЫ ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ ЛОРЕНЦЕВЫХ МЕТРИК ТРЕХМЕРНЫХ ГРУПП ЛИ

П. Н. Клепиков[1], С. В. Клепикова[2], О. П. Хромова[3]

---

[1] *askingnetbarnaul@gmail.com*, Алтайский государственный университет
[2] *pastukhova.svetlana.1992@gmail.com*, Алтайский государственный университет
[3] *khromova.olesya@gmail.com*, Алтайский государственный университет

Задача об установлении связей между топологией и кривизной риманова многообразия является одной из важных проблем римановой геометрии. Работа О. Ковальского и С. Никшевич [1] посвящена решению задачи о предписанных значениях спектра оператора Риччи на трехмерных римановых локально-однородных пространствах. В дальнейшем аналогичные результаты для оператора одномерной кривизны, а также для оператора секционной кривизны получены Д. Н. Оскорбиным, О. П. Хромовой [2].

В псевдоримановом случае известна работа Дж. Кальварузо, О. Ковальского [3], в которой исследуется задача о существовании трехмерной группы Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и заданным оператором Риччи.

При исследовании (псевдо)римановых многообразий важную роль играет оператор одномерной кривизны, определяемый формулой

$$\mathscr{A} = \frac{1}{n-2}\left(\rho - \frac{s}{2(n-1)}\mathrm{Id}\right),$$

где ρ — оператор Риччи, s — скалярная кривизна, n — размерность (псевдо)риманова многообразия M.

Риманову тензору кривизны R в любой точке многообразия M можно поставить в соответствие оператор секционной кривизны $\mathscr{R}\colon \Lambda^2_x M \to \Lambda^2_x M$, определяемый равенством $\langle X \wedge Y, \mathscr{R}(T \wedge V)\rangle_x = R_x(X, Y, T, V)$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — индуцированное скалярное произведение в слоях пространства расслоения $\Lambda^2_x M$, определяемое правилом $\langle X_1 \wedge X_2, Y_1 \wedge Y_2\rangle_x = \det\left(g_x(X_i, Y_j)\right)$.

Данные исследования являются продолжением работы Дж. Кальварузо, О. Ковальского [3]. В работе доказаны аналогичные теоремы для оператора одномерной кривизны и оператора секционной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. Этот результат естественно обобщается на случай трехмерных локально однородных лоренцевых многообразий.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты: №16–01–00336А, №16–31–00048мол_а), Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

Литература

[1] Kowalski O., Nikcevic S. *On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds* // Geom. Dedicata. – 1996. – No. 1. – P. 65–72.

[2] Гладунова О. П., Оскорбин Д. Н. *Применение пакетов символьных вычислений к исследованию спектра оператора кривизны на метрических группах Ли* // Известия АлтГУ. – 2013. – № 1/1. – С. 19–23.

[3] Calvaruso G., Kowalski O. *On the Ricci operator of locally homogeneous Lorentzian 3-manifolds* // Cent. Eur. J. Math. – 2009. – V. 7(1). – P. 124–139.

О МИНИМАЛЬНО ПОЛНЫХ ПОЛУГРУППАХ

О. В. Князев[1]

---

[1] *knyazev50@rambler.ru*, Омский государственный педагогический университет

В [1] предлагалась обширная программа по изучению универсальных алгебр, различных классов алгебр. В предыдущие годы проводились исследования по многим аспектам этой программы. Эти исследования убедительно показали плодотворность и важность предложенного в [1] подхода, идущего из теории абелевых групп, для развития структурных теорий других универсальных алгебр. В 2016 году вышел обзор [2], который подводит итоги проделанной работы, уточняет и ставит новые проблемы для исследователей. В частности в [2] ставится задача (проблема 3.10) характеризации минимально полных алгебр данного многообразия алгебр. Мы изучали и продолжаем изучать минимально полные полугруппы.

Пусть $\mathbf{V}$ – многообразие всех полугрупп, $L(\mathbf{V})$ – решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{V}$, $\mathbf{X} \in L(\mathbf{V})$, $S \in \mathbf{V}$. Произвольное дизъюнктное семейство подполугрупп полугруппы S называют *россыпью* полугруппы S, а полугруппы, которые ее составляют, – *компонентами* россыпи.

Пусть $\mathbf{X}(S)$ есть $\mathbf{X}$-вербал полугруппы S, т.е. россыпь, компоненты которой в точности все классы $\mathbf{X}$-вербальной конгруэнции полугруппы S, являющиеся подполугруппами полугруппы S. Если $\mathbf{X}$-вербал полугруппы S состоит из одной компоненты, совпадающей с S, то полугруппу S называют $\mathbf{X}$-*полной* полугруппой. Если равенство $\mathbf{X}(S) = S$ выполняется для любого атома $\mathbf{X}$ из решетки $L(\mathbf{V})$, то полугруппу S называют *полной* полугруппой. Полугруппа называется *минимально полной*, если она содержит более одного элемента и является полной, но любая ее неодноэлементная собственная подполугруппа не является полной.

Через $B_{n,k}$ обозначим полугруппу, которую в классе полугрупп с нулем можно задать копредставлением

$$B_{n,k} = \langle a, b \mid aba = a, bab = b, a^n = b^k = 0 \rangle, \text{ где } n, k \geqslant 2.$$

Эта полугруппа играет важную роль при характеризации минимально полных полугрупп.

Имеет место следующая

Теорема. *Полугруппа* $B_{n,k}$ *является минимально полной полугруппой.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (задание №2014/336).

Литература

[1] Мартынов Л. М. *О понятиях полноты, редуцированости, примарности и чистоты для произвольных алгебр* // Универсальная алгебра и ее приложения. Труды междунар. семинара. – Волгоград: Перемена, – 2000. – С. 179–190.

[2] Мартынов Л. М. *Полнота, рецуцированность, примарность и чистота для алгебр: результаты и проблемы* // Сиб. электрон. мат. изв. – 2016. – № 13. – С. 181–241.

ПРОДОЛЖАЕМОСТЬ ОПЕРАЦИИ УМНОЖЕНИЯ В ПОЛУГРУППЕ НЕНУЛЕВЫХ ВЫЧЕТОВ

И. Б. Кожухов[1], А. О. Петриков[2]

---

[1] *kozhuhov_i_b@mail.ru*, Национальный исследовательский университет МИЭТ

[2] *petrikov.alexander@gmail.com*, Национальный исследовательский университет МИЭТ

Частичные операции, т.е. операции, определённые, возможно, не для всех значений аргументов, в последнее время привлекает всё больше внимание специалистов. Интересен и важен вопрос: может ли частичная операция быть продолженной до полной (т.е. всюду определённой) с сохранением тех или иных свойств, например, ассоциативности? Понятие ассоциативности частичной операции было введено В. В. Розеном в [1] двумя неэквивалентными способами. Здесь мы будем называть частичную бинарную операцию ассоциативной, если для любых элементов a, b, c произведения $(ab)c$ и $a(bc)$ либо оба не существуют, либо оба существуют и равны друг другу. Множество с ассоциативной частичной бинарной операцией назовём частичной полугруппой. Нетрудно видеть, что частичная полугруппа – это в точности множество ненулевых элементов полугруппы с нулём. Вариант продолжения операции при помощи добавления дополнительного элемента (нулевого) отмечался в монографии Е.С.Ляпина и А.Е.Евсеева в [2]. Способы продолжения без добавления элемента в теории практически не исследовались. Существование непродолжаемых без добавления элемента частичных полугрупп было доказано в [3].

Напомним, что отношением Грина $\mathscr{J}$ на полугруппе S называется отношение $\mathscr{J} = \{(a,b) | S^1 a S^1 = S^1 b S^1\}$. Обозначим через $J(a)$ $\mathscr{J}$-класс элемента a. Частичный порядок на множестве $\mathscr{J}$-классов определяется так: $J(a) \leqslant J(b) \Leftrightarrow S^1 a S^1 \subseteq S^1 b S^1$.

Предложение 1. Если полугруппа S с нулём имеет одноэлементный минимальный ненулевой $\mathscr{J}$-класс, то частичная операция на $S \setminus \{0\}$ может быть продолжена до полной ассоциативной операции.

Для полугруппы $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ как нетрудно проверить, $\mathscr{J}$-классы образуют решётку, изоморфную решётке делителей числа n (другими словами, прямое произведение конечного числа конечных цепей). Если n чётно, то одноэлементный атомарный $\mathscr{J}$-класс – это $J(\frac{n}{2})$.

Следующая теорема даёт полный ответ на вопрос о продолжаемости операции в частичной полугруппе $S = (\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \cdot)$.

Теорема 2. Пусть $S = (\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \cdot)$ — частичная мультипликативная полугруппа вычетов. Частичная операция на S продолжается до полной ассоциативной операции в том и только том случае, если выполнено одно из следующих условий:

(1) n чётно;

(2) $n = p^k$, где $k \in \mathbb{N}$, а p — нечётное простое число.

Литература

[1] Розен В. В. *Частичные операции в упорядоченных множествах* // Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, – 1973. – 123 с.

[2] Ляпин Е. С., Евсеев А. Е. *Частичные алгебраические действия* // СПб, – РГПУ им Герцена: Образование, – 1991. – 163 с.

[3] Петриков А. О. *Частичные полугруппы и отношения Грина* // Электронные информац. системы. – 2014. – No 3. – С. 65–72.

ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ФУНКЦИИ БОЛЬЦАНО

И. А. Козлова[1], А. И. Савотин

---

[1] *irena1983.83@mail.ru*, Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского

В настоящей работе вычисляется фрактальная размерность Хаусдорфа-Безиковича функции Больцано. Способ подсчета размерности основан на идее покрывать исследуемую фигуру маленькими квадратиками (отрезками, кубиками и т.д) со стороной длины δ. Тогда кривую можем измерить, определяя число $N(\delta)$ прямолинейных отрезков длины δ [2]. Размерность Хаусдорфа-Безиковича множества есть критическая размерность, при которой мера M_d изменяет свое значение с нуля на бесконечность [3].

Построение функции Больцано начинается с прямолинейного отрезка длины $\sqrt{2}$, соединяющего точки $O(0;0)$ и $A(1;1)$ [1]. Этот исходный отрезок — нулевое поколение функции Больцано. Далее данный отрезок заменяется образующим элементом — ломаной $OA_1A_2A_3A$, состоящей из четырех звеньев с длиной каждого звена $\sqrt{(1/4)^2+(1/2)^2}=\sqrt{5}/4$.

В результате такой замены мы получаем первое поколение функции Больцано, длина которого $L(\sqrt{5}/4)=\sqrt{5}$. Следующее поколение получается при замене каждого из звеньев OA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A уменьшенным образующим элементом. В результате получаем кривую второго поколения (рисунок), состоящую из $N=4^2=16$ звеньев, каждое длиной

$$\delta=\sqrt{\left(1/4^2\right)^2+(1/4)^2}=\sqrt{17}/16.$$

Длина кривой второго поколения равна $L(\sqrt{17}/16)=\sqrt{17}$. Заменяя все звенья предыдущего поколения кривой уменьшенным образующим элементом, получаем новое поколение кривой. Кривая третьего поколения будет состоять из $N=4^3=64$ звеньев, каждое длиной $\delta=\sqrt{\left(1/4^3\right)^2+\left(1/2^3\right)^2}=\sqrt{65}/64$. Длина кривой третьего поколения равна $L\left(\sqrt{65}/64\right)=\sqrt{65}$.

Кривая n-го поколения при любом конечном n называется предфракталом. Далее получим выражение для фрактальной размерности D функции Больцано.

Так как кривая n-го поколения состоит из $N=4^n$ звеньев и каждое длиной $\delta=\sqrt{1+2^{2n}}/4^n$, то получаем соотношение: $N(\delta)=4^n=\delta^{-2}\left(1/2+\sqrt{1/4+\delta^2}\right)$.

Тогда мера $M_d=N(\delta)\delta^d=\delta^{d-2}\left(1/2+\sqrt{1/4+\delta^2}\right)$.

Из полученного равенства видно, что размерность Хаусдорфа-Безиковича для функции Больцано равна 2.

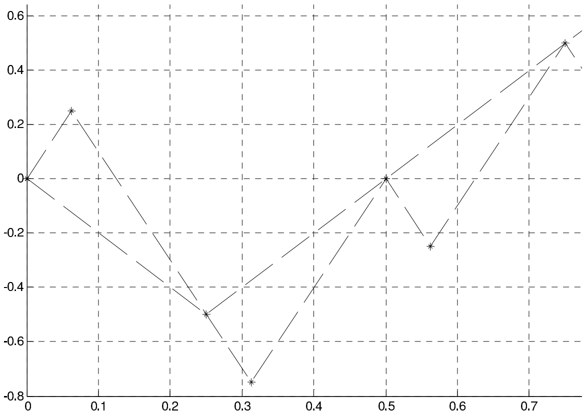

Рис. 1: График кривой второго поколения функции Больцано

Литература

[1] Бржечка В Ф.*О функции Больцано* // Успехи математических наук. –1949. – Т 4. – Вып. 2. – С. 15–20.

[2] Мандельброт Б. *Фрактальная геометрия природы.* – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.

[3] Федер Е.*Фракталы: Пер. с англ.* – М.: Мир, 1991. – 254 с.

АБСОЛЮТНЫЕ ИДЕАЛЫ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ КОНЕЧНОГО РАНГА

Е. И. Компанцева[1]

---

[1] *kompantseva@yandex.ru*, МПГУ, Финуниверситет при Правительстве РФ

Кольцом на абелевой группе G называется кольцо, аддитивная группа которого совпадает с G. Под абсолютным идеалом абелевой группы G понимается ее подгруппа, которая является идеалом в любом кольце на G. Понятие абсолютного идеала было введено в [1]. Кольцо называется AI-кольцом, если в нем любой идеал является абсолютным идеалом его аддитивной группы. Если на абелевой группе существует хотя бы одно AI-кольцо, то она называется RAI-группой. Проблема описания RAI-групп сформулирована в [2, проблема 93].

Настоящая работа посвящена изучению колец на почти вполне разложимых группах. Абелева группа без кручения конечного ранга называется почти вполне разложимой (*ПВР*-группой), если она содержит вполне разложимую подгруппу конечного индекса. *ПВР*-группы изучаются давно, им посвящены исследования многих авторов.

Пусть G – жесткая *ПВР*-группа кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором (*ЦРФ*-группа). Согласно теории *ПВР*-групп [3], существуют такие элементы e_i $(i \in I)$ регулятора A группы G, что A можно представить в виде $A = \bigoplus_{i \in I} R_i e_i$, где R_i – подкольца с единицей поля рациональных чисел. При этом любой элемент

$g \in G$ представим в виде $g = \sum\limits_{i \in I} \frac{r_i}{m_i} e_i$, где $r_i \in R_i$, m_i $(i \in I)$ – целые числа, являющиеся инвариантами группы G.

В сдедующей теореме описаны главные идеалы *ЦРФ*-групп. Главным абсолютным идеалом, порожденным элементом $g \in G$, называют наименьший абсолютный идеал $\langle g \rangle_{AI}$, содержащий g.

Теорема. *Пусть G-жесткая ЦРФ-группа кольцевого типа, $g = \sum\limits_{i \in I} \frac{r_i}{m_i} e_i \in G$. Тогда $\langle g \rangle_{AI} = \langle g \rangle + \bigoplus\limits_{i \in I} r_i R_i e_i$.*

Заметим, что элементы r_i $(i \in I)$ в представлении элемента $g \in G$ определены однозначно с точностью до множителя, обратимого в R_i. Поэтому вид главного идеала $\langle g \rangle_{AI}$ не зависит от разложения $A = \bigoplus\limits_{i \in I} R_i e_i$.

Также получено описание главых абсолютных идеалов блочно-жестких *ЦРФ*-групп кольцевого типа, которое позволяет доказать, что любая группа из этого класса является RAI-группой.

Литература

[1] Fried E. *On the subgroups of abelian groups that ideals in every ring* // Proc.Colloq. Abelian Groups. Budapest. – 1964. – P. 51–55.

[2] Fuchs L. *Infinite abelian groups* // Academic Press, New York and Lodon. – 1973. – V. 2.

[3] Mader A. *Almost completely decomposable abelian groups* // Amsterdam: Gordon and Breach. – 2000. –Algebra, Logic and Applications. – V. 3.

НЕАЛЬТЕРНИРУЮЩИЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ АЛГЕБРЫ ЛИ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2 С НЕВЫРОЖДЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕМ

А. В. Кондратьева[1], М. И. Кузнецов[2], Н. Г. Чебочко[3]

---

[1] *alisakondr@mail.ru*, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

[2] *mikhail.kuznetsov@itmm.unn.ru*, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

[3] *chebochko@mail.ru*, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

В [1] построена серия градуированных гамильтоновых алгебр Ли над полем характеристики 2, соответствующая симметрической (неальтернирующей) дифференциальной форме $\omega_0 = (dx_1)^{(2)} + \ldots + (dx_n)^{(2)}$. Градуированные неальтернирующие алгебры Ли исследовались в работах [2]–[4].

В данной работе строятся простые фильтрованные неальтернирующие гамильтоновы алгебры Ли, допускающие невырожденные дифференцирования. Обозначим через $A(n : \mathbf{m})$ алгебру разделенных степеней от n переменных с вектором высот $\mathbf{m}$

над совершенным полем F характеристики 2.

Теорема 1. *Пусть* Ω_s *- комплекс симметрических дифференциальных форм с коэффициентами в* $A(n:\mathbf{m})$.

i) $\dim H^k(\Omega_s) = \binom{n+k-1}{k}$,

ii) $H^2(\Omega_s) =< (dx_i)^{(2)}, \overline{x_i x_j} dx_i \wedge dx_j, \ i, j = 1, \dots, n >$. *Здесь* $\overline{x_i} = x_i^{(2^{m_i}-1)}$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{m} \neq \mathbf{1}$, ω *– замкнутая неальтернирующая 2-форма,* $\omega(0) = \sum_{i=1}^{n} (dx_i)^{(2)}$. *Алгебра Ли* $P(n:\mathbf{m}, \omega) = \mathbf{A}(\mathbf{n}:\mathbf{m})/\mathbf{F}$ *со скобкой Пуассона, соответствующей форме* ω *является простой алгеброй Ли размерности* $2^N - 1$, $N = |\mathbf{m}| = \mathbf{m_1} + \dots + \mathbf{m_n}$.

Следующая теорема основана на результатах работы [5].

Теорема 3. *Пусть* $\omega = (\omega_1)^{(2)} + \dots + (\omega_n)^{(2)}$, *где* ω_i *– замкнутые 1-формы над* $A = A(n:\mathbf{m})$, *образующие базис свободного* A*-модуля 1-форм, а их классы когомологий – базис первой группы когомологий де Рама над* A. *Тогда алгебра Ли* $L = P(n:\mathbf{m}, \omega)$ *допускает невырожденное дифференцирование. Существует базис* $\{u_a, \ a \in \mathbb{F}_q^*$, $q = |\mathbf{m}|$, *в* L, *такой, что* $\{u_a, u_b\} = f(a,b) u_{a+b}$ *для некоторой симметрической биаддитивной функции* f *на* $\mathbb{F}_q$ *со значениями в основном поле* F.

Поэтому неальтернрующие гамильтоновы алгебры Ли естественно отнести к классу неальтернирующих алгебр Блока характеристики 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки России (госзаказ, проект 1.1410.2014/К).

Литература

[1] Lin L. *Nonalternating Hamiltonian algebra* $P(n:\mathbf{m})$ *of characteristic two* // Commun. Algebra. – 1993. – V. 21. – P. 399–411.

[2] Bouarrouj S., Grozman P., Lebedev A., Leites D. *Divided power (co)homology. Presentation of simple finite dimensional modular superalgebras with Cartan matrix* // Homology, Homotopy Appl. – 2010. – V. 12(1). – P. 237–248.

[3] Yier U., Leites D., Messaoudene M., Shchepochkina I. *Examples of simple vectorial Lie algebras in characteristic 2*// J. Nonlin. Math. Phys. – 2010. – V. 17. –Suppl. 1. – P. 311–374.

[4] Lebedev A. *Analog of ortogonal, Hamiltonian, Poisson and contact Lie superalgebras in characteristic 2* // J. Nonlin. Math. Phys. – 2010. – V. 17. – Suppl. 1. – P. 217–251.

[5] Кузнецов М. И.*Максимальные торы общей алгебры Ли картановского типа* // Матем. сб. – 1997. – Т. 188. – С. 55–82.

ИНВАРИАНТЫ КОНФОРМНО-ПЛОСКИХ СТРУКТУР

Н. Г. Коновенко[1], В. В. Лычагин[2]

---

[1] *konovenko@ukr.net*, Одесская национальная академия пищевых технологий, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

[2] *valentin.lychagin@uit.no*, Университет Тромсё

Пусть $M_{p,q} \subset \mathbb{R}P^{p+q+1}$, $p,q \in \mathbb{N}$, пространство Мебиуса. Это пространство является конформно-плоским и однородным со структурной группой $G = O(p+1,q+1)$, [5].

Мы рассматриваем 1-мерные конформные величины, т. е. сечения G-однородных 1-мерных векторных расслоений над $M_{p,q}$, и их дифференциальные инварианты. Имея в виду теорему Ли-Трессе (см. [4]), мы ограничиваемся только алгебраическими расслоениями.

В данном случае это расслоения следующего типа. Пусть $\xi : E(\xi) \to M_{p,q}$ — ограничение тавтологического расслоения над $\mathbb{R}P^{p+q+1}$ на подмногообразие $M_{p,q}$, а $\xi_w = \xi^{\otimes w}$, $\xi^{-1} = \xi^*$, $w \in \mathbb{Z}$ – его тензорные степени. Сечения расслоения ξ_w мы называем конформными величинами веса w (см. [2, 3]). Конформным инвариантом порядка $\leqslant k$ и веса w назовем рациональную функцию на многообразии k-джетов $J^k(\xi_w)$, инвариантную относительно продолженного действия группы G.

Заметим, что в случае $w \neq 0$, горизонтальная квадратичная форма $g_w = u^{\frac{-2}{w}} \cdot g_0$, где g_0 плоский представитель конформного класса, является G-инвариантом.

Обозначим через ∇_w – горизонтальную связность Леви-Чивита на расслоениях горизонтальных форм в пространствах джетов, построенную по форме g_w.

Пусть Ric_w – тензор Риччи этой связности, а R_w - оператор построенный из Ric_w при помощи метрики g_w. Функции $I_s = Tr R_w^s$, $s = 1,2,\ldots,n = p+q$ являются конформными инвариантами второго порядка. Мы скажем, что 3-джет $x_3 \in J^3(\xi_w)$ регулярен, если полные дифференциалы $\widehat{d}I_1,\ldots,\widehat{d}I_n$ независимы в точке x_3.

Пусть теперь $R_w^3 = d_{\nabla_w}^{sym}(Ric_w)$ – симметрический, полный, квадратичный дифференциал тензора Риччи (см. [1]). Тогда, в области регулярных 3-джетов, этот тензор допускает разложение: $R_w^3 = \sum_{i \leqslant j,s} U_{ij}^s \widehat{d}I_i \cdot \widehat{d}I_j$, где U_{ij}^s – конформные инварианты третьего порядка.

Теорема. *Пусть* $p+q \geqslant 3$, $w \neq 0$. *Тогда, поле конформных инвариантов порождено нивариантами* $I_1,\ldots,I_n$, U_{ij}^s *и производными Трессе* $\frac{D^\sigma U_{ij}^s}{DI^\sigma}$. *Это поле разделяет регулярные орбиты.*

Литература

[1] Bibikov P., Lychagin V. *Differential contra Algebraic invariants, Lobachevskii* // J.Math. –2016. –V. 37. –№ 1. –pp. 36–49.

[2] Eastwood M., Graham R. *Invariants of conformal densities* // DuKe Math.J. –1991. –V. 63. –№ 3. –pp. 633–670.

[3] Коновенко Н. Г. *Дифференциальные инварианты и $\mathfrak{sl}_2$ - геометрии* –Київ: "Наукова Думка" НАН України, 2013. – 192 с.

[4] Kruglikov B., Lychagin V. *Global Lie-Tresse theorem* // Selecta Math. –2016. –pp. 1–55.

[5] Slovak J. *Natural operators on conformal manifoldss* // Dissertations, Mazaryk univ., Brno, –1993.

О ВНУТРЕННИХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯХ ПРОСТЫХ ЛИЕВЫХ ПУЧКОВ РАНГА 1

Н. А. Корешков[1]

---

[1] *Nikolai.Koreshkov@kpfu.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Пусть L – конечномерное векторное пространство над полем P. Обозначим через K пространство всех билинейных кососимметрических отображений из $L \times L$ в L.

Определение 1. *Векторное пространство L над полем P называется лиевым пучком, если существует подпространство S в K такое, что для любого $s \in S$ выполняется соотношение*

$$(asb)sc + (bsc)sa + (csa)sb = 0, \quad a, b, c \in L.$$

(Здесь xsy – образ пары $(x, y) \in L \times L$ при отображении s.)

Как показывают результаты работ [1], [2] лиевы пучки достаточно часто реализуются в виде сэндвичевых алгебр.

Определение 2. *Сэндвичевой алгеброй $M_n(U, V)$ называется пара пространств U, V в пространстве матриц $M_n(P)$, для которых выполнено условие $u_1vu_2 - u_2vu_1 \in U$, когда $u_1, u_2 \in U$, $v \in V$.*

Легко проверить, что сэндвичева алгебра $M_n(U, V)$ является лиевым пучком $U(V)$ в смысле определения 1, если в качестве подпространства умножений S рассматривать подпространство V.

Также как в алгебрах Ли для лиева пучка вводится понятие ранга. А именно, пусть $L_0(x_0, s_0) = \{x \in L \mid (ad_{s_0}x_0)^k x = 0,\ k \in N\}$, где ad_{s_0} – оператор левого умножения, определённый элементом $s_0 \in S$. Минимальная размерность нулькомпоненты $L_0(x_0, s_0)$ называется рангом лиева пучка.

Как известно, тождество Якоби, определяющее структуру алгебры Ли L, равносильно тому, что любой оператор левого умножения $adx,\ x \in L$ является дифференцированием в алгебре с антикоммутативным умножением. Такие дифференцирования называются внутренними.

Как показывает приводимая ниже теорема, условие быть дифференцированием для операторов левого умножения в лиевом пучке, в отличие от алгебр Ли, обычно не выполняется.

Теорема. *Пусть $L(S)$ – простой лиев пучок ранга 1 над алгебраически замкнутым полем P характеристики нуль, $dim\ S > 1$. Тогда операторы левого умножения*

$ad_s x$, $x \in L$, $s \in S$ пучка $L(S)$ являются дифференцированиями, если $L(S)$ является сэндвичевой алгеброй $M_3(U, D')$, где U-подпространство всех кососимметрических матриц в $M_3(P)$, а D' – любое подпространство, содержащее $\langle E \rangle$, в пространстве всех диагональных матриц D.

Литература

[1] Корешков Н. А. *Простые лиевы пучки малых размерностей* // Сиб. матем. журн. – 2014. – Т. 55. – № 3. – С. 428–439.

[2] Корешков Н. А. *Простые симметрические лиевы пучки ранга 1* // Материалы XIII Международной конференции "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения". – Тула, 25–30 мая, 2015. – С. 159.

О ПРОЕКТИРОВАНИЯХ КОНЕЧНЫХ КОЛЕЦ С ЕДИНИЦЕЙ

С. С. Коробков[1]

---

[1] *ser1948@gmail.com*, Уральский государственный педагогический университет

Пусть R — конечное ассоциативное кольцо. Обозначим через $L(R)$ решётку всех подколец кольца R. Будем говорить, что ассоциативное кольцо R^φ решёточно изоморфно кольцу R, если существует изоморфизм φ решётки $L(R)$ на решётку подколец $L(R^\varphi)$. Изоморфизм φ назовем проектированием кольца R на кольцо R^φ.

Назовём кольцо R p-кольцом (p — простое число), если его аддитивная группа является p-группой. Предположим, что R — p-кольцо с единицей e. Если при этом решётка $L(R)$ не является цепью, то в кольце R^φ существует ненулевой идемпотентный элемент u. Обозначим через $\langle e \rangle$ и $\langle u \rangle$ подкольца, порожденные элементами e и u соответственно. Существуют примеры (см. [1]), показывающие, что либо u — единица в кольце R^φ, но $\langle e \rangle^\varphi \neq \langle u \rangle$, либо $\langle e \rangle^\varphi = \langle u \rangle$, но u не является единицей в кольце R^φ. Если же кольцо R^φ содержит единицу e' и при этом выполняется равенство

$$\langle e \rangle^\varphi = \langle e' \rangle, \qquad (1)$$

то в ряде случаев (см. [2]) удаётся доказать изоморфизм между кольцами R и R^φ.

В данном сообщении приводится ряд условий, при которых равенство (1) выполняется.

Теорема. *Пусть R — кольцо с единицей e, изоморфное одному из следующих колец:*

1) конечному полю $GF(p^n)$, где $n > 1$, n не является степенью простого числа и не является произведением двух простых чисел;

2) кольцу Галуа $R = GR(p^n, m)$, где $n > 1$, $m > 1$;

3) коммутативному кольцу, разложимому в прямую сумму колец T_i $(i = \overline{1,k})$, удовлетворяющих условиям: $T_i = S_i + (r_i)$, $S_i \cong GR(p^{n_i}, m_i)$, $n_i > 1$, $m_i > 1$, r_i — нильпотентный элемент;

4) кольцу $M_n(K)$ квадратных матриц порядка $n \geqslant 2$ над кольцом $K = GR(p^k, 1)$, где $k \geqslant 1$.

Пусть R^{φ} — кольцо, решёточно изоморфное кольцу R. Тогда кольцо R^{φ} содержит единичный элемент e' и при этом выполняется равенство (1).

В случаях 2) и 4) $R \cong R^{\varphi}$.

Литература

[1] Коробков С. С. *Решёточные изоморфизмы конечных колец без нильпотентных элементов* // Известия УрГУ. Математика и механика. – 2002. – № 22. – вып. 4. – С. 81–93.

[2] Коробков С. С. *Проектирования колец Галуа* // Алгебра и логика. – 2015. – Т. 54. – № 1. – С. 16–33.

АФФИНОРНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА АЛГЕБРОИДАХ ЛИ

Е. С. Корнев[1]

---

[1] *q148@mail.ru*, Кемеровский государственный университет

Алгеброид Ли - это векторное расслоение $E \xrightarrow{\pi} M$ над многообразием M класса C^{∞} с операцией скобки Ли $[\sigma,\tau]$ любых двух сечений $\sigma\tau \in C^{\infty}(E)$ и гомоморфизмом $A : C^{\infty}(E) \to C^{\infty}(TM)$, таким, что

$$A[\sigma, f\tau] = (A\sigma)(f)[A\sigma, A\tau] + f[A\sigma, A\tau],$$

для любой функции f на многообразии M. Полилинейной p-формой на алгеброиде Ли E называется тензорное поле типа $(p,0)$ на наборах из p сечений векторного расслоения E. На алгеброиде Ли всегда определен внешний дифференциал $d\Omega$ внешней p-формы Ω. Радикалом полилинейной формы Ω на алгеброиде Ли E в точке x называется подпространство $\operatorname{rad}\Omega_x = \{\sigma \in E_x : I_\sigma \Omega_x = 0\}$, где $I_\sigma \Omega$ обозначает внутреннее произведение сечения σ и полилинейной формы Ω. Радикалом 1-формы α называется радикал внешней 2-формы $d\alpha$. 1-форма α называется *регулярной*, если $\operatorname{rank}(\operatorname{rad}\alpha_x) = const$. В этом случае, $\operatorname{rad}\alpha$ есть векторное подрасслоение в E.

Теорема. *Пусть α – незамкнутая регулярная 1-форма на алгеброиде Ли E ранга $k \geqslant 3$, и $R = \operatorname{rank}(\operatorname{rad}\alpha)$. Тогда:*

1) *Если k четно, то и r четно и $0 \leqslant r \leqslant k-2$.*
2) *Если k нечетно, то и r нечетно и $1 \leqslant r \leqslant k-2$.*

Из этой теоремы следует, что ранг любого векторного подрасслоения трансверсального подрасслоению $\operatorname{rad}\alpha$ будет четным при любом ранге алгеброида Ли E.

Аффинорной метрической структурой на алгеброиде Ли E называется четвёрка (α, D, Φ, g), где α – незамкнутая регулярная 1-форма на E, D – фиксированное трансверсальное подрасслоение в $E : E = D \oplus \operatorname{rad}\alpha$, g – риманова метрика на E и Φ – аффинор ассоциированный с внешней 2-формой $d\alpha$ и метрикой g. Понятие аффинорной метрической структуры является обобщениемпочти контактных симплектических и кэлеровых структур для алгеброидов Ли произвольного ранга. Мы вводим и рассматриваем понятие аффинорной метрической структуры на алгеброиде Ли произвольного ранга $\geqslant 3$, и определяем специальные классы таких структур (строгие аффинорные метрические структуры, K-аффинорные структуры и нормальные аффинорные метрические структуры). Основы теории аффинорных метрических структур на алгеброидах Ли изложены в [1]. Мы показываем, какие понятия и свойства можно перенести из теории почти контактных и симплектических структур для многообразий на аффинорные метрические структуры на алгеброидах Ли, а какие из них отличаются для аффинорных метрических структур.

Характеристическим сечением аффинорной метрической структуры (α, D, Φ, g) называется сечение $\xi : I_\xi g = \alpha$. Если выполняется условие $\xi \in \operatorname{rad}\alpha$, то аффинорная метрическая структура называется *строгой*. Если производная Ли $L_\xi g$ метрики g вдоль характеристического сечения ξ равна 0, то аффинорная метрическая структура называется *K-аффинорной*. Мы приводим некоторые важные результаты и свойства для строгих и K-аффинорных метрических структур, многие из которых являются обобщениями и расширениями результатов известных в теориии почти контактных и контактных метрических структур. В частности, теоремы о значении секционной кривизны и кривизны Риччи в направлениях, содержащих характеристическое сечение ξ. Аффинорная метрическая структура (α, D, Φ, g) на алгеброиде Ли E в случае максимально неинволютивного подрасслоения D индуцирует субриманову структуру (D, g), а в случае инволютивного подрасслоения D, индуцирует субкэлерову структуру $(d\alpha, \Phi, g)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президента “Ведущие научные школы РФ” (проект НШ-9740.2016.1).

Литература

[1] Корнев Е. С. *Аффинорные структуры на векторных расслоениях* // Сиб. матем. журн. – 2014. – Т. 55. – № 6. – С. 1283–1296.

О СВОЙСТВАХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ НА ПСЕВДОСФЕРАХ ДЕ СИТТЕРА–ШИРОКОВА

А. В. Костин[1]

---

[1] *kostin_andrei@mail.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Елабужский институт

Асимптотические сети на поверхностях постоянной кривизны с индефинитной метрикой в трёхмерном псевдоевклидовом пространстве являются чебышёвскими. В работах [1], [2] сетевые углы таких сетей представлены как решения дифференциальных уравнений в частных производных. В настоящей работе будут описаны свойства асимтотических линий на псевдосферах де Ситтера–Широкова. Одна из этих поверхностей, — воронка де Ситтера–Широкова, — была получена П.А. Широковым в ещё в студенческие годы [3]. В частности, будут описаны связи сетевых углов асимптотических сетей на псевдосферах с функцией Лобачевского для угла параллельности, а также даны интерпретации функции Гудермана и обратной ей функции с привлечением индефинитных метрик постоянной кривизны. Площади сетевых многоугольников асимтотических сетей на псевдосферах допускают простое выражение через значение этих функций.

Литература

[1] Chern S. S. *Geometrical interpretation of sinh-Gordon equation* // Annales Polonici Mathematici, 1981. – **39**. – P. 63–69.

[2] Галеева Р. Ф., Соколов Д. Д. *О геометрической интерпретации решений некоторых нелинейных уравнений математической физики* // Исследования по теории поверхностей в римановых пространствах – Л.: Издательство ЛГПИ, – 1984. – С. 8–22.

[3] Широков П. А. *Интерпретация и метрика квадратичных геометрий* // Избранные работы по геометрии. – Казань: Изд-во Казан.ун-та, 1966. – С. 15–179.

О ТЕОРЕМЕ КЕЗИ И ЕЕ АНАЛОГАХ НА ПЛОСКОСТЯХ ЛОБАЧЕВСКОГО И ДЕ СИТТЕРА

Н. Н. Костина[1], А. В. Костин[2]

---

[1] *natnikost@mail.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Елабужский институт

[2] *kostin_andrei@mail.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Елабужский институт

Теорема Кези является обобщением теоремы Птолемея евклидовой плоскости. Гиперболические аналоги теоремы Птолемея рассматривали Т. Кубота [1] и П.А. Широков [2]. П.А. Широков доказал также различные “смежные” теоремы и варианты теоремы Птолемея, в которых вершины четырёхугольника лежат на разных ветвях эквидистанты. Теорема Кези евклидовой плоскости отличается от теоремы Птолемея тем, что вершины вписанного четырёхугольника заменяются окружностями. Приведём её формулировку.

Теорема. *Пусть окружности* $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ *касаются окружности* ω *на евклидовой плоскости. Пусть* t_{ij} *— длина отрезка внешней касательной окружностей* ω_i, ω_j*, если окружности* ω_i, ω_j *касаются окружности* ω *одинаково (внутренним или внешним образом), и* t_{ij} *— длина отрезка внутренней касательной, если одна из окружностей* ω_i, ω_j *касается окружности* ω *внутренним образом, а другая — внешним. Тогда выполняется соотношение*

$$t_{12} \cdot t_{34} + t_{23} \cdot t_{14} = t_{13} \cdot t_{24}.$$

В работе [3] доказан гиперболический аналог теоремы Кези. Нами получены орициклические аналоги теоремы Кези для плоскости Лобачевского и плоскости де Ситтера, а также “точечные” интерпретации теоремы Кези и её аналогов. Часть этих результатов отражена в [4].

Литература

[1] Kubota T. *On the extended Ptolemy's theorem in hyperbolic geometry*, Science reports of the Tohoku University. Ser. 1: Physics, Chemistry, astronomy, **2**, 1912. – P. 131–156.

[2] Широков П. А. *Этюды по геометрии Лобачевского*, Известия физико-математического общества при КГУ, серия 2, **24**:1, 1924. – С. 26–32.

[3] Abrosimov N. V., Mikaiylova L. A. *Casey's theorem in hyperbolic geometry*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12**, 2015. – P. 354–360.

[4] Костин А. В., Костина Н. Н. *Интерпретации теоремы Кези и её гиперболического аналога*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13**, 2016. – С. 242–251.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЭЛЕМЕНТОВ ГРУПП ВИДА $F/[N,N]$

А. Ф. Красников[1]

---

[1] *phomsk@mail.ru*, Омский государственный университет им. Ф.М.Достоевского

Пусть F — свободная группа с базой $\{x_j | j \in J\}$. Обозначим через D_k $(k \in J)$ производные Фокса кольца $\mathbf{Z}(F)$.

Теорема 1. *Пусть F — свободная группа с базой $X = \{x_j | j \in J\}$, N— нормальная подгруппа в F, $u \to \bar{u}$ — функция, выбирающая правые шрайеровы представители F по N, S — множество выбранных представителей, $w \in F$, k — целое, $k \neq 0$. Если $w \equiv {w_1}^k w_2$ mod $[N,N]$, где $w_1 = sx_i\overline{sx_i}^{-1} \neq 1$, $s \in S$, $x_i \in X$, а w_2 — произведение элементов вида $(tx\overline{tx}^{-1})^{\pm 1}$, $t \in S$, $x \in X$, $tx\overline{tx}^{-1} \neq w_1$, то*

$$D_i(w) \equiv k\overline{sx_i}^{-1} + v \ mod\ N,$$

где v — сумма элементов вида $\pm r^{-1}$, $r \in S$, $r \neq \overline{sx_i}$.

Следствие 1. *Пусть F — свободная группа с базой $\{x_j | j \in J\}$, N— нормальная подгруппа в F. Элемент w группы F принадлежит $[N,N]$ тогда и только тогда, когда*

$$D_k(w) \equiv 0 \mod N, \ k \in J.$$

Следствие 1 равносильно вложению Магнуса [1] для группы $F/[N,N]$: *Пусть F — свободная группа с базой $\{x_j | j \in J\}$, N — нормальная подгруппа в F, T — правый свободный $\mathbf{Z}(F/N)$-модуль с базой $\{t_k | k \in J\}$. Рассмотрим гомоморфизм*

$$\varphi : F \to \begin{pmatrix} F/N & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix},$$

определяемый отображением

$$x_j \mapsto \begin{pmatrix} x_j N & 0 \\ t_j & 1 \end{pmatrix} (j \in J).$$

Тогда $ker\varphi = [N,N]$.

Теорема 2. *Пусть F — свободная группа, N — нормальная подгруппа в F, r_1 и r_2 — элементы группы $F/[N,N]$ такие, что для некоторого положительного целого n элемент r_1^n лежит в нормальном замыкании элемента r_2^n. Тогда и r_1 лежит в нормальном замыкании элемента r_2.*

Следствие 2 ([2]). *Пусть r_1 и r_2 — элементы свободной группы, такие, что для некоторого положительного целого n элемент r_1^n лежит в нормальном замыкании элемента r_2^n. Тогда и r_1 лежит в нормальном замыкании элемента r_2.*

Следствие 3. *Пусть r_1 и r_2 — элементы свободной разрешимой группы, такие, что для некоторого положительного целого n элемент r_1^n лежит в нормальном замыкании элемента r_2^n. Тогда и r_1 лежит в нормальном замыкании элемента r_2.*

Литература

[1] Magnus W. *On a theorem of Marshall Hall* // Ann. of Math. – 1939. – V. 40. – N 4. – P. 764–768.

[2] Magnus W. *Untersuchungen über einige unendliche diskontinuierliche Gruppen* // Math. Ann. – 1931. – V. 105. – N 1. – P. 52–74.

О НЕКОТОРЫХ ПОЛУПОЛЯХ ПОРЯДКА 64

О. В. Кравцова[1]

---

[1] *ol71@bk.ru*, Сибирский федеральный университет

Пусть W – n-мерное линейное пространство над полем $GF(p)$, θ – биективное отображение из W в $GL_n(p) \cup \{0\}$, при условиях:

1) $\theta(x+y) = \theta(x) + \theta(y)$, $x, y \in W$;

2) множество $R = \{\theta(y) \mid y \in W\}$ содержит единичную матрицу.

Определим на W умножение правилом $x * y = x\theta(y)$, тогда $\langle W, +, * \rangle$ – *полуполе* порядка p^n, R называется *регулярным множеством* (spread set, [1]).

Теорема. *Если θ и σ – две аддитивных биекции из W в $GL_n(p) \cup \{0\}$, удовлетворяющие условиям 1-2, и*

$$R = \{\theta(x) \mid x \in W\} = \{\sigma(x) \mid x \in W\},$$

то полуполе $\langle W, +, * \rangle$ изотопно полуполю $\langle W, +, \circ \rangle$, где

$$x * y = x\theta(y), \qquad x \circ y = x\sigma(y), \quad x, y \in W.$$

Такие изотопные полуполя в общем случае не изоморфны. Описано строение исключительного полуполя порядка 64 [2], не обладающего свойствами лево- и правопримитивности, и изотопных ему полуполей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00707).

Литература

[1] Hughes D. R., Piper F. C. *Projective planes.* – New-York : Springer-Verlag, 1973. – 291 p.

[2] Hentzel I. R., Rúa I. F. *Primitivity of finite semifields with 64 and 81 elements* // Int. J. Algebra Comput. – 2007. – Т. 17, – № 7. – P. 1411–1429.

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ, ПОЛУЧЕННЫХ ПРИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПРОСТРАНСТВ ЛИЗОРКИНА-ТРИБЕЛЯ

В. Л. Крепкогорский[1]

---

[1] *vkrepko@mail.ru*, Казанский (государственный) архитектурно - строительный университет

Теория вложения пространств дифференцируемых функций имеет важные приложения в теории дифференциальных операторов с частными производными. Первоначальные результаты были получены для пространств Соболева и Гельдера, а затем класс пространств был значительно расширен. При этом широко использовалась интерполяция пространств [1], [2]. В настоящей работе рассматриваются классы пространств $BL^{sk}_{pq}(\Omega)$ и $BL^{sk}_{pq}(\partial\Omega)$.

Пространства этих классов получаются при вещественной интерполяции [3]

$$\left(F^{s_0}_{p_0,q_0}(R_n), F^{s_1}_{p_1,q_1}(R_n)\right)_{\theta,q} = BL^{s_\theta,k}_{p_\theta,q}(R_n),$$

где k – угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $(1/p_i, s_i), i = 0, 1$.

Пусть Ω – ограниченная C^∞ область в R_n, γ – внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$. Оператор следа $\Re$ ставит в соответствие функции $f \in D'(\Omega)$ вектор нормальных производных $\frac{\partial^j f}{\partial\gamma^j}|\partial\Omega$, $j = 0, 1, \dots, r$. Нормы в пространствах на области определяются как

$$\|f|F^s_{pq}(\Omega)\| = \inf\|g|F^s_{pq}(R_n)\|, \quad \|f|BL^{sk}_{pq}(\Omega)\| = \inf\|g|BL^{sk}_{pq}(R_n)\|$$

где инфимум берется по всевозможным продолжениям функции f на R_n. Прямые и обратные теоремы вложения формулируются в терминах ретракций и коретракций.

Теорема. *Пусть* $r = 0, 1, 2, \dots$. *Если* $1 \leqslant p < \infty, 1 \leqslant q \leqslant \infty, k \neq 0, s > r + 1/p$, *то* $\Re$ – *ретракция* $BL^{sk}_{pq}(\Omega)$ *на* $\prod_{i=0}^r BL^{s(k-1)}_{pq}(\partial\Omega)$.

Это означает, что оператор $\Re$ отображает $BL^{sk}_{pq}(\Omega)$ на $\prod_{i=0}^r BL^{s(k-1)}_{pq}(\partial\Omega)$ и, мало того, найдется оператор продолжения S, который производит отображение в обратную сторону и при этом является коретракцией, т. е. $\Re S = E$. Эти утверждения соответствуют прямым и обратным теоремам вложения для пространств $BL^{sk}_{pq}(\Omega)$.

Литература

[1] Бесов О. В. *Интерполяция пространств дифференцируемых функций на области* // Тр. МИАН – 1997. – Т. 214. – С. 59–82.

[2] Бекмаганбетов К. А., Нурсултанов Е. Д. *Об интерполяции и теоремах вложения пространств* $\overset{\star}{B}{}^{\sigma q}_{p\tau}(\Omega)$ // Матем. заметки – 2008. – Т. 84, – № 5 –С. 788—790.

[3] Крепкогорский В. Л. *Интерполяция в пространствах Лизоркина-Трибеля и Бесова* // Матем. сб. – 1994. – Т. 185, – № 7 –С. 63—76.

ОРБИТЫ ИНТЕГРИРУЕМЫХ КОЦИКЛОВ АЛГЕБРЫ ЛИ ТИПА G_2 НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2

М. И. Кузнецов[1], Н. Г. Чебочко[2]

---

[1] *mikhail.kuznetsov@itmm.unn.ru*, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

[2] *chebochko@mail.ru*, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Пусть $(\mathscr{L},\ \mu)$ – многообразие структур алгебры Ли на векторном пространстве L с отмеченной точкой μ. В данной работе под глобальной деформацией алгебры Ли (L,μ) мы понимаем рациональный морфизм $f_t : (\mathbb{A}^1,\ 0) \longrightarrow (\mathscr{L},\ \mu)$, а также любую его специализацию. Ряд Тейлора для f_t в 0 имеет вид $f_t = \mu + t\phi_1 + t^2\phi_2 + \dots$, где $\phi_1 \in Z^2(L,L)$, $\phi_j \in C^2(L,L)$. Пусть $\tilde{L}$ – орбита μ относительно естественного действия группы $GL(L)$, $T_\mu(\tilde{L})$ – касательное пространство к орбите в точке μ, $T_\mu(\mathscr{L})$ – касательное пространство к $\mathscr{L}$ в μ. Пространство локальных деформаций алгебры Ли $(L,\ \mu)$, $H_{loc}(\mu) = T_\mu(\mathscr{L})/T_\mu(\tilde{L})$, может отличаться от группы формальных локальных деформаций $H^2(L,L)$ (см. [1]).

Здесь исследуются глобальные деформации алгебры Ли G_2 над алгебраически замкнутым полем F характеристики 2. Доказано, что в этом случае $H_{loc}(L) = H^2(L,\ L)$. Коцикл ψ называется интегрируемым, если он продолжается до глобальной деформации. Согласно [2], для $L = G_2$ в характеристике 2 $\dim H^2(L,\ L) = 20$. Мы используем метод исследования глобальных деформаций, изложенный в [1] и основанный на изучении орбит действия группы автоморфизмов на $H^2(L,\ L)$. Сопряженные относительно автоморфизмов интегрируемые коциклы приводят к изоморфным глобальным деформациям. В [3] доказано, что группа автоморфизмов G алгебры Ли G_2 в четной характеристике изоморфна $Sp(6)$. Пусть V – стандартный 6-мерный $Sp(6)$-модуль с симплектическим базисом $\{e_{\pm i},\ i = 1,2,3.\}$. В [2] построен изоморфизм G-модулей $\Lambda^3(V)$ и $H^2(L,\ L)^{(-)}$.

Теорема. *Для алгебры Ли* $L = G_2$ *над алгебраически замкнутым полем характеристики 2 классы интегрируемых коциклов образуют* G*-многообразие, изоморфное с точностью до морфизма Фробениуса многообразию Грассмана* $G(3,6) \subset \Lambda^3(V)$*, которое состоит из двух* G*-орбит — орбиты элемента* $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ *(лагранжиан) и орбиты 3-вектора* $e_{-1} \wedge e_1 \wedge e_2$.

Для каждого класса интегрируемых коциклов построены глобальные деформации алгебры Ли G_2 и их реализации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки России (госзаказ, проект 1.1410.2014/К).

Литература

[1] Кострикин А. И., Кузнецов М. И. *О деформациях классических алгебр Ли характеристики три* // Докл. РАН. – 1995. – Т. 343. – № 3. – С. 299–301.

[2] Чебочко Н. Г. *Деформации классических алгебр Ли с однородной системой корней в характеристике 2. I* // Математический сборник. – 2005. – Т. 196. – № 9. – С.125–156.

[3] Frohardt D. E., Griess(Jr.) R. L. *Automorphisms of modular Lie algebras* // Nova J. Alg. Geom. – 1992. – V. 1. – P.339–345.

СТРУКТУРА C^*-АЛГЕБРЫ, ПОРОЖДЕННОЙ «РУЧНЫМ» ОТОБРАЖЕНИЕМ

А. Ю. Кузнецова[1]

---

[1] *alla.kuznetsova@gmail.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

Пусть задано $\varphi : X \longrightarrow X$ — отображение счетного множества в себя, и пусть $\sup\limits_{x\in X} \operatorname{card} \varphi^{-1}[x] = m < \infty$. Будем предполагать, что на X отсутствуют циклические элементы, то есть $\varphi^n(x) \neq x$ ни при каких $n \in \mathbb{N}$ и $x \in X$. C^*-алгеброй, порожденной данным отображением, будем называть операторную алгебру $C^*_\varphi(X) \in B(l^2(X))$, порожденную оператором композиции

$$T_\varphi : l^2(X) \longrightarrow l^2(X); \quad T_\varphi f = f \circ \varphi.$$

Отображение, заданное на X, индуцирует на $l^2(X)$ семейство частичных изометрий $\{U_k\}$, причем

$$T_\varphi = U_1 + \sqrt{2}U_2 + \cdots + \sqrt{m}U_m.$$

Отсюда $C^*_\varphi(X)$ порождается семейством частичных изометрий $\{U_k\}$, удовлетворяющих соотношениям на начальные и конечные проекторы:

$$U_1^* U_1 + U_2^* U_2 + \cdots + U_m^* U_m = P_\varphi;$$
$$U_1 U_1^* + U_2 U_2^* + \cdots + U_m U_m^* = Q_\varphi,$$

где операторы P_φ и Q_φ — проекторы, определенные заданным на множестве отображением [1].

Теорема.[2] *Алгебра $C^*_\varphi(X)$ является $\mathbb{Z}$-градуированной, причем ее центральная подалгебра $C_{\varphi,0}$ является AF-алгеброй.*

Напомним, что множество частичных изометрий в унитальной C^*-алгебре называется ручным, если оно порождает инверсную полугруппу.

Определение. *Множество X назовем ручным для отображения φ, если семейство $\{U_k\} \cup \{U_k^*\}$ есть ручное множество.*

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *центральная подалгебра $C^*_{\varphi,0}$ коммутативна;*

2) множество X ручное для φ.

Теорема 2. *Пусть $C^*_\varphi(X)$ порождена отображением на ручном множестве. Тогда либо*

1) $l^2(X) = \mathscr{H}_0 \oplus \Big(\bigoplus\limits_{\mathbb{Z}_+}\big(\bigoplus\limits_{i\in I}\mathscr{H}_i\big)\Big)$, где I — конечномерное семейство индексов; либо

2) $l^2(X) = \bigoplus\limits_{\mathbb{Z}}\big(\bigoplus\limits_{i\in I}\mathscr{H}_i\big)$, где I — счетное семейство индексов,

и сужение T_φ на каждое $\mathscr{H}_i$ является оператором обобщенного сдвига.

Литература

[1] Григорян С. А., Кузнецова А. Ю. *C^*-алгебры, порожденные отображениями* // Мат. заметки. – 2010. – Т. 87. – № 5. – С. 694–703.

[2] Grigoryan S., Kuznetsova A. *On a class of nuclear C^*-algebras* // An Operator Theory Summer. Proc. of the 23rd Int. Conf. on Operator Theory (Timisoara, Romania, 2010). – Bucharest: The Theta Foundation, 2012. – P. 39–50.

ОБ ОДНОЙ КОНСТРУКЦИИ РАССЛОЕНИЯ ЦЕНТРОПРОЕКТИВНЫХ РЕПЕРОВ

А. В. Кулешов[1]

---

[1] *arturkuleshov@yandex.ru*, Балтийский федеральный университет имени И. Канта

Г. Ф. Лаптев в работе [3] дал описание расслоения центропроективных реперов над произвольным гладким многобразием M_n в терминах структурных форм. В нашей работе [2] предложена явная конструкция такого расслоения.

Пусть M — гладкое многообразие размерности n ($n \in \mathbb{N}$). Через r^p_x обозначим репер порядка p в точке $x \in M$. Как известно (см., напр., [1]), многообразие $H^p(M)$ всех p-реперов наделено структурой главного расслоения над базой M с канонической проекцией $\pi_p\colon H^p(M) \to M$, где $\pi_p(r^p_x) = x$, и правым действием дифференциальной группы D^p_n порядка p. Стандартные координаты в $\mathbb{R}^n$ порождают глобальную карту на D^p_n с координатами

$$(x^i_j(l^p), x^i_{jk}(l^p), \ldots, x^i_{j_1\ldots j_p}(l^p)), \qquad l^p \in D^p_n,$$

симметричными по нижним индексам. Каждая локальная карта (U, φ) на M порождает тривиализацию $\tilde{\varphi}\colon r^p_x \mapsto (x, l^p)$ расслоения $H^p(M)$ и, как следствие, карту на $H^p(M)$. Структурные формы $\omega^i, \omega^i_j, \ldots, \omega^i_{j_1\ldots j_{p-1}}$ [1, с. 48] расслоения $H^p(M)$ инвариантны относительно замен указанных карт.

В [2] доказаны нижеследующие утверждения:

Утверждение 1. *Соотношения $x^i_j(l^2) = \delta^i_j$, $x^k_{jk}(l^2) = 0$ выделяют нормальный делитель K группы D^2_n, фактор-группа D^2_n/K по которому изоморфна группе центропроективных преобразований n-мерного проективного пространства.*

Координаты на D^2_n/K имеют вид $(x^i_j(l^2K), x_i(l^2K))$, где

$$x^i_j(l^2K) = x^i_j(l^2), x_i(l^2K) = x^m_{ik}(l^2)\tilde{x}^k_m(l^2), \quad \tilde{x}^i_k x^k_j = \delta^i_j.$$

Утверждение 2. *Многообразие $H^2(M)/K$ орбит вида r^2_xK, где $r^2_x \in H^2(M)$, наделено структурой главного расслоения над базой M с канонической проекцией $\underline{\pi}\colon r^2_xK \mapsto x$ и структурной группой D^2_n/K, действующей по закону $(r^2_xK)(l^2K) = (r^2_x{\cdot}l^2)K$. Каждая локальная карта (U, φ) на M порождает тривиализацию $\underline{\tilde{\varphi}}\colon r^2_xK \mapsto (x, l^2K) \in U \times D^2_n/K$ расслоения $H^2(M)/K$ и локальную карту с координатами*

$$(\varphi^i(x), x^i_j(l^2K), x_i(l^2K)). \tag{1}$$

Утверждение 3. *Формы ω^i, ω^i_j, $\omega_i \overset{def}{=} \omega^k_{ik}$ инвариантны относительно замен локальных карт вида (1), причем*

$$d\omega^i = \omega^k \wedge \omega^i_k, \quad d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk},$$
$$d\omega_i = \omega^k_i \wedge \omega_k + \omega^k \wedge \omega_{ik}, \quad \omega_{ik} = \omega^m_{ikm}.$$

Литература

[1] Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. – М.: ВИНИТИ, 1979. – Т.9. – С. 5–247.

[2] Кулешов А. В. *Центропроективные реперы как классы эквивалентности реперов второго порядка* // Диф. геом. многообр. фигур. – Калининград: Изд-во БФУ им. И. Канта, 2015. – Вып. 46. – С. 94–107.

[3] Лаптев Г. Ф. *Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии* // Тр. геом. семин. – М: ВИНИТИ, 1966. – Т. 1. – С. 139–189.

О ГИПОТЕЗЕ ВООТА ДЛЯ ВПОЛНЕ О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ

Б. Ш. Кулпешов[1], С. В. Судоплатов[2]

---

[1] *b.kulpeshov@iitu.kz*, Международный университет информационных технологий
[2] *sudoplat@math.nsc.ru*, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Пусть L — счетный язык первого порядка. Всюду здесь мы рассматриваем L-структуры и предполагаем что L содержит символ бинарного отношения $<$, который интерпретируется как линейный порядок в этих структурах. Настоящий доклад касается понятия *слабой o-минимальности*, первоначально глубоко исследованного в [1]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем

$c \in A$. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M.

В следующих определениях M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, M — $|A|^{+}$-насыщенна, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические.

Определение 1 ([2]). *Будем говорить что тип p не является слабо ортогональным типу q ($p \not\perp^{w} q$), если существуют A-определимая формула $H(x, y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие что $\beta_1 \in H(M, \alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M, \alpha)$.*

Определение 2 ([3]). *Будем говорить что тип p не является вполне ортогональным типу q ($p \not\perp^{q} q$), если существует A-определимая биекция $f : p(M) \to q(M)$. Будем говорить что слабо о-минимальная теория является вполне о-минимальной, если понятия слабой и вполне ортогональности 1-типов совпадают.*

Как известно, в работе [4] решена проблема Воота для о-минимальных теорий. Байжанов Б. С. и Алибек А. [5] построили примеры слабо о-минимальных теорий с k счетными моделями, где $k \in \{4, 5, 6, \ldots\} \cup \{\omega\}$. Здесь мы представляем теорему, являющуюся решением проблемы Воота для вполне о-минимальных теорий:

Теорема. *Пусть T — вполне о-минимальная теория в счетном языке. Тогда либо T имеет 2^{ω} счетных моделей, либо T имеет в точности $6^{a}3^{b}$ счетных моделей, где a и b — неотрицательные целые числа.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК (грант №0830/ГФ4).

Литература

[1] Macpherson H.D., Marker D. and Steinhorn C. *Weakly o-minimal structures and real closed fields* // Transactions of the American Mathematical Society. – 2000. – V. 352. – P. 5435–5483.

[2] Baizhanov B.S. *Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates* // Jour. of Symb. Logic. – 2001. – V. 66. – P. 1382–1414.

[3] Кулпешов Б.Ш. *Ранг выпуклости и ортогональность в слабо о-минимальных теориях* // Известия НАН РК, серия физико-математическая. – 2003. – № 227. – С. 26–31.

[4] Mayer L.L. *Vaught's conjecture for o-minimal theories* // Jour. of Symb. Logic. – 1988. – V. 53. – P. 146–159.

[5] Alibek A., Baizhanov B.S. *Examples of countable models of a weakly o-minimal theory* // International Journal of Mathematics and Physics. – 2012. – V. 3. – № 2. – P. 1–8.

ОБ ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА РИМАНА ДЛЯ МЕТААНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВТОРОГО ТИПА

С. Ю. Курицын[1], К. М. Расулов[2]

---

[1] *KuritsynSergey@me.com*, Смоленский государственный университет
[2] *kahrimanr@yandex.ru*, Смоленский государственный университет

Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым гладким контуром L, а $T^- = \overline{C}\backslash(T^+ \cup L)$. Для определенности будем предполагать, что точка $z = 0$ принадлежит области T^+.

Рассматривается следующая краевая задача (см. также [1, с. 141]). *Требуется найти все исчезающие на бесконечности кусочно метааналитические функции второго типа* $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$, *принадлежащие классу* $M_2(T^\pm) \cap H^{(q)}(L)$ *и удовлетворяющие на L следующим краевым условиям*:

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial x} + G_1(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial x} + \int\limits_L A_1(t,\tau)\frac{\partial F^+(\tau)}{\partial x}d\tau + \int\limits_L B_1(t,\tau)\frac{\partial F^-(\tau)}{\partial x}d\tau = g_1(t), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial y} + G_2(t)\frac{\partial F^-(t)}{\partial y} + \int\limits_L A_2(t,\tau)\frac{\partial F^+(\tau)}{\partial y}d\tau + \int\limits_L B_2(t,\tau)\frac{\partial F^-(\tau)}{\partial y}d\tau = ig_2(t), \qquad (2)$$

где $G_k(t), g_k(t) (k = 1, 2)$ *– заданные на L функции класса* $H^{(1)}(L)$, *причем* $G_k(t) \neq 0$, а $A_k(t,\tau)$, $B_k(t,\tau)$ $(k = 1, 2)$ *– заданные фредгольмовы ядра из класса* $H_*^{(1)}(L \times L)$.

Следуя [1], сформулированную выше краевую задачу будем называть *первой основной обобщенной краевой задачей типа Римана для метааналитических функций второго типа* или, короче, *задачей* $\boldsymbol{GR}_{1,M}$.

Теорема. *Если* $L = \{t : |t| = 1\}$, *то решение задачи* $\boldsymbol{GR}_{1,M}$ *в классе кусочно метааналитических функций второго типа сводится к решению двух обобщенных задач Римана вида*

$$\Phi_1^+(t) + G_{11}(t)\Phi_1^-(t) + \int\limits_L A_{11}(t,\tau)\Phi_1^+(\tau)d\tau + \int\limits_L B_{11}(t,\tau)\Phi_1^-(\tau)d\tau = g_{11}(t),\ t \in L,$$

$$\Phi_2^+(t) + G_{21}(t)\Phi_2^-(t) + \int\limits_L A_{21}(t,\tau)\Phi_2^+(\tau)d\tau + \int\limits_L B_{21}(t,\tau)\Phi_2^-(\tau)d\tau = g_{21}(t),\ t \in L,$$

относительно исчезающих на бесконечности кусочно аналитических функций $\Phi_1^\pm(z)$ *и* $\Phi_2^\pm(z)$ *соответственно, где функции* $G_{k1}(t)$ $(k = 1,2)$ *и фредгольмовы ядра* $A_{k1}(t,\tau)$ *и* $B_{k1}(t,\tau)$ $(k = 1,2)$ *определенным образом выражаются через коэффициенты краевых условий (1), (2).*

Литература

[1] Расулов К. М. *Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения.* – Смоленск: Изд-во СГПУ, 1998. – 344 с.

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА АЭРОГИДРОДИНАМИКИ

А. Г. Лабуткин[1], Р. Б. Салимов

---

[1] *labutkin.50@mail.ru*, Казанский государственный архитектурно-строительный университет

В плоскости $z = x + iy$ имеется крыловой профиль L_z, обтекаемый потенциальным потоком невязкой несжимаемой жидкости, когда скорость невозмущенного потока равна $v_\infty e^{i\eta_\infty}, v_\infty > 0, |\eta_\infty| > \frac{\pi}{2}$. Комплексный потенциал этого потока обозначим $w(z) = \varphi + i\psi$. Тогда $w'(z) = ve^{-i\eta}$, где v – величина скорости, η – угол наклона вектора скорости к оси Ox. Будем считать, что на L_z функция тока $\psi = 0$, точка разветвления A потока находится на нижней поверхности профиля и потенциал скорости в ней $\varphi = \varphi_A = 0$. Примем, что B – точка схода потока с абсциссой $x = 0$, D – передняя кромка профиля L_z с абсциссой $x = d$. Требуется найти форму профиля L_z, если на нем потенциал скорости φ задан как функция абсциссы x точек L_z в виде $\varphi = \varphi^+(x), 0 \leqslant x \leqslant d$ на верхней поверхности BD; $\varphi = \varphi^-(x), 0 \leqslant x \leqslant d$ на нижней поверхности BAD профиля L_z, причем $\varphi^+(d) = \varphi^-(d), \varphi^+(0) = \varphi_B, \varphi^-(0) = \varphi_H, \varphi_B, \varphi_H$ – заданные числа, $\varphi_B > \varphi_H > 0$.

Для решения задачи, поступая как в [1] (с. 97-105), [2] (с. 25-33) в плоскости комплексного переменного $\zeta = \rho e^{i\gamma}, \rho > 0, 0 \leqslant \gamma < 2\pi$, возьмем окружность $|\zeta| = 1$, обтекаемую с циркуляцией $\Gamma = \varphi_B - \varphi_H$ потоком с комплексным потенциалом $w = \omega(\zeta) = -U_0(\zeta + \frac{1}{\zeta}) + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\zeta + C^*$, где $U_0 > 0, C^*$ – действительные постоянные, которые выбираются так, чтобы функция $\omega(\zeta)$ отображала конформно область $|\zeta| > 1$ на область D_w в плоскости w, когда точки $e^{i\gamma_1}, e^{i\gamma_2}$, в которых $\gamma_2 = \pi - \gamma_1, -\frac{\pi}{2} < \gamma_1 < 0$, являются соответственно точками разветвления и схода потока. $C^* = \frac{1}{2}(\varphi_B - \frac{\Gamma}{2}), \gamma_1$ определяется из уравнения $\cot\gamma_1 = -\gamma_1 - \pi(\frac{\varphi_B}{\Gamma} - \frac{1}{2}), U_0 = -\frac{\Gamma}{4\pi\sin\gamma_1}$.

Из равенства $w(z) = \omega(\zeta)$ при $\zeta = e^{i\gamma}$, получим

$\varphi^-(x) = \varphi_1(\gamma) - \Gamma, \gamma_2 \leqslant \gamma < 2\pi$; $\varphi^-(x) = \varphi_1(\gamma), 0 \leqslant \gamma < \gamma_D$; $\varphi^+(x) = \varphi_1(\gamma), \gamma_D \leqslant \gamma < \gamma_2$, где $\varphi_1(\gamma) = -2U_0\cos\gamma - 2\gamma U_0\sin\gamma_1 + C^*$.

Из этих уравнений найдем функцию $x = x(\gamma), 0 \leqslant \gamma < 2\pi$. Следовательно, получили задачу об определении функции $z(\zeta)$, аналитической в области $|\zeta| > 1$ и имеющей простой полюс на бесконечности, по краевому условию $\Re z(e^{i\gamma}) = x(\gamma), 0 \leqslant \gamma < 2\pi$. Решение этой обобщенной задачи Шварца для функции $z(\zeta)$ определяется формулой [3] (с. 282-287):

$$z(\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\gamma)\frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta}d\gamma + iB_0 + (A + iB)\zeta - \frac{A - iB}{\zeta},$$

где B_0, A, B – произвольные действительные постоянные, причем $z'(\infty) = A + iB$. Переходя к пределу при $\zeta \to e^{i\gamma}(|\zeta| > 1)$, найдем $z(e^{i\gamma}) = x(\gamma) + iy(\gamma)$, где

$$y(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma - \gamma}{2}d\sigma + B_0 + 2A\sin\gamma + 2B\cos\gamma,\ 0 \leqslant \gamma < 2\pi.$$

Постоянная B_0 может быть выбрана произвольно. При заданных в двух точках носика профиля величинах скорости, для нахождения постоянных A и B получена система линейных уравнений, определитель которой не равен нулю. Получены формулы для нахождения скорости $v = v(s)$ на профиле и его подъемной силы.

Литература

[1] Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. *Обратные краевые задачи и их приложения.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. – 333 с.

[2] Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. *Обратные краевые задачи аэрогидродинамики.* – М. : Изд. фирма “Физико-математ. лит.” ВО Наука, 1994. – 436 с.

[3] Гахов Ф. Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.

О КОНГРУЭНЦ-КОГЕРЕНТНЫХ УНАРАХ И УНАРАХ С МАЛЬЦЕВСКОЙ ОПЕРАЦИЕЙ

А. Н. Лата[1]

---

[1] *alex.lata@yandex.ru*, Волгоградский государственный социально-педагогический университет

Универсальная алгебра A называется конгруэнц–когерентной (coherent) [1], если любая подалгебра B алгебры A, содержащая некоторый класс конгруэнции θ алгебры A, является объединением классов конгруэнции θ.

Унаром называется алгебра с одной унарной операцией.

Основные определения и обозначения, связанные с унарами, приведены в [2].

Теорема 1. *Унар $\langle A, f\rangle$ является конгруэнц–когерентным тогда и только тогда, когда $\langle A, f\rangle$ – один из унаров следующего вида: 1) C_n^0; 2) $C_n^0 + C_m^0$; 3) C_1^t, для некоторых $n, m \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*

Унаром с мальцевской операцией [3] называется алгебра $\langle A, d, f\rangle$ с унарной операцией f и тернарной операцией d, на которой истинны тождества Мальцева $d(x, y, y) = d(y, y, x) = x$ и тождество $f(d(x, y, z)) = d(f(x), f(y), f(z))$.

В [3] показано, что на любом унаре $\langle A, f\rangle$ можно так задать тернарную операцию p, что алгебра $\langle A, p, f\rangle$ становится унаром с мальцевской операцией. Эта операция определяется следующим образом.

Пусть $\langle A, f\rangle$ — произвольный унар и $x, y \in A$. Для любого элемента x унара $\langle A, f\rangle$ через $f^n(x)$ обозначим результат n-кратного применения операции f к элементу x; при этом $f^0(x) = x$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, а также $k(x, y) = \min M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$, и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$p(x, y, z) \overset{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) \leqslant k(y, z) \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \tag{1}$$

В [2] получено полное описание простых и псевдопростых алгебр в классе алгебр $\langle A, p, f\rangle$.

Теорема 2. *Пусть* $\langle A, p, f\rangle$ *— унар с мальцевской операцией* $p(x, y, z)$*, определенной по правилу* (1)*. Алгебра* $\langle A, p, f\rangle$ *является конгруэнц–когерентной тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий: 1) операция* f *на* A *является инъективной; 2) унар* $\langle A, f\rangle$ *содержит такой элемент* a*, что* $f(x) = a$ *для любого* $x \in A$*, где* $|A| \geqslant 3$*; 3) унар* $\langle A, f\rangle$ *изоморфен* C_1^t *для некоторого* $t \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Литература

[1] Geiger D. *Coherent algebras* // Notices Amer. Math. Soc. – 1974. – Vol. 21. – A-436.

[2] Усольцев В. Л. *Простые и псевдопростые алгебры с операторами* // Фунд. и прикл. матем. – 2008. – Т. 14. – Вып. 7. – С. 189–207.

[3] Карташов В. К. *Об унарах с мальцевской операцией* // Универсальная алгебра и ее приложения: Тез. сообщ. участ. междунар. семинара, посв. памяти проф. Моск. гос. ун-та Л.А. Скорнякова. – Волгоград: Перемена, 1999. – С. 31–32.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ВЕЙВЛЕТАМИ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ВОЛН ПЕРИОДИЧЕСКИМИ СТРУКТУРАМИ

Е. К. Липачёв[1]

Рассеяние электромагнитной волны идеально проводящей периодической структурой в случае TM–поляризации моделируется краевой задачей для уравнения Гельмгольца $\Delta u\big(x, y\big) + k^2 u\big(x, y\big) = 0$ с условием Неймана на границе $\big\{(x, f(x))|f(x+d) = f(x)\big\}$: $\partial_{\vec{n}} u\big(x, f(x)\big) = g(x)$, условий излучения парциального типа, гарантирующим отсутствие приходящих из бесконечности волн, а также условия квазипериодичности $u(x + d, y) = \exp(i\alpha d)\, u(x, y)$, $\alpha = k\sin\theta$ (θ – угол падения волны).

В пространстве квазипериодических функций поставленная краевая задача однозначно разрешима и решение представимо в виде

$$u\big(x, y\big) = V\rho\,(x) \equiv \int G\big(k; x, y, \tau\big)\rho\,(\tau)\, d\ell_\tau,$$

где интеграл рассматривается на одном периоде, а плотность $\rho(x)$ определяется из интегрального уравнения

$$K\rho \equiv \frac{1}{2}\rho(x) + T\rho(x) = g(x),\ x \in [0, d],$$

$$\big(T\rho\big)\,(x) = \frac{\partial}{\partial \vec{n}_{(x, f(x))}}\,\big[V\rho\big]\,\big(x, f\,(x)\big),$$

$$G\big(k; x, y, \tau\big) = \frac{i}{2d}\sum_{n\in Z}\frac{1}{\beta_n}\exp\big[i\alpha_n\,(x-\tau) + i\beta_n|y - f\,(\tau)\,|\big],$$

---

[1] *elipachev@gmail.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

$\alpha_n = \alpha + \frac{2\pi n}{d}$, $\beta_n = \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}$ (ветвь корня выбрана так, что $\mathrm{Im}\,\beta_n \geqslant 0$).

Алгоритм приближенного решения краевой задачи основан на приближении вейвлетами решения интегрального уравнения. В качестве масштабирующей функции при построении кратномасштабного анализа используются B–сплайны φ порядков 1 и 2. С помощью процесса периодизации образуются базисы $\{\tilde{\varphi}_{pq}\}$, $\{\tilde{\psi}_{pq}\}$ пространства $L^2[0,d]$ и цепочка конечномерных пространств

$$\tilde{V}_0 \subset \tilde{V}_1 \subset \cdots \subset \tilde{V}_i \subset \cdots, \quad dim\tilde{V}_i = 2^i, \quad \tilde{V}_{i+1} = \tilde{V}_i \oplus \tilde{W}_i.$$

В качестве аппроксимирующих пространств в алгоритме приближенного решения выбираются пространства

$$X_n \equiv \tilde{V}_n = \tilde{V}_0 \oplus \tilde{W}_0 \oplus \tilde{W}_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{W}_n$$

и приближенное решение ρ_n интегрального уравнения ищется в виде

$$\rho_n(x) = a_0\tilde{\varphi}_{00}(x) + \sum_{i=0}^{n}\sum_{q=0}^{2^i-1} b_{iq}\tilde{\psi}_{iq}(x),$$

где коэффициенты a_{00}, b_{iq} $(i = 0,\dots,n; q = 0,\dots,2^{i-1})$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений метода Галеркина.

Теорема. *Приближенное решение* $\rho_n(x)$ *при* $n \to \infty$ *сходится к точному решению* $\rho(x)$ *интегрального уравнения краевой задачи рассеяния и справедлива оценка*

$$\left\|\rho - \rho_n\right\|_{L^2} \leqslant C2^{-n}\left(\left\|\rho\right\|_{L^2} + \left\|g\right\|_{H^1}\right),$$

где C *– константа, не зависящая от* n.

СЕТЬ C^*-АЛГЕБР, ПОРОЖДЕННАЯ ПОЛУГРУППОЙ ПУТЕЙ

Е. В. Липачева[1], А. С. Ситдиков[2], Т. А. Григорян[3]

---

[1] *elipacheva@gmail.com*, Казанский государственный энергетический университет
[2] *airat_vm@rambler.ru*, Казанский государственный энергетический университет
[3] *tkhorkova@gmail.com*, Казанский государственный энергетический университет

В последние годы в квантовой теории поля широко применяется алгебраический подход [1]. Физическое содержание теории кодируется в сети C^*-алгебр, индексируемых частично-упорядоченным множеством $\{K, \leqslant\}$. С помощью категории частично-упорядоченных множеств можно образовывать симплициальные множества (0-симплексы, 1-симплексы и пути). Функториальное соответствие между этой категорией и категорией унитальных C*-алгебр $\{\mathscr{A}_o, o \in K\}$, образующих сеть, позволяет изучать свойства рассматриваемой физической системы с помощью алгебраических методов [2-4].

Пусть K – частично упорядоченное множество. Тройка $a, c, x \in K$ образует 1-*симплекс* на множестве K, если $a, c \leqslant x$ [4]. Будем обозначать его через $b = [c^x a]$. При этом $\partial_1 b = a$ – начальная и $\partial_0 b = c$ – конечная точки 1-симплекса, а x – его носитель. Обратным к нему является 1-симплекс $b^{-1} = [a^x c]$. Под *путем* $p : a \mapsto c$ на K понимается последовательность 1-симплексов $p = b_n * \ldots * b_0$, такая, что $\partial_1 b_k = \partial_0 b_{k-1}$,

$k = 1, \ldots, n$. При этом $\partial_1 p = a = \partial_1 b_0$ – начальная точка пути, $\partial_0 p = c = \partial_0 b_n$ – конечная точка пути. На множестве путей S можно ввести естественную структуру полугруппы с умножением $p_1 * p_0$, отличным от нуля, если $\partial_1 p_1 = \partial_0 p_0$.

Полугруппу S, удовлетворяющую определенному набору аксиом, назовем *полугруппой путей*. Полугруппа путей S является полугруппой с сокращением и одновременно инверсной полугруппой, где инверсным путем к $p = b_n * \ldots * b_0$ будет обратный путь $p^{-1} = b_0^{-1} * \ldots * b_n^{-1}$.

Рассмотрим гильбертово пространство $l^2(S)$ комплексно-значных функций на S, суммируемых с квадратом, с естественным ортонормированным базисом $\{e_p\}_{p \in S}$. C^*-алгебра $C^*_{red}(S)$ задается, как равномерно-замкнутая подалгебра в алгебре операторов $B(l^2(S))$, порожденная операторами частичной изометрии T_p, $p \in S$, где $T_p e_q = e_{p*q}$, $q \in S$.

Теорема. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *C^*-алгебра $C^*_{red}(S)$ представляется в виде прямой суммы C^*-алгебр: $C^*_{red}(S) = \bigoplus_{a \in K} \mathscr{A}_a$;*

2) *существует сеть изоморфизмов $\{\gamma_{ca}, a \leqslant c\}_{a,c \in K}$, где $\gamma_{ca} : \mathscr{A}_a \to \mathscr{A}_c$, удовлетворяющих равенству $\gamma_{dc} \circ \gamma_{ca} = \gamma_{da}$ для $a \leqslant c \leqslant d$;*

3) *множество изоморфизмов $\{\gamma_{ca}, a \leqslant c\}$ продолжается на 1-симплексы $\gamma_b : \mathscr{A}_{\partial_1 b} \to \mathscr{A}_{\partial_0 b}$, для которых выполняется тождество 1-коцикла* [4]: *$\gamma_{[d^x c]} \circ \gamma_{[c^y a]} = \gamma_{[d^z a]}$, если существует $w \in K$ такой, что $x, y, z \leqslant w$.*

Заметим, что множество изоморфизмов можно расширить на пути $\{\gamma_p, p \in S\}$, где $\gamma_p : \mathscr{A}_{\partial_1 p} \to \mathscr{A}_{\partial_0 p}$, для которых справедливо обобщение тождества 1-коцикла: $\gamma_{p_2} \circ \gamma_{p_1} = \gamma_{p_2 * p_1}$.

Таким образом, мы получили сеть C*-алгебр $\{\mathscr{A}_a, \gamma_{ca}, a \leqslant c\}_{a,c \in K}$, ассоциированную с частично-упорядоченным множеством K.

Литература

[1] Haag R. *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras.* – Berlin : Springer-Verlag, 1992.

[2] Ruzzi G. *Homotopy of posets, net cohomology, and superselection sectors in globally hyperbolic space-times* // Rev. Math. Phys. – 2005. – V. 17. – P. 1021–1070.

[3] Roberts J. E. *More lectures in algebraic quantum field theory, in: S. Doplicher, R. Longo (Eds.).* – Noncommutative Geometry. C.I.M.E. Lectures, Martina Franca, Italy, 2000, Springer-Verlag, 2003.

[4] Ruzzi G., Vasselli E. *A new light on nets of C*-algebras and their representations* // Comm. Math. Phys. – 2012. – V. 312. – P. 655–694.

БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В ЛОКАЛЬНОМ ПОЛЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

С. Ф. Лукомский[1]

---

[1] *lukomskiisf@info.sgu.ru*, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского

Всплесковые базисы на локальных полях [1] представляются перспективным инструментом при обработке многомерной информации, в том числе и видеоинформации. При решении этих задач возникает проблема вычисления как прямого, так и обратного преобразования Фурье по системе характеров локального поля. Мы предлагаем алгоритм быстрого преобразования Фурье, основанный на представлении локального поля положительной характеристики в виде линейного пространства над конечным полем [2].

Пусть $K = F^{(s)} = \{x = (\ldots,\mathbf{0},\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_{n+1},\ldots)\}$ – поле положительной характеристики p, где $\mathbf{x}_j = (x_j^{(0)},x_j^{(1)},\ldots,x_j^{(s-1)}) \in GF(p^s)$, $x_j^{(l)} \in G(p)$, $GF(p^s)$ – локальное поле, и пусть $g_n = (\ldots,\mathbf{0}_{n-1},(1,0,\ldots,0),\mathbf{0}_{n+1},\ldots)$. Обозначим $x_{ks+l} := x_k^{(l)}$, $(l = 0,1,\ldots,s-1)$. Функции Радемахера на K определим равенствами $\bar{r}_k^{\bar{\alpha}_k} = r_{ks+0}^{\alpha_{ks+0}} r_{ks+1}^{\alpha_{ks+1}} \ldots r_{ks+s-1}^{\alpha_{ks+s-1}}$, где $r_{ks+l}^{\alpha_{ks+l}}(x) = e^{\frac{2\pi i}{p} x_{ks+l}\alpha_{ks+l}}$. Характеры поля K в этом случае имеют вид $\chi = \prod \bar{r}_k^{\bar{\alpha}_k}$. Пусть $K_n = \{x = (\ldots,\mathbf{0}_{n-1},\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_{n+1},\ldots)\}$ – шар радиуса p^{-sn}, $f^{(n)}$ – ступенчатая функция, постоянная на смежных классах по подгруппе K_n^+ с носителем $\operatorname{supp} f^{(n)} \subset K_0$. Такая функция однозначно представима в виде

$$f^{(n)}(x) = \sum_{\bar{\alpha}_0,\ldots,\bar{\alpha}_{n-1} \in GF(p^s)} C_{\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1\ldots\bar{\alpha}_{n-1}} \bar{r}_0^{\bar{\alpha}_0} \bar{r}_1^{\bar{\alpha}_1} \ldots \bar{r}_{n-1}^{\bar{\alpha}_{n-1}} =$$

$$= \sum C_{\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1\ldots\bar{\alpha}_{n-1}} \chi_{\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1\ldots\bar{\alpha}_{n-1}}(x),$$

где $C_{\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1\ldots\bar{\alpha}_{n-1}}$ – коэффициенты Фурье функции $f^{(n)}(x)$ по системе характеров поля K. Рассмотрим задачу нахождения коэффициентов $C_{\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1\ldots\bar{\alpha}_{n-1}}$.

Теорема. *Функции* $f^{(n)}$ *и* $f^{(n+1)}$ *связаны соотношением*

$$f^{(n+1)}(x) = \sum_{\bar{\alpha}_0,\ldots,\bar{\alpha}_{n-1},\bar{\alpha}_n \in GF(p^s)} C_{\bar{\alpha}_0\ldots\bar{\alpha}_{n-1}\bar{\alpha}_n} \chi_{\bar{\alpha}_0\ldots\bar{\alpha}_{n-1}\bar{\alpha}_n}(x) =$$

$$= \sum_{\bar{\alpha}_0,\ldots,\bar{\alpha}_{n-1}} C_{\bar{\alpha}_0\ldots\bar{\alpha}_{n-1}\bar{0}} \chi_{\bar{\alpha}_0\ldots\bar{\alpha}_{n-1}\bar{0}}(x) +$$

$$+ \sum_{\bar{\gamma}_n \neq \bar{0}} \bar{r}_n^{\bar{\gamma}_n}(x) \sum_{\bar{\alpha}_0,\ldots,\bar{\alpha}_{n-1} \in GF(p^s)} C_{\bar{\alpha}_0\ldots\bar{\alpha}_{n-1}\bar{\gamma}_n} \chi_{\bar{\alpha}_0\ldots\bar{\alpha}_{n-1}}(x).$$

Если обозначить через $f^{(n)}_{\mathbf{a}_0,\ldots,\mathbf{a}_{n-1}}$ значения функции $f^{(n)}$ на смежных классах $K_n^+ \dot{+} \mathbf{a}_{n-1} g_{n-1} \dot{+} \mathbf{a}_{n-2} g_{n-2} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathbf{a}_0 g_0$, то утверждение теоремы можно записать в виде

$$f^{(n+1)}_{\mathbf{a}_0,\ldots,\mathbf{a}_n} = f^{(n)}_{\mathbf{a}_0,\ldots,\mathbf{a}_{n-1},0} + \sum_{\mathbf{j}_n \neq \mathbf{0}} e^{\frac{2\pi i}{p}(\mathbf{j}_n,\mathbf{a}_n)} f^{(n)}_{\mathbf{a}_0\ldots\mathbf{a}_{n-1},\mathbf{j}_n}$$

Решая эту систему, находим значения функций $f_{\mathbf{j}_n}^{(n)}$ на смежных классах $K_n^+ \dotplus \mathbf{a}_{n-1}g_{n-1} \dotplus \mathbf{a}_{n-2}g_{n-2} \dotplus \ldots \dotplus \mathbf{a}_0 g_0$. Это равенство позволяет получить быстрый алгоритм нахождения коэффициентов $C_{\bar{\alpha}_0 \ldots \bar{\alpha}_{n-1}}$, требующий $p^{sn}sn$ операций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-01-00152).

Литература

[1] Jiang H., Li D., Jin N. *Multiresolution analysis on local fields.//* J. Math. Anal. Appl. – 2004. – V. 294. – P. 523—532.

[2] Lukomskii S. F., Vodolazov A. M. *Non-Haar MRA on local fields of positive characteristic//* J. Math. Anal. Appl. –2016. – V. 433. – P. 1415-–1440.

НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ АНАЛИЗА НЕТОЧНЫХ ДАННЫХ ТИПА ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ

С. В. Малов[1]

---

[1] *malovs@sm14820.spb.edu*, Санкт-Петербургский государственный университет & Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

В основе классической модели анализа данных типа времени жизни с правым цензурированием лежит распределение пары случайных величин (T, U) – времен отказа и цензурирования. Наблюдаются время «события» (отказа или цензурирования) $X = T \wedge U$ и индикатор $\delta = \mathbb{1}_{\{T \leqslant U\}}$. В реальных ситуациях довольно часто время «события» не наблюдается точно, а информация об отказе или цензурировании поступает только в определенные моменты времени, вообще говоря случайные. В этом случае обычно применяют модель интервального цензурирования [2], которая не предусматривает наличия правого цензурирования, или же используют похожие значения времен событий, вместо ненаблюдаемых реальных. В данной работе мы рассмотрим модель интервального цензурирования цензурированных справа данных, в основе которой лежит цензурирование справа (X, δ), но значение X не наблюдается точно, а информация о «событии» поступает только в моменты времени W_i, $i = 1, \ldots, r$. Следует отметить, что величина δ наблюдается только в случае, если $X \leqslant W_i$. Каждое наблюдение представляет собой набор $W_1, \ldots, W_r$, а также пару $(\kappa, \kappa\delta)$, где $\kappa = \sum_{j=1}^{r} j\,\mathbb{1}_{\{W_{j-1} < X \leqslant W_j\}}$, $W_0 = -\infty$. Случай произвольного r легко сводится к $r = 2$ как при интервальном цензурировании.

Мы рассмотрим задачу непараметрического оценивания распределения времени отказа T по выборке из распределения $(\kappa, \kappa\delta)$ в предположении независимости T, U и $(W_1, \ldots, W_k)$. Логарифм непараметрической функции правдоподобия представляется в виде суммы двух слагаемых, первое из которых зависит только от распределения X и совпадет с функцией правдоподобия цензурированных справа данных. Предлагается трехшаговый алгоритм непараметрического оценивания распределения T: 1) оценивание распределения X, 2) оценивание функции $R(x) = P(\delta = 1 | X \leqslant x)$, 3) восстановление распределения F. Для оценивания распределения X используется алгоритм наибольшей выпуклой миноранты [1]. Оценивание функции $R(x)$ при известном распределении X приводит к принципиально отличной экстремальной задаче, которая уже не допускает столь простого решения.

Мы обсудим пути решения этой экстремальной задачи в случае $r = 1$ и установим условия состоятельности построенной непараметрической оценки функции распределения времени отказа T. Отметим, что в частном случае «актуарных» данных с фиксированным временем наблюдения W_1 не существует непараметрической состоятельной оценки функции распределения времени отказа T [2], однако если распределение T доминировано распределением W_1, то построенная оценка состоятельна. Результаты моделирования демонстрируют хорошее приближение распределения T построеной оценкой и её бутстреп-версией.

Работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского госуниверситета (грант № 1.37.165.2014).

Литература

[1] Groeneboom, P., Wellner, J.A. *Information bounds and non-parametric maximum likelihood estimation.* — Birkhäuser, Basel, 1992.

[2] Malov S.V., O'Brien S.J. *Life Table Estimator Revisited.* Submitted to Statistics & Probability Letters, 2016.

ГОЛОМОРФНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА МНОГООБРАЗИИ НАД АЛГЕБРОЙ ДУАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

А. А. Малюгина[1]

Пусть $\mathbb{D}$ — алгебра дуальных чисел $a + b\varepsilon$, $M_n^{\mathbb{D}}$ — $\mathbb{D}$-гладкое многообразие, $G^{\mathbb{D}}$ — группа Ли над $\mathbb{D}$ такая, что слой канонического слоения $G_e^{\mathbb{I}}$, соответствующий идеалу $\mathbb{I} = \varepsilon\mathbb{D}$, является замкнутым подмногообразием, $G = G^{\mathbb{D}}/G_e^{\mathbb{I}}$, $\mathfrak{g}^{\mathbb{D}}$ — алгебра Ли группы Ли $G^{\mathbb{D}}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\mathbb{D}}/\mathbb{I}\mathfrak{g}^{\mathbb{D}}$, и пусть $P^{\mathbb{D}} = P^{\mathbb{D}}(M_n^{\mathbb{D}}, G^{\mathbb{D}})$ — $\mathbb{D}$-гладкое главное расслоение над $M_n^{\mathbb{D}}$ со структурной группой $G^{\mathbb{D}}$.

Для присоединенного представления группы Ли $G^{\mathbb{D}}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{D}}$ и индуцированных представлений $G^{\mathbb{D}}$ в алгебрах Ли $\mathbb{I}\mathfrak{g}^{\mathbb{D}}$ и $\mathfrak{g}$ можно построить комплексы [1]

$$\hat{d} : \Omega_{ad}^{r,p}(P^{\mathbb{D}}, \mathfrak{h}) \to \Omega_{ad}^{r+1,p}(P^{\mathbb{D}}, \mathfrak{h}), \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{\mathbb{D}}, \mathbb{I}\mathfrak{g}^{\mathbb{D}}, \mathfrak{g},$$

$\mathfrak{h}$-значных тензориальных дифференциальных форм на $P^{\mathbb{D}}$, $\mathbb{D}$-гладко зависящих от точки слоя. Точная последовательность алгебр Ли

$$0 \to \mathbb{I}\mathfrak{g}^{\mathbb{D}} \xrightarrow{i} \mathfrak{g}^{\mathbb{D}} \xrightarrow{p} \mathfrak{g} \to 0$$

индуцирует точную последовательность комплексов

$$0 \to \Omega_{ad}^{r,1}(P^{\mathbb{D}}, \mathbb{I}\mathfrak{g}^{\mathbb{D}}) \xrightarrow{i} \Omega_{ad}^{r,1}(P^{\mathbb{D}}, \mathfrak{g}^{\mathbb{D}}) \xrightarrow{p} \Omega_{ad}^{r,1}(P^{\mathbb{D}}, \mathfrak{g}) \to 0$$

---

[1] *alexandra.malyugina@gmail.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

и соответствующую длинную точную последовательность в когомологиях

$$\ldots \xrightarrow{p_*} H^{0,1}_{ad}(P^{\mathbb{D}},\mathfrak{g}) \xrightarrow{\hat{d}_*} H^{1,1}_{ad}(P^{\mathbb{D}},\mathbb{I}\mathfrak{g}^{\mathbb{D}}) \xrightarrow{i_*} H^{1,1}_{ad}(P^{\mathbb{D}},\mathfrak{g}^{\mathbb{D}}) \xrightarrow{p_*} \ldots$$

Оператор $\hat{d}$ можно применить к форме связности ω $\mathbb{D}$-линейной связности в $P^{\mathbb{D}}$. В результате получается замкнутая тензориальная форма, и ее класс когомологий (класс Атьи) $a(P^{\mathbb{D}}) \in H^{1,1}_{ad}(P^{\mathbb{D}},\mathfrak{g}^{\mathbb{D}})$ является препятствием для существования голоморфной связности в $P^{\mathbb{D}}$.

Эпиморфизм групп Ли $\pi : G^{\mathbb{D}} \to G$ индуцирует соответствующий эпиморфизм главных расслоений $\pi_{tr} : P^{\mathbb{D}} \to P_{tr}$, где P_{tr} — трансверсальное (по отношению к каноническому слоению на $M^{\mathbb{D}}_n$) расслоение. По адаптированной связности [2] в P_{tr} можно построить класс $a(P_{tr}) \in H^{1,1}_{ad}(P^{\mathbb{D}},\mathfrak{g})$, который является препятствием для существования проектируемой связности в P_{tr}. Если в P_{tr} существует проектируемая связность Γ_{tr}, по ней строится класс когомологий $a(\Gamma_{tr}) \in H^{1,1}_{ad}(P^{\mathbb{D}},\mathbb{I}\mathfrak{g}^{\mathbb{D}})$, являющийся препятствием для существования голоморфной связности в $P^{\mathbb{D}}$, порождающей связность Γ_{tr}.

Для расслоения $\mathbb{D}$-линейных реперов на $M^{\mathbb{D}}_n$ представлены выражения для рассмотренных выше классов в локальных координатах.

Литература

[1] Malyugina A.A. , Shurygin V. V. *Complexes of differential forms associated with a normalized manifold over the algebra of dual numbers* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – Springer. – 2016. – V.37. – P. 66–74.

[2] Molino P. *Riemannian foliations*. —Boston-Basel : Birkhäuser, 1988. – 336 p.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ДИВЕРГЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

А. Г. Меграбов[1]

---

[1] *mag@sscc.ru*, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Новосибирский государственный технический университет

Доклад обобщает и развивает статьи автора в ДАН (2009, т. 424, № 5; 2010, т. 433, № 3, 4; 2011, т. 441, № 3). Рассматриваем семейство $\{L_\tau\}$ кривых L_τ с базисом Френе $(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta})$ ($\boldsymbol{\tau}$ — орт касательной, $\boldsymbol{\nu}$ — главной нормали, $\boldsymbol{\beta}$ — бинормали), кривизной k и кручением κ, а также семейство $\{S_\tau\}$ поверхностей S_τ с единичной нормалью $\boldsymbol{\tau}$, главными направлениями $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, главными кривизнами k_1, k_2 и гауссовой кривизной K ($\boldsymbol{l}_i$ — касательный орт линии кривизны на S_τ).

1. Найдено, что в плоском случае $\operatorname{div}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}\boldsymbol{S}^* = 0$, $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = \operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{S}^*$, где $\boldsymbol{S}^* = \boldsymbol{K}_\tau + \boldsymbol{K}_\nu$ — сумма векторов кривизны плоских кривых L_τ с ортами Френе $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$ и ортогональных к ним кривых L_ν, что означает закон сохранения для семейства плоских кривых. В трехмерном случае получены его аналоги:

1) тождество $\operatorname{div}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = 2(\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{R}^*) \Leftrightarrow \operatorname{div}\boldsymbol{S}^* = (\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{R}^*) - k(\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta})$ для семейства $\{L_\tau\}$, где $\boldsymbol{R}^* = \kappa\boldsymbol{\tau} + k\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}\operatorname{div}\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}\operatorname{div}\boldsymbol{\beta}$, поле $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})$ имеет смысл суммы трех векторов кривизны: кривой L_τ и двух любых взаимно ортогональных геодезических линий на поверхности, ортогональной к $\{L_\tau\}$; $\boldsymbol{S}^*$ — сумма трех векторов кривизны векторных линий полей $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}$; $\boldsymbol{S}^* = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{R}^*$; 2) законы сохранения вида $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 0$ для семейства $\{L_\tau\}$ кривых и для семейства $\{S_\tau\}$ поверхностей. Поле $\boldsymbol{F}$ выражается соответственно через характеристики кривых и поверхностей. Например, $\operatorname{div}\{\boldsymbol{\tau}\operatorname{div}\boldsymbol{S}^* - \kappa\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau} - k\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}\} = 0$ для $\{L_\tau\}$ и $\operatorname{div}\{-K\boldsymbol{\tau} - k_2(\boldsymbol{l}_2\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{l}_1 + k_1(\boldsymbol{l}_1\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{l}_2\} = 0$ для $\{S_\tau\}$, где выражение в $\{\}$ всюду равно $\operatorname{rot}\boldsymbol{R}^*$.

2. Получены формулы связи между характеристиками поверхностей $S_\tau \in \{S_\tau\}$ и характеристиками кривых L_τ в случае их взаимной ортогональности: $\boldsymbol{l}_1 = \cos\omega\boldsymbol{\nu} + \sin\omega\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{l}_2 = -\sin\omega\boldsymbol{\nu} + \cos\omega\boldsymbol{\beta}$, $\operatorname{tg}2\omega = -A/B$, $k_1 = -\{\operatorname{div}\boldsymbol{\tau} \pm \sqrt{A^2+B^2}\}/2 = -(\boldsymbol{l}_2\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{l}_1)$, $k_2 = -\{\operatorname{div}\boldsymbol{\tau} \mp \sqrt{A^2+B^2}\}/2 = (\boldsymbol{l}_1\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{l}_2)$, $\Rightarrow K = k_1k_2 = \{(\operatorname{div}\boldsymbol{\tau})^2 - (A^2+B^2)\}/4$, $K = (\boldsymbol{\tau}\cdot[\operatorname{rot}\boldsymbol{\nu}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}]) - \kappa^2 = -\{(\boldsymbol{\nu}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\nu}) + A^2/4\} = (\boldsymbol{\tau}\cdot[\operatorname{rot}\boldsymbol{l}_1\times\operatorname{rot}\boldsymbol{l}_2]) - (\operatorname{rot}\boldsymbol{l}_i\cdot\boldsymbol{l}_i)^2$, $i = 1,2$, $K = -(\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{R}^*)$, где $A = (\boldsymbol{\nu}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\nu}) - (\boldsymbol{\beta}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta})$, $B \overset{\text{def}}{=} (\boldsymbol{\beta}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\nu}) + (\boldsymbol{\nu}\cdot\operatorname{rot}\beta)$.

3. Найдено, что: 1) векторное поле $\boldsymbol{P}$ в первой дивергентной формуле Ю. А. Аминова для гауссовой кривизны K представимо в виде: $\boldsymbol{P} = -\operatorname{rot}\boldsymbol{R}^*$; 2) величины неголономности полей $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2$ равны: $(\boldsymbol{l}_1\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{l}_1) = (\boldsymbol{l}_2\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{l}_2) \Leftrightarrow \operatorname{tg}2\omega = -A/B$.

4. С помощью этих общих геометрических формул получены дифференциальные законы сохранения и другие формулы в плоском и в трехмерном случаях для решений уравнения эйконала (для поля времен в кинематической сейсмике (геометрической оптике)), гидродинамических уравнений Эйлера и др. При этом роль кривых L_τ и поверхностей S_τ играют векторные линии полей решений и ортогональные к ним поверхности. Например, в плоском случае для уравнения эйконала $\tau_x^2 + \tau_y^2 = n^2(x,y)$ получен закон сохранения $\operatorname{div}\boldsymbol{T}(\operatorname{grad}\tau) = \operatorname{div}\{\operatorname{grad}\ln n - \Delta\tau\operatorname{grad}\tau/n^2\} = 0$ с геометрическим смыслом: сумма $\boldsymbol{S}^*$ векторов кривизны лучей и фронтов есть соленоидальное поле ($\operatorname{div}\boldsymbol{S}^* = 0$).

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ В ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ

С. Г. Мерзляков[1], С. В. Попенов[2]

---

[1] *msg2000@mail.ru*, Институт математики с Вычислительным центром УНЦ РАН

[2] *spopenov@gmail.com*, Институт математики с Вычислительным центром УНЦ РАН

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{C}$ – некоторое бесконечное множество. Для произвольной выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ обозначим

$$\Sigma(\Lambda, D) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n z}, \{c_n\} \subset \mathbb{C}, \{\lambda_n\} \subset \Lambda \right\},$$

где ряды абсолютно сходятся в D.

Рассматривается проблема кратной интерполяции в области D рядами экспонент с показателями из заданного множества Λ : для произвольной дискретной в D последовательности $\{\mu_k\} \subset D$, узлов интерполяции, любых кратностей $m_k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, и для любых интерполяционных данных $b_k^j \in \mathbb{C}$, существует аналитическая в D функция f, представимая в виде суммы ряда из $\Sigma(\Lambda, D)$, и такая, что $f^{(j)}(\mu_k) = b_k^j$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и всех $0 \leqslant j \leqslant m_k - 1$.

Получено описание универсального множества Λ, для которого в любой выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ разрешима указанная проблема интерполяции суммами рядов из $\Sigma(\Lambda, D)$.

Направление вектора $s = e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbb{R}$, называется предельным направлением неограниченного множества Λ в бесконечности, если $s = \lim_{n\to\infty} \lambda_n/|\lambda_n|$, для некоторой последовательности $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$, уходящей в бесконечность.

Теорема. *Для разрешимости в любой выпуклой области* $D \subset \mathbb{C}$ *проблемы интерполяции суммами рядов из* $\Sigma(\Lambda, D)$ *с показателями экспонент из* Λ *необходимо и достаточно, чтобы множество* Λ *было неограниченным и множество его предельных направлений в бесконечности совпадало с* $S = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$.

Для фиксированной выпуклой области D, $D \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$, в случае, когда $\{\mu_k\} \subset D \cap \mathbb{R}$, полностью решена проблема интерполяции рядами экспонент с показателями из множества Λ в терминах предельных направлений в бесконечности, при этом нам удалось снять дополнительные ограничения из предшествующих работ авторов. Например, справедлива

Теорема. *Если узлы* $\{\mu_k\}$ *имеют единственную конечную предельную точку* x_0 *на границе области, то для разрешимости рассматриваемой задачи интерполяции необходимо и достаточно, чтобы существовало такое предельное направление* $e^{i\varphi_0}$, *что опорная прямая области* D *в направлении* $e^{-i\varphi_0}$ *содержит точку* x_0. *Если множество* $D \cap \mathbb{R}^+$ *неограниченное и узлы* $\{\mu_k\}$ *имеют единственную предельную точку в* $+\infty$, *то для разрешимости задачи необходимо и достаточно, чтобы существовало предельное направление* $e^{i\varphi_0}$, $|\varphi_0| < \pi/2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 14-01-00720, 15-01-01661).

Литература

[1] Мерзляков С. Г. , Попенов С. В. *Кратная интерполяция рядами экспонент в H(C) с узлами на вещественной оси* // Уфимск. матем. журн. – 2013. – 5:3. – С. 130-143.

[2] Мерзляков С. Г. , Попенов С. В. *Интерполяция рядами экспонент в H(D), с вещественными узлами* // Уфимск. матем. журн.// – 2015. – 7:1. – С. 46–58.

ГОМОМОРФИЗМЫ ГИЗИНА ДЛЯ КОГОМОЛОГИЙ ГОМОТОПИЧЕСКИ ИНВАРИАНТНЫХ ПУЧКОВ С ТРАНСФЕРАМИ НА РЕГУЛЯРНЫХ НЕТЕРОВЫХ СХЕМАХ

А. А. Мингазов[1]

---

[1] *mingazov88@gmail.com*, Институт систем обработки изображений РАН — филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН

Определение 1. *Пучком с трансферами на категории регулярных нетеровых схем над* k *мы будем называть пучок Зарисского* $\mathscr{F}\colon (RSch_k)^{op} \to Ab$*, удовлетворяющий следующим двум условиям:*

1) Для представления кольца в виде индуктивного предела $S = \varinjlim S^\alpha$ *выполнено* $\mathscr{F}(Spec\ S) = \varinjlim \mathscr{F}(Spec\ S^\alpha)$*;*

2) Существует пучок Зарисского с трансферами $\mathscr{G}\colon Cor_k \to Ab$ *такой, что ограничение* $\mathscr{F}$ *на категорию* Sm_k *гладких многообразий над* k *совпадает с ограничением* $\mathscr{G}$ *на ту же категорию.*

Теорема 2. *Пусть* X *— регулярная нетерова неприводимая схема над полем* k *характеристики 0,* $\mathscr{F}$ *— гомотопически инвариантный пучок с трансферами, определенный на категории нетеровых* k*-схем. Тогда* $\mathscr{F}$ *имеет вялую резольвенту на* X

$$0 \to (i_\xi)_* \left(\underline{\underline{\mathscr{F}(K)}}\right) \to \bigoplus_{x\in X^{(1)}} (i_x)_* \left(\underline{\underline{\mathscr{F}_{-1}(k(x))}}\right) \to \dots,$$

где ξ *— общая точка схемы* X*,* $X^{(i)}$ *— точки схемы* X *коразмерности* i*, через* $\underline{\underline{\mathscr{F}_{-i}(k(x))}}$ *обозначается постоянный пучок на точке* x *с группой сечений* $\mathscr{F}_{-i}(k(x))$*.*

Теорема 2 доказана в статьях [2] и [3].

Следствие 3. *Пусть* $\mathscr{F}$ *— гомотопически инвариантный пучок с трансферами на категории регулярных нетеровых схем,* $f\colon X \to Y$ *— проективный морфизм регулярных нетеровых схем, и пусть* $n = \dim Y - \dim X$*. Тогда существует канонический гомоморфизм Гизина*

$$G(f)\colon H^*(X,\mathscr{F}_{-n}) \to H^{*+n}(Y,\mathscr{F}),$$

обладающий свойствами аналогичными [1].

Литература

[1] Panin I. *Oriented Cohomology Theories of Algebraic Varieties II (after I. Panin and A. Smirnov).* // Homology, Homotopy and Applications. – 2009. – vol. 11(1). – P. 349–405.

[2] Мингазов А. А. *Согласованность гомоморфизма Гизина и трансфера.* // Алгебра и Анализ. – 2015. – 27:4. – С. 59–73.

[3] Мингазов А. А. *Комплекс Герстена для пучков с трансферами для нетеровых схем.* // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. – 2015. – № 6 (128). – С. 97–100.

ЗАДАЧА ДАРБУ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БИАНКИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А. Н. Миронов[1]

---

[1] *miro73@mail.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Елабужский институт

Речь идет об уравнении

$$u_{xyz}+\sum_{\substack{i=0\\ i+j+k<3}}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}a_{ijk}(x,y,z)u_{x^iy^jz^k}=f(x,y,z), \tag{1}$$

которое рассматривалось, в частности, в работах [1]–[4].

Пусть область D ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $y=y_0>0$, $z=z_0>0$, $z=x$. Обозначим через X, Y, H грани D при $x=0$, $y=0$, $z=x$ соответственно.

Задача Дарбу. *В области D найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям*

$$\begin{gathered}u|_{\overline{X}}=\varphi_1(y,z),\quad u|_{\overline{Y}}=\varphi_2(x,z),\quad u|_{\overline{H}}=\psi(x,y),\\ \varphi_1(y,0)=\psi(0,y),\ \varphi_2(x,x)=\psi(x,0),\ \varphi_1(0,z)=\varphi_2(0,z),\\ \varphi_1\in C^2(\overline{X}),\quad \varphi_2\in C^2(\overline{Y}),\quad \psi\in C^2(\overline{H}).\end{gathered} \tag{2}$$

Пусть коэффициенты уравнения (1) принадлежат классу $C^2(\overline{D})$, $f\in C(\overline{D})$. Используя известную формулу решения задачи Гурса [4, с. 28] как представление произвольного регулярного решения уравнения (1), получено интегральное уравнение Вольтерры второго рода для определения условия Гурса $u(x,y,z_0)$, из существования и единственности решения которого следует существование и единственность решения задачи Дарбу (1)–(2). Для частного случая уравнения (1) построено решение задачи Дарбу в терминах функции, аналогичной функции Римана-Адамара [2, с. 35], [5].

Литература

[1] Жегалов В. И. *Трехмерный аналог задачи Гурса* // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. – Новосибирск, ИМ СО АН СССР. – 1990. – С. 94–98.

[2] Волкодавов В. Ф., Николаев Н. Я., Быстрова О. К., Захаров В. Н. *Функции Римана для некоторых дифференциальных уравнений в n-мерном евклидовом пространстве и их применения.* – Самара: Самарский университет, 1995. – 76 с.

[3] Севастьянов В. А. *Метод Римана для трехмерного гиперболического уравнения третьего порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 69–73.

[4] Жегалов В. И., Миронов А. Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* – Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва, 2001. – 226 с.

[5] Джохадзе О. М., Харибегашвили С. С. *Некоторые свойства функций Римана и Римана-Адамара для линейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения* // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47. – № 4. – С. 477–492.

ИНВАРИАНТЫ ЛАПЛАСА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Л. Б. Миронова[1]

Инвариантами Лапласа линейного дифференциального уравнения $Lu = f$ называют инварианты преобразования $u = \lambda(x_1, \dots, x_n)v$, где v — новая неизвестная функция [1, с. 116–125]. Инварианты Лапласа позволяют выделять классы эквивалентных по функции уравнений с определенными свойствами (в частности, допускающих алгебры Ли наибольшей размерности).

Здесь для уравнения с тремя независимыми переменными

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} a_{ijk}(x,y,z)D_x^i D_y^j D_z^k u = 0, \quad a_{211} \equiv 1,$$

рассмотренного, например, в работах [2], [3], получен следующий список инвариантов Лапласа:

$$h_1 = a_{210y} + a_{210}a_{201} - a_{200},\ h_2 = a_{201z} + a_{210}a_{201} - a_{200},$$
$$h_3 = 2a_{210x} + a_{210}a_{111} - a_{110},\ h_4 = a_{111z} + a_{210}a_{111} - a_{110},$$
$$h_5 = 2a_{201x} + a_{201}a_{111} - a_{101},\ h_6 = a_{111y} + a_{201}a_{111} - a_{101},$$
$$h_7 = \tfrac{1}{2}a_{111x} + \tfrac{1}{4}a_{111}^2 - a_{011},$$
$$h_8 = 2a_{210xy} + a_{200}a_{111} + a_{201}a_{110} + a_{210}a_{101} - 2a_{210}a_{201}a_{111} - a_{100},$$
$$h_9 = 2a_{201xz} + a_{200}a_{111} + a_{201}a_{110} + a_{210}a_{101}2a_{210}a_{201}a_{111} - a_{100},$$
$$h_{10} = a_{111yz} + a_{200}a_{111} + a_{201}a_{110} + a_{210}a_{101} - 2a_{210}a_{201}a_{111} - a_{100},$$
$$h_{11} = a_{210xx} + a_{210}a_{011} + \tfrac{1}{2}a_{111}a_{110} - \tfrac{1}{2}a_{210}a_{111}^2 - a_{010},$$
$$h_{12} = \tfrac{1}{2}a_{111xz} + a_{210}a_{011} + \tfrac{1}{2}a_{111}a_{110} - \tfrac{1}{2}a_{210}a_{111}^2 - a_{010},$$
$$h_{13} = a_{201xx} + a_{201}a_{011} + \tfrac{1}{2}a_{111}a_{101} - \tfrac{1}{2}a_{201}a_{111}^2 - a_{001},$$
$$h_{14} = \tfrac{1}{2}a_{111xy} + a_{201}a_{011} + \tfrac{1}{2}a_{111}a_{101} - \tfrac{1}{2}a_{201}a_{111}^2 - a_{001},$$

$$\begin{gathered}
h_{15} = a_{210xxy} + a_{210}a_{001} + a_{201}a_{010} + \tfrac{1}{2}a_{111}a_{100} + \tfrac{1}{2}a_{110}a_{101} + \\
+ a_{200}a_{011} - a_{210}a_{111}a_{101} - a_{201}a_{111}a_{110} - 2a_{210}a_{201}a_{011} - \\
- a_{201}a_{110} - \tfrac{1}{2}a_{200}a_{111}^2 + \tfrac{3}{2}a_{210}a_{201}a_{111}^2 - a_{000}, \\
h_{16} = a_{201xxz} + a_{210}a_{001} + a_{201}a_{010} + \tfrac{1}{2}a_{111}a_{100} + \tfrac{1}{2}a_{110}a_{101} + \\
+ a_{200}a_{011} - a_{210}a_{111}a_{101} - a_{201}a_{111}a_{110} - 2a_{210}a_{201}a_{011} - \\
- a_{201}a_{110} - \tfrac{1}{2}a_{200}a_{111}^2 + \tfrac{3}{2}a_{210}a_{201}a_{111}^2 - a_{000}, \\
h_{17} = \tfrac{1}{2}a_{111xyz} + a_{210}a_{001} + a_{201}a_{010} + \tfrac{1}{2}a_{111}a_{100} + \tfrac{1}{2}a_{110}a_{101} + \\
+ a_{200}a_{011} - a_{210}a_{111}a_{101} - a_{201}a_{111}a_{110} - 2a_{210}a_{201}a_{011} - \\
- a_{201}a_{110} - \tfrac{1}{2}a_{200}a_{111}^2 + \tfrac{3}{2}a_{210}a_{201}a_{111}^2 - a_{000}.
\end{gathered}$$

---

[1] *lbmironova@yandex.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Елабужский институт

Литература

[1] Овсянников Л. В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1978. – 400 с.

[2] Жегалов В. И., Уткина Е. А. *Об одном уравнении в частных производных четвертого порядка с тремя независимыми переменными* // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38. – № 1. – С. 93–97.

[3] Жегалов В. И., Миронов А. Н. *О задачах Коши для двух уравнений в частных производных* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 5. – С. 23–30.

ВЫРОЖДЕНИЕ ПОРЯДКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ВВЕДЕНИЕ В СИНГУЛЯРНЫЙ АНАЛИЗ

Л. Г. Михайлов[1]

Ещё с пятидесятых годов 19–го века в математике стали изучаться дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами (или же дифференциальные уравнения с вырождениями порядка). Об этом см. нашу заказную статью в журнале «Mathematische Nachrichten» за 1976 год (Германия), написанную к 100–летию Эрхардта Шмидта — ученика и сотрудника великого Д. Гильберта.

В 1963 г. в Изд. АН Республики Таджикистан вышла в свет наша первая монография: «Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами», которая в переводе на английский язык была переиздана гораздо более престижными научными издательствами в Голландии, [Изд. Wolters-Noordhoff (Groningen), 1970] и в Германии (Academie–Verlag, Berlin, 1970).

В 1986 г. была издана наша другая монография: «Некоторые переопределённые системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями». Изд. «Дониш», Душанбе. (Рецензенты: академик АН СССР С.М. Никольский и член-корр. А.В. Бицадзе).

Многие задачи математической физики, как, например, уравнение Шрёдингера из квантовой механики, приводят к уравнениям в частных производных, коэффициенты которых содержат особенности (сингулярности) первого либо второго порядка. Используя представления решений через объёмные потенциалы, мы их приводим к интегральным уравнениям с операторами, в знаменателях которых фигурируют расстояния в степенях $(n-1)$ либо $(n-2)$: $\int_D \frac{b_j(t)\cdot r'_{xj}}{r^{n-1}(x,t)}\cdot\varphi(t)\cdot dt$, или $\int_D \frac{c(t)\cdot\varphi(t)\cdot dt}{r^{n-2}(x,t)}$, здесь n — размерность пространства, а $r(x,t) = |x-t|$ — расстояние между точками x и t. Такие уравнения должны бы изучаться прежде всего.

---

[1] *leonid-mikhailov@yandex.ru*, Институт математики Академии наук Республики Таджикистан

ВЫЧИСЛИМЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПОРЯДКИ И ИЕРАРХИЯ ЕРШОВА

Я. А. Михайловская[1]

---

[1] *yana.michailovskaya@yandex.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

Данная работа посвящена изучению вычислимых линейных порядков, в сигнатуру которых добавляются дополнительные отношения $S^n_{\mathscr{L}}$.

Определение 1. $S^{2k}_{\mathscr{L}}(x,y) \leftrightarrow |(x,y)_{\mathscr{L}}| = 0 \vee |(x,y)_{\mathscr{L}}| = 2 \vee \ldots \vee |(x,y)_{\mathscr{L}}| = 2k$.

Определение 2. $S^{2k+1}_{\mathscr{L}}(x,y) \leftrightarrow |(x,y)_{\mathscr{L}}| = 1 \vee |(x,y)_{\mathscr{L}}| = 3 \vee \ldots \vee |(x,y)_{\mathscr{L}}| = 2k+1$.

Здесь $(x,y)_{\mathscr{L}} = \{z | x <_{\mathscr{L}} z <_{\mathscr{L}} y\}$.

Заметим, что отношение $S^0_{\mathscr{L}}$ является просто отношением соседства на линейном порядке, которое было объектом изучения разных авторов. Например, М. Мозес [1] показал, что линейный порядок имеет 1-разрешимое представление тогда и только тогда, когда он имеет вычислимое представление с вычислимым отношением соседства. Дж. Реммел [2] показал, что вычислимый линейный порядок является вычислимо категоричным тогда и только тогда, когда он имеет лишь конечное число соседних элементов. А.Н. Фролов [3] показал, что спектр отношения соседства вычислимого не η-схожего линейного порядка замкнут наверх в в.п. степенях.

В данной работе были получены следующие результаты.

Предложение 1. *Для любого $(n+1)$-в.п. множества A существует вычислимый линейный порядок $\mathscr{L}$, упорядоченный по типу ω, такой, что $S^n_{\mathscr{L}} \equiv_T A$.*

Предложение 2. *Для любого вычислимого линейного порядка $\mathscr{L}$ из вычислимости $S^0_{\mathscr{L}}$ следует вычислимость $S^n_{\mathscr{L}}$ для любого n.*

Предложение 3. *Пусть $\mathscr{L}$ – вычислимый линейный порядок, содержащий лишь конечное число блоков длины $\leqslant (n+1)$. Тогда из вычислимости $S^n_{\mathscr{L}}$ следует вычислимость $S^0_{\mathscr{L}}$.*

Теорема 1. *Пусть вычислимый линейный порядок $\mathscr{L}$ имеет бесконечно много блоков длины 2 и отношение $S^1_{\mathscr{L}}$ вычислимо. Тогда существует вычислимый линейный порядок $\mathscr{R}$ такой, что $\mathscr{R} \cong \mathscr{L}$, $S^1_{\mathscr{R}}$ вычислимо, но $S^0_{\mathscr{R}}$ не вычислимо.*

К сожалению, теорема 1 не может быть обобщена для отношения $S^n_{\mathscr{L}}$ вместо $S^1_{\mathscr{L}}$.

Литература

[1] Moses M. *Recursive linear orders with recursive successivities.* // Annals of Pure and Applied Logic. – 1984. – V. 27. – P. 253–264.

[2] Remmel J. B. *Recursively categorical linear orderings* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1981. – V. 83. – P. 387—391.

[3] Фролов А. Н. *Представления отношения соседства вычислимого линейного порядка.* // Известия ВУЗов. Математика. – 2010. – № 7. – С. 73—85.

О ТРИ–ТКАНЯХ БОЛА С ОБЩЕЙ СЕРДЦЕВИНОЙ

А. А. Михеева[1]

---

[1] *heathjensen@yandex.ru*, Тверской государственный университет

Сердцевиной три-ткани Бола называется бинарная операция, которая естественным образом возникает на одном из семейств линий этой три-ткани. Понятие сердцевины средней три–ткани Бола ввел В.Д. Белоусов в [1] (см. также [2]). В случае, если три-ткань Бола — многомерная три-ткань, образованная r-мерными слоениями на гладком многообразии размерности $2r$, то сердцевина является гладкой локальной квазигруппой и обладает дополнительным свойством — она определяет на базе одного из слоений ткани симметрическую структуру.

Известно [3], что сердцевина левой ткани Бола B_l изотопна левой лупе Бола, но не изотопна, вообще говоря, координатной квазигруппе этой ткани. Этот факт означает, что существуют различные (неэквивалентные) три–ткани Бола, определяющие одну и ту же сердцевину. Нами найдены условия, при которых левые три–ткани Бола имеют общую сердцевину. Эти условия применяются для нахождения шестимерных левых тканей с теми же сердцевинами, которые имеют ткани, полученные преобразованием парастрофии из известных шестимерных эластичных тканей E_1 и E_2 [4].

Доказано [5], что сердцевина четырехмерной левой три–ткани Бола B_l^*, полученной преобразованием парастрофии из четырехмерной средней три-ткани Бола Π^* параболического типа, не изотопна ее координатной квазигруппе. В [5] доказано также, что квазигруппа, левая обратная указанной сердцевине, определяет среднюю три–ткань Бола гиперболического типа.

Найдены все четырехмерные левые три-ткани Бола с той же сердцевиной, которую имеет единственная четырехмерная нерегулярная групповая три-ткань [6].

В [7] мы рассмотрели свойства сердцевины групповой ткани, определяемой группой Ли, и свойства соответствующей левой три-ткани Бола.

Литература

[1] Белоусов В. Д. *Сердцевина лупы Бола* // Исследования по общей алгебре – 1965. – С. 53–65.

[2] Белоусов В. Д. *Основы теории квазигрупп и луп* – М.: Наука, 1967. – 223 с.

[3] Толстихина Г. А., *Об условиях изотопии координатной квазигруппы и сердцевины левой ткани Бола* // Изв. ПГПУ им. В.Г. Белинского. Сер. физ.-матем. и техн. науки. – 2011. – № 26. – С. 255–262.

[4] Михеева А. А., Толстихина Г. А. *О шестимерных левых три–тканях Бола с общей сердцевиной* // Изв. вузов. Мат.. – 2014. – № 10. – С. 1–12.

[5] Михеева А. А., Толстихина Г. А. *О сердцевине некоторой четырехмерной три–ткани Бола* // Proc. Intern. Geom. Center. – 2013. – Т. 6. – № 1. – С. 34–41.

[6] Михеева А. А. *О четырехмерных левых три-тканях Бола с общей сердцевиной* // Изв. вузов. Мат. (в печати).

[7] Михеева А. А. *О сердцевине групповой три–ткани* // Изв. вузов. Поволж. р-н. Физ.-матем. науки (в печати).

СТРОЕНИЕ РЕШЕТКИ ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ ТРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

Е. А. Михеева[1]

---

[1] *melalex05@rambler.ru*, Ульяновский государственный университет

Изучено строение решётки (по включению) L_3 всех замкнутых классов трёхзначной логики P_3. Здесь есть замкнутые классы без конечных базисов [1]. Их семейство обозначим B_3. Множество различных классов из L_3 называется *цепью*, если оно линейно упорядочено по включению. Цепь

$$F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset F_n$$

называется *неуплотняемой цепью длины* n между F и P_3, если $F_0 = P_3$, $F_n = F$ и F_{i+1} – предполный класс в F_i для каждого $i < n$. Длина наименьшей конечной неуплотняемой цепи называется *глубиной* класса F в решётке L_3.

Классы глубины 1 в L_3 – это предполные классы в P_3. Их 18 – они описаны в [3]. Доказана их конечная базируемость [4]. Классы глубины 2 в L_3 – это классы, предполные в предполных классах. Они описаны в [5] через предикаты – их 161.

Теорема 1 [6,7,8]. *Все классы глубины 2 в решётке L_3 имеют конечные базисы. Минимальная глубина в L_3 замкнутых классов из B_3 равна 3.*

Назовём *максимальными* в P_3 замкнутыми классами те, которые не имеют конечных базисов, но каждый их собственный замкнутый надкласс конечно базируем.

Теорема 2 [2,9]. *Любой класс из B_3 лежит в некотором максимальном классе из B_3. Максимальных классов в B_3 не более чем счётно. В P_3 построен максимальный класс из B_3, имеющий глубину 5 в L_3. В B_3 есть не менее 3-х разных максимальных классов.*

Пример построен в предполном классе U_3 [3].

Литература

[1] Янов Ю. И., Мучник А. А. *О существовании k–значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса* // ДАН СССР. – 1959. – Т. 27. – № 1. – С. 44–46.

[2] Михеева Е. А. *О существовании в k–значной логике максимальных классов, не имеющих конечного базиса* // ДАН СССР. – 1986. – Т. 287. – № 1. – С. 49–52.

[3] Яблонский С. В. *Функциональные построения в многозначных логиках* // Тр. III Всесоюзного математического съезда. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2. – С. 71–73, 425–431.

[4] Гниденко В. М. *Нахождение порядков предполных классов в трёхзначной логике* // Проблемы кибернетики. – М.: Наука, 1962. – Вып. 8. – С. 341–346.

[5] Lau D. *Submaximalle klassen von P_3* // Electron. Informatichs. und Kybernet. – 1982. – Bd. 18. – № 4–5. – S. 227–243.

[6] Михеева Е. А. *Конечная базируемость классов глубины 2 в решётке L_3* // М-лы конф. "Алгебра и матем. логика: теория и прил.". – К.: Изд-во Казан. ун-та, 2014. – С. 105–106.

[7] Михеева Е. А. *Функциональная полнота в теории конечнозначных логик.* – Ульяновск: УлГУ, 2014. – 139 с.

[8] Михеева Е. А. *Миним. глубина в L_3 замкнутых классов без конечных базисов* // Тр. IV Междунар. конф. "Дискр. модели теор. упр. сист.". – М.: МАКС Пресс, 2000. – С. 77–78.

[9] Михеева Е. А. *Построение в P_k максимальных классов, не имеющих конечных базисов* // Дискретная математика. – М., 1998. – Т. 10. – вып. 2. – С. 137–159.

МЕТАБЕЛЕВЫ ПОЧТИ НИЛЬПОТЕНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА

С. П. Мищенко[1]

---

[1] *mishchenkosp@mail.ru*, Ульяновский государственный университет

Характеристика основного поля равна нулю. По аналогии со случаем алгебр Ли, будем называть алгебру метабелевой, если в ней выполняется тождество

$$(x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0.$$

Не нильпотентное многообразие называется *почти нильпотентным*, если любое его собственное подмногообразие является нильпотентным. Простейшим примером такого многообразия является многообразие всех ассоциативно-коммутативных алгебр, причем, в классе ассоциативных алгебр другого почти нильпотентного многообразия нет. Аналогичная ситуация и в случае алгебр Ли. В этом классе только многообразие всех метабелевых алгебр Ли является почти нильпотентным.

Если отказаться от рассмотрения классических случаев, то почти нильпотентных многообразий великое множество. Подробнее об этом направлении исследования можно прочитать в обзорной работе [1]. Отметим, что незначительный рост многообразия кажется естественным свойством почти нильпотентного многообразия. Однако, это свойство часто нарушается. Так, в работе [2] доказано существование почти нильпотентных коммутативных метабелевых многообразий любой целой экспоненты. В то же время в этом же классе алгебр почти нильпотентных многообразий подэкспоненциального роста (полиномиального или промежуточного) оказалось только два [3]. Аналогичный результат установлен также и в случае антикоммутативных метабелевых алгебр [4]. Если же отказаться от условия коммутативности или антикоммутативности, то описание всех почти нильпотентных многообразий даже полиномиального роста и даже с тождеством метабелевости становится проблематичным.

Теорема. *В случае нулевой характеристики основного поля существует континуальное множество метабелевых почти нильпотентных многообразий полиномиального роста.*

В заключении отметим, что в данной тематики остается открытым вопрос о существовании почти нильпотентного многообразия промежуточного роста или сверхэкспоненциального.

Литература

[1] Шулежко О. В. *О почти нильпотентных многообразиях в различных классах линейных алгебр* // Чебышевский сборник. – 2015. – Т. 16. – № 1 (53). – С. 67–88.

[2] Мищенко С. П., Шулежко О. В. *О почти нильпотентных многообразиях в классе коммутативных метабелевых алгебр* // Вест. Самарского гос. ун-та. Естественнонаучная серия. –2015. – № 3 (125). – С. 21–28.

[3] Чанг Н. Т. К., Фролова Ю. Ю. *Почти нильпотентные коммутативные метабелевы многообразия, рост которых не выше экспоненциального* // Межд. конф. Мальцевские чтения: тезисы докладов. – 2014. – С. 113.

[4] Мищенко С. П., Шулежко О. В. *Описание почти нильпотентных антикоммутативных метабелевых многообразий с подэкспоненциальным ростом* // Межд. конф. Мальцевские чтения: тезисы докладов. – 2014. – С. 110.

ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ПАРАМЕТРОВ НАИМЕНЬШЕГО НУЛЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

В. С. Мокейчев[1], И. Е. Филиппов[2]

---

[1] *Valery.Mokeychev@kpfu.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

[2] *Igor.Filippov@kpfu.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

При исследовании граничных задач для дифференциальных уравнений возникла проблема о существовании корней функции, непрерывно зависящих от параметра. А именно, пусть $g(\tau,\xi)$ – непрерывная скалярная функция аргументов $\tau \in [a,\ b] \subset R^{n-1}$, $\xi \in [a_n,\ b_n] \subset R^1$, удовлетворяющая условиям $g(\tau, a_n) > 0,\ g(\tau, b_n) < 0$, вопрос: существует ли корень, непрерывно зависящий от τ?

Мы не нашли источники, где предлагался бы ответ на поставленный вопрос.

Наименьший корень $\xi(\tau) \in (a_n,\ b_n)$ *уравнения* $g(\tau,\xi) = 0$ *называется точкой перемены знака функции* $g(\tau,\xi)$, *если существуют такие* $\xi_{1,k} \to \xi(\tau)+0$, $\xi_{2,k} \to \xi(\tau)-0$, *что* $g(\tau,\xi_{1,k})g(\tau,\xi_{2,k}) < 0$.

Теорема 1.*Если наименьший корень* $\xi(\tau)$ *уравнения* $g(\tau,\xi) = 0$ *является точкой перемены знака для* $g(\tau,\xi)$, *то* $\xi(\tau)$ *непрерывно зависит от* τ.

Теорема 2. *При каждом* $\varepsilon > 0$ *существует такая непрерывная функция* $g_\varepsilon(\tau,\xi)$, *что* $|g(\tau,\xi) - g_\varepsilon(\tau,\xi)| < \varepsilon$, *и наименьший её корень* $\xi_\varepsilon(\tau)$ *— является точкой перемены знака для* $g_\varepsilon(\tau,\xi)$.

Приведём идеи доказательств.

Теорема 1. На первом этапе проверяется: если $\{\xi(\tau(k))\}$ сходится при $\tau(k) \to \tau(0)$, то $\xi_0 = \lim\limits_{k\to+\infty} \xi(\tau(k)) \geqslant \xi(\tau(0))$. Учитывая перемену знака устанавливается $\xi_0 = \xi(\tau(0))$. На втором от противного доказывается $\xi(\tau) \to \xi(\tau(0))$ при $\tau \to \tau(0)$.

Теорема 2. На первом шаге так фиксируются $\xi_j = a_n + (b_n - a_n)j/m,\ j = 0,\dots,m$, чтобы $|g(\tau,\xi) - g(\tau,\xi_j)| < \varepsilon/(2+2b_n-2a_n)$, и строится такая кусочно линейная функция $\varphi_0(\tau,\xi)$, что $\varphi_0(\tau,\xi_j) = g(\tau,\xi_j)$ причём ε выбирается настолько малым, чтобы $\varphi_0(\tau,a_n) > 0,\ \varphi_0(\tau,b_n) < 0$. Если в окрестности наименьшего нуля функции $\varphi_0(\tau,\xi)$ она меняет знак, то полагается $g_\varepsilon(\tau,\xi) = \varphi_0(\tau,\xi)$. В противном случае вводится $\varphi_1(\tau,\xi) = \varphi_0(\tau,\xi)+\varepsilon/2+a_0$, где $a_0 \in (0,\varepsilon/2)$. Если наименьший нуль для $\varphi_0(\tau,\xi)$ расположен в $(\xi_j,\xi_{j+1}]$, то наименьший нуль функции $\varphi_1(\tau,\xi)$ расположен в $(\xi_{j+1},\xi_{j+2}]$. Если наименьший нуль функции $\varphi_1(\tau,\xi)$ является точкой перемены знака для неё, то $g_\varepsilon(\tau,\xi) = \varphi_1(\tau,\xi)$. В противном случае аналогично строится $\varphi_2(\tau,\xi)$, и так далее.

О ЗАДАЧЕ КОНКРЕТНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АВТОМАТОВ

В. А. Молчанов[1], Е. В. Хворостухина[2]

---

[1] *v.molcanov@inbox.ru*, Саратовский государственный университет им. Н. Г Чернышевского

[2] *katyanew2007@rambler.ru*, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.

В последнее время проявился заметный интерес к исследованию автоматов, у которых системы состояний и выходных символов являются объектами некоторой категории $\mathbf{K}$ (см., например, обзор в [1]). В категории таких автоматов для любых объектов $K_1, K_2 \in \mathbf{K}$ существует притягивающий объект $\mathrm{Atm}(K_1,K_2)$, который называется универсальным автоматом над объектами K_1, K_2 категории $\mathbf{K}$. Ввиду проблемы Б. Йонсона [2] о конкретной характеризации алгебр отношений представляет интерес изучение для таких универсальных автоматов следующей проблемы конкретной характеризации: при каких условиях для автомата $A = (X,S,Y,\delta,\lambda)$ на множествах X, Y можно так определить алгебраические структуры, что полученные объекты $K_X, K_Y \in \mathbf{K}$ и $A = \mathrm{Atm}(K_X,K_Y)$.

В настоящей работе данная задача решена для категории **Hgr** эффективных гиперграфов с p-определимыми ребрами [3], которая охватывает, в частности, плоскости и множества с разбиениями. В работе под гиперграфическим автоматом понимается полугрупповой автомат [3] $A = (X,S,Y,\delta,\lambda)$, у которого множества состояний X и выходных сигналов Y наделены такими структурами гиперграфов $H_X, H_Y \in \mathbf{Hgr}$, что при каждом фиксированном входном сигнале $s \in S$ преобразование $\delta_s \in \mathrm{End}H_X$ и отображение $\lambda_s \in \mathrm{Hom}(H_X,H_Y)$. Для любых гиперграфов $H_X, H_Y \in \mathbf{Hgr}$ алгебраическая система $\mathrm{Atm}(H_X,H_Y) = (H_X,S,H_Y,\delta',\lambda')$ с полугруппой $S = \mathrm{End}H_X \times \mathrm{Hom}(H_X,H_Y)$ и операциями $\delta'(x,(\varphi,\psi)) = \varphi(x)$, $\lambda'(x,(\varphi,\psi)) = \psi(x)$ (где $x \in X$, $(\varphi,\psi) \in S$) является универсальным гиперграфическим автоматом над гиперграфами H_X, H_Y.

Для автомата $A = (X,S,Y,\delta,\lambda)$ на множествах X, Y определим канонические $(p+$

1)-арные отношения R_X, R_Y по следующим формулам: набор $(a_1, a_2, ..., a_{p+1}) \in X^{p+1}$ ($(a_1, a_2, ..., a_{p+1}) \in Y^{p+1}$) в том и только том случае принадлежит отношению R_X (соответственно отношению R_Y), если для любых различных элементов $x_1, x_2, ..., x_{p+1} \in X$ найдется такой символ $s \in S$, что для каждого $i = \overline{1, p+1}$ выполняется равенство $\delta_s(x_i) = a_i$ (соответственно $\lambda_s(x_i) = a_i$).

С помощью таких канонических отношений в главной теореме работы получено решение проблемы конкретной характеризации универсальных гиперграфических автоматов. На основе этого результата можно исследовать взаимосвязь между свойствами универсальных гиперграфических автоматов и их полугрупп входных символов.

Литература

[1] Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. *Элементы алгебраической теории автоматов.* — М.: Высшая школа, 1994. — 192 с.

[2] Jonsson B. *Topics in universal algebra. Lecture Notes in Math. Vol. 250.* — Berlin–Heidelberg–New York: Springer–Verlag, 1972. — 220 p.

[3] Молчанов А. В. *Об определяемости гиперграфических автоматов их выходными функциями* // Теорет. проблемы информатики и ее приложений. — 1998. — Вып. 2. — С. 74-84.

ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ УПАКОВКАХ ШАРОВ

О. Р. Мусин[1]

---

[1] *oleg.musin@utrgv.edu*, ИППИ РАН и UTRGV (University of Texas Rio Grande Valley)

В докладе предполагается обсудить серию наших работ по упаковкам шаров [1–8]. Мы рассмотрим проблему контактных чисел, задачу Таммеса и другие экстремальные задачи сферических упаковок.

Контактным числом $k(n)$ называют наибольшее число непересекающихся шаров одинакового радиуса в $\mathbb{R}^n$, которые можно расположить так, чтобы все они касались одного (центрального) шара такого же радиуса. Этот вопрос в $\mathbb{R}^3$ был предметом спора между И. Ньютоном и Д. Грегори в 1694 году. Ньютон считал, что $k(3) = 12$, в то время как Грегори думал, что ответ может быть равен 13. К. Шютте и Б. Л. Ван дер Варден доказали, что Ньютон был прав и $k(3) = 12$ только в 1953 году. Заметим, что проблема контактных чисел решена только для размерностей $n = 3, 4, 8$ и 24 [1–3].

У проблемы 13 шаров имеется естественное обобщение: найти расположение множества X, состоящего из N точек на $\mathbb{S}^2$, такое что минимальное расстояние между точками X — максимально возможное. Эту задачу впервые поставил голландский ботаник Таммес в 1930 году.

Задача Таммеса решена только для нескольких значений N: для $N = 3, 4, 6, 12$ ее решил Л. Фейеш Тот (1943); для $N = 5, 7, 8, 9$ — Шютте и ван дер Варден (1951); для $N = 10, 11$ — Л. Данцер (1963) и для $N = 24$ — Р. М. Робинсон (1961). Недавно мы решили эту задачу для $N = 13$ [5] и для $N = 14$ [8].

В работе [6] нами были перечислены все локально-жесткие упаковки конгруэнтных кругов на сфере с числом кругов $N < 12$. Эта задача эквивалентна перечислению сферических неприводимых контактных графов. С помощью списка неприводимых контактных графов можно решать различные задачи об экстремальных упаковках таких как задача Таммеса для сферы и проективной плоскости, задача о наибольшем числе контактов у сферических упаковок, задачи Данцера и другие задачи о неприводимых контактных графах [7].

Работа выполнена при частичной поддержке гранта NSF DMS–1400876 и гранта РФФИ 15–01–99563.

Литература

[1] Musin O. R., *The one-sided kissing number in four dimensions*, Periodica Math. Hungar., 2016, **53**, p. 209–225.

[2] Musin O. R., *The kissing number in four dimensions*, Ann. of Math., 2008, **168**, p. 1–32.

[3] Musin O. R., Nikitenko A. V, *Optimal packings of congruent circles on a square flat torus*, Discrete Comput. Geom., 2016, **55:1**, p. 1–20.

[4] Musin O R, Tarasov A S, *The strong thirteen spheres problem*, Discrete Comput. Geom., 2012, **48**, p. 128–141.

[5] Мусин О. Р., Тарасов А. С., *Перечисление неприводимых контактных графов на сфере*, Фундамент. и прикл. матем., 2013, **18:2**, с. 125–145.

[6] Мусин О. Р., Тарасов А. С., *Экстремальные задачи упаковок кругов на сфере и неприводимые контактные графы*, Тр. МИАН, 2015, **288**, с. 133–148.

[7] Musin O. R., Tarasov A. S.,*The Tammes problem for N=14*, Experimental Math., 2015, **24:4**, p. 460–468.

Д.Д. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОЙ И РОСТОВСКАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ШКОЛА

Ю. С. Налбандян[1]

Основателем ростовской геометрической школы с полным основанием считается известный математик Дмитрий Дмитриевич Мордухай-Болтовской (1876–1952), некоторые биографические данные о котором можно найти в [1], [2]. Выпускник Петербургского университета, он начал преподавательскую и научную деятельность в Варшаве – сначала в Варшавском политехническом институте, затем в Варшавском императорском университете, вместе с коллективом которого в 1915 году переехал в Ростов-на-Дону. В варшавский период он подготовил к печати 9 работ геометрической тематики, при этом его интересы были сосредоточены на отдельных проблемах дифференциальной и проективной геометрий, на теории алгебраических

---

[1] *ysnalbandyan@sfedu.ru*, Южный федеральный университет

кривых и на теории геометрических построений. В первой части доклада предполагается дать обзор этих публикаций, а также проанализировать программы курсов аналитической геометрии, проективной геометрии и начертательной геометрии, которые учёный читал в Ростове-на-Дону и в Новочеркасске.

В 1926 году в Ростове-на-Дону по инициативе Д. Д. Мордухай-Болтовского широко праздновалось 100-летие со дня знаменитого выступления Н. И. Лобачевского. В воспоминаниях выпускницы мехмата Ю. Хаплановой [3] упоминается о поездке ростовской делегации в Казань, где ученый выступил с речью «Лобачевский и основные логические проблемы в математике». Во второй части доклада речь пойдет и об этом выступлении, и о работах ученика Д. Д. Мордухай-Болтовского, известного ростовского геометра Николая Михайловича Несторовича (1891–1955), признанного специалиста в области неевклидовой геометрии, который определился в выборе тематики как раз после Казани.

Среди учеников Д. Д. Мордухай-Болтовского и лауреат премии имени Н. И. Лобачевского, член-корреспондент АН СССР Николай Владимирович Ефимов (1910–1982), уехавший из Ростова в 1930, но навсегда сохранивший привязанность к Alma Mater, и Константин Константинович Мокрищев (1910–1981), который стал связующим звеном между геометрами факультета и Н. В. Ефимовым и передал свой педагогический талант и любовь к науке многим своим ученикам, продолжающим и сегодня активную научную деятельность и формирующим свои научные школы. Завершающая часть доклада будет посвящена деятельности этих учёных и их последователей.

В работе используются материалы из Государственного Архива Ростовской области и Архива Ростовского государственного университета, собранные М. Б. Налбандян.

Литература

[1] Минковский В. Л. *Д. Д. Мордухай-Болтовской. К 50–летию научно-педагогической деятельности* // Математика в школе. – 1949. – № 2. – С. 45–57.

[2] Черняев М.Ṗ., Несторович Н. М., Ляпин Н. М. *Дмитрий Дмитриевич Мордухай-Болтовской (1876-1952)*// УМН. – 1953. – Т. 8, в. 4(56). – С. 131-139.

[3] Хапланова Ю. С. *Прошлое* // Альманах «Ковчег». – 2003. – № 3. – С.172-254.

О ГЕОМЕТРИИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

А. Я. Нарманов[1], С. С. Саитова[2]

---

[1] *narmanov@yandex.ru*, Национальный Университет Узбекистана

[2] *sayoss1985@mail.ru*, Национальный Университет Узбекистана

Пусть M – гладкое многообразие размерности n, $V(M)$ – множество всех гладких векторных полей, определенных на M.

Рассмотрим множество $D \subset V(M)$, через $A(D)$ обозначим наименьшую подалгебру Ли, содержащую множество D.

Определение 1. *Орбита $L(x)$ семейства D векторных полей, проходящая через точку x, определяется как множество таких точек y из M, для которых существуют действительные числа $t_1, t_2, \dots, t_k$ и векторные поля $X_1 X_2, \dots, X_k$ из D (где $k-$ произвольное натуральное число) такие, что*

$$y = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(\dots(X_1^{t_1}(x))\dots)).$$

Определение 2. *Точка*

$$y = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(\dots(X_1^{t_1}(x))\dots)) \in L(x)$$

называется T – достижимой из точки $x \in M$, если $\sum_i t_i = T$.

Обозначим через $A_x(T)$ множество точек, которые T – достижимы из точки x.

Изучению структуры множества достижимости и орбит систем гладких векторных полей посвящены исследования многих математиков в связи с ее важностью в теории оптимального управления, в исследовании динамических систем, в геометрии и теории слоений [1-4].

В работе [3] доказано, что каждая орбита семейства гладких векторных полей является гладким многообразием.

Нами доказана следующая теорема

Теорема 1. *Множество $A_x(T)$ для каждого $x \in M$ при любом T является погруженным подмногообразием орбиты $L(x)$ коразмерности единица или ноль.*

Следующая теорема доказана в [3].

Теорема 2. *Пусть M - гладкое связное многообразие размерности n. Существует система D, состоящая из двух векторных полей такая, что $L^+(x) = M$ для каждой точки $x \in M$.*

С использованием теоремы 2 доказана следующая теорема

Теорема 3. *Пусть M – гладкое связное многообразие размерности $n \geqslant 2$. Существует система D, состоящая из трех векторных полей такая, что $A_x(0) = M$ для каждой точки $x \in M$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства высшего и среднего специального образования республики Узбекистан (проект Ф4-04).

Литература

[1] Нарманов А. Я., Саитова С. С. *О геометрии орбит векторных полей Киллинга.//* Дифференциальные уравнения, 2014. – Т. 50. – №12. – С. 1582–1589.

[2] Levitt N, Sussmann H. *Orbits of family of vector fields and integrability of systems with singularities.* // SIAM J. Control. –1975. – Т. 13. – №6 – С. 50–55.

[3] Sussmann H. *On controllability by means of two vector fields.* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1973. – Т. 79. – С. 197–199.

[4] Thurston W. *Existence of codimension one foliations.* // Ann. of Math. – 1976. – Т. 104. – С. 249–268.

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ С ВЕСОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Р. Г. Насибуллин[1]

---

[1] *NasibullinRamil@gmail.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

В математике, в особенности в теории вложения функциональных пространств, и в математической физике широкое развитие получили неравенства, включающие функцию и ее производную. К таким видам неравенств относятся, например, неравенства типа Харди. Неравенства типа Харди развивались в разных направлениях. Например, в работах Х. Брезиса и М. Маркуса, М. Хоффман-Остенхоф, Т. Хоффман-Остенхоф и А. Лаптева, Дж. Тидблума, Ф.Г. Авхадиева и К.-Й. Виртса доказаны неравенства с дополнительными слагаемыми. В статье [1] установлены неравенства типа Харди, точные константы в которых зависят от первого положительного корня следующего дифференциального уравнения

$$rJ_\nu(z) + 2zJ'(z) = 0, \nu \geqslant 0, r > 0,$$

где J_ν – функция Бесселя, определяемая следующим образом:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k!\Gamma(k+1+\nu)}, \quad x > 0, \nu \geqslant 0.$$

Пусть Ω – выпуклая область с конечным внутренним радиусом

$$\delta_0 = \delta_0(\Omega) = \sup_{x\in\Omega} \delta,$$

где $\delta = \delta(\Omega)$ – функция расстояния от точки $x \in \Omega$ до границы области Ω. Через $C_0^1(\Omega)$ обозначим семейство непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω.

Приведем формулировку результата из [1]:

Пусть $s \in (0, +\infty)$, $q \in (0, +\infty)$, $\nu \in \left[0, \frac{s}{q}\right]$. *Тогда для произвольной функции* $f \in C_0^1(\Omega)$, *такой что* $\int\limits_\Omega |\nabla f|^2 \delta^{-s+1} dx < \infty$, *выполнено следующее точное неравенство*

$$\int\limits_\Omega \frac{|\nabla f|^2}{\delta^{s-1}} dx \geqslant \frac{s^2 + \nu^2 q^2}{4} \int\limits_\Omega \frac{|f|^2}{\delta^{s+1}} dx + \frac{q^2 \lambda_\nu^2 (2s/q)}{4\delta_0^q} \int\limits_\Omega \frac{|f|^2}{\delta^{s+1-q}} dx, \tag{1}$$

где $\delta_0 = \delta_0(\Omega) = \sup_{x\in\Omega} \delta$.

Мы доказали L^p-аналог неравенства (1). Отметим, что весовые функции в полученных неравенствах зависят от функции Бесселя порядка ν. Приведем лишь один частный случай доказанного утверждения. Справедлива следующая

Теорема. *Пусть* Ω – *n-мерная область выпуклая область с конечным внутренним радиусом* δ_0 *и функция* $f \in C_0^1(\Omega)$, *такая что* $\int\limits_\Omega |\nabla f|^p \delta^{-(s-p+1)} dx < \infty$. *Если* $s \in (0, +\infty), p \in [2, +\infty), r = s/(p-1)$, *то*

$$\int\limits_\Omega \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p+1}} dx \geqslant \frac{(p-1) r^p \pi^p}{2^p \delta_0^{2r}} \int\limits_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^{1-r}} \operatorname{ctg}^{p-2} \left(\frac{\pi \delta^r}{2\delta_0^r} \right) dx.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта №15-41-02433.

Литература

[1] Avkhadiev F. G., Wirths K. -J., *Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants* // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. – 2011 – V. 18 – P. 723–736.

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА МНОГОЛИСТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

С. Р. Насыров[1]

---

[1] *snasyrov@kpfu.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

В статье [1] нами был предложен приближенный метод нахождения полинома, униформизирующего заданную компактную риманову поверхность рода нуль. В [2–4] этот метод был распространен на случай компактных римановых поверхностей рода 1 (комплексных торов). Существенным ограничением являлось то, что над бесконечно удаленной точкой униформизируемые поверхности имели только одну точку ветвления максимальной кратности.

Мы рассматриваем здесь более общую задачу, когда на рассматриваемые римановы поверхности не накладывается никаких ограничений, кроме компактности и фиксации рода ρ ($\rho = 0$ или $\rho = 1$). В случае односвязных поверхностей мы находим униформизирующую заданную поверхность рациональную функцию, в случае комплексных торов — соответствующую эллиптическую функцию.

Метод основан на рассмотрении однопараметрических семейств мероморфных функций и включении заданной римановой поверхности S в гладкое семейство поверхностей $S = S(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, в качестве финального элемента: $S = S(1)$. Если при $t = 0$ нам известна униформизирующая функция, то известны положения ее критических точек и полюсов. Мы находим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют критические точки и полюса семейства и, решая задачу Коши для нее с начальными данными, соответствующими поверхности $S(0)$, мы определяем все параметры для функции, униформизирующей поверхность $S(1)$.

Рассмотрены примеры, подтверждающие эффективность предложенного метода.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00351).

Литература

[1] Насыров С. Р. *Нахождение полинома, униформизирующего заданную компактную риманову поверхность* // Матем. заметки. – 2012. – V. 91. – No 4. – P. 597–607.

[2] Насыров С. Р. *One-parametric families of elliptic functions uniformizing complex tori* // Комплексный анализ и его приложения. Материалы VII Петрозаводской межд. конф., Петрозаводск, Изд-во Петрозаводск. ун-та, 2014. – С. 78–79.

[3] Насыров С. Р. *Однопараметрические семейства многолистных функций и римановых поверхностей* // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Матер. межд. конф. «Воронежская зимняя матем. школа», Воронеж, Изд. дом ВГУ, 2015. – С. 83–85.

[4] Насыров С. Р. *Однопараметрические семейства комплексных торов над сферой Римана с точками ветвления произвольного порядка* // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Матер. 12-й межд. Казанск. школы-конф. Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2015. – Т. 51. – С. 327-329.

АСИМПТОТИКИ КРИТЕРИЕВ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

П. А. Новиков[1]

---

[1] *novikov@it.kfu.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Высшая школа ИТИС

В различных моделях теории надежности используется обобщенное гамма-распределение [1] с функцией плотности

$$\frac{1}{\theta} f\left(\frac{x}{\theta}; d,\delta\right) = \frac{1+\delta}{\Gamma((1+d)/(1+\delta))}\theta^{-(1+d)/(1+\delta)} x^{d} \times \exp(-x^{1+\delta}/\theta);$$

$$x \geqslant 0, \theta > 0; d,\delta > -1. \quad (1)$$

В задаче проверки гипотез по выборке $X_1,\dots,X_n$ о параметрах формы d и δ обобщенного гамма-распределения при мешающем параметре θ важную роль играет статистика $T = T(c_1,c_2) = c_1 T_1 + c_2 T_2$, где $T_1 = \sum \ln x_k - n \ln\left(\sum x_k\right)$, $T_2 = n\left[\ln\left(\sum x_k\right) - \sum x_k \ln x_k / \sum x_k\right]$ (см. [2], [3]).

Асимптотические разложения (при $\delta \to 0$) среднего и дисперсии статистики T были получены в работе [3] (см. лемму), при этом точность асимптотики среднего составляла $O(\delta^2)$, а дисперсии — $O(\delta)$. В настоящей работе асимптотическое разложение дисперсии T уточняется до $O(\delta^2)$.

Теорема. *Пусть $X_1,\dots,X_n$, $n \geqslant 2$ — независимые случайные величины, одинаково* *распределеные согласно обобщенному гамма-распределению* (1). *Тогда*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}\,T(c_1,c_2) = n\Big\{ & c_1^2[\psi'(1+d) - n\psi'(n(1+d))] + 2c_1c_2[-\psi'(2+d) + n\psi'(1+n(1+d))] \\
& + c_2^2\left[-n\psi'(1+n(1+d)) + \frac{n(2+d)}{1+n(1+d)}\psi'(2+d)\right] \\
& + \delta(1+d)\Big(c_1^2[-\psi''(2+d) + n^2\psi''(1+n(1+d))] \\
& + 2c_1c_2\left[-n^2\psi''(1+n(1+d)) + \frac{n(2+d)}{(1+n(1+d))}\psi''(2+d) - \frac{(n-1)n}{(1+n(1+d))^2}\psi'(2+d)\right] \\
& + c_2^2\Bigg[-\frac{n^2(2+d)(3+d)}{(1+n(1+d))(2+n(1+d))}\psi''(2+d) + n^2\psi''(1+n(1+d)) \\
& - \frac{3(n-1)n^2(1+d)}{(1+n(1+d))^2(2+n(1+d))}\psi'(2+d)\Bigg]\Big) + O(\delta^2)\Big\}
\end{aligned}
$$

при $\delta \to 0$.

Литература

[1] Stacy E. W. *A generalization of gamma distribution* // Ann. Math. Statist. – 1962. – V. 33. – No. 3. – P. 1187–1192.

[2] Володин И. Н. *О различении распределений гамма и Вейбулла* // Теор. вероят. и ее примен. – 1974. – Т. 19. – № 2. – С. 398–404.

[3] Володин И. Н. *О различении типов, связанных с обобщенным гамма-распределением* // Вероятностн. методы и кибернетика. – Казань, 1974. – Вып. 11. – С. 73–88.

НАДГРУППЫ УНИПОТЕНТНЫХ ПОДГРУПП ГРУПП ЛИЕВА ТИПА НАД ПОЛЯМИ

Я. Н. Нужин[1]

---

[1] *nuzhin2008@rambler.ru*, Сибирский федеральный университет

Описаны подгруппы группы лиева типа над полем, содержащие ее максимальную унипотентную подгруппу. Полученные результаты похожи на описание параболических подгрупп групп с (B,N)-парой, данное Ж. Титсом.

Пусть Φ — приведенная неразложимая система корней, $\Pi = \{r_1,\dots,r_l\}$ — множество ее фундаментальных корней, Φ^+ — множество положительных корней относительно Π. Далее $\Phi(F)$ — группа Шевалле типа Φ ранга l над полем F. Группа $\Phi(F)$ порождается корневыми подгруппами $X_r = \{x_r(t) \mid t \in F\}$, $r \in \Phi$, где $x_r(t)$ — соответствующий корневой элемент из $\Phi(F)$. Нам потребуются следующие естественные подгруппы группы $\Phi(F)$: унипотентная подгруппа $U = \langle X_r \mid r \in \Phi^+\rangle$, мономиальная подгруппа $N = \langle n_r(t) \mid r \in \Phi,\ t \in F^*\rangle$, диагональная подгруппа $H = \langle h_r(t) \mid r \in$

Φ, $t \in F^*\rangle$ и борелевская подгруппа $B = UH$. Здесь $\langle M\rangle$— подгруппа, порожденная подмножеством M некоторой группы, F^* — мультипликативная группа поля F и $n_r(t) = x_r(t)x_{-r}(-t^{-1})x_r(t)$, $h_r(t) = n_r(t)n_r(-1)$. Положим также $n_r = n_r(1)$, $I = \{1,2,\ldots,l\}$.

Аналоги подгрупп X_r, U, N, H, B и множеств Φ, Φ^+, Π, I для групп Шевалле $\Phi(F)$ (нормального типа) существуют и для скрученных групп Шевалле $\Phi^n(F)$. Совокупность всех групп $\Phi(F)$ и $\Phi^n(F)$ обычно называют группами лиева типа. Далее $G(F)$ — группа лиева типа на полем F, где G есть Φ или Φ^n, n — порядок скручивающего автоморфизма.

Надгруппы борелевской подгруппы B и сопряженные с ними называются параболическими подгруппами группы $G(F)$. В силу известного результата Ж.Титса [1] параболические подгруппы, содержащие подгруппу B, исчерпываются подгруппами $P_J = \langle B, n_{r_j} \mid j \in J\rangle$, $J \subseteq I$. Здесь этот результат обобщается, а именно, описываются надгруппы унипотентной подгруппы U. Для любого $J \subseteq I$ положим $Q_J = \langle U, n_{r_j} \mid j \in J\rangle$ и через Φ_J обозначим подсистему корней с базой $\{r_i \mid i \in J\}$.

Теорема. *Пусть M — подгруппа группы лиева типа $G(F)$ над полем F, содержащая унипотентную подгруппу U. Тогда для некоторого подмножества $J \subseteq I$ и подходящей диагональной подгруппы $H_M \leqslant H$, нормализуемой всеми элементами n_{r_j}, $j \in J$, подгруппа M совпадает с произведением $Q_J H_M$, причем $Q_J = \langle X_r \mid r \in \Phi^+ \cup \Phi_J\rangle$.*

Для группы Шевалле типа A_l утверждение теоремы следует из результатов статьи Д.А.Супруненко [2], в которой описаны надгруппы унитреугольной подгруппы общей линейной группы над произвольным телом.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16–01–00707-а).

Литература

[1] Tits J. *Theoreme de Bruhat et sous groupes paraboliques* // C.R.Acad. Sci. Paris. – 1962. – V. 254. – P. 2910–2912.

[2] Супруненко Д. А. *Подгруппы полной линейной группы над телом D, содержащие группу всех специальных треугольных матриц $U(n,D)$* //ДАН БССР. –1970. – Т. XIV. – № 4. – С. 305–308.

$\mathscr{A}$-(C3)- И $\mathscr{A}$-(D3)-МОДУЛИ

Ч. Х. Н. Нян[1]

Пусть M — правый R-модуль и $\mathscr{A}$ — множество подмодулей модуля M, которое замкнуто относительно изоморфных образов. Следуя [3] и [4] введем следующие условия:

$\mathscr{A}$-(C3): Для каждых прямых слагаемых M_1, M_2 модуля M таких, что $M_1, M_2 \in \mathscr{A}$ и $M_1 \cap M_2 = 0$, подмодуль $M_1 + M_2$ является прямым слагаемым модуля M.

---

[1] *tranhoaingocnhan@gmail.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, кафедра алгебры и математической логики

$\mathscr{A}$-(D3): Для каждых прямых слагаемых M_1, M_2 модуля M таких, что M/M_1, $M/M_2 \in \mathscr{A}$ и $M_1 + M_2 = M$, подмодуль $M_1 \cap M_2$ является прямым слагаемым модуля M.

Модуль M назовем $\mathscr{A}$-(C3)-модулем, если модуль M удовлетворяет условию $\mathscr{A}$-(C3). Аналогично определяется понятие $\mathscr{A}$-(D3).

Теорема. *Пусть $\mathscr{A}$ — класс правых R-модулей с локальными эндоморфизмами, содержащий все простые правые R-модули и замкнутый относительно изоморфизмов. Если все правые R-модули $\mathscr{A}$-инъективны, то следующие условия эквивалентны для кольца R:*

(1) R — полуцепное артиново кольцо с $J^2(R) = 0$.

(2) Над кольцом R каждый правый $\mathscr{A}$-C3-модуль является квазиинъективеным.

(3) Над кольцом R каждый правый $\mathscr{A}$-C3-модуль является $C3$-модулем.

Следствие. *[2, Теорема 3.4] Следующие условия эквивалентны для кольца R:*

(1) R — полуцепное артиново кольцо и $J^2(R) = 0$.

(2) Над кольцом R каждый правый просто-прямо-инъективный модуль является квазиинъективеным.

(3) Над кольцом R каждый правый просто-прямо-инъективный модуль является $C3$-модулем.

Теорема. *Пусть $\mathscr{A}$ — класс правых R-модулей с локальными эндоморфизмами, содержащий все простые правые R-модули и замкнутый относительно изоморфизмов. Если все правые R-модули $\mathscr{A}$-проективны, то следующие условия эквивалентны для кольца R:*

(1) R — полуцепное артиново кольцо и $J^2(R) = 0$.

(2) Над кольцом R каждый правый $\mathscr{A}$-D3-модуль является квазипроективеным.

(3) Над кольцом R каждый правый $\mathscr{A}$-D3-модуль является $D3$-модулем.

Литература

[1] Abyzov A. N., Quynh T. C., Nhan T. H. N. SSP rings and modules // Asian-European J. Math. — 2016. — Vol. 9. — Issue 1. — P. 1—9.

[2] Camillo V., Ibrahim Y., Yousif M., Zhou Y. Simple-direct-injective modules // J. Algebra — 2014. — Vol. 420. — P. 39—53.

[3] Lopez-Permouth S. R., Oshiro K.; Tariq Rizvi S. On the relative (quasi-) continuity of modules // Comm. Algebra — 1998. — Vol. 26. — P. 3497—3510.

[4] Oshiro K. Continuous modules and quasi-continuous modules // Osaka J. Math. — 1983. — Vol. 20. — P. 681—694.

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ МЕТОДА ВЕЙВЛЕТ-МОМЕНТОВ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

А. В. Ожегова[1], Л. Э. Хайруллина[2]

---

[1] *Alla.Ozhegova@kpfu.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет
[2] *Liliya-v1@yandex.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

В данной работе для решения сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши

$$Kx \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\tau^2}x(\tau)}{\tau-t}d\tau+\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}h(t,\tau)x(\tau)d\tau=f(t),|t|<1, \qquad (1)$$

где $h(t,\tau), f(t)$ — известные непрерывные функции в своих областях определения, $x(\tau)$ — искомая функция, а сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, применяется метод моментов, основанный на аппроксимации искомой функции вейвлетами Чебышева II рода.

Указанное уравнение рассматривается на паре весовых пространств (X,Y), являющихся некоторыми сужениями пространств непрерывных функций, в которых установлена [1] корректность задачи.

Приближенное решение уравнения (1) ищется в виде

$$x_m(t)=a_0\varphi_{0,0}(t)+a_1\varphi_{0,1}(t)+\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}b_{j,k}\psi_{j,k}(t),$$

где

$$\varphi_{m,k}(t)=\sum_{j=0}^{2^m}U_j(t)U_j\left(\xi_k^{(2^m+1)}\right)\frac{2\left|\sin\frac{\pi(k+1)}{2^m+2}\right|}{\sqrt{\pi(2^m+2)}}, m=0,1,\ldots,k=\overline{0,2^m},$$

$$\psi_{m,k}(t)=\sum_{j=2^m+1}^{2^{m+1}}U_j(t)U_j\left(\xi_k^{(2^m)}\right)\frac{2\left|\sin\frac{\pi(k+1)}{2^m+1}\right|}{\sqrt{\pi(2^m+1)}}, m=0,1,\ldots,k=\overline{0,2^m-1}$$

– так называемые масштабирующая функция и вейвлет функция Чебышева II рода соответственно [2], $U_j(t)=\frac{\sin(j+1)\arccos t}{\sqrt{1-t^2}}, j=0,1,2,\ldots$ – полиномы Чебышева II рода, $\xi_k^{(n)}=\cos\frac{\pi(k+1)}{n+1}, k=0,\ldots,n-1$ – нули полинома $U_n(t)$.

Неизвестные коэффициенты $a_0,a_1,b_{j,k}$ $(j=\overline{0,m-1},k=\overline{0,2^j-1})$ находятся из условия ортогональности невязки системе функций $\left\{T_{j+1}(t)\right\}_{j=0}^{2^m}, m=1,2,\ldots,T_n(t)=$
$\cos n\arccos t$ — полиномы Чебышева I рода.

В результате имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$a_0\alpha_0+a_1\alpha_1+\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{2^j-1}b_{j,k}\alpha_{j,k}=f_i, i=\overline{0,2^m}, \qquad (2)$$

где

$$\alpha_0=\int_{-1}^{1}\frac{T_{j+1}(t)}{\sqrt{\pi}\sqrt{1-t^2}}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}h(t,\tau)(1+2\tau)d\tau-(2t^2+t-1)\right]dt$$

$$\alpha_1=\int_{-1}^{1}\frac{T_{j+1}(t)}{\sqrt{\pi}\sqrt{1-t^2}}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}h(t,\tau)(1-2\tau)d\tau-(-2t^2+t+1)\right]dt$$

$$a_{j,k}=-\int_{-1}^{1}\frac{T_{j+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\sum_{j=2^m+1}^{2^m+1}T_{j+1}(t)U_j\left(\xi_k^{(2^m)}\right)\frac{2\left|\sin\frac{\pi(k+1)}{2^m+1}\right|}{\sqrt{\pi(2^m+1)}}dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_{j+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\tau^2}h(t,\tau)\psi_{j,k}(\tau)d\tau dt,$$

$$f_j=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}f(t)T_{j+1}dt.$$

Теорема. *Пусть выполнены условия:*

а) уравнение (1) имеет единственное решение $x^*\in X$ *при любой правой части* $f\in Y$*;*

б) функция $f(t)\in W^rH_\alpha$*, ядро* $h(t,\tau)\in W^rH_\alpha$ *по переменной* t *равномерно относительно* τ.

Тогда начиная с некоторого $m\in\mathbb{N}$*, система метода вейвлет-моментов (2) имеет единственное решение* $a_0^*,a_1^*,b_{j,k}^*(j=\overline{0,m-1},k=\overline{2^j-1})$*, приближенные решения* x_m^* *сходятся к точному решению* x^* *в пространстве* X *со скоростью*

$$\|x^*-x_m^*\|_X=O\left(\frac{\ln(2^m+1)}{(2^m+1)^{r+\alpha}}\right),0<\alpha\leqslant1,r\geqslant0.$$

Литература

[1] Хайруллина Л. Э. *Равномерная сходимость приближенных решений сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши*: дис ... канд. физ.-мат. наук. – Казань, 2011. — 103 с.

[2] Султанахмедов М. С. *Аппроксимативные свойства вейвлет-рядов Чебышева второго рода* // Влад. мат. ж-л. – 2015. – No 11 (17). – С. 56-64.

О РЯДАХ ФУРЬЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Б. П. Осиленкер[1]

---

[1] *b_osilenker@mail.ru*, НИУ “Московский государственный строительный университет”

Пусть

$$J = \begin{pmatrix} b_0 & a_1 & 0 & 0 & \dots \\ a_1 & b_1 & a_2 & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & b_2 & a_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \tag{1}$$

бесконечная якобиева симметричная матрица с $a_{n+1} > 0, b_n \in \mathbb{R}$. Обозначим через L оператор

$$(Lu)_n = a_{n+1}u_{n+1} + b_n u_n + a_n u_{n-1} (n = 0, 1, 2, \dots; u_{-1} = 0),$$

где $u = (u_n)_{n=0}^{\infty} \in l^2$. Задача на собственные значения определяет систему полиномов $p_n(x)$, заданных трехчленным рекуррентным соотношением

$$x p_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x)$$
$$(n = 0, 1, 2, \dots; p_{-1}(x) = 0).$$

Если элементы якобиевой матрицы (1) ограничены, то существует единственная конечная положительная борелевская мера μ такая, что $Supp(\mu) = [-1, 1] \bigcup S$ есть компакт в R и $\{p_n(x)\}$ образуют ортонормированную по мере μ систему полиномов n-ой степени. Рассмотрим класс $\mathfrak{M}$ якобиевых матриц (1), для которых

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1/2, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Тогда $\mathrm{Supp}\,(\mu) = [-1, 1] \bigcup S$, S – конечное или счетное множество действительных чисел, лежащих вне отрезка $[-1, 1]$, которые могут накапливаться лишь к концам отрезка. Как показал Е.А.Рахманов, если $\mu'(x) > 0$ почти всюду, то ассоциированная матрица Якоби принадлежит классу $\mathfrak{M}$. Будем говорить, что дискретный оператор Lпринадлежит классу $\mathfrak{R}$, если ассоциированная якобиева матриц (1) удовлетворяет соотношению

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|a_n - a_{n+1}| + |b_n - b_{n+1}|) < \infty. \tag{2}$$

Отметим, что матрицы Якоби (1) классических ортонормированных полиномов Якоби, полиномов Поллачека и нагруженных полиномов Гегенбауэра удовлетворяют оценке (2). В докладе будут рассмотрены линейные дискретные и полунепрерывные методы суммирования рядов Фурье по ортонормированным собственным функциям дискретного оператора класса $\mathfrak{R}$. Получены весовые оценки частных сумм и линейных средних, порожденных линейными треугольными матрицами суммирования. В качестве следствия доказаны утверждения о суммируемости рядов Фурье линейными методами почти всюду и равномерно на интервалах непрерывности. В случае полунепрерывных методов суммирования особое внимание будет уделено результатам для обобщенных средних Пуассона -Абеля

$$U_n(f;x;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n h} c_k(f) p_k(x), \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty; h > 0.$$

Доказательства полученных результатов основаны на построении “горбатых мажорант” ядер и весовых оценках максимальных функций. Ряд скалярных утверждений переносится на случай якобиевых матриц с матричными элементами.

О СОЛИТОНАХ РИЧЧИ НА МНОГООБРАЗИЯХ УОКЕРА МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Д. Н. Оскорбин[1], Е. Д. Родионов[2], И. В. Эрнст[3]

---

[1] *oskorbin@yandex.ru*, Алтайский государственный университет
[2] *edr2002@mail.ru*, Алтайский государственный университет
[3] *igeh@yandex.ru*, Алтайский государственный университет

Важным обобщением метрик Эйнштейна на (псевдо)римановых многообразиях являются солитоны Риччи. Данное понятие впервые было предложено Р. Гамильтоном в работе [1].

Полное (псевдо)риманово многообразие (M, g) называется солитоном Риччи, если метрика g удовлетворяет уравнению: $r = C \cdot g + L_X g$, где r — тензор Риччи, $C \in \mathrm{R}$ — константа, $L_X g$ — производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля X.

Исследованию солитонов Риччи на (псевдо)римановых многообразиях посвящены работы многих математиков (см., например, обзор [2]). Так, например, солитоны Риччи на однородных псевдоримановых многообразиях малой размерности были исследованы Дж. Кальварузо [3]. В данной работе на строение многообразия налагается ограничение другого характера: предполагается, что оно является многообразием Уокера.

Многообразие Уокера — это n-мерное псевдориманово многообразие, обладающее параллельным распределением изотропных r-плоскостей, где $r \leqslant \frac{n}{2}$. Геометрия многообразий Уокера рассмотрена в работе [4], известно их применение в теоретической физике. Группы голономии конформно плоских лоренцевых многообразий изучены в работах А. С. Галаева [5].

Уравнение солитона Риччи на трехмерных лоренцевых многообразиях Уокера изучалось в работе [6], где была показана его разрешимость. В данной работе найдены новые солитоны Риччи на трехмерных лоренцевых многообразиях Уокера, а также исследовано уравнение солитона Риччи на четырехмерных конформно плоских лоренцевых многообразиях Уокера, найдены нетривиальные решения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты: №16–01–00336А, №16–31–00048мол_а), Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

Литература

[1] Hamilton R. *The Ricci flow on surfaces* // Contemporary Mathematics. – 1988. – V.71.– P. 237-261.

[2] Cao H.-D. *Recent progress on Ricci solitons* // Advanced Lectures in Mathematics. – 2010. – No. 11. – P. 1-38.

[3] Calvaruso G., Zaeim A. *Conformally flat homogeneous pseudo-Riemannian four-manifolds* // Tohoku Math. J. – 2014. – V. 66(2). – No. 1. – P. 31–54. doi:10.1093/imrn/rnu088

[4] Галаев А. С. *Конформно плоские лоренцевы многообразия со специальными группами голономии* // Матем. сборник. – 2013. – Т. 204(9). – С. 29–50.

[5] Brozos-Vázquez M., García-Río E., Gilkey P., Nikčević S. and Vázquez-Lorenzo R. *The geometry of Walker manifolds* –Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics **5**, Morgan & Claypool Publ. – 2009. – 177 p.

[6] Brozos-Vázquez M., García-Río E., Gavino Fernandez S. *Locally conformally flat Lorentzian gradient Ricci solitons* // Journal of Geometric Analysis. – 2013 – V. 23(3). – P. 1196-1212.

О ГРАДУИРОВКАХ C^*-АЛГЕБРЫ, ПОРОЖДЕННОЙ ОТОБРАЖЕНИЕМ И МУЛЬТИПЛИКАТОРАМИ

Е. В. Патрин[1]

Пусть задано отображение $\varphi : X \longrightarrow X$ счётного множества X в себя, удовлетворяющее условиям конечности прообразов $\mathrm{card}(\varphi^{-1}[x]) < \infty$ для любого $x \in X$ и отсутствия *циклических* элементов, т. е. $\varphi^n(x) \neq x$ ни для каких $n \in \mathbb{N}$ и $x \in X$.

Тогда в гильбертовом пространстве функций $l^2(X)$ возникает оператор

$$T_\varphi : l^2(X) \longrightarrow l^2(X), \quad T_\varphi(f) := f \circ \varphi$$

обратного образа отображения φ.

Утверждение. *Операторы* $T_\varphi{}^* T_\varphi$ *и* $T_\varphi T_\varphi{}^*$ *замыкаемые, существенно самосопряжённые, их спектры совпадают и дискретные.*

Они индуцируют разложения пространства $l^2(X)$ в прямые суммы своих инвариантных подпространств $l^2(X_k)$ и l^2_k, которые являются начальными и конечными подпространствами для оператора частичной изометрии U_k, при этом $T_\varphi = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \sqrt{k}\, U_k$ и $U_k U_l{}^* = 0$, при $k \neq l$. Рассмотрим семейство *мультипликаторов*

$$\{M_f : l^2(X) \longrightarrow l^2(X) : \quad M_f(g) := f\,g\}_{f\in l^\infty(X)}.$$

---

[1] *evgeniipatrin@mail.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт физики

Обозначим через $\mathfrak{M}_\varphi$ C^*-подалгебру алгебры $B(l^2(X))$, порождённую с помощью семейства операторов частичной изометрии $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и семейства мультипликаторов ([1]).

Мономом алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$ назовем любое конечное произведение элементов множества $\{M_f\}_{f\in l^\infty(X)} \cup \{U_k\}_{k\in\mathbb{N}} \cup \{U_k{}^*\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Введём понятие *индекса мономов* $\mathrm{ind} : \mathrm{Mon}_\varphi \longrightarrow \mathbb{Z}$, положив $\mathrm{ind}(M_f) := 0$, $\mathrm{ind}(U_k) := 1$, $\mathrm{ind}(U_k{}^*) := -1$. Индексом $\mathrm{ind}(V)$ ненулевого монома V положим равным сумме индексов частичных изометрий, участвующих в его представлении. Индекс нулевого монома положим равным нулю.

Обозначим через $\mathfrak{M}_{\varphi,n}$ операторное пространство в алгебре $\mathfrak{M}_\varphi$, порождённое мономами индекса n.

Теорема 1 *Алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ является $\mathbb{Z}$-градуированной алгеброй:* $\mathfrak{M}_\varphi = \overline{\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{M}_{\varphi,n}}$.

Рассмотрим $C_0(\mathbb{N},\mathbb{Z})$ — аддитивную группу всех отображений из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{Z}$ с конечным носителем относительно поточечного сложения. Каждый $\mathfrak{n} \in C_0(\mathbb{N},\mathbb{Z})$ имеет вид $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{n}(k)\delta_k$, где $\delta_k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\delta_k(l) := \delta_{kl}$. Определим *мультииндекс монома* как отображение $\text{m-ind} : \mathrm{Mon}_\varphi \longrightarrow C_0(\mathbb{N},\mathbb{Z})$, полагая $\text{m-ind}(M_f) := 0$, $\text{m-ind}(U_k) := \delta_k$ и $\text{m-ind}(U_k{}^*) := -\delta_k$. Определим $\text{m-ind}(V)$ монома V как сумму мульти-индексов чатичных изометрий, участвующих в его представлении.

Операторное пространство, порождённое мономами мульти-индекса $\mathfrak{n}$ обозначим через $\mathfrak{M}_{\varphi,\mathfrak{n}}$.

Теорема 2.

$$\mathfrak{M}_\varphi = \overline{\bigoplus_{\mathfrak{n}\in C_0(\mathbb{N},\mathbb{Z})} \mathfrak{M}_{\varphi,\mathfrak{n}}}.$$

Литература

[1] Кузнецова А. Ю., Патрин Е. В. *Об одном классе C^*-алгебр, порожденных частичными изометриями и мультипликаторами* // Известия вузов. Матем. – 2012. – Т. 56. – № 6. – С. 44–55.

СУПЕРКЛОНЫ И АЛГЕБРЫ *N*-МЕСТНЫХ МУЛЬТИОПЕРАЦИЙ

Н. А. Перязев[1], И. К. Шаранхаев[2]

---

[1] *nikolai.baikal@gmail.com*, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет (ЛЭТИ)

[2] *goran5@mail.ru*, Бурятский государственный университет

Пусть A — множество, $n \geqslant 0$. Тогда n-местная операция это $f : A^n \to A$, а n-местная мультиоперация это $f : A^n \to 2^A$.

Обозначим через P_A^n, P_A — множества n-местных и всех операций, а через M_A^n, M_A — множества n-местных и всех мультиопераций. Операции можно рассматривать как частный случай мультиопераций. Мультиоперация f на множестве A называется пустой, полной, проектирования по i аргументу, если для любых $a_1, \ldots, a_n$ из A выполняется, соответственно, $f(a_1, ..., a_n) = \varnothing, f(a_1, ..., a_n) = A, f(a_1, ..., a_n) = \{a_i\}$.

Определим суперпозицию мультиопераций $f, f_1, ..., f_n$ так: $f * (f_1, ..., f_n)(a_1, ..., a_m) = \bigcup_{b_i \in f_i(a_1, ..., a_m)} f(b_1, ..., b_n)$;

разрешимость мультиоперации f по i аргументу так: $\mu_i f(a_1, ...a_n) = \{a \mid a_i \in f(a_1, ..., , a_{i-1}, a, a_{i+1}, ..., a_n)\}$;

пересечение мультиопераций так:
$(f \cap g)(a_1, ..., a_n) = f(a_1, ..., a_n) \cap g(a_1, ..., a_n)$.

Клоном над множеством A называется любое подмножество $K \subseteq P_A$, содержащее все операции проектирования и замкнутое относительно суперпозиций. Суперклоном над множеством A называется любое подмножество $R \subseteq M_A$, содержащее все мультиоперации пустые, полные, проектирования и замкнутое относительно суперпозиций и разрешимостей.

В [1] установлена совершенная связь Галуа между клонами и суперклонами.

Алгеброй n-местных операций над множеством A называется любое подмножество $K \subseteq P_A^n$, содержащее все n-местные операции проектирования и замкнутое относительно суперпозиций. Алгеброй n-местных мультиопераций над множеством A называется любое подмножество $R \subseteq M_A^n$, содержащее все n-местные мультиоперации проектирования, пустую, полную мультиоперации и замкнутое относительно суперпозиций, разрешимостей и пересечений. Введем обозначения:
$[S]$ — клон над A, порожденный множеством $S \subseteq P_A$ и
$[S]^n = [S] \cap P_A^n$; $[K]_n$ — алгебра n-местных операций над A, порожденная множеством $K \subseteq P_A^n$.
$\langle T \rangle$ — суперклон, порожденный множеством $T \subseteq M_A$ и $\langle T \rangle^n = \langle T \rangle \cap M_A^n$, где $T \subseteq M_A$; $\langle R \rangle_n$ — алгебра n-местных мультиопераций над A, порожденная множеством $R \subseteq M_A^n$.

Теорема. *Если $K \subseteq P_A^n$, $R \subseteq M_A^n$, то выполняются:*
а) $[K]^n = [K]_n$; *б) $\langle R \rangle^n = \langle R \rangle_n$.*

Следствие 1. *а) Решетка алгебр n-местных операций и решетка клонов, порождаемых n-местными операциями, совпадают. б) Решетка алгебр n-местных мультиопераций и решетка суперклонов, порождаемых n-местными мультиоперациями, совпадают.*

Следствие 2. *а) Решетка алгебр n-местных операций изоморфно вложима, как верхняя полурешетка, в решетку клонов. б) Решетка алгебр n-местных мультиопераций изоморфно вложима, как верхняя полурешетка, в решетку суперклонов.*

Литература

[1] Перязев Н. А., Шаранхаев И. К. *Теория Галуа для клонов и суперклонов* // Дискр. матем. – 2015. – Т. 27. – № 4. – С. 79–93.

НЕКОММУТАТИВНАЯ АЛГЕБРА И КРИПТОСИСТЕМА RSA

К. А. Петухова[1]

---

[1] *ksenypet@mail.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

В работах [1], [2] было предложено обобщение известной криптосистемы RSA, котором вместо натуральных чисел рассматривались идеалы коммутативных дедекиндовых колец. При этом требовалась лишь конечность факторколец по максимальным идеалам.

При дальнейшем анализе стало понятно, что при построении алгоритма, обобщающего RSA, можно отказаться от ряда первоначальных ограничений. В частности, вместо требования коммутативности кольца можно ограничиться условием коммутативности произведений иделалов. Назовем такие кольца CI-кольцами.

Пусть I — идеал CI-кольца R. Назовем его RSA-идеалом, если выполнены следующие условия. 1) Группа обратимых элементов R/I конечна. Ее порядок обозначим через $\varphi(I)$, это аналог функции Эйлера. 2) Существуют натуральные числа e, d, t, $1 < e, d < \varphi(I)$, такие, что $ed = 1 + \varphi(I)t$, и для каждого $r \in R$ выполняется соотношение $r^{ed} \equiv r \pmod I$.

Теорема. *Пусть R есть CI-кольцо. Идеал $I \subset R$ есть RSA-идеал тогда и только тогда, когда он является произведением различных максимальных идеалов.*

Следствие. *В определении RSA-идеала можно выбрать число e произвольным образом при условии НОД$(e, \varphi(I)) = 1$.*

Примерами CI-колец, для которых представляется правдоподобным построение эффективных аналогов криптосистемы RSA, являются некоторые некоммутативные кольца главных идеалов, в частности, некоторые кольца косых многочленов и кольцо кватернионов Гурвица.

Литература

[1] Петухова К. А. *Алгебраические основы криптосистемы RSA* // Труды Математического центра имени Н.И.Лобачевского: Материалы тринадцатой молодежной школы-конференции “Лобачевские чтения”. – Казань, 2015. – Т. 52. – С. 120–122.

[2] Petukhova K. A. Tronin S. N. *RSA cryptosystem for Dedekind rings* // Материалы конференции “Алгебра и математическая логика: теория и приложения” (г. Казань, 2–6 июня 2014 г.) и сопутствующей молодежной летней школы “Вычислимость и вычислимые структуры”. – Казань: Изд-во Казан.ун-та, 2014. – С. 148–149.

АЛГЕБРАИЧЕСКИ ПОЛНЫЕ АЛГЕБРЫ И ПСЕВДОПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

А. Г. Пинус[1]

---

[1] *ag.pinus@gmail.com*, Новосибирский государственный технический университет

Алгебру $\mathfrak{A} =< A;\sigma >$ назовем n-алгебраически полной, если для любого $B \subseteq A^n$ существует $m_B \in A^n$ такой, что $\overline{B}_{\mathfrak{A}} = \overline{\{m_B\}}_{\mathfrak{A}}$. Здесь $\overline{C}_{\mathfrak{A}}$ n-алгебраическое замыкание множества C в алгебре $\mathfrak{A}$ (наименьшее алгебраическое множество алгебры $\mathfrak{A}$ включающее в себя $C \subseteq A^n$). Алгебру $\mathfrak{A}' =< A';\sigma >$ назовем n-алгебраическим пополнением алгебры $\mathfrak{A}$, если $\mathfrak{A}'$ расширение $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ n-алгебраически полна и для любого $\overline{C}_{\mathfrak{A}'} \subseteq (A')^n$ $\overline{C}_{\mathfrak{A}'} = \overline{\{m_B\}}_{\mathfrak{A}'}$ для некоторого $B \subseteq A^n$. Оператор n-алгебраического замыкания на алгебре $\mathfrak{A}$ может быть описан в терминах идеалов Ihm-квазипорядка на n-алгебраических пополнениях алгебры.

Теорема 1. *Для любой универсальной алгебры не более чем счетной сигнатуры имеющей мощность $\aleph \geqslant 2^{\aleph_0}$ и любого натурального n существует n-алгебраическое пополнение этой алгебры мощности $\aleph$.*

Пусть $\mathfrak{K}$ некоторый класс n-порожденных алгебр сигнатуры σ обогащенных до сигнатуры σ' с помощью n констант порождающих эту алгебру. Под $\mathfrak{K}$-псевдопрямым произведением алгебр $\mathfrak{A}_i (i \in I)$ из $\mathfrak{K}$ будем понимать σ' — алгебру $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{K}$ такую, что существуют гомоморфизмы π_i алгебры $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}_i$ (для $i \in I$) и при этом для любой $\mathfrak{L} \in \mathfrak{K}$ и любых гомоморфизмов φ_i алгебры $\mathfrak{L}$ на $\mathfrak{A}_i$ (для $i \in I$) существует гомоморфизм ψ алгебры $\mathfrak{L}$ на $\mathfrak{A}$ такой, что $\pi_i\psi = \varphi_i$(для $i \in I$).

Через $Sub_{ng}\mathfrak{A}$ обозначим класс n-порожденных подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$ обогащенных до сигнатуры σ' своими порождающими.

Теорема 2. *Алгебра $\mathfrak{A}$ n-алгебраически полна тогда и только тогда, когда класс $Sub_{ng}\mathfrak{A}$ замкнут относительно $Sub_{ng}\mathfrak{A}$-псевдопрямых произведений.*

Работа выполнена при финансовой подддержке Министерства образования и науки РФ, гос. задание № 2014/138, проект 1052.

К ТЕОРИИ СИСТЕМ ПЯТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Р. Пиров[1], Ф. Ш. Рахимов

---

[1] *pirov_60@mail.ru*, Таджикский государственный педагогический университет им. С. Айни

В отличие от [1], где рассматривались системы дифференциальных уравнений (д.у.) первого порядка с одной, с двумя и более неизвестными функциями (на плоскости и в пространстве) [2-5], в настоящей работе изучаются системы пяти д.у. с двумя неизвестними функциями $U = U(x, y), V = V(x, y)$ с правыми частями, содержащими нелинейным образом одну из производных $U_{xx}, U_{xy}, U_{yy}, V_{xx}, V_{xy}, V_{yy}$:

$$U_{xx}, U_{xy}, U_{yy}, V_{xx}, V_{xy} = f^i(x, y; U, V, U_x, U_y, V_x, V_y, V_{xy}), i = \overline{1,5}, (x, y) \in R^2, \quad (1)$$

$$U_{xx}, U_{yy}, V_{xx}, V_{xy}, V_{yy} = f^i(x,y;U,V,U_x,U_y,V_x,V_y,V_{xy}), i=\overline{1,5}, (x,y)\in R^2. \qquad (2)$$

Неизвестные функции ищутся в классе $C^4(\Pi_0)$; здесь $\Pi_0 = \{(x,y) : |x-x_0| \leqslant a, |y-y_0| \leqslant a\}$ при некотором $a > 0$.

Основной метод исследования вышеуказанных систем состоит в замене производных первого и второго порядка на новые неизвестные функции (см., к примеру, [5]), переходе к системам с бо́льшим числом неизвестных и в установлении связи с достаточно хорошо изученными системами в полных дифференциалах (п.д.-системы).

1. Пусть дана система (1). Через $\Pi = \Pi(a;b)$ обозначим прямоугольник в пространстве R^9, заданный неравенствами: $|x-x_0| \leqslant a, |y-y_0| \leqslant a, |U-U_0| \leqslant b, |V-V_0| \leqslant b, |U_x - U_x^0| \leqslant b, |U_y - U_y^0| \leqslant b, |V_x - V_x^0| \leqslant b, |V_y - V_y^0| \leqslant b, |V_{yy} - V_{yy}^0| \leqslant b$. Здесь и всюду ниже индексом «ноль» будем снабжать значения функций в точке (x_0, y_0). Пусть $f^i = C^2(\Pi), i = \overline{1,5}$. В силу замен $U_x = p(x,y), U_y = q(x,y) V_x = \tau(x,y), V_y = \theta(x,y), U_{yy} = \theta_y = t(x,y)$ и очевидных тождеств $p_y = q_x, \tau_y = \theta_x$ система (1) примет вид:

$$\begin{cases} U_x = p(x,y), U_y = q(x,y), V_x = \tau(x,y), V_y = \theta(x,y), \\ p_x, p_y, q_y, \tau_x, \tau_y = f^i(x,y;u,v,p,q,\tau,\theta,t), i=\overline{1,5}. \\ q_x = f^2, \theta_x = f^5, \theta_y = t, \end{cases} \qquad (3)$$

Пополняем (3) за счет равенств смешанных производных (р.с.п.) $p_{xy} = p_{yx}, q_{xy} = q_{yx}, \tau_{xy} = \tau_{yx}$, è$\theta_{xy} = \theta_{yx}$, которые после несложных преобразованный, приводят к уравнениям

$$f_t^2 \cdot t_x - f_t^1 \cdot t_y = L_1, f_t^3 \cdot t_x - f_t^2 \cdot t_y = L_2, f_t^5 \cdot t_x - f_t^4 \cdot t_y = L_3, t_x - f_t^5 \cdot t_y = L_4,$$

где $L_i, i = \overline{1,4}$ явно выражаются через правые части (3) и их частные производные первого порядка.

Теорема 1. *Пусть* $f^i \in C^2(\Pi), f_t^1 \cdot f_t^3 - \left(f_t^2\right)^2 \neq 0$ *и выполняются условия*

$$f_t^5 \cdot f^6 - f_t^4 \cdot f^7 \equiv L_3, f^6 - f_t^4 \cdot f^7 \equiv L_4.$$

Тогда при тождественном выполнении условия

$$H(x,yu,v,p,q,\tau,\theta,t,) \equiv f_y^6 - f_x^7 + f_u^6 \cdot q - f_u \cdot p + f_v^6 \cdot \tau - f_v^7 \cdot \tau + f_p^6 \cdot f^2 - f_p^7 \cdot f^1 +$$

$$+ f_q^6 \cdot f^3 - f_q^7 \cdot f^2 + f_\tau^6 \cdot f^5 - f_\tau^7 \cdot f^4 + f_\theta^6 \cdot t - f_\theta^7 \cdot f^5 + f_t^6 \cdot f^7 - f_t^7 \cdot f^6 \equiv 0$$

и $\alpha < \min\left(a, \frac{b}{M}\right), M = \max|f^i|$, *на* $\Pi(\alpha, b)$ *задача (1) и* $[U]_0 = c_1, [V]_0 = c_2, [U_x]_0 = c_3, [U_y]_0 = c_4, [V_x]_0 = c_5, [V_y]_0 = c_6, [U_{yy}] = c_7$ *в классе* $C^4(\Pi_0)$ *разрешима единственым образом.*

2. Рассмотрим теперь нелинейную систему (2). Здесь, в отличие от (1), через $\Pi = \Pi(a,b)$ в R^9 обозначается прямоугольник заданный неравенствами $|x-x_0| \leqslant a, |y-y_0| \leqslant a, |U-U_0| \leqslant b, |V-V_0| \leqslant b, |U_x - U_x^0| \leqslant b, |U_y - U_y^0| \leqslant b, |V_x - V_x^0| \leqslant b, |V_y - V_y^0| \leqslant b, |U_{xy} - U_{xy}^0| \leqslant b$.

Теорема 2. *Пусть* $f^i \in C^2(\Pi)$ *и в некоторой окрестности точки* $\left(x_0, y_0, u_0, v_0, u_x^0, u_y^0, v_x^0, v_y^0, u_{xy}^0\right)$ *выполнено условие* $D_x f^7 \equiv D_y f^6$. *Пусть* $\alpha < \min\left(a, \frac{b}{M}\right), M =$

$\max|f^i|$. *Тогда на* $\Pi(\alpha, b)$ *задача (2) и* $[U]_0 = c_1, [V]_0 = c_2, [U_x]_0 = c_3, [U_y]_0 = c_4, [V_x]_0 = c_5, [V_y]_0 = c_6, [V_{\tilde{o}y}] = c_7$ *в классе* $C^4(\Pi_0)$ *разрешима единственным образом.*

Литература

[1] Goursat E. Lecons sur l'inteqration des equations aux derivees partielles du premier ordre. Paris. 1921, 454 p.

[2] Михайлов Л.Г. Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. Душанбе, Дониш, 1986, 116 с.

[3] Михайлов, Л. Г. Об условиях совместности и многообразиях решений некоторых переопределенных систем уравнений в частных производных с тремя неизвестными функциями. //Л.Г. Михайлов, Р.Пиров/ ДАН России, 2013, т. 451, № 3, С. 251-254

[4] Пиров, Р. Об одном способе исследования решения систем уравнений в частных производных возникающей в трехмерной теории поля. //Р.Пиров/ Вест. Воронеж. гос.-та, серия физика, математика, 2015,№ 4, С. 175-180.

[5] Пиров, Р. Об условиях совместности и многообразиях решений некоторых классов переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. //Р. Пиров/ Уфимский математический журнал (УМЖ), математика. 2016, с 69 -74.

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ И СОВПАДЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

Д. А. Подоприхин[1]

---

[1] *podoprikhindmitry@gmail.com*, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Результаты доклада получены совместно с Т. Н. Фоменко.

Пусть заданы метрические пространства $(X, \rho), (Y, g)$. Известно, что некоторые результаты о совпадении пары отображений $\psi, \varphi : X \to Y$ при некоторых условиях могут быть сведены к известной теореме Надлера о неподвижной точке многозначного отображения, путем построения композиции отображения φ и обратного к отображению ψ. Пример такой редукции представлен, например, в работе [1].

В докладе рассматривается вопрос об аналогичной редукции для отображений упорядоченных множеств. Будут представлены новые результаты о существовании неподвижных точек многозначного изотонного отображения. В частности, исследуется вопрос о наличии наименьшего элемента во множестве неподвижных точек такого отображения. Кроме теорем существования, будут также представлены результаты об итерационном поиске неподвижных точек.

В докладе будет продемонстрирована связь полученных теорем с недавними результатами работы [2] о совпадениях пары отображений упорядоченных множеств, одно из которых является изотонным, а другое – упорядоченно накрывающим.

Также будет рассмотрен вопрос существования общей неподвижной точки семейства коммутирующих отображений. Полученные результаты являются обобщением результатов [3, теорема 2.1], [3, теорема 2.3].

Литература

[1] Гельман Б. Д., Мусиенко В. К. *О теореме А.В. Арутюнова* // Актуальные проблемы математики и информатики. Воронеж. – 2010. – С. 81–91.

[2] Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E. *Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces* // Topology and its Applications. – 2015. – Т. 179. – С. 13–33.

[3] Smithson R. *Fixed points in partially ordered sets* // Pacific Journal of Mathematics. – 1973. – Т. 45. – С. 363–367.

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ КОНЦИРКУЛЯРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ВТОРОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

С. М. Покась[1], А. В. Крутоголова[2]

---

[1] *pokas@onu.edu.ua*, Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова, Институт математики, экономики и механики

[2] *01link01@rambler.ru*, Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова, Институт математики, экономики и механики

Для заданного риманова пространства $V_n(x;g)$ в окрестности его произвольной фиксированной точки M_0 строится инвариантно связанное с ним пространство второго приближения $\widetilde{V}_n^2(y;\widetilde{g})$ ([2],[3]):

$$\widetilde{g}_{ij}(y) = \underset{\circ}{g_{ij}} + \frac{1}{3}\underset{\circ}{R_{i\alpha\beta j}}\, y^{\alpha} y^{\beta}, \tag{1}$$

где $g_{ij_{\circ}} = g_{ij}(M_0)$, $\underset{\circ}{R_{i\alpha\beta j}} = R_{i\alpha\beta j}(M_0)$.

В пространстве $\widetilde{V}_n^2$ исследуются инфинитезимальные конциркулярные преобразования ([4])

$$y'^{h} = y^{h} + \widetilde{\xi}^{h}(y)\delta t \tag{2}$$

Исследуя первую группу уравнений систесы ([1])

$$\begin{gathered} L_{\widetilde{\xi}}\widetilde{g}_{ij} = \psi\widetilde{g}_{ij} \\ \psi_{,ij} = \phi\widetilde{g}_{ij}, \end{gathered} \tag{3}$$

получаем вектор смещения $\widetilde{\xi}^h(y)$ этих преобразований в виде равномерно сходящегося степенного ряда

$$\begin{aligned}
\widetilde{\xi}^h(y) = {}& \underset{\cdot}{a}^h + a^h_{.l} y^l + a^\alpha t^h_\alpha + \frac{1}{2}\left(\underset{1}{b} y^h - \frac{1}{2} A b^h\right) + \\
&+ \sum_{p=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{p+1}}{2p-1} a^\alpha t^{(p)}{}^h_\alpha + \frac{1}{2p}\left(\underset{2p-1}{b} y^h - \frac{1}{2} A \underset{2p-2}{b^h}\right) + \right. \\
&\left. + \frac{(-1)^p}{4(2p-1)} A \sum_{s=1}^{p-1} \frac{2p-2s-1}{p-s} \underset{2p-2s-2}{b^\alpha} t^{(s)}{}^h_\alpha\right] + \frac{1}{3}\left(\underset{2}{b} y^h - \frac{1}{2} A \underset{1}{b^h}\right) + \\
&+ \frac{1}{12} A \underset{1}{b^\alpha} t^h_\alpha + \frac{1}{5}\left(\underset{4}{b} y^h - \frac{1}{2} A \underset{3}{b^h}\right) + \\
&+ \sum_{p=3}^{\infty}\left\{\frac{1}{2p+1}\left(\underset{2p}{b} y^h - \frac{1}{2} A \underset{2p-1}{b^h}\right) + \frac{A}{2p}\left[\frac{p+1}{2p+1} \underset{2p-3}{b^\alpha} t^h_\alpha + \right.\right. \\
&\left.\left. + \sum_{s=2}^{p-1} \frac{(-1)^{s+1}(p-s)}{2p-2s+1} \underset{2p-2s+1}{b^\alpha} t^{(s)}{}^h_\alpha\right]\right\}, \qquad (4)
\end{aligned}$$

где $A = \underset{\circ}{g}_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2}$, $t^h_p = \frac{1}{3} \underset{\circ}{R}{}^h_{.l_1 l_2 p} y^{l_1} y^{l_2}$, $t^{(p)}{}^h_s = t^{(p-1)}{}^h_\alpha t^\alpha_s \quad (p = 2, 3, \ldots)$.

Исследуя вторую группу уравнений системы (3), получено выражение функции $\psi(y)$ через функцию $\phi(y)$ и объекты пространства V_n в точке M_0.

Литература

[1] Аминова А. В., *Проективные преобразования псевдоримановых многообразий.* – М.: Янус-К, 2003.

[2] Петров А. З. *Новые методы в общей теории относительности.* – М.: Наука, 1966.

[3] Широков П. А. *Избранные работы по геометрии.* – Казань, 1966.

[4] Yano K. *Concircular geometry.* – Japan: Proc. Acad., 1940. –С. 195-200, 354-360, 442-448, 505-511.

О КОРРЕКТНОСТИ И НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВХОДНЫХ ДАННЫХ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

А. Н. Поляков[1], М. А. Степович[2], Д. В. Туртин[3]

---

[1] *andrei–polyakov@mail.ru*, Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского

[2] *m.stepovich@rambler.ru*, Ивановский филиал РЭУ им. Г. В. Плеханова

[3] *turtin@mail.ru*, Ивановский филиал РЭУ им. Г. В. Плеханова

Ранее [1] были рассмотрены некоторые аспекты математического моделирования процессов взаимодействия широких электронных пучков с однородными полупроводниками с целью идентификации электрофизических параметров мишеней по спектрам катодолюминесценции. В настоящей работе продолжено исследование качественных свойств этой двумерной математической модели диффузии экситонов, возбуждаемых электронным зондом низкой (единицы килоэлектронвольт) энергии в нитриде галлия, а именно:

$$\partial c/\partial t = D\Delta c - c/\tau$$

при начальном условии

$$c(x, y, 0) = n(x, y).$$

Здесь $c(x, y, t)$ — концентрация экситонов в точке с координатами (x, y) в момент времени t, D — коэффициент диффузии экситонов, τ — время их жизни, а функция $n(x, y)$ удовлетворяет стационарному дифференциальному уравнению, описывающему диффузию экситонов в состоянии квазиравновесия:

$$\Delta n - n/\lambda^2 = -\Phi(x, y),$$

где $\lambda = \sqrt{D\tau}$ — диффузионная длина свободных экситонов, а $\Phi(x, y)$ — функция источника генерации экситонов, заданная двухмерным распределением Гаусса.

Применение качественных методов теории дифференциальных уравнений к изучаемой математической модели позволяет сделать вывод о том, что для этой модели решение единственно и оно непрерывно зависит от начальных данных. Данный вывод говорит о несущественном влиянии погрешности входных данных на результаты проведенного эксперимента [2], что позволяет использовать рассмотренную модель для идентификации электрофизических параметров полупроводника: коэффициента диффузии и подвижности экситонов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минобрнауки РФ (базовая часть государственного задания, задание № 340/2015, проект № 1416), РФФИ (проекты № 15–31–50648 и № 16–03–00515), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 14–42–03062).

Литература

[1] Поляков А.Н., Noltemeyer M., Hempel T., Christen J., Степович М.А. *Двумерная диффузия и катодолюминесценция экситонов, генерированных электронным пучком в полупроводниковом материале: результаты математического моделирования* // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2011. — № 11. — С. 35–40.

[2] Поляков А.Н., Noltemeyer M., Hempel T., Christen J., Степович М.А. *Катодолюминесцентные экспериментальные исследования транспорта экситонов в нитриде галлия* // Известия РАН. Серия физическая. — 2012. — Т. 76. — № 9. — С. 1082–1085.

О ЗАМКНУТОСТИ ПОДГРУППЫ В ГРУППЕ ЛИ, ПОРОЖДЕННОЙ ВЕКТОРНЫМИ ПОЛЯМИ КИЛЛИНГА

В. А. Попов[1]

---

[1] *vlapopov@gmail.com*, Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, Россия

Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}$ всех векторных полей Киллинга на римановом аналитическом многообразии M и её стационарную подалгебру $\mathfrak{h}$. Для фиксированной точки $p \in M$ $X \in \mathfrak{h} \iff X(p) = 0$. Алгебра $\mathfrak{g}$ порождает локальную группу локальных изометрий на M, однако, аналитическое продолжение этих изометрий до изометрий какого-нибудь риманова аналитического многообразия локально изометричного M возможно не всегда. Принципиальным препятствием служит возможная незамкнутость подгруппы Ли H, порождённой подалгеброй $\mathfrak{h}$, в односвязной группе Ли G, порожденной алгеброй $\mathfrak{g}$. Укажем свойства алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$, выполнение которых необходимо в случае незамкнутости H в G.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли всех векторных полей Киллинга на римановом вещественно аналитическом многообразии M, $\mathfrak{h}$ — её стационарная подалгебра в некоторой точке $p \in M$, G — группа, порожденная алгеброй $\mathfrak{g}$ и H — подгруппа, порождённая подалгеброй $\mathfrak{h}$. Если H не замкнута в G, то алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ обладают следующими свойствами.*

1. $\mathfrak{g}$ имеет ненулевой центр $\mathfrak{z}$.

2. $dim(\mathfrak{h} \cap (\mathfrak{z} + [\mathfrak{g};\mathfrak{g}])) > dim(\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{g};\mathfrak{g}])$, где $\mathfrak{z} + [\mathfrak{g};\mathfrak{g}]$ — подалгебра, порождённая центром $\mathfrak{z}$ и коммутантом $[\mathfrak{g};\mathfrak{g}]$.

Приведём идею доказательства теоремы. Рассмотрим замыкание $\overline{H}$ группы H в G и подалгебру Ли $\overline{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{g}$ подгруппы $\overline{H} \subset G$. Подалгебра $\mathfrak{h}$ является нормальной подалгеброй алгебры $\overline{\mathfrak{h}}$, [1]. Рассмотрим однопараметрическую подгруппу $\overline{h}_t \in \overline{H}$, $\overline{h}_t \notin H$. Тогда внутренний автоморфизм $x \mapsto \overline{h}_t x h_t^{-1}$, $x \in G$, являются пределом последовательности внутренних автоморфизмов $x \mapsto h_n x \overline{h}_n^{-1}$, $h_n \in H$. Так как внутренние автоморфизмы $x \mapsto h_n x h_n^{-1}$ определяют изометрии $x \mapsto h_n x$ шара $B \subset M$, то внутренний автоморфизм определяет изометрию $x \mapsto \overline{h}_t x \overline{h}_t^{-1}$ шара B. Тогда для всех достаточно малых t определена локальная изометрия $x \mapsto \overline{h}_t x$ и, следовательно, локальная изометрия $x \mapsto x\overline{h}_t$. Таким образом, умножения справа на элементы локальной однопараметрической группы $\overline{h}_t$ порождает векторное поле Киллинга, коммутирующее со всеми элементами алгебры $\mathfrak{g}$.

Как было показано выше, группа G содержит однопараметрическую подгруппу z_t умножений справа на $\overline{h}_t \in G \subset AutG$. Как показано выше $z_t \in \overline{H}$. Известно, что $\overline{h}_t$ принадлежит компактной подгруппе группы G и, следовательно $\overline{h}_t \in (G;G)$, [1]. Тогда $z_t \notin (G;G)$ (автоморфизм, порождённый умножением справа не может быть равным автоморфизму, порождённому умножением слева), и $\overline{h}_t z_t^{-1} \notin (G;G)$. Но локальная изометрия группа $\overline{h}_t z_t^{-1}$ порождена внутренним автоморфизмом $x \mapsto \overline{h}_t x \overline{h}_t^{-1}$ и, поэтому $\overline{h}_t z_t^{-1} \in H$. Следовательно, векторное поле Киллинга, порождённое локальной группой изометрий $\overline{h}_t z_t^{-1}$ принадлежит $\mathfrak{z} + [\mathfrak{g};\mathfrak{g}]$, но не принадлежит $[\mathfrak{g};\mathfrak{g}]$.

Литература

[1] Мальцев А. И. *On the theory of Lie groups in the large* // Матем. сб., 1945. – Т. 16(38). – С. 163–190.

[2] Попов В. А. *Продолжаемость локальных групп изометрий* // Матем. сб. 1988. – Т.135 (177), №1. – С. 45–64.

ПРИЛОЖЕНИЕ КОМБИНАТОРНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МЕТОДА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ АДАМАРА К ОДНОЙ ИЗ КОМБИНАТОРНО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАДАЧ

Е. А. Потехина[1]

---

[1] *peajk7@mail.ru*, Череповецкий государственный университет

Произведением Адамара формальных степенных рядов $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty} g_k x^k$ и $H(x)=\sum_{k=0}^{\infty} h_k x^k$ называется степенной ряд $G(x)*H(x)=\sum_{k=0}^{\infty} g_k h_k x^k$.

Рассмотрим задачу замощения бесконечной полосы ширины k плитками размеров 1×1, 1×2, $1\times 3,\ldots$, имеющими соответственно вероятности выпадения для первого ряда — q_{11}, q_{12}, $q_{13},\ldots$, и т. д., для k-го ряда — q_{k1}, q_{k2}, $q_{k3},\ldots$, соответственно. Укладка плиток начинается с первого ряда. Каждая новая плитка укладывается в ряд, имеющий наименьшую длину. Если несколько рядов плиток имеют одинаковую длину и она является наименьшей, то укладка выполняется в ряд с наименьшим номером.

Пусть $\left(X_{1j}\right)_{j=1}^{\infty},\ldots,\left(X_{kj}\right)_{j=1}^{\infty}$ — не зависящие друг от друга последовательности независимых одинаково распределённых случайных величин, принимающих неотрицательные целые значения, $g_i(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{P}\left(X_{ij}=j\right)x^j=\sum_{j=0}^{\infty} q_{ij}x^j$, $i=1,\ldots,k$, причем q_{ij} — вероятность того, что плитка i-го ряда будет иметь длину j. Рассмотрим производящую функцию $G_k(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} p_{k,n,m}x^n t^m$, где $p_{k,n,m}$ — вероятность того, что в случайном процессе на каком-то шаге появится прямоугольник размера $k\times n$, состоящий из m плиток. В [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Справедливо равенство:*

$$G_k(x,t)=\left(1-g_1(x)\,t\right)^{-1}*\ldots*\left(1-g_k(x)\,t\right)^{-1}.$$

Если случайные величины в рассмотренной выше задаче имеют равномерное распределение, то для вычисления произведений Адамара может быть применена теорема 2.

Теорема 2. *Для любых целых m, k ($m\geqslant 2$, $k<m$) справедлива следующая формула:*

$$\left(1-d_1x-d_2x^2-d_3x^3\right)^{-1}*x^k/\left(1-b_1x-b_mx^m\right)=P(x)/Q(x),$$

$$
\begin{aligned}
P(x) = {} & f_k x^k + b_1 \left(d_2 f_{k-1} + d_3 f_{k-2}\right) x^{k+1} + b_1^2 d_3 f_{k-1} x^{k+2} + \\
& + b_m \left(\left(d_2 f_{k-1} + d_3 f_{k-2}\right) f_{m-1} + \left(d_3 f_{k-1} - d_2 f_k\right) f_{m-2}\right) x^{m+k} - \\
& - 2 b_m d_3 f_k f_{m-3} x^{m+k} + b_1 b_m d_3^2 \left(f_{k-1} f_{m-4} + f_{k-2} f_{m-3}\right) x^{m+k+1} + \\
& + b_1 b_m d_3 \left(f_{k-1} f_{m-1} - f_k f_{m-2}\right) x^{m+k+1} + \\
& + b_m^2 d_3^2 \left(f_{k-2} f_{m-2}^2 - f_{k-2} f_{m-3} f_{m-1} - f_{k-1} f_{m-3} f_{m-2}\right) x^{2m+k} + \\
& + b_m^2 d_3^2 \left(f_{k-1} f_{m-4} f_{m-1} - f_k f_{m-4} f_{m-2} + f_k f_{m-3}^2\right) x^{2m+k}, \\
Q(x) = {} & 1 - b_1 d_1 x - b_1^2 d_2 x^2 - b_1^3 d_3 x^3 - b_m \left(f_m + d_2 f_{m-2} + 2 d_3 f_{m-3}\right) \times \\
& \times x^m + b_1 b_m \left(d_1 d_2 f_{m-2} + 2 d_1 d_3 f_{m-3} - 2 d_2 f_{m-1} - 3 d_3 f_{m-2}\right) x^{m+1} + \\
& + \left(d_2 f_{m-2} f_m + 2 d_3 f_{m-3} f_m + d_3^2 f_{m-3}^2 - d_2 f_{m-1}^2 - 2 d_3 f_{m-2} f_{m-1}\right) \times \\
& \times b_m^2 x^{2m} + b_1 b_m^2 \left(f_{m-2} f_m - f_{m-1}^2 + 2 d_3 \left(f_{m-3} f_{m-2} - f_{m-4} f_{m-1}\right)\right) \times \\
& \times d_3 x^{2m+1} + b_1 b_m^2 d_1 d_3 \left(f_{m-4} f_{m-2} - f_{m-3}^2\right) x^{2m+1} + b_m^3 d_3^m x^{3m},
\end{aligned}
$$

$f_m = d_1 f_{m-1} + d_2 f_{m-2} + d_3 f_{m-3}$ *при* $m > 0$, $f_m = 1$ *при* $m = 0$, $f_m = 0$ *при* $m < 0$.

Литература

[1] Потехина Е. А. *Приложение произведения Адамара к некоторым комбинаторным и вероятностным задачам* // Дискретная математика. – 2016. – Т. 28. – № 1. – С. 101–112.

О РАДИУСАХ РОБЕНА НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е. Г. Прилепкина[1]

Задачи об экстремальном разбиении восходят к известной теореме М.А. Лаврентьева о произведении внутренних радиусов плоских неналегающих областей, имеют богатую историю и тесно связаны с различными экстремальными вопросами геометрической теории функций. В [1] введено понятие радиуса Робена плоской области, которое является обобщением понятия внутреннего (конформного) радиуса. Отметим, что величина, обратная радиусу Робена в бесконечно удаленной точке, называется емкостью Робена и имеет многочисленные применения. В частности, в [2] аппарат емкостей Робена с успехом применяется к исследованию обобщенной задачи М.А. Лаврентьева о нахождении формы дужки заданной длины максимальной подъемной силы при ограничении на ее кривизну. В настоящем докладе мы рассматриваем неравенства для радиусов Робена неналегающих пространственных областей.

---

[1] *pril-elena@yandex.ru*, Дальневосточный федеральный университет, Институт прикладной математики ДВО РАН

Пусть $\mathbb{R}^n$ обозначает n-мерное евклидово пространство точек $z = (z_1, \dots, z_n)$, $n \geqslant 3$, D ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и γ непустое замкнутое подмножество ∂D. Пару (D, γ) назовем допустимой, если существует функция Робена $g_\gamma(z, z_0, D)$, то есть функция, гармоническая $D \setminus \{z_0\}$, непрерывная в $\overline{D} \setminus \{z_0\}$, удовлетворяющая граничным условиям $\frac{\partial g_\gamma}{\partial n} = 0$ на $(\partial D) \setminus \gamma$, $g_\gamma = 0$ на γ, и имеющая в окрестности z_0 следующее разложение

$$g_\gamma(z, z_0, D) = \lambda_n \left(|z - z_0|^{2-n} - r(D, \gamma, z_0)^{2-n} + o(1) \right), \ z \to z_0.$$

Здесь $\lambda_n = \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(n-2)}$, $\frac{\partial}{\partial n}$ производная по внутренней нормали и $r(D, z_0, \gamma)$ некоторая константа, которую мы назовем радиусом Робена в точке z_0 области D и множества γ. В случае $\gamma = \emptyset$ мы также рассматриваем функцию $g_\emptyset(z, z_0, D)$, заменяя требования на границе ∂D условием $\frac{\partial g_\gamma}{\partial n} = \frac{1}{\mu_{n-1}(\partial D)}$, где $\mu_{n-1}(\partial D)$ означает $(n-1)$-мерную меру Хаусдорффа. В качестве примера приведем следующий результат.

Теорема. *Пусть D_1 и D_2 неналегающие области, лежащие в единичном шаре U, $a_k \in D_k$, $(\partial D_k) \cap U \subset \gamma_k \subset \partial D_k$, $k = 1, 2$. Тогда*

$$r(D_1, \gamma_1, a_1)^{2-n} + r(D_2, \gamma_2, a_2)^{2-n} \geqslant \\ r(U, \emptyset, a_1)^{2-n} + r(U, \emptyset, a_2)^{2-n} + 2 g_\emptyset(a_1, a_2, U)/\lambda_n$$

В частности, для $n = 3$ приведенное в теореме неравенство имеет вид

$$r(D_1, \gamma_1, a_1)^{-1} + r(D_2, \gamma_2, a_2)^{-1} \geqslant \frac{2}{|a_1 - a_2|} + \frac{2|a_2|}{|a_1|a_2|^2 - a_2|} \\ - 2\log\left(1 - (a_1, a_2) - \frac{\left|a_1|a_2|^2 - a_2\right|}{|a_2|}\right) - \frac{1}{1 - |a_1|^2} - \frac{1}{1 - |a_2|^2} \\ + \log(4(1 - |a_1|^2)(1 - |a_2|^2)),$$

где (a_1, a_2)– скалярное произведение.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 14-11-00022).

Литература

[1] Дубинин В.Н., Кириллова Д.А. *К задачам об экстремальном разбиении* // Зап. науч. семин. ПОМИ. – 2008. – Т. 357. – С. 54–74.

[2] Насыров С. Р. *Вариация емкостей Робена и их приложения* // Сиб. матем. журн. – 2008. – Т. 49. – № 5. – С. 1128–1146.

О РАЗРЕШИМЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

С. В. Путилов[1]

---

[1] *algebra.bgu@yandex.ru*, Брянский государственный университет имени академика И. Г. Петровского

Теорема 1. *Если в конечной группе индекс любой ненильпотентной ненормальной максимальной подгруппы равен простому числу или квадрату простого числа, то группа разрешима.*

Теорема 2. *В конечной группе индекс любой ненильпотентной ненормальной максимальной подгруппы равен простому числу тогда и только тогда, когда группа сверхразрешима.*

Теоремы 1–2 усиливают соответственно известные теоремы М. Холла [1, VI. 9.4] и Б. Хупперта [1, VI. 9.5].

Литература

[1] Huppert B. *Endliche Gruppen. I.* – Berlin; Heidelberg; New York : Springer–Verl., 1967.

ИЗОТОПЫ АЛЬТЕРНАТИВНОГО МОНСТРА И АЛГЕБРЫ СКОСЫРСКОГО

С. В. Пчелинцев[1]

---

[1] *pchelinzev@mail.ru*, Финансовый университет при Правительстве РФ

Первичная алгебра, содержащая ненулевые абсолютные делители нуля, называется *исключительной*. К настоящему времени известно довольно много примеров исключительных алгебр. Алгебра, построенная в [1], называется *монстром* и обозначается $S[X]$; она относительно свободна над X, коммутативна и удовлетворяет тождеству $x^3 = 0$. В [2] построена коммутативная алгебра $J_0(G, D)$, в [3] указаны некоммутативные алгебры $B_0\left(G, D, \gamma\right)$, $\gamma \in G_0$, где G — алгебра Грассмана с 1.

При изучении тождеств исключительных алгебр важную роль играют изотопы и деформации. Изотоп $S^{(c)} = \langle S; +, \cdot_c\rangle$ алгебры S — это пространство S, на котором задано новое умножение $x \cdot_c y = (xc)\, y$; при этом считается, что c обратим в S или в алгебре $\Phi 1 + S$.

Основные результаты относятся к изотопам исключительных коммутативных алгебр $S[X]$ и $J_0(\Gamma, D)$, где Γ – ассоциативная алгебра Грассмана (без единицы), а D — её четное дифференцирование. Доказано, что изотопы алгебр $S[X]$ и $J_0(\Gamma, D)$ удовлетворяют тождеству $\prod_{i=1}^{4}\left[x_i, y_i\right] = 0$. Следовательно, в них верно тождество $\Pi_4 = 0$, где $\Pi_n = \prod_{i=1}^{n}\left(c, x_i, y_i\right)$. Показано также, что $\Pi_3 \neq 0$ в этих алгебрах.

В работе [4] А. Н. Гришков и И. П. Шестаков построили подалгебры C_n в алгебрах вида $J_0(\Gamma, D)$ и высказали гипотезу: *алгебра C_n при $n \geqslant 3$ является свободной коммутативной альтернативной ниль-алгеброй индекса* 3.

Показано, что ни одно из тождеств $\Pi_n = 0$ не является следствием тождеств

$[x, y] = x^3 = 0$. Поскольку алгебра $J_0(\Gamma, D)$ удовлетворяет тождеству $\Pi_4 = 0$, то гипотеза Гришкова–Шестакова не имеет места при $n \geqslant 9$.

Литература

[1] Пчелинцев С. В. *О нильпотентных элементах и ниль–радикалах альтернативных алгебр* // Алгебра и логика. – 1985. – Т. 24. – № 6. – С. 674–695.

[2] Скосырский В. Г. *Первичные йордановы алгебры и конструкция Кантора* // Алгебра и логика. – 1994. – Т. 33. – № 3. – С. 301–316.

[3] Шестаков И. П. *Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики* // Алгебра и логика. – 1997. – Т. 36. – № 6. – С. 675–716.

[4] Grishkov A. N., Shestakov I. P. *Commutative Moufang loops and alternative algebras* // J. Algebra. – 2011. – V. 333. – № 1. – P. 1–13.

ПРОСТЫЕ КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРАВОАЛЬТЕРНАТИВНЫЕ УНИТАЛЬНЫЕ СУПЕРАЛГЕБРЫ С СИЛЬНО АССОЦИАТИВНОЙ ЧЕТНОЙ ЧАСТЬЮ

С. В. Пчелинцев[1], О. В. Шашков[2]

---

[1] *pchelinzev@mail.ru*, Финансовый университет при Правительстве РФ
[2] *o.v.shashkov@yandex.ru*, Финансовый университет при Правительстве РФ

Простые конечномерные ассоциативные супералгебры описаны Уоллом [1].

Мы изучаем только унитальные супералгебры, т.е. супералгебры с единицей. Отметим, что унитальный случай принципиально отличается от общего. Так, в [2] указан пример 5-мерной простой правоальтернативной супералгебры $B_{2|3}$, чётная часть которой — двумерная алгебра с нулевым умножением, а нечетная часть является неприводимым бимодулем над чётной частью. Алгебра называется *унитарной*, если она получена внешним присоединением единицы к ниль-алгебре.

Теорема 1. *Пусть $B = A + M$ — простая конечномерная правоальтернативная супералгебра над полем Φ характеристики* 0. *Если чётная часть A унитарна и её единица является единицей в супералгебре B, то супералгебра B ассоциативна и, значит, является удвоением основного поля, т. е. совпадает с супералгеброй $\Phi\left[\sqrt{1}\right]$.*

Подалгебра *A сильно ассоциативна* в B, если $(B, A, A) = (A, B, A) = (A, A, B) = 0$.

Простые конечномерные правоальтернативные унитальные супералгебры с сильно ассоциативной чётной частью ранее изучались авторами в [3] и [4]. Так, в [3] классифицированы конечномерные супералгебры абелева типа; в [4] описаны бесконечномерные супералгебры абелева типа, четная часть которых является полем.

Теорема 2. *Пусть $B = A + M$ — простая конечномерная правоальтернативная унитальная супералгебра над полем Φ характеристики* 0. *Если четная часть A сильно ассоциативна в B, то A полупроста.*

Теорема 3. *Простая конечномерная правоальтернативная унитальная супералгебра с полупростой сильно ассоциативной чётной частью над алгебраически замкнутым полем характеристики $p \neq 2$ изоморфна одной из следующих супералгебр*:

$$M_n\left[\sqrt{1}\right], \quad M_{m|n}, \quad B_{1|2}\left(p=3\right), \quad B_{2|2}(\nu), \quad B_{n|n}.$$

Литература

[1] Wall C. T. C. *Graded Brauer groups* // J. Reine Angew. Math. – 1964. – V. 213. – P. 187–199.

[2] Silva J. P., Murakami L. S. I., Shestakov I. P. *On right alternative syperalgebras* // Comm. in Algebra – 2016. – V. 44. – № 1. – P. 240-252.

[3] Пчелинцев С. В., Шашков О. В. *Простые конечномерные правоальтернативные супералгебры абелева типа характеристики нуль* // Изв. РАН. Сер. матем. – 2015. – Т. 79. – № 3. – С. 131–158.

[4] Пчелинцев С. В., Шашков О. В. *Простые правоальтернативные супералгебры абелева типа, чётная часть которых поле* // Изв. РАН. Сер. матем. в печати.

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ФОРМАЦИЙ УНАРОВ КАК КАТЕГОРИЙ

А. Л. Расстригин[1]

---

[1] *rasal@fizmat.vspu.ru*, Волгоградский государственный социально-педагогический университет

Класс алгебраических систем называется *формацией* [1], если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

Алгебру с одной единственной унарной операцией называют *унаром*. В настоящей работе рассматривается класс не более чем счетных унаров с конечным числом циклов. Унар называется *унаром с конечным числом циклов*, если он содержит в качестве подалгебр лишь конечное число попарно неизоморфных циклов, т. е. таких подалгебр, которые порождаются любым своим элементом.

Для произвольной формации унаров $\mathfrak{F}$ через $\mathrm{Alg}\,\mathfrak{F}$ далее обозначается категория, объектами которой являются все алгебры из $\mathfrak{F}$, а морфизмами — все гомоморфизмы между алгебрами из $\mathfrak{F}$. Показав, что если две формации эквивалентны в смысле категорий, то их порождающие классы совпадают, мы докажем следующее утверждение:

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — произвольные непустые формации не более чем счетных унаров с конечным числом циклов. Тогда $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ совпадают в том и только том случае, когда категории $\mathrm{Alg}\,\mathfrak{F}_1$ и $\mathrm{Alg}\,\mathfrak{F}_2$ эквивалентны.*

Литература

[1] Шеметков Л. А., Скиба А. Н. *Формации алгебраических систем.* – М.: Наука, 1989. – 256 с.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМА ТИПА КОШИ–РИМАНА С ОСОБЕННОСТЯМИ РАЗНОГО ПОРЯДКА В КОЭФФИЦИЕНТАХ

А. Б. Расулов[1]

---

[1] *rasulov_abdu@rambler.ru*, НИУ МЭИ, кафедра высшей математики

Пусть область G содержит точку $z = 0$ и окружность $L = \{z : |z| = R\}$ и ограничена простым ляпуновским контуром ∂G, ориентированным против часовой стрелки. Удобно положить $G_0 = G \setminus \{0 \bigcup L\}$ и $G_\varepsilon = G \setminus \{g_{0\varepsilon} \bigcup g_{1\varepsilon}\}$ с малым $\varepsilon > 0$, где $g_{0\varepsilon} = \{z : |z| < \varepsilon\}$ и $g_{1\varepsilon} = \{z : R - \varepsilon < |z| < R + \varepsilon\}$. В области G_0 рассмотрим уравнение

$$u_{\bar z} - z(|z||R - |z||^n)^{-1} a(z) u + |z|^{-m} b(z) \overline{u} = f(z), \tag{1}$$

где $2\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial_y,\ a, b \in C(\overline{G}),\ f \in L^p(G),\ n > 1, 0 < m < 1$ и $p > 2$. Через T и T_ε соответственно обозначим оператор Векуа [1] по областям G и G_ε.

Лемма 1. *В предположении* $A_0(z) = z(a(z) - a(R))(|z||R - |z||^n)^{-1} \in L^p(G)$ *сингулярный интеграл* $\Omega(z) = \lim_{\varepsilon \to 0}(T_\varepsilon A)(z), \quad z \neq L$, *существует и определяет функцию, которая представима в виде* $\Omega(z) = a(R)\omega(z) + h(z)$, *где* $h(z) \in H(\overline{G})$ *определяется равенством*

$$h(z) = (TA_0)(z) + \frac{1}{\pi i}\frac{a(R)}{(n-1)}\int_{\partial G}\frac{1}{|R-\rho|^{n-1}}\frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

На основы этой леммы построена общего решения уравнения

$$u_{\bar z} - Au = f, \tag{2}$$

где для краткости положено $A(z) = z(|z||R - |z||^n)^{-1} a(z),\ a(z) \in C(\overline{G})$. В данном случае коэффицент A ограничен в начале координат и имеет сильную неподвижную особенность на окружности L.

В случае, когда коэффициенты $a(z) \neq 0, b(z) \neq 0$ для любого $z \in \overline{G}$, используя общего решения уравнения (2) приходим к интегральному уравнению $V + T(B\overline{V}) = \phi + F$, где $V = e^{-\Omega}u,\ B = |z|^{-m} b(z) e^{-2i \mathrm{Im}\Omega},\ F = T(e^{-\Omega} f)$, значение Ω указано в лемме 1.

В случае отсутствия сингулярности коэффициентов подобное уравнение возникало у И.Н. Векуа [1]; для его обращения он предложил метод последовательных приближений. Однако этот метод применим лишь в предположении, что коэффициент b по модулю достаточно мал. В общем случае необходимо построить в явном виде резольвенту этого уравнения, что и является предметом рассмотрения в настоящей работы.

С этой целью предварительно изучим действие в $L^p(G)$ более общего интегрального оператора вида

$$(K\varphi)(z) = \int_G \frac{\varphi(\zeta) d_2\zeta}{|\zeta|^{\alpha_0}|\zeta - z|^{\alpha_1}}, \quad z \in G,$$

с положительными α_j.

Лемма 2. *Пусть* $0 < \alpha_0 < 1 \leqslant \alpha_1 < 2, \quad \alpha_0 + 2\alpha_1 < 3, \quad p > 2/(3-\alpha_0-2\alpha_1)$, *так что* $0 < \mu_0 = 3 - \alpha_0 - 2\alpha_1 - 2/p < 1$. *Тогда оператор* $K\colon L^p(G) \to C^\mu(\overline{G})$ *ограничен.*

На основе этой леммы построена резольвента интегрального уравнения и найдено интегральное представление общего решения.

Литература

[1] Векуа И. Н. *Обобщенные аналитические функции.* — М. : Физматгиз, 1959.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В КЛАССАХ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К. М. Расулов[1]

---

[1] *kahrimanr@yandex.ru*, Смоленский государственный университет

Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная кусочно-гладким замкнутым контуром L.

Напомним [1], что *квазигармоническими функциями рода n в области* T^+ называются регулярные в этой области решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial \overline{z}} + \frac{n(n+1)}{(1+z\overline{z})^2} W = 0,$$

где $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right), \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, а n — некоторое фиксированное натуральное число.

Известно [1], что всякую квазигармоническую функцию рода n в области T^+ можно представить в виде

$$W(z) = \sum_{k=0}^{n} A_k^n \left(\frac{\overline{z}}{1+z\overline{z}}\right)^{n-k} \frac{d^k \varphi^+(z)}{dz^k}, \tag{1}$$

где $A_k^n = (-1)^{n-k}\dfrac{(2n-k)!}{k!(n-k)!}$, а $\varphi^+(z)$ — аналитическая в области T^+ функция, называемая *аналитической компонентой* квазигармонической функции $W(z)$.

Определение. *Будем говорить, что квазигармоническая функция* $W(z)$ *принадлежит классу* $C^m(T^+ + L)$, *если в представлении (1) аналитическая компонента* $\varphi^+(z)$ *непрерывно (в смысле Гельдера) продолжается на контур L вместе со своими производными до порядка m включительно, т.е.* $\varphi^+(z) \in A(T^+) \cap H^{(m)}(L)$ *(здесь m — некоторое фиксированное неотрицательное целое число).*

Рассматривается следующая краевая задача.

Задача $\mathbf{D}_n$. *Требуется найти все квазигармонические функции рода n* $(n \geqslant 1)$, *принадлежащие классу* $C^n(T^+ + L)$ *и удовлетворяющие на L условию*

$$W(t) = g(t),$$

где $g(t)$ — заданная на контуре L функция класса $H(L)$ (т.е. удовлетворяющая на L условию Гельдера).

В дальнейшем соответствующую $\mathbf{D}_n$ *однородную задачу* ($g(t) \equiv 0$) будем называть *задачей* $\mathbf{D}_n^0$.

В сообщении устанавливается следующий результат.

Теорема. *Если $r \neq 1$, то однородная задача Дирихле $\boldsymbol{D}_n^0$ в круге $T_r^+ = \{z : |z| < r\}$ не имеет нетривиальных (ненулевых) решений. Если же $r = 1$, то однородная задача Дирихле $\boldsymbol{D}_n^0$ в единичном круге $T_1^+ = \{z : |z| < 1\}$ имеет нетривиальные решения, которые можно задавать следующей формулой:*

$$W_0(z) = \sum_{k=0}^{n} A_k^n \left(\frac{\overline{z}}{1+z\overline{z}}\right)^{n-k} \frac{d^k}{dz^k}\left(\sum_{m=1}^{n} C_m z^{2m-1}\right),$$

где $C_1, C_2, ..., C_n$ — произвольные комплексные постоянные.

Литература

[1] Расулов К. М. *О решении краевой задачи Дирихле в классах квазигармонических функций произвольного рода в круге* // Известия СмолГУ. – 2014. – № 1(25). – С. 402–409.

НЕ ЕДИНСТВЕННОСТЬ СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИХ (НЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ) МЕР ГИББСА ДЛЯ АНТИФЕРРОМАГНИТНОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА НА РЕШЕТКЕ БЕТА

М. М. Рахматуллаев[1]

---

[1] *mrahmatullaev@rambler.ru*, Институт математики при Национальном Университете Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

Трансляционно-инвариантные и периодические меры Гиббса для модели Изинга изучена в работах [1]-[3]. Для ферромагнитной модели Изинга слабо периодические мери Гиббса изучена в работах [4], [5].

Известно, что существует взаимнооднозначное соответствие между множеством V вершин решетки Бета порядка $k \geqslant 1$ и группой G_k, являющейся свободным произведением $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ соответственно.

Известно, что каждой мере Гиббса модели Изинга на решетке Бета соответствует совокупность величин $h = \{h_x, x \in T^k\}$, удовлетворяющих

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} f(h_y, \theta), \qquad (1)$$

где $S(x)$– множество “прямых потомков” точки $x \in T^k$ и $f(x,\theta) = \text{arcth}(\theta \text{th} x)$, $\theta = \text{th}(\beta), \beta = \frac{1}{T}, T > 0$–температура (см., напр., [2], [3]).

Пусть $G_k/\widehat{G}_k = \{H_1, ..., H_r\}$ фактор группа, где $\widehat{G}_k$ нормальный делитель индекса $r \geqslant 1$.

Для $x \in G_k$ обозначим через $x_\downarrow = \{y \in G_k :< x, y >\} \setminus S(x)$.

Определение 1. *Совокупность величин* $h = \{h_x, x \in G_k\}$ *назовем* $\widehat{G}_k$*-слабо периодической, если* $h_x = h_{ij}$ *при* $x \in H_i, x_\downarrow \in H_j$ *для* $\forall x \in G_k$.

Определение 2. *Меру* μ *назавем* $\widehat{G}_k$*-слабо периодической, если она соответствует* $\widehat{G}_k$*-слабо периодической совокупности величин* h.

Пусть $A \subset \{1, 2, \ldots, k+1\}$ и $H_A = \{x \in G_k : \sum\limits_{i \in A} w_x(a_i)$ четно$\}$ нормальний делитель индекса 2.

Пусть $\alpha = \frac{1-\theta}{1+\theta}$. Для анти-ферромагнитной модели Изинга верна следующая

Теорема. *Пусть* $|A| = k$. *При* $k = 4$ *существует критическое значение* α_{cr} $(\approx 6,3716)$ *такое, что при* $\alpha < \alpha_{cr}$ *существует одна* H_A*-слабо периодическая мера Гиббса; при* $\alpha = \alpha_{cr}$ *существуют три* H_A*-слабо периодические меры Гиббса; при* $\alpha > \alpha_{cr}$ *существуют пять* H_A*-слабо периодических мер Гиббса.*

Литература

[1] Синай Я. Г.,*Теория фазовых переходов.* – М.:Наука,1980.

[2] Preston C. *Gibbs States on Countable Sets.* – London.: Cambridge Univ. Press, 1974.

[3] Spitzer F. *Markov random field on infinite tree* // Ann. Probab. 1975. – Т. 3. – С. 387–398.

[4] Розиков У. А., Рахматуллаев М. М., *Описание слабо периодических мер Гиббса модели Изинга на дереве Кэли* // ТМФ. 2008. – Т. 156. –№ 2 – С. 292–302.

[5] Розиков У. А., Рахматуллаев М. М., *Слабо периодические основные состояния и меры Гиббса для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли* // ТМФ. 2009. – Т. 160. –№ 3 – С. 507–516.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ В. К. ИОНИНА

Е. Д. Родионов[1], В. В. Славский[2], М. В. Куркина[3]

---

[1] *edr2002@mail.ru*, Алтайский государственный университет
[2] *slavsky2004@mail.ru*, Югорский государственный университет
[3] *mavi@inbox.ru*, Югорский государственный университет

В работе [1] замкнутой выпуклой n-мерной поверхности Φ пространства Лобачевского H^{n+1} кривизны $(-\kappa)$, где $\kappa > 0$, сопоставляются четыре специальные поверхности: $S_i(\Phi)$ — вписанная сфера, $S_e(\Phi)$ — описанная сфера, $S_0(\Phi)$ — сфера, свободно перекатывающаяся по внутренней стороне поверхности Φ, и $\Sigma(\Phi)$ — эквидистантная поверхность, по внутренней стороне которой свободно перекатывается Φ. В работе [1] найдена точная зависимость между этими четырьмя специальными поверхностями.

В работах [2-4] было установлено взаимнооднозначное соответствие между выпуклыми поверхностями в H^{n+1} гомеоморфными сфере и конформно-плоскими метриками $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$ определенными на единичной сфере $x \in S^n \subset R^{n+1}$ евклидового пространства и ограниченной одномерной кривизны:

$$-\frac{\kappa}{2} < K_{1/2}(f,x,\xi) = f\frac{d^2 f}{d\xi^2} - \frac{1}{2}|\nabla f|^2 < \frac{\kappa}{2},$$

где $x \in S^n \subset R^{n+1}$, функция $f(x)$ по однородности продолжена на R^{n+1}, $\dfrac{d^2 f}{d\xi^2}$ — вторая производная вдоль единичного вектора ξ касательного к сфере $S^n \subset R^{n+1}$, ∇f — градиент функции в R^{n+1}. В данной работе показано как можно переформулировать теорему В. К. Ионина в терминах конформно-плоских метрик ограниченной кривизны:

Теорема. *Конформно-плоской метрике* $ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}$ *на сфере* S^n *с ограниченной одномерной кривизной сопоставляются четыре специальные конформно-плоские метрики:*

$$ds_1^2 = \frac{dx^2}{f_i^2(x)},\ ds_2^2 = \frac{dx^2}{f_e^2(x)},\ ds_3^2 = \frac{dx^2}{f_0^2(x)},\ ds_4^2 = \frac{dx^2}{f_\Sigma^2(x)}.$$

Указана точная зависимость между этими четырьмя функциями на сфере: $f_i^2(x)$, $f_e^2(x)$, $f_0^2(x)$, $f_\Sigma^2(x)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов правительства Российской Федерации: (14.B25.31.0029, Nsh of RF (2263.2014.1)), the RFBR (15-41-00092-r – Urals, 15-41-00063-r – Urals, 15-01-06582-a, 16-01-00336-a).

Литература

[1] Ионин В. К. *О некоторых специальных поверхностях, связанных с выпуклыми поверхностями пространства Лобачевского* // Сиб. матем. журн. – 2002. – Т. 43. – № 5. – С. 1020–1025.

[2] Балащенко В., Никоноров Ю., Родионов Е., Славский В. Однородные пространства: теория и приложения, Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008. – 222 с.

[3] Kurkina M. V., Rodionov E. D., Slavsky V. V. *Numerical Interpolation Methods for Solving Problems of Convex Geometry in the Lobachevsky Space* // Journal of Mathematical Sciences, New York Vol. 203, No. 4, December 14, 2014, p. 516-527.

[4] Kurkina M. V., Rodionov E. D., Slavsky V. V. *Conformally Convex Functions and Conformally Flat Metrics of Nonnegative Curvature* // Doklady Akademii Nauk, 2015, Vol. 462, No. 2, p. 141–143.

О ВЫБОРЕ ЕВКЛИДОВОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ГЕОМЕТРИИ ОКРУЖАЮЩЕГО ПРОСТРАНСТВА

Л. Н. Ромакина[1]

---

[1] *romakinaln@mail.ru*, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Почему из множества различных геометрических систем для описания “реального” мира человечество принимает евклидову геометрию? Почему мы видим мир евклидовым, и может ли он быть таковым? Почему Н. И. Лобачевский считал развиваемую им гиперболическую геометрию воображаемой, а Ф. Клейн, “вооружившись” деревянным клином, уже допускал ее проявления в окружающем физическом пространстве. В докладе предполагается обсуждение этих и других вопросов о выборе геометрической модели окружающего мира.

Литература

[1] Лобачевский Н. И. *Геометрические исследования по теории параллельных линий.* – М.;Л.: Изд-во Академии Наук СССР, 1945. – 117 с.

[2] Клейн Ф. *Неевклидова геометрия.* – М.;Л.: ОНТИ, 1936. – 356 с.

[3] Romakina L. N. *An eye as the tool of a choice of the Euclidean metric for the description of real physical space* // Journal of Basic and Applied Research International, IKP – 2015. – V. 9. – Iss. 3. – P. 147–154.

[4] Ромакина Л. Н. *Развитие представлений о геометрии окружающего пространства* // Сб. науч. работ X Междун. науч. конф. ЕНО. – М.: ЕНО, 2015. – С. 18–21.

РЕТРАКТЫ, АЛГЕБРАИЧЕСКИ И ВЕРБАЛЬНО ЗАМКНУТЫЕ ПОДГРУППЫ ГРУПП $\mathbf{UT}_N(\mathbb{Z})$

В. А. Романьков[1], Н. Г. Хисамиев[2], А. А. Конырханова[3]

---

[1] *romankov48@mail.ru*, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского

[2] *hisamiev@mail.ru*, Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева

[3] *erkeshank@mail.ru*, Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева

Ретрактом группы G называется такая подгруппа $H \leqslant G$, для которой существует эндоморфизм $\varphi : G \to H$, тождественный на H. Подгруппа H является ретрактом группы G тогда и только тогда, когда существует нормальная подгруппа U группы G такая, что $G = H \cdot U = \{hu | h \in H, u \in U\}, H \cap U = \{1\}$.

Ретракты связаны с вербально и алгебраически замкнутыми подгруппами групп. Подгруппа H группы G называется *вербально замкнутой*, если для любого группового слова $w(x_1, ..., x_t)$ от независимых переменных $x_1, ..., x_t$ без констант и любого элемента $h \in H$ уравнение $w(x_1, \dots, x_t) = h$ разрешимо в группе G тогда и только тогда, когда оно разрешимо в группе H. Подгруппа H группы G называется *алгебраически замкнутой*, если для любого набора групповых слов $w_i(x_1, \dots, x_t), i = 1, \dots, m,$ с константами из H от независимых переменных $x_1, \dots, x_t$ система уравнений $w_i(x_1, \dots, x_t) = 1,\ i = 1, \dots, m,$ имеет решение в группе G тогда и только тогда, когда она имеет решение в H.

В [1] доказано, что множество ретрактов свободной нильпотентной группы $N_{r,k}$ ранга $r \geqslant 1$ ступени нильпотентности $k \geqslant 1$ совпадает с множествами ее вербально замкнутых подгрупп, алгебраически замкнутых подгрупп, а также с множеством свободных множителей в многообразии $\mathcal{N}_k$ всех нильпотентных групп ступени нильпотентности не выше, чем k.

Очевидно, что ретракт любой группы G является алгебраически замкнутой подгруппой. Обратное в общем случае неверно, но может утверждаться при определенных условиях. Например, в [2] показано, что если группа G конечно определена, а ее подгруппа H конечно порождена и алгебраически замкнута, то H — ретракт. Отсюда следует, что подгруппа конечно порожденной нильпотентной группы алгебраически замкнута тогда и только тогда, когда она — ретракт.

Теорема. *Для любого n существует алгоритм, который определяет алгебраическую замкнутость произвольной подгруппы H группы $UT_n(\mathbb{Z})$ унитреугольных матриц размера $n \times n$ над кольцом $\mathbb{Z}$ целых чисел.*

Построен пример конечной нильпотентной группы, в которой указана вербально замкнутая, но не алгебраически замкнутая подгруппа.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00577) и Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект №111/ГФ).

Литература

[1] Романьков В. А., Хисамиев Н., Г. *Вербально и экзистенциально замкнутые подгруппы свободных нильпотентных групп* // Алгебра и логика. – 2013. – Т. 52. – № 4. – С. 502–525.

[2] Myasnikov A., Roman'kov V. *Verbally closed subgroups of free groups* // J. Group Theory. – 2014. – V. 17. – № 1. – P. 29–40.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ ДИХОТОМИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ФДУ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Р. К. Романовский, Г. Д. Анисимова[1]

1. Работа примыкает к [1]. В $\Pi = \mathbb{R} \times [0, \infty)$ рассматривается задача Коши

$$\begin{cases} Lu = Du + \int_0^1 [dB(s)]\, u(x, t-s) = 0, \quad t > 1, \\ u\big|_{\Pi_0} = \varphi \in \mathrm{E}, \quad \Pi_0 = \mathbb{R} \times [0, 1]. \end{cases} \tag{1}$$

---

[1] *gdanisimova@gmail.com*, Омский государственный технический университет

Здесь $D = \frac{d}{dt} + A\frac{d}{dx}$, $A = \mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_N)$, $a_1 > \ldots > a_N$, $a_k \neq 0$, $B\colon [0,1] \to \mathbb{C}^{N\times N}$, $\bigvee_0^1 (B) < \infty$, $u = \left(u^1,\ldots,u^N\right)^T$, E – банахово пространство непрерывных ограниченных функций $\Pi_0 \to \mathbb{C}^N$ с нормой $\sup|\varphi|$.

Через каждую точку $(x_0, y_0) \in \Pi$ проходят характеристики $q_1,\ldots,q_N$ с уравнениями $x = \sigma_k(t, x_0, t_0) = x_0 + a_k(t - t_0)$. Оператор D далее понимается в обобщённом смысле $D = \mathrm{diag}(D_1,\ldots,D_N)$, где $D_k u^k$ – производная по t вдоль q_k. Под решением задачи (1) понимается функция $u \in \mathrm{C}(\Pi,\mathbb{C}^N)$ с гладкими вдоль “своих” характеристик q_k компонентами u_k, удовлетворяющая (1). Имеет место однозначная разрешимость в этом классе, обозначаемом далее C_x^1.

В работе исследуется дихотомия решений задачи (1) сведением к такой же проблеме для разностной задачи Коши вида

$$u_n = \Gamma u_{n-1}, n = 1, 2, \ldots, \qquad u_0 = \varphi \in \mathrm{E} \tag{2}$$

с компактным оператором Γ в фазовом пространстве E.

2. Определим операторы из End(E) формулами

$$B_0\varphi = \int_0^t [dB(s)]\varphi(x, t-s), B_1\varphi = \int_t^1 [dB(s)]\varphi(x, 1+t-s),$$

$$S\varphi = \int_0^t \begin{bmatrix} \varphi^1(\sigma_1(\tau, x, t), \tau) \\ \ldots \\ \varphi^N(\sigma_N, (\tau, x, t), \tau) \end{bmatrix} d\tau, P\varphi = \begin{bmatrix} \varphi^1(x - a_1 t, 1) \\ \ldots \\ \varphi^N(x - a_N t, 1) \end{bmatrix} \tag{3}$$

Лемма. $\mathbf{1^0}$. *Оператор* $I + SB_0$ *имеет ограниченный обратный* $\mathrm{E} \to \mathrm{E}$.
$\mathbf{2^0}$. *Формула* $\Gamma = (I + SB_0)^{-1}(P - SB_1)$ *задаёт компактный оператор* $\mathrm{E} \to \mathrm{E}$.
$\mathbf{3^0}$. *Функция* $u\colon \Pi \to \mathbb{C}^N$ *является решением класса* C_x^1 *задачи* (1) *точно тогда, когда последовательность* $u_n(x, t) = u(x, t+n), (x, t) \in \Pi_0, n = 0, 1, \ldots$ *является решением задачи* (2) *с оператором* 2^0.

3. Будем говорить, что имеет место экспоненциальная дихотомия решений задачи Коши (1), если это верно для решений задачи (2): фазовое пространство E распадается в прямую сумму подпространств $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \dot{+} \mathrm{E}_2, \mathrm{E}_k \neq \{0\}$ так, что для решений задачи (2) верны при некоторых $\mu, \nu > 0$ оценки

$$\begin{aligned} \varphi \in \mathrm{E}_1 &\Rightarrow \left\|\Gamma^n\varphi\right\|_{\mathrm{E}} \leqslant \mu e^{-\nu n}\|\varphi\|_{\mathrm{E}}, \\ \varphi \in \mathrm{E}_2 &\Rightarrow \left\|\Gamma^n\varphi\right\|_{\mathrm{E}} \geqslant \mu e^{\nu n}\|\varphi\|_{\mathrm{E}}. \end{aligned}$$

Поставим в соответсвие оператору (1) матричный пучок

$$\Delta(\lambda, \mu) = \lambda I + \mu A + \int_0^1 e^{-\lambda s} dB(s).$$

Теорема. *Экспоненциальная дихотомия решений задачи Коши* (1) *имеет место точно тогда, когда при каждом* $\mu \in i\mathbb{R}$ *уравнение*

$$\det\Delta(\lambda, \mu) = 0$$

не имеет λ*-корней на мнимой оси и имеет хотя бы один корень в полуплоскости* $\mathrm{Re}\lambda > 0$.

Литература

[1] Романовский Р. К., Назарук Е. М. *О дихотомии линейных автономных систем функционально-дифференциальных уравнений* // Матем. заметки. – 2014. – Т. 35. – № 1. – С. 129–135.

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

Р. К. Романовский, Ю. А. Медведев[1]

---

[1] *teslakun@gmail.com*, Омский государственный технический университет

1. Рассматривается краевая задача в полуполосе
$\Pi = [-l, l] \times [0, \infty)$

$$\begin{cases} Lu = \left(\frac{\partial}{\partial t} + A\frac{\partial}{\partial s} + B\right)u = 0, \ (s,t) \in \Pi, \\ u(s,0) = 0, \ u_+(-l,t) = \mu_1(t), \ u_-(l,t) = \mu_2(t). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $A = diag(a_1, \ldots, a_n)$, $a_1 > \ldots > a_m > 0 > a_{m+1} > \ldots > a_n$, $u = [u_+ \ u_-]^T$, $u_+ = [u_1 \ldots u_m]^T$, $u_- = [u_{m+1} \ldots u_n]^T, \mu_k \in C$, $\mu_k(0) = 0$, $B = [b_{ij}]_1^n$. Задача (1) однозначно разрешима в классе S_L [1, гл. 2]. При заданных $t^* > 2l/a$, $a = \min\{a_m, |a_{m+1}|\}$, $u_* \in C[-l, l]$ ищется пара $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ (управление), обеспечивающая выполнение равенства

$$u(s, t^*; \mu) = u_*(s), \ s \in [-l, l]. \tag{2}$$

Будем говорить, что задача (2) *асимптотически разрешима*, если при некоторой $\{\mu_\nu\}_1^\infty$ $u(s, t^*; \mu_\nu) \rightrightarrows u_*(s)$ на $[-l, l]$. Последовательность $\{\mu_\nu\}$ с таким свойством будем называть *асимптотическим решением* задачи (2). В работе построен класс асимптотических решений. Далее $V(s,t)$ — *матрица Римана второго рода* системы (1) [1, гл. 1].

2. Построим по матрицам $P_k = diag(0, \ldots, 1, \ldots, 0), V_k = V(s - \sigma + a_k t^*, t^*)P_k, E_1 = \sum_{k=2}^{n-1} V_k + \begin{cases} V_1, s > \sigma, \\ V_n, s < \sigma, \end{cases}, E_2 = V(s-\sigma, t^*), \mathscr{B} = diag(b_{11}, \ldots, b_{nn})$ и вектору $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)^T \in C(\Delta), \Delta = [-l - a_1 t^*, l - a_n t^*]$ векторное интегральное уравнение Фредгольма

$$e^{-\mathscr{B}t^*}\varphi(s) + \int_{-l}^{l} E_1(s,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma = u_*(s) - \Lambda\psi, \tag{3}$$

где $\Lambda\psi = \int\limits_{\Delta} E_2(s,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma + e^{-\mathscr{B}t^*}\begin{bmatrix} \psi_1(\sigma - a_1 t^*) \\ \ldots \\ \psi_n(\sigma - a_n t^*) \end{bmatrix}$.

Лемма. *Для однозначной разрешимости* (3) *в* $C[-l, l]$ *достаточно, чтобы*

$$2\rho \exp(\rho + |\mathscr{B}|)t^* < (2l)^{-1} \cdot \min(a_j - a_{j+1}), \ \rho = 2n|B|. \tag{4}$$

3. Зафиксируем $\{\varepsilon_\nu\}_1^\infty, \varepsilon_\nu \downarrow 0$, и пусть $\Pi_{k\nu} = (l - a_k t^*, l - a_k t^* + \varepsilon_\nu], \hat{\Pi}_{k\nu} = [-l - a_k t^* -$

$\varepsilon_\nu, -l - a_k t^*), k = \overline{1,n}, \nu = 1,2,\ldots$. Положим $\hat{\varphi}$ — решение (3), $\Delta_k = [-l - a_k t^*, l - a_k t^*]$,

$$\alpha_{k\nu}(s) = \varepsilon_\nu^{-1}(l - a_k t^* + \varepsilon_\nu - s) \text{ на } \Pi_{k\nu}; 0 \text{ на } \Delta \setminus \Pi_{k\nu},$$
$$\beta_{k\nu}(s) = \varepsilon_\nu^{-1}(l + a_k t^* + \varepsilon_\nu + s) \text{ на } \hat{\Pi}_{k\nu}; 0 \text{ на } \Delta \setminus \hat{\Pi}_{k\nu}.$$
$$\gamma_\nu(s;\psi) = \begin{bmatrix} \alpha_{1\nu}\hat{\varphi}_1(l) \\ \alpha_{k\nu}\hat{\varphi}_k(l) + \beta_{k\nu}\hat{\varphi}_k(-l),\ k \in [2, n-1] \\ \beta_{n\nu}\hat{\varphi}_n(-l) \end{bmatrix},$$
$$\hat{\varphi}_*(s;\psi) = \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_1(s + a_1 t^*) \text{ на } \Delta_1; 0 \text{ на } \Delta \setminus \Delta_1, \\ \ldots \\ \hat{\varphi}_n(s + a_n t^*) \text{ на } \Delta_n; 0 \text{ на } \Delta \setminus \Delta_n \end{bmatrix},$$

$$h_\nu(s;\psi) = \hat{\varphi}_* + \gamma_\nu + \psi,\ s \in \Delta,\ \nu = 1,2,\ldots. \qquad (5)$$

Теорема. *При условии* (4) *каждому вектору* $\psi \in C(\Delta)$ *отвечает асимптотическое решение задачи управления* (2)

$$\mu_{1\nu} = (Fh_\nu)_+\big|_{s=-l},\ \mu_{2\nu} = (Fh_\nu)_-\big|_{s=l},\ \nu = 1,2,\ldots,$$

где h_ν *— вектор* (5), F *— разрешающий оператор задачи Коши для системы* (1).

Литература

[1] Романовский Р. К., Жукова О. Г. *Метод характеристик для гиперболических систем с двумя независимыми переменными.* – М.: МАКС Пресс, 2015. – 124 с.

ГРУППЫ ДИМЕРОВ ГРАФОВ КВАДРАТНЫХ РЕШЕТОК

Д. С. Рожков[1]

---

[1] *rozhkovchess@mail.ru*, Новосибирский государственный университет

В теории графов *паросочетания* изучаются обычно с точки зрения числовых инвариантов графов. В работе [1] В.Г.Тураев предложил новый подход к изучению паросочетаний: с каждым паросочетанием в графе он связал группу, называемую *группой паросочетания* $\pi_A(\Gamma)$. Группа паросочетания отнесенная к *совершенному паросочетанию*, также называемому *димерным покрытием*, называется *группой димеров* $D(\Gamma)$.

В.Г.Тураев показал, что группа димеров имеет естественное описание на языке алгебраической топологии – она может быть определена как фундаментальная группа некоторого *кубического комплекса неположительной кривизны*.

Работа посвящена исследованию вопроса о возникновении соотношений в группе димеров. Хорошо известный факт из теории CAT(0)–пространств состоит в том, что плоские торы в пространстве неположительной кривизны соответствуют абелевым подгруппам фундаментальной группы. Более точно (см. [2]), если X – компактное пространство неположительной кривизны и $\pi_1(X)$ содержит абелеву подгруппу G ранга $k > 1$, то X содержит выпуклое подмножество, изометричное k – мерному плоскому тору. Для *комплексов димеров* некоторых графов нам удалось дать комбинаторное описание такого подмножества, отвечающего абелевой подгруппе ранга два.

Граф квадратной решётки – это граф, вершины которого соответствуют точкам на плоскости с различными координатами, x-координатами из диапазона $1, \ldots, n$, y-координатами из диапазона $1, \ldots, m$, и вершины которого соединены ребром, если соответствующие точки находятся на расстоянии 1. Такие графы изучаются в значительной степени в связи с точно решаемыми моделями статистической механики.

Теорема. *Пусть* Γ *– граф квадратной решетки с* n *вершинами по* x *и* m *вершинами по* y*. Для любых* n *и* m *группа димеров* $D(\Gamma)$ *не является свободной тогда и только тогда, когда у графа* Γ *существует 5 димерных покрытий* $A_0, A_1, \ldots, A_4$ *и набор скольжений* $\{s_1, s_2, \ldots, s_6\}$*, удовлетворяющих следующим условиям :*

1) $\{(s_1, s_4), (s_1, s_5), (s_1, s_6), (s_2, s_4), (s_2, s_5), (s_2, s_6), (s_3, s_4),$
$(s_3, s_5), (s_3, s_6)\}$ *– пары независимых скольжений,*
2) $A_1 = s_1 A_0$*,* $A_2 = s_2 A_1$*,* $A_0 = s_3 A_2$*,* $A_3 = s_4 A_0$*,* $A_4 = s_5 A_3$*,* $A_0 = s_6 A_4$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского государственного университета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020) и РФФИ (грант № 16-01-00414).

Литература

[1] Turaev V. G. *Matching groups and gliding systems* // Journal of Geometry and Physics 81, 2014. – P. 128–144.

[2] Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. *Курс метрической геометрии.* – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 512 с.

АНАЛОГИ ТОЖДЕСТВ ГРЕЯ РИМАНОВОЙ КРИВИЗНЫ ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ КЛАССА NC_{10}

А. Р. Рустанов[1], С. В. Харитонова[2]

---

[1] *aligadzhi@yandex.ru*, Московский педагогический государственный университет
[2] *hcb@yandex.ru*, Оренбургский государственный университет

Определение 1 [1]. *Почти контактное метрическое многообразие, характеризуемое тождеством*

$$\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = \xi\nabla_X(\eta)\Phi Y + \xi\nabla_Y(\eta)\Phi X + \\ + \eta(X)\nabla_{\Phi Y}\xi + \eta(Y)\nabla_{\Phi X}\xi; \forall X, Y \in \mathbf{X}(M),$$

называется NC_{10}*-многообразием.*

Контактными аналогами тождеств А. Грея R_1, R_2 и R_3 кривизны почти эрмитовых многообразий для тензора римановой кривизны являются тождества кривизны

CR_1, CR_2 и CR_3 для почти контактных метрических многообразий:

$$CR_1 : \langle R(\Phi X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi W\rangle = \left\langle R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi Z, \Phi W\right\rangle;$$

$$CR_2 : \langle R(\Phi X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi W\rangle = \left\langle R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi Z, \Phi W\right\rangle + \\ + \left\langle R(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi^2 Z, \Phi W\right\rangle + \left\langle R(\Phi^2 X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi^2 W\right\rangle;$$

$$CR_3 : \langle R(\Phi X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi W\rangle = \left\langle R(\Phi^2 X, \Phi^2 Y)\Phi^2 Z, \Phi^2 W\right\rangle;$$

$$X, Y, Z \in \mathbf{X}(M).$$

Назовем NC_{10}-многообразие, обладающее тождествами CR_1, CR_2 и CR_3, соответственно, CR_1-, CR_2- и CR_3-многообразием.

Теорема 1 [2]. *Пусть* $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *– AC-структура.*

(1) $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *– структура класса* CR_1 *тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры* $R_{abcd} = R_{\hat{a}bcd} = R_{\hat{a}\hat{b}cd} = 0$*;*

(2) $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *– структура класса* CR_2 *тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры* $R_{abcd} = R_{\hat{a}bcd} = 0$*;*

(3) $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *– структура класса* CR_3 *тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры* $R_{\hat{a}bcd} = 0$*.*

Теорема 2. NC_{10}*-многообразие является* CR_3*-многообразием.*

Теорема 3. *Пусть* NC_{10}*-многообразие является* CR_2*-многообразием. Тогда это многообразие является точнейшим косимплектическим многообразием.*

Теорема 4. *Пусть* NC_{10}*-многообразие является* CR_2*-многообразием. Тогда оно локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую.*

Теорема 5. *Пусть* NC_{10}*-многообразие является* CR_1*-многообразием. Тогда это многообразие является косимплектическим, а значит локально эквивалентно произведению келерова многообразия на вещественную прямую.*

Литература

[1] Рустанов А. Р., Щипкова Н. Н. *Многообразия класса* NC_{10} // Преподаватель XXI век. – 2014. – №3. – С. 209–218.

[2] Кириченко В. Ф. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.* – М.: МПГУ, 2003. – 495 с.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА, АССОЦИИРОВАННАЯ С ЛАГРАНЖИАНОМ, И ЕЕ ДИНАМИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

А. К. Рыбников[1]

---

[1] *arybnikov@mail.ru*, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Доклад посвящен исследованию методом Картана-Лаптева дифференциально-геометрической структуры, ассоциированной с лагранжианом L, зависящим от n функций $x^1,\dots,x^n$ одного переменного t и их производных. Переменные $t,x^1,\dots,x^n$ мы рассматриваем как адаптированные локальные координаты расслоения общего типа M с 1-мерной базой (t одновременно является локальной координатой базы) и n-мерным типовым слоем. Лагранжиан L, будучи коэффициентом подынтегральной 1-формы вариационного интеграла, является относительным инвариантом, поле которого задано на J^1M (где J^1M - многообразие 1-струй расслоенного пространства M).

В настоящей работе построен фундаментальный объект структуры, ассоциированной с лагранжианом. Построен также охваченный продолженным фундаментальным объектом ковектор с компонентами E_i $(i=1,\dots,n)$ (в работе он назван *эйлеровым ковектором*) такой, что система равенств $E_i=0$ $(i=1,\dots,n)$ является инвариантным представлением уравнений Эйлера для вариационного функционала. Вследствие этого возможна невариационная интерпретация уравнений Эйлера. Подобная интерпретация уравнений Эйлера возможна и для лагранжиана, зависящего от функции n переменных и ее частных производных [1,2] .

Кроме того, инвариантным образом выделен класс *специальных лагранжианов*, которые порождают связность в расслоении центроаффинной структуры над базой M.

В случае, когда лагранжиан L - специальный, существует заданный на M относительный инвариант П (в работе он назван *потенциальным относительным инвариантом*), который порождает на M поле ковектора (его можно назвать *силовым полем*) и послойную метрику в расслоении центроаффинной структуры над базой M.

Литература

[1] Рыбников А. К. *Невариационная интерпретация уравнений Эйлера и теорема Нётер.* // ДАН –2013. – Т. 453 –№ 6. –С. 613-616.

[2] Rybnikov A. K. *Differential-Geometric Structures Associated with the Lagrangian and a Nonvariational Interpretation of the Euler Equations and Nöther's Theorem .* // Russian Journal of Mathematical Physics. –2013 –Vol. 20. –No. 3. –pp. 336-344.

СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ ГРЭДА–ШАФРАНОВА

П. О. Рыжих[1]

---

[1] *pasharpo@mail.ru*, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН

Проблема групповой классификации дифференциальных уравнений впервые была поставлена основателем теории непрерывных групп Софусом Ли. В данной работе представлен результат групповой классификации уравнения Грэда–Шафранова, которое в цилиндрических координатах r, z имеет вид [1]:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=-\mu_0 r^2\frac{dP}{d\Psi}-\frac{\mu_0^2}{4\pi^2}F(\Psi)F'(\Psi), \tag{1}$$

где $\Psi=\Psi(r,z)$ — магнитный поток через внешнюю полоидальную перегородку, F – полоидальный ток, P – давление плазмы, μ_0 – магнитная постоянная.

Уравнение Грэда–Шафранова описывает стационарную плазму в токамаке. Это уравнение получено В.Д. Шафрановым в 1957 году и независимо Г. Грэдом и Г. Рубиным в 1958. Уравнение (1) определяет гиперповерхность $E=\{F=0\}$ в пространстве 2-джетов $J^2(\mathbb{R}^2)$ гладких функций на плоскости. Здесь

$$F=v_{20}-\frac{v_{10}}{r}+v_{02}+r^2\mu_0P'(v)+\frac{\mu_0^2}{4\pi^2}f(v)f'(v)$$

и $r,z,v,v_{10},\ldots,v_{02}$ — канонические координаты на пространстве $J^2(\mathbb{R}^2)$ [2]. Инфинитезимальной точечной симметрией уравнения (1) называется векторное поле X на пространстве 0-джетов $J^0(\mathbb{R}^2)$ такое, что ограничение производной Ли функции F вдоль векторного поля $X_h^{(2)}$ на гиперповерхность E равно нулю:

$$X^{(2)}(F)|_E=0. \tag{2}$$

Здесь $X^{(2)}$ — продолжение векторного поля X в пространство 2-джетов $J^2(\mathbb{R}^2)$.

Теорема. *Уравнение (1) допускает бесконечномерную алгебру инфинитезимальных точечных симметрий с образующими* $\frac{\partial}{\partial z}$ *и* $\beta(r,z)\frac{\partial}{\partial r}$ *тогда и только тогда, когда функция* p *квадратична:*

$$P(v)=\frac{1}{2}p_2v^2+p_1v+p_0,$$

а функция f *имеет вид*

$$f(v)=\pm\sqrt{f_2v^2+f_1v+f_0},$$

где p_0,p_1,p_2,f_0,f_1,f_2 *— некоторые постоянные. Здесь функция* $\beta(r,z)$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных*

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\beta}{\partial r}+\left(\mu r^2p_2+\frac{1}{4}\frac{\mu^2f_2}{\pi^2}\right)\beta=0.$$

В остальных случаях уравнение (1) допускает одномерную алгебру Ли точечных симметрий с образующей $\frac{\partial}{\partial z}$.

Литература

[1] Wesson J. *Tokamaks. 3rd Ed.* – Oxford: Clarendon Press, 2004. – 749 p.

[2] Виноградов А.,М., Красильщик И.,С., Лычагин В.,В. *Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1986. – 336 с.

[3] Kushner A., Lychagin V., Rubtsov V. *Contact Geometry and Non-linear Differential Equation.* – Cambridge University press, January 2007. – 518 p.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ КРИВИЗНА МОДЕЛИ ВЕЙБУЛЛА–ГНЕДЕНКО

А. А. Рылов[1]

---

[1] *alexander_rylov@mail.ru*, Финансовый университет при Правительстве РФ

Настоящая работа посвящена геометрии статистической структуры [1] на семействе S вероятностных распределений Вейбулла–Гнеденко с функцией распределения

$$F(x|\lambda,k) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right), \quad x > 0,$$

гладко параметризованном двумя параметрами $\lambda = \theta^1 > 0$, $k = \theta^2 > 0$. Статистическая структура на S определяется метрикой g, задаваемой информационной матрицей Фишера $I_{ij}(\theta) = \int \partial_i \ln p \cdot \partial_j \ln p \cdot p \, \mathrm{d}p$, где $p = p(x|\theta)$ — плотность вероятности случайной величины относительно некоторой общей доминирующей меры P на выборочном пространстве, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial \theta^i}$, и тензорным полем K структуры с ковариантными компонентами $K_{ijk}(\theta) = -\frac{1}{2} \int \partial_i \ln p \cdot \partial_j \ln p \cdot \partial_k \ln p \cdot p \, \mathrm{d}p$.

По заданной статистической структуре (g, K) на статистической модели S инвариантно определяется 1-параметрическое семейство α-связностей Ченцова–Амари $\nabla^\alpha = D + \alpha \cdot K$, где D — связность Леви–Чивита метрики g, α — параметр. Если связность ∇^α имеет постоянную кривизну, то получаем статистическую структуру постоянной α-кривизны. Если оператор кривизны R^α_{XY} (для векторных полей X и Y на S) любой связности Амари–Ченцова удовлетворяет условию $R^\alpha_{XY} g = 0$, то получаем сопряженно симметрическую структуру [2].

Для статистической модели Вейбулла–Гнеденко нами вычислена матрица Фишера

$$I = \begin{pmatrix} \left(\frac{k}{\lambda}\right)^2 & \frac{\gamma-1}{\lambda} \\ \frac{\gamma-1}{\lambda} & \frac{\pi^2+6\gamma^2-12\gamma+6}{6k^2,} \end{pmatrix}$$

где $\gamma = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n) \approx 0,577\ldots$ – константа Эйлера–Маскерони, и ковариантные компоненты тензорного поля K структуры

$$K_{111} = -(\frac{k}{\lambda})^3, \quad K_{112} = K_{121} = K_{211} = \frac{(2-\gamma)k}{\lambda^2},$$

$$K_{122} = K_{212} = K_{221} = -\frac{\pi^2 + 6\gamma^2 - 24\gamma + 12}{6\lambda k},$$

$$K_{222} = \frac{\pi^2(2-\gamma) - 4\zeta(3) - 2\gamma^3 + 12\gamma^2 - 12\gamma + 2}{2k^3},$$

где $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1,202\dots$ — константа Апери. Далее показано, что 1-связность Ченцова–Амари имеет постоянную кривизну

$$k^{(1)} = \frac{12\pi^2\gamma - 144\gamma + 72}{\pi^4} \approx 0,59.$$

Таким образом, статистическая модель Вейбулла–Гнеденко, как и логистическая модель [3], относится к классу сопряженно симметрических. Она имеет положительную 1-кривизну $k^{(1)}$ в отличие от нормальной модели, для которой $k^{(1)} = 0$, и модели Парето: $k^{(1)} = -4$.

Литература

[1] Рылов А. А. *Связности, совместимые с метрикой, и статистические многообразия* // Изв. вузов. Мат. – 1992. – №12. – С. 46–56.

[2] Noguchi M. *Geometry of statistical manifolds* // Diff. Geom. Appl. – 1992. – V.2 – P. 197–222.

[3] Рылов А. А. *Связности Амари - Ченцова на логистической модели* // Известия ПГПУ им. В. Г. Белинского. – 2011. – № 26. – С. 195–206.

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО КОРНЕВЫМ ЭЛЕМЕНТАМ НЕРЕГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПУЧКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

В. С. Рыхлов[1]

---

[1] *RykhlovVS@yandex.ru*, Саратовский государственный университет

Рассмотрим в пространстве $L_2[0,1]$ пучок $L(\lambda)$

$$y''' - 3\lambda y'' + 3\lambda^2 y' - \lambda^3, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 0, \; y(1) - y''(0) = 0.$$

Характеристический многочлен $\omega^3 - 3\omega^2 + 3\omega - 1$ пучка имеет кратные корни $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$. Характеристический определитель $\Delta(\lambda) = e^{\lambda} - 2$ является вырожденным, а пучок $L(\lambda)$ — нерегулярным [1, с. 66–67]. Собственные значения пучка есть числа $\lambda_k = \ln 2 + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решается задача нахождения таких условий на вектор-функцию (в.-ф.) $f = (f_1, f_2, f_3)^T$, при которых имеет место трехкратная разложимость этой в.-ф. в биортогональный ряд Фурье по производным цепочкам пучка $L(\lambda)$ (см. [1, с. 102]), соответствующим его корневым элементам (к.э.).

В нерегулярном случае дифференциального оператора 3-го порядка, когда характеристики лежат в вершинах правильного треугольника, задача о разложении решена в [2]. Случай нерегулярного пучка второго порядка с простыми характеристиками рассматривался в [3].

Для данной в.-ф. $f = (f_1, f_2, f_3)^T$ определим функцию

$$F(x,\lambda) := -\lambda^2 f_1(x) - \lambda\big(3f_1'(x) - f_2(x)\big) + \big(3f_1''(x) - 3f_2'(x) + f_3(x)\big).$$

Обозначим через Γ_ν круговые контуры в λ-плоскости с центрами в начале координат и радиусами $\sqrt{\ln^2 2 + 4\pi^2(\nu+1/2)^2}$, $\nu \in \mathbb{N}$. Пусть $G(x,t,\lambda)$ есть функция Грина задачи (1)–(2).

Теорема. *Пусть в.-ф. f удовлетворяет условиям:*

$$f_1^{(5)}, f_2^{(4)}, f_3^{(3)} \in L_p[0,1],\ 1 < p \leqslant +\infty,$$

$$f_j^{(s)}(0) = f_j^{(s)}(1) = 0,\ j = \overline{1,3},\ s = \overline{0,5-j}.$$

Для того чтобы имели место трехкратное разложение в.-ф. f по к.э. пучка $L(\lambda)$ с равномерной сходимостью на $[0,1]$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{-1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_k} \lambda^{s-1}\int_0^1 G(x,t,\lambda)F(x,\lambda)\,d\lambda = f_s(x),\ s = \overline{1,3},$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись тождества

$$\varphi_1(x) \equiv 0, \quad \varphi_2(x) \equiv 0, \quad \textit{где}$$

$$\varphi_1(x) := xf_1''(x) - f_1'(x) - 2xf_2'(x) + f_2(x) + xf_3(x),$$

$$\varphi_2(x) := \frac{x^2}{2}f_1''(x) - xf_1'(x) + f_1(x) - x^2 f_2'(x) + xf_2(x) + \frac{x^2}{2}f_3(x).$$

Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014/К).

Литература

[1] Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы.* – М.: Наука, 1969. – 528 с.

[2] Хромов А. П. *Разложение по собственным функциям одной краевой задачи третьего порядка* // Исследования по теории операторов. – Уфа, 1988. – С. 182–193.

[3] Рыхлов В. С. *Разложение по собственным функциям квадратичных сильно нерегулярных пучков дифференциальных операторов второго порядка* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем. Мех. Информ. – 2013. – Т. 13. – Вып. 5. –Ч. 1. – С. 50–55.

МНОГООБРАЗИЯ И ПОВЕРХНОСТИ С ЛОКАЛЬНО ЕВКЛИДОВОЙ МЕТРИКОЙ

И. Х. Сабитов[1]

---

[1] *isabitov@mail.ru*, Московский Государственный университет им. Ломоносова

1. Метрика риманового многообразия M^n называется локально евклидовой (л.е.), если каждая его точка имеет окрестность, изометричную некоторому шару в евклидовом пространстве R^n со стандартной метрикой. Мир многообразий с л.е. метрикой очень богат, но он к настоящему времени изучен еще совсем мало. Достаточно напомнить, что любая многогранная поверхность с проколотыми вершинами имеет л.е. метрику.

2. В теории изометрических погружений л.е. метрик, в отличие от метрик ненулевой кривизны, есть специальный вопрос об изометрических погружениях этих метрик в стандартное евклидово пространство той же размерности Если мы можем изометрически погрузить или даже вложить данную л.е. метрику в евклидово пространство, тогда мы можем сказать, что имеем *натуральное* представление этой метрики как метрики области с естественной евклидовой метрикой. В докладе будет рассказано о некоторых результатах в случае изометрических погружений двумерных л.е. метрик в R^2, а также и в R^3.

3. Структура поверхностей с л.е. метрикой хорошо известна, начиная с предположения их C^2-гладкости. C^1-гладкие поверхности с аналогичным строением называются *нормальными развертывающимися* поверхностями, для которых мы получаем их полное аналитическое описание.

4. Поверхности с л.е. метрикой, заданные в виде графика функции $z = f(x, y)$, являются решениями тривиального уравнения Монжа-Ампера

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 0, \tag{1}$$

для решений которого можно поставить вопрос об их локальном и глобальном поведении в предположени наличия изолированных особенностей. Ниже формулируются пока неопубликованные результаты.

Теорема 1. *Пусть C^1-гладкая нормальная развертывающаяся поверхность $z = z(x, y)$ определена над кругом с проколотым центром $D_0 : 0 < x^2 + y^2 \leqslant r$. Тогда функция $z(x, y)$ непрерывно продолжается в точку* $(0, 0)$.

Теорема 2. *Пусть решение $z = z(x, y)$ уравнения (1) принадлежит $C^{n-1}(D) \cap C^n(D_0)$, $n \geqslant 2$. Тогда функцию $z(x, y)$ можно непрерывно продолжить в функцию класса $C^n(D)$.*

О решениях уравнения (1) над всей плоскостью с проколотыми точками можно доказать следующее утверждение

Теорема 3. *Пусть на плоскости (x, y) задано произвольное конечное множество точек M. Тогда уравнение (1) имеет решения, определенные на всей плоскости, принадлежащие классу C^∞ всюду, кроме точек множества M, в которых они непрерывны и графически локально устроены как конические поверхности с вершиной в этих точках. При некоторых специальных расположениях множества особых точек их количество может быть и счетным.*

Литература

[1] Sabitov I. Kh.*Isometric Immersions and Embeddings of Locally Euclidean metrics.* // Series “Reviews in Mathematics and Mathematical Physics”. –Cambridge Scientific Publishers, 2009. – vol. 13, Part 1, 276 p.

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

К. Б. Сабитов[1]

---

[1] *sabitov_fmf@mail.ru*, Институт прикладных исследований РБ, г. Стерлитамак

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu = F(x,t), \tag{1}$$

где

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + b^2 u, & t < 0, \end{cases} \qquad F(x,t) = \begin{cases} F_1(x,t), & t > 0, \\ F_2(x,t), & t < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t) | 0 < x < l, -\alpha < t < \beta\}$. Здесь $b \geqslant 0$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные действительные числа, $F_i(x,t)$, $i = 1,2$, – известные функции и поставим следующую задачу.

Начально-граничная задача. *Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^1_x(\overline{D}) \cap C^2_x(D_+) \cap C^2(D_-);$$

$$Lu(x,t) = F(x,t), \ (x,t) \in D_- \cup D_+;$$

$$u(0,t) = h_1(t), \ u(l,t) = h_2(t), \ -\alpha \leqslant t \leqslant \beta;$$

$$u(x,-\alpha) = \varphi(x), \ 0 \leqslant x \leqslant l,$$

где $F_1(x,t)$, $F_2(x,t)$, $\varphi(x)$, $h_1(t)$ и $h_2(t)$ – заданные достаточно гладкие функции, при этом $h_1(-\alpha) = \varphi(0)$, $h_2(-\alpha) = \varphi(l)$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$.

В 1959 году И.М. Гельфанд [1] предложил изучить задачу о движении газа в канале, окруженном пористой средой, при этом в канале движение газа описывалось волновым уравнением, а вне его – уравнением диффузии. В этой работе не было математической постановки задачи, и из физического смысла предлагаемой задачи вытекало, что такая задача должна изучаться в прямоугольной области. В связи с чем в нашей работе [2] была впервые поставлена и изучена указанная задача для уравнения (1) при $F_i(x,t) \equiv 0$, $h_i(t) \equiv 0$, $i = 1,2$, $l = 1$. В данной работе показано, что единственность решения и сходимость построенного ряда по собственным функциям одномерной спектральной задачи существенным образом зависят от отношения сторон $\tilde{\alpha} = \alpha / l$ прямоугольника D_- из гиперболической подобласти области D. По сравнению с работой [2] расширен диапазон изменения параметра $\tilde{\alpha}$, при которых получены оценки об отделенности от нуля малого знаменателя. Установлен критерий единственности. Решение задачи построено в виде суммы ряда Фурье.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ-Поволжье (проект № 14-01-97003).

Литература

[1] Гельфанд И. М. *Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений* // УМН. – 1959. – Т. XIV. – Вып. 3 (87). – С. 3–19.

[2] Сабитов К. Б. *Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа* // Матем. заметки. – 2009. – Т. 86. – Вып. 2. – С. 273–279.

О МНОГООБРАЗИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПРЯМЫХ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА S^1_N

И. И. Савоськина[1]

---

[1] *subzero92@mail.ru*, Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского

Квазиэллиптическое пространство S^1_n [1,с.284] является важным частным случаем квазириманова пространства V^1_n , которое пригодно для геометрического моделирования объектов с разноименными величинами. Будем называть прямые эллиптическими, если они не пересекаются с абсолютной плоскостью пространства S^1_n. Рассмотрим многообразие всех таких прямых. Можно к прямой этого многообразия так присоединить подвижной репер, чтобы уравнения инфинитезимального перемещения имели вид:

$$dA_a = \omega^b_a A_b + \omega^\iota_a A_\iota,\ dA_\iota = \omega^j_\iota A_j,\ d\omega^a_\iota = 0,\ \omega^b_a = -\omega^a_b,\ \omega^j_\iota = -\omega^j_\iota.$$

Индексы здесь и в дальнейшем принимают следующие значения: $a, b = 0, 1$; $\iota, j, k = 2, 3, \dots, n$.

Уравнения структуры этого многообразия записываются в виде:

$$D\omega^\iota_a = \omega^b_a \wedge \omega^\iota_b + \omega^j_a \wedge \omega^\iota_j,\ D\omega^j_\iota = \omega^k_j \wedge \omega^j_k,\ D\omega^1_0 = 0.$$

Так как тензор кривизны многообразия равен нулю, то можно построить изометричное отображение многообразия эллиптических прямых пространства S^1_n на евклидово пространство E_N, где $N = 2n - 2$ [1, с.469], а группа движений этого многообразия изоморфна не группе движений пространства E_N, а ее подгруппе. Эта подгруппа переводит в себя метрическую сегреану $S_{1,n-2}$: $rang\|x^\iota_a\| = 1$ в бесконечно удаленной гиперплоскости пространства E_N. Эта сегреана состоит из 1-параметрического семейства паратактичных $(n-2)$-мерных плоскостей и из $(n-2)$-параметрического семейства ортогональных им паратактичных прямых. Евклидово пространство E_N, за фундаментальную группу которого принимается эта подгруппа, называется Сегре-евклидовым пространством и обозначается sE_{2n-2}.

Теорема. *Сегре-евклидово пространство sE_{2n-2} является моделью многообразия эллиптических прямых квазиэллиптического пространства S^1_n.*

Конгруэнция ($(n-1)$-параметрическое семейство) эллиптических прямых изображается в Сегре-евклидовом простанстве $(n-1)$-мерной поверхностью. Рассматривая различные случаи расположения касательной плоскости этой поверхности относительно сегреаны, можно выделить частные классы конгруэнций прямых.

Литература

[1] Розенфельд Б. А. *Неевклидовы пространства*. – М. : Наука, 1966. – 546 с.

[2] Савоськина И. И. *Применение Сегре-евклидова пространства sE_{2n-2} для интерпретации многообразия прямых квазиэллиптического пространства S_n^1* // Научные труды КГУ, серия естественные науки. – Калуга: Изд-во КГУ им. К. Э. Циолковского, 2015. – С. 160–162.

О ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ КОМПОЗИЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ПОЛУГРУПП

В. Ж. Сакбаев[1]

---

[1] *fumi2003@mail.ru*, Московский физико-технический институт, Российский университет дружбы народов

В настоящей работе будут исследованы такие объекты как случайные операторы, случайные полугруппы и их итерации. Для последовательности композиций n независимых одинаково распределенных случайных полугрупп операторов изучается асимптотика отклонения композиции от ее математического ожидания при $n \to \infty$.

Для последовательностей $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}$, $n \in \mathbf{N}$, сумм независимых числовых случайных величин η_n, $n \in \mathbf{N}$, закон больших чисел утверждает, что $P(\{|S_n - M\eta| > \epsilon\}) \to 0$ при $n \to \infty$ для любого числа $\epsilon > 0$, где $M\eta$ – математическое ожидание случайной величины η_k и $P(\{|S_n - M\eta| > \epsilon\})$ – вероятность отклонения случайной величины S_n от ее математического ожидания более чем на ϵ. В настоящей статье для последовательности $\{\mathbf{U}_n\}$ независимых случайных величин со значениями в множестве однопараметрических полугрупп линейных операторов в гильбертовом пространстве H ставится вопрос об асимтотическом поведении последовательности $\mathbf{U}(n) = \mathbf{U}_n^{\frac{1}{n}} \circ \ldots \circ \mathbf{U}_1^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbf{N}$, композиций независимых случайных полугрупп $\mathbf{U}_n$, $n \in \mathbf{N}$.

Будем говорить, что для последовательности $\{\mathbf{U}(n)\}$ композиций случайных полугрупп со значениями в банаховом пространстве операторнозначных функций X выполняется закон больших чисел, если вероятность того, что отклонения композиции $\mathbf{U}(n)$ от ее математического ожидания по норме пространства X превосходит некоторое положительное число, стремится к нулю при $n \to \infty$. Будем говорить, что для последовательности $\{\mathbf{U}(n)\}$ композиций случайных полугрупп со значениями в топологическом векторном пространстве операторнозначных функций Y выполняется закон больших чисел, если для каждой полунормы p из семейства S, определяющего топологию на пространстве Y, вероятность того, что отклонения композиции $\mathbf{U}(n)$ от ее математического ожидания по полунорме p превосходит некоторое положительное число, стремится к нулю при $n \to \infty$.

В настоящей работе исследуются случайные полугруппы линейных преобразований банахова пространства, введенные и исследованные в статьях [1] и [2]. Установлены условия на случайные полугруппы операторов, достаточные для выполнения закона больших чисел; приведены примеры случайных полугрупп операторов, для которых закон больших чисел не выполнен.

Литература

[1] Ефремова Л. С., Сакбаев В. Ж. *Понятие взрыва множества решений дифференциальных уравнений и усреднение случайных полугрупп* // ТМФ. –2015. – Т. 185. – № 2. – С. 252–271.

[2] Орлов Ю. Н., Сакбаев В. Ж., Смолянов О. Г. *Формулы Фейнмана как метод усреднения случайных гамильтонианов* // Труды МИАН. –2014. –Т. 285. – С. 232-243.

ОБ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ ДЛЯ ЖЕСТКОСТИ КРУЧЕНИЯ

Р. Г. Салахудинов[1]

---

[1] *rsalakhud@gmail.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

Одной из классических проблем теории упругости является задача построения приближенной формулы для жесткости кручения через различные геометрические характеристики области. Постановка проблемы восходит к работам Лорда Рэлея, Коши и Сен–Венана [1]. Рассматриваемая проблема эквивалентна задаче построения двухсторонних изопериметрических неравенств, связывающих жесткость кручения и некоторый геометрический функционал области.

Существенное продвижение классической проблемы в классе односвязных областей было сделано в 1995 г. Авхадиевым [2]. Оказалось, что привычных классических геометрических характеристик области (длина границы, площадь и т. д.) не достаточно для решения задачи. В [2] дано её качественное решение в терминах интегрального функционала — евклидового момента инерции относительно границы, т. е.

$$\mathbf{I}_2(G) := \int_G \rho(x,G)^2 \mathrm{dA},$$

где $\rho(x,G)$ — функция расстояния до границы области.

В докладе рассматривается вопрос о точных границах для отношения функционалов жесткости кручения и евклидового момента инерции в некоторых классах областей. Будут представлены известные результаты, а также новые изопериметрические неравенства, подтверждающие известную гипотезу о константе 3.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан (проект 15-41-02433).

Литература

[1] Полиа Г., Сегё Г. *Изопериметрические неравенства в математической физики.* – М.: Физматгиз, 1962.

[2] Авхадиев Ф. Г. *Решение обобщенной задачи Сен–Венана* // Матем. сб. –1998. – Т. 189. – № 12. – С. 3–12.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ D-ГАРАНТИЙНЫХ ПРОЦЕДУРАХ ПРИ РАЗЛИЧЕНИИ ДВУСТОРОННИХ ГИПОТЕЗ

Р. Ф. Салимов[1]

[1] *rustem.salimov@gmail.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

$X^{(n)} = (X_1, ..., X_n)$ — выборка с функцией плотности $f(x|\theta)$, зависящей от неизвестного параметра $\theta \in R^1$. Предлагается построить критерий различения двух сложных гипотез $H_0 : \theta \in \Theta_0 = [\theta_0 - \Delta; \theta_0 + \Delta]$ и $H_1 : \theta \not\in \Theta_0$, когда параметр θ есть реализация случайной величины ϑ с известной плотностью $g(\theta)$ относительно меры Лебега. Предполагается, что $g(\theta)$ непрерывна в точках θ_0 и θ_1 и ограничена в R^1. Обычный критерий для проверки двусторонних гипотез, основанный на эффективных оценках параметра θ, имеет вид $|\hat{\theta_n} - \theta_0| < \Delta + c/\sqrt{n}$.

В данном сообщении константа c находится из условия оптимизации необходимого объема выборки (НОВ) для достижения малых ограничений на d−апостериорные вероятности ошибок первого, второго рода:

$$\mathscr{R}_k = \mathbf{P}\{\vartheta \not\in \Theta_k \mid |\hat{\theta_n} - \theta_0| \underset{>}{<} \Delta + c/\sqrt{n}\} \leqslant \beta_k, \quad k = 0, 1.$$

В [1] рассматривалась аналогичная постановка задачи, в которой предлагался критерий, основнный на статистике вклада.

Пусть

$$Q(c) = \varphi(\Phi^{-1}(c)) + c\Phi^{-1}(c), \quad 0 < c < 1,$$

$$\rho = \rho(\theta_0, \theta_1) = \left(g(\theta_0)I(\theta_0)^{-1/2} + g(\theta_1)I(\theta_1)^{-1/2}\right),$$

тогда с находится из уравнения

$$\frac{Q(c_0)}{Q(1-c_0)} = \left(\frac{1}{G(\theta_1) - G(\theta_0)} - 1\right)K.$$

НОВ n^* находится по формуле

$$n^* \asymp \left(\frac{\rho\, Q(1-c_0)}{G(\theta_1) - G(\theta_0)}\right)^2 \frac{1}{\beta_0^2}.$$

Теорема. *Пусть статистика* $\hat{X}$ *асимптотически нормальна* $N(\theta, \sigma^2(\theta)/n)$. *Если асимптотическая дисперсия удовлетворяет условию:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma^2(\theta)}{u^2+1} du < \infty,$$

тогда:

1) критерий указанного вида асимптотически d-гарантиен: $R_k(\delta_n^*) \to \beta_k$.

2) асимтотика минимального объема выборки $\hat{n}$ находится по формуле для НОВ n^*.

Точность аппроксимации была проанализирована на ряде конкретных вероятностных моделей: нормально-нормальная, экспоненциальная-гамма, коши-коши. Во всех моделях аппроксимации из теоремы показали удовлетворительную точность.

Литература

[1] Салимов Р. Ф. *Асимптотически оптимальные процедуры при различении двусторонних гипотез* // Обозрение прикладной и промышленной математики – 2013. – Т. 20. – № 2. – С. 152–153.

О СВЯЗНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОРНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ

А. Э. Сатторов[1]

---

[1] *asattorov50@mail.ru*, Курган-Тюбинский государственный университет, Таджикистан

Учеником П. А. Широкова, профессором Казанского университета Б. Л. Лаптевым [1] еще в 1946 году было введено понятие пространство опорных элементов (x, ω), где опорный объект ω — произвольный дифференциально-геометрический объект. Рассматриваемое пространство векторных плотностей относится к классу пространств опорных элементов, здесь опорным объектом служит векторная плотность u^i произвольного веса p [2].

Понятие связности в пространстве опорных элементов Б. Л. Лаптев вводит аксиоматическим путем, т.е. задаются объекты связности в пространстве, которые удовлетворяют определенным условиям. Если воспользоваться этим подходом, то объектами связности в пространстве векторных плотностей являются $L^i_{jk}(x, u)$ — объект аффинной связности и $C^i_{jk}(x, u)$ — тензорная плотность веса $-p$.

Б. Н. Шапуков [3], рассматривая пространство опорных элементов, как расслоенное пространство, вводит понятие линейной связности. Аналогичную ситуацию мы рассмотрим для пространства векторной плотности. Рассматриваемое пространство может быть отождествлено как векторное расслоение X с базой B ($\dim B = n$) и типовым слоем F ($\dim F = n$).

Рассмотрим отображение $h\colon X_{n,u} \to X$, тогда имеет место $x \to (X^A) = (x^i, u^i)$, где $x \in \varphi^{-1}(u)$, $U \subset C$, $\varphi\colon x \to B$, $A = \overline{1, n}$.

Преобразование $u^{i'} = \Delta^{-p} f^{i'}_i u^i$ определяет структурную группу $G_n \subset GL(n)$ векторного расслоенного пространство X. В нашем случае преобразования группы G определяется матрицей вида

$$f = \begin{bmatrix} f^{i'}_i & 0 \\ 0 & \Delta^{-1} f^{i'}_i . \end{bmatrix}$$

Рассмотрим $G_0 \subset G$, где компоненты $\Delta^{-p} f^{i'}_i \subset G_0$ определены через $u^{i'} = \Delta^{-p} f^{i'}_i u^i$.

Согласно [3] вводится форма связности

$$\omega^{\overline{i}} = B^{\overline{i}}_j dx^i + C^{\overline{i}}_j du^{\overline{j}},$$

где C^i_j — тензор слоя, и $\overline{i}, \overline{j}\ldots$ — индексы слоя. Тогда имеют место следующие определения.

A. *Линейная связность ω называется регулярной, если тензор $P^{\overline{i}}_{\overline{j}} = \delta^{\overline{i}}_{\overline{j}} + C^{\overline{i}}_{\overline{j}}$ невырожденный.*

B. *Регулярная линейная связность ω, удовлетворяющая условию*

$$\omega^{\overline{i}}_{\overline{j}} = \omega^i_j - d\Gamma^{\overline{i}}_i + \Gamma^{\overline{k}}_i \omega^i_j = 0,$$

где $\Gamma^{\overline{i}}_j = \widetilde{P}^{\overline{i}}_{\overline{k}} B^{\overline{k}}_i$ ($\widetilde{P}$ взаимный к P), называется приводимой.

C. *Связностью Б. Л. Лаптева называется регулярная приводимая связность, линейная форма которой задана своими значениями в подалгебре Ли a_0.*

Литература

[1] Лаптев Б.Л. *Ковариантный дифференциал и теория дифференциальных инвариантов в пространстве тензорных опорных элементов* // Уч. зап. Казанск. ун-та, 118:4, 1958. — С. 75–147.

[2] Сатторов А.Э. *Дифференциальные уравнения в геометрии пространства векторных плотностей* // Материалы респ. научн. конф. «Теория дифференциальных и интегральных уравнений и их приложения» ТНУ, (23–24 июня 2011 г.), Душанбе, 2011. — С. 108–110.

[3] Шапуков Б.Н. *Связности на дифференцируемых расслоениях* // ВИНИТИ, Итоги науки и техники, Проблемы геометрии, т. 15. — 1983. — С. 61–93.

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Д.С. Сафаров[1], М.С. Шодиев

---

[1] *safarov-5252@mail.ru*, Курган - Тюбинский госуниверситет, Таджикистан

На комплексной плоскости C рассмотрим нелинейную эллиптическую систему в комплексной форме

$$f(z)ww_{\overline{zz}} + g(z)w^2_{\overline{z}} + h(z)ww_{\overline{z}} + c(z)w^2 = 0, \tag{1}$$

где $z = x + iy$, $w = u + i\vartheta$, $2\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial_y$ — дифференциальный оператор Коши-Римана, $4\partial_{\overline{zz}} = \partial_{xx} - \partial_{yy} + 2i\partial_{xy}$ — дифференциальный оператор Бицадзе [1], $f(z) \neq$

$0, g(z), h(z), c(z)$ — заданные двоякопериодические функции с основными периодами ω_1, ω_2, $Im(\omega_2/\omega_1) \neq 0$.

Будем искать периодические решения уравнения (1) с периодами ω_1, ω_2, $Im(\omega_2/\omega_1) \neq 0$ и допускающие полюсы как мероморфные функции. Случай $f(z) = -g(z) \equiv const$ изучен в [2]. Как и в работе [2], решения уравнения (1) будем искать в виде

$$w(z) = \Phi(z) exp T_\zeta \varphi, \tag{2}$$

где $\Phi(z)-$ — мероморфная функция, имеющая полюсы в основном параллелограмме Ω решетки Γ, $\Gamma = \{z_0 + m_1\omega_1 + m_2\omega_2,;\ m_1, m_2 -$целая числа$\}$, $T_\zeta \varphi$ — интегральный оператор вида

$$T_\zeta \varphi = -\frac{1}{\pi} \iint_\Omega \varphi(t)\zeta(t-z) d_t\Omega, \quad \varphi_0 = -\frac{1}{\pi} \iint_\Omega \varphi(t) d_t\Omega.$$

Здесь $\zeta(z)$ — дзета-функция Вейерштрасса [3], построенная на периодах $\omega_1, \omega_2, \varphi(z)$ — искомая двоякопериодическая функция с периодами ω_1, ω_2 из класса $C^1(\overline{\Omega})$, то есть $\varphi(z) \in C^1_*$.

Тогда в силу свойства функции $F(z) = T_\zeta \varphi$ [3] в представлении (2) $\Phi(z)$ — эллиптическая функция второго рода [4], удовлетворяющая условиям

$$\Phi(z + \omega_j) = \Phi(z) exp(-\eta_j \varphi_0), \quad j = 1, 2. \tag{3}$$

Подставляя (2) в (1) для искомой функции $\varphi(z)$ получим нелинейное уравнение первого порядка типа Риккати, вида

$$f\varphi_{\overline{z}} + (f+g)\varphi^2 + h\varphi + c = 0. \tag{4}$$

Таким образом, для поставленой задачи достаточно найти регулярное, то есть класса C^1_* двоякопериодическое решение уравнения (4) [3].

Предположим, что $f \neq 0, g, h, c$ — двоякоперодические непрерывные по Гельдеру функции, с периодами ω_1, ω_2 и показателем α, $0 < \alpha < 1$, и

$$f(z) + g(z) + h(z) + c(z) = 0. \tag{5}$$

Теорема. *Пусть $b_1, b_2, ..., b_p$ — полюсы решения уравнения (1), выполнено условие (5) и $\varphi(z) \in C^1_*$ — решения уравнения (4). Тогда если $\varphi(z)$ не принимает значения один и $\varphi_0 \in \Gamma$, то уравнение (1) допускает решение с полюсами $b_1, b_2, ..., b_p$, когда выполнено условие*

$$\sum_{k=1}^{p} Res_{z=b_k} \Phi(z) = 0.$$

Если $\varphi_0 \overline{\in} \Gamma$, то уравнение (1) всегда допускает решение с задаными полюсами.

Литература

[1] Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных эллиптического типпа.* — М. : Наука, 1977.

[2] Сафаров Д.С. *Двоякопериодические решения одной нелинейной эллиптической системы второго порядка* // Тр. Матем. центра им.Н.И. Лобачевского. — Казань : Из-во Казан. матем. об-ва, 2015. — Т. 51. — С. 390–393.

[3] Сафаров Д.С. *Двоякоперидические обобщенные аналитические функции и их приложения*. — Душанбе : Дониш, 2012. — 190 с.

[4] Ахиезер Н.И. *Элементы теории эллиптических функций.* — М. : Наука, 1970, — 304 с.

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Р. М. Сафина[1]

---

[1] *rimma77705@mail.ru*, Поволжская государственная академия физической культуры, спорта и туризма

Рассмотрим уравнение смешанного типа второго рода с сингулярным коэффициентом

$$Lu \equiv u_{xx} + (\mathrm{sgn} y)|y|^m u_{yy} + \frac{k}{x} u_x - a^2 u = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y)|0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, где $k < 1$, $1 < m < 2$, l, $a \geqslant 0$, $\alpha > 0, \beta > 0$ – заданные действительные числа.

Задача Дирихле. *Требуется определить функцию функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x,y) \in C^2(D^+ \cup D^-) \cap C(\overline{D}), \tag{2}$$

$$\lim_{y\to 0+0} y^{m-1} u_y(x,y) = -\lim_{y\to 0-0} (-y)^{m-1} u_y(x,y), 0 < x < l, \tag{3}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \qquad (x,y) \in D^+ \cup D^-, \tag{4}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \qquad u(x,-\alpha) = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{5}$$

$$u(l,y) = 0, \qquad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta, \tag{6}$$

$$u(0,y) = 0, \qquad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta, \tag{7}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$, $D^+ = D \cap \{y > 0\}$, $D^- = D \cap \{y < 0\}$.

Отметим, что ранее первая граничная задача для уравнения смешанного типа в второго рода (1) при $k = 0$ методом спектральных разложений изучена в [1]. В [2] исследована задача Дирихле для уравнения (1) при всех $k < 1$ и $m = 0$.

В данной работе методом спектрального анализа установлен критерий единственности решения задачи Дирихле при всех $k < 1$ и $1 < m < 2$. Решение построено в виде суммы ряда Фурье-Бесселя. При обосновании сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей, как в работах [3, 4]. В связи с этим найдена оценка об отделенности малого знаменателя от нуля с соответствующей асимптотикой, которая позволило обосновать равномерную сходимость построенного ряда в классе функций (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-31-50008).

Литература

[1] Сабитов К. Б., Сулейманова А. Х. *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области* // Известия вузов. Математика. – 2007. – № 4. – С. 45–53.

[2] Сафина Р. М. *Задача Дирихле для уравнения Пулькина в прямоугольной области* // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучн.сер. – 2014. – № 10. – С. 91–101.

[3] Сабитов К. Б. *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области* // ДАН. – 2007. – Т.413. – № 1. – С. 23–26.

[4] Сабитов К. Б., Вагапова Э. В. *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения в прямоугольной области* // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т.49. – № 1. – С. 68–78.

СВЯЗЬ ГОЛОМОРФНЫХ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ И КОГОМОЛОГИЙ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ С КРАЕВЫМИ ЗАДАЧАМИ СОПРЯЖЕНИЯ

Е. В. Семенко[1], Т. И. Семенко

---

[1] *semenko54@gmail.com*, Новосибирский государственный педагогический университет

Теория голоморфных векторных расслоений, в частности когомологий с коэффициентами в пучке сечений расслоения, и теория краевых задач сопряжения аналитических функций на римановых поверхностях долгое время развивались независимо друг от друга, в частности, пользовались совершенно различным математическим аппаратом.

Нами установлена тесная связь между голоморфными векторными расслоениями и решением однородной краевой задачи, с одной стороны, и между когомологиями и решением неоднородной задачи, с другой стороны.

Однородная задача и голоморфные векторные расслоения. По краевому коэффициенту строится голоморфное векторное расслоение (расслоение решений однородной задачи), сечениям которого канонически соответствуют решения однородной задачи сопряжения. При этом установлено, что любое голоморфное векторное расслоение эквивалентно расслоению решений некоторой однородной задачи, причем соответствие между расслоениями и коэффициентами краевого условия взаимно однозначно с точностью до эквивалентности расслоений. Фактически это означает, что метод решения однородной задачи сопряжения автоматически задает классификацию векторных расслоений, равно как и наоборот, классификация расслоений дает возможность строить решения однородной краевой задачи.

Неоднородная задача и когомологии. Введем пространство X правых частей, для которых неоднородная задача разрешима, и фактор-пространство $H_0^1 = C^\alpha(L)/X$. Пространство H_0^1 задает условия разрешимости неоднородной задачи, в частности его размерность есть число условий разрешимости. Если расслоение E

эквивалентно расслоению решений однородной задачи, то имеется каноническое соответствие между 1-коциклами с коэффициентами в пучке сечений расслоения E и локальными решениями неоднородной задачи. При этом первая группа когомологий с коэффициентами в пучке сечений расслоения $H^1(E)$ изоморфна H_0^1. Фактически это утверждение сводит решение неоднородной задачи к анализу разрешимости 1-коциклов с коэффициентами в пучке сечений расслоения, в частности условия разрешимости неоднородной задачи задают “коциклические препятствия” к разрешимости 1-коциклов, т. е. первую группу когомологий.

Установленная связь между расслоениями/когомологиями и решением краевых задач дает возможность использовать в теории векторных расслоений методы и математический аппарат теории краевых задач. Полученные утверждения позволяют уточнить место теории краевых задач в общей теории римановых поверхностей.

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЭКЛУНДА

К. В. Семенов[1]

---

[1] *ksemen@mech.math.msu.su*, МГУ имени М. В. Ломоносова

Работа посвящена геометрической теории преобразований Бэклунда (ПБ) для эволюционного уравнения 3-го порядка с одной пространственной переменной. О геометрической теории ПБ уравнений 2-го порядка см. [1, 2].

Следуя Ф. Пирани и Д. Робинсону [3], преобразование Бэклунда (ПБ) рассматривается как частный случай более общего понятия отображения Бэклунда (ОБ). Задание ОБ интерпретируется как задание связности, определяющей представление нулевой кривизны для заданного эволюционного уравнения.

Ранее было установлено, что эволюционное уравнение 3-го порядка допускает ОБ (в указанном определении) в том и только в том случае, когда оно имеет вид

$$z_t + K(z, z_x, z_{xx}) \cdot z_{xxx} + L(z, z_x, z_{xx}) = 0.$$

Частным случаем этих уравнений являются уравнения типа: $z_t + z_{xxx} + M(z, z_x) = 0$.

Доказано, что такие уравнения допускают ОБ только тогда, когда они имеют вид

$$z_t + z_{xxx} + \beta(z)(z_x)^3 + \alpha(z) \cdot z_x = 0.$$

Среди этих уравнений содержатся уравнения

$$z_t + z_{xxx} + \alpha(z) \cdot z_x = 0,$$

одним из которых является известное уравнение Кортевега-де Фриза $z_t - 6z \cdot z_x - z_{xxx} = 0$.

Доказано, что уравнения указанного вида допускают ПБ (в указанном смысле) в том и только в том случае, когда они имеют вид

$$z_t + z_{xxx} + \frac{\varphi(z)}{az+b} \cdot z_x = 0,$$

при этом получена система уравнений с частными производными, задающая ПБ (т.н. система Бэклунда).

В работе изучается результат применения данного ПБ к указанному уравнению.

Литература

[1] Рыбников А. К., Семенов К. В. *Связности Бэклунда и отображения Бэклунда, соответствующие эволюционным уравнениям второго порядка* // Известия вузов. Математика. – 2004. – No 5. – С. 52–68.

[2] Рыбников А. К. *Теория связностей и проблема существования преобразований Бэклунда для эволюционных уравнений второго порядка* //ДАН, 2005. – Т. 400, No 3. – С. 319–322.

[3] Pirani F. A. E., Robinson D. C. *Sur la definition des transformations de Backlund* // C.R. Acad. Sc. Paris; Serie A. – 1977. – V. 285. – P. 581–583.

ТОПОЛОГИЯ ДИНАМИКИ НЕОДНОРОДНОГО ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ, ДВИЖУЩЕГОСЯ ПО ГЛАДКОЙ ПЛОСКОСТИ

Г. М. Сечкин[1]

---

[1] *ego-rish@ya.ru*, Московский государственный университет, Мехенико-математический факультет, Кафедра Дифференциальной геометрии и приложений

Постановка задачи. Рассмотрим тяжелое твердое тело, имеющее форму симметричного эллипсоида, которое движется по гладкой горизонтальной плоскости, под действием силы тяжести. Пусть распределение масс таково, что тело обладает осью динамической симметрии, которая совпадает с осью геометрической симметрии, причем центр масс лежит на этой оси (аналог волчка Лагранжа) на расстоянии s от центра тела.

Основная цель исследования - классификация слоений Лиувилля на трехмерных изоэнергетических поверхностях. То есть, классификация с точностью до совпадений замыканий интегральных траекторий.

Системы уравнений и первые интегралы. Как известно, свободное твердое тело обладает шестью степенями свободы.

В рассматриваемом нами случае имеется одна голономная связь: высота центра масс над плоскостью определяется ориентацией центральных главных осей. Таким образом, число степеней свободы понижается до пяти.

Теорема. *Рассматриваемая система, при любом значении параметра s, обладает четырьмя функционально независимыми интегралами. А именно: геометрический —* $\Gamma = \langle \mathbf{R}, \mathbf{R} \rangle$, *интеграл площадей —* $G = \langle \mathbf{S}, \mathbf{R} \rangle$, *гамильтониан —* $H = \frac{1}{2}\langle \mathbf{MS}, \mathbf{S} \rangle + mg(b_1^2R_1^2 + b_1^2R_2^2 + b_3^2R_3^2)^{1/2} + mgsR_3$, *и интеграл Лагранжа* $K = S_3$. *Матрица* $\mathbf{M}$ *задает переход от вектора угловых скоростей к каноническим импульсам* $\mathbf{S}$. *А* $\mathbf{R}$ *— проекции вектора восходящей нормали на главные оси эллипсоида.*

Таким образом система является вполне интегрируемой.

Жуковский обнаружил обобщение интегрируемого случая Эйлера: гиростат с присоединенными массами. Гамильтониан $H = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ совпадает с эйлеровским, а дополнительный интеграл обобщает интеграл Эйлера $K = \Sigma\frac{(S_i+\lambda_i)^2}{2A_i}, i \in$ $1,2,3$. В данной задаче роль параметров играют A_i, λ_i. Первые соответствуют распределению масс в гиростате, а λ_i отвечают за моменты, создаваемые присоединенными массами вокруг главных осей инерции. В механике этот случай носит название гиростата Жуковского-Вольтерра. А.А. Ошемков построил бифуркационные диаграммы [3], а П. Й. Топалов посчитал инварианты Фоменко-Цишанга [4].

Теорема *Система динамически симметричного эллипсоида на гладкой плоскости полностью вкладывается, в смысле лиувиллевой эквивалентности, в систему тяжелого гиростата Жуковского-Вольтерра. То есть для любого значения параметров задачи эллипсоида существуют такие параметры системы Жуковского-Вольтерра, для которых инварианты совпадают.*

Литература

[1] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. *Интегрируемые гамильтоновы системы.* – Т. 1, 2, Ижевск : РХД, 1999. – 443 с.

[2] Ивочкин М. Ю. *Топологический анализ движения эллипсоида по гладкой плоскости.* // Матем. сб. – 2008. –199:6. – С. 85–104.

[3] Ошемков А. А. *Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела* // Труды семинара по векторному и тензорному анализ. – Вып. 25. – Часть 2. – Изд-во МГУ, 1993. – С. 23–109.

[4] Поталов П. Й. *Вычисление тонкого инварианта Фоменко-Цишанга для основных интегрируемых случаев движения твердого тела.*// Матем. сб. – 1996. – Т. 187. – № 3. – С.143–160.

ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ ПОЛУПОЛЕЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С MAX-СЛОЖЕНИЕМ РЕШЕТКАМИ ИХ ПОДАЛГЕБР

В. В. Сидоров[1]

---

[1] *sedoy_vadim@mail.ru*, Вятский государственный университет

Мы продолжаем исследование, начатое в работе 1, и доказываем следующую теорему.

Теорема. *Для любого топологического пространства X полуполе $U^\vee(X)$ определяется каждой из решеток $\mathbb{A}(U^\vee(X))$ и $\mathbb{A}_1(U^\vee(X))$.*

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект 1.1375.2014/K).

Литература

[1] Вечтомов Е. М., Сидоров В. В. *Определяемость хьюиттовских пространств решетками подалгебр полуполей непрерывных положительных функций с max-сложением* // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2015. – Т. 21. – № 3. – С. 78–88.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПО ОТЫСКАНИЮ СОМНОЖИТЕЛЕЙ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЧАСТЬЮ

С. Н. Сидоров[1]

---

[1] *stsid@mail.ru*, Институт прикладных исследований РБ, г. Стерлитамак

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu = F(x,t) = \begin{cases} f(x)g_1(t), & t > 0, \\ f(x)g_2(t), & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - u_t - b^2 u, & t > 0, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b^2(-t)^m u, & t < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t) | 0 < x < l, -\alpha < t < \beta\}$, где $b \geqslant 0$, $m > 0$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $g_1(t)$ и $g_2(t)$ – заданные соответственно действительные числа и функции, и поставим следующую задачу.

Обратная задача. *Найти в области D функции $u(x,t)$ и $f(x)$, удовлетворяющие следующим условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^1_x(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C^2_x(D_+);$$

$$f(x) \in C(0,l) \cap L_2[0,l];$$

$$Lu(x,t) \equiv F(x,t), \ (x,t) \in D_- \cup D_+;$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \ -\alpha \leqslant t \leqslant \beta;$$

$$u(x,-\alpha) - u(x,\beta) = \varphi(x), \ u_t(x,-\alpha) = \varphi(x), \ 0 \leqslant x \leqslant l,$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, при этом $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$.

Отметим, что прямая задача с нелокальным условием $u(x,-\alpha) - u(x,\beta) = \chi(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, для уравнения (1) при $F(x,t) \equiv 0$ в прямоугольной области D была изучена в работе [1]. Обратная задача с другим нелокальным условием $u_t(x,-\alpha) - u_t(x,\beta) = \zeta(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, для уравнения (1) при $g_1(t) = g_2(t) \equiv 1$ рассмотрена в статье [2].

В данной работе найдены необходимые и достаточные условия единственности решения. Решение задачи строится в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. При обосновании существования решения задачи возникает проблема малых знаменателей [1, 2], затрудняющая сходимость построенного ряда. В связи с чем установлены оценки об отделенности от нуля малого знаменателя с соответствующей асимптотикой, которые позволили обосновать равномерную сходимость построенного ряда в классе регулярных решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ-Поволжье (проект № 14-01-97003).

Литература

[1] Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. *Об одной нелокальной задаче для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения* // Дифф. ур. – 2014. – Т. 50. – № 3. – С. 356–365.

[2] Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. *Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием* // Изв. вузов. Математика. – 2015. – № 1. – С. 46–59.

ПРОЦЕДУРЫ РАЗЛИЧЕНИЯ МНОГИХ ГИПОТЕЗ ПРИ МНОЖЕСТВЕННОМ ТЕСТИРОВАНИИ

Д. С. Симушкин[1]

---

[1] *simdim555@gmail.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

При статистической обработке биологических испытаний в настоящее время наиболее популярной характеристикой процедуры выступает коэффициент FDR (от false discovery rate), показывающий относительную долю ошибочно отвергнутой нулевой гипотезы. В монографии Б. Эфрона [1] этот коэффициент анализируется с точки зрения байесовского подхода на примере выявления генов, активность которых повышается при наличии заболевания. Предложена следующая модель. Средняя активность того или иного гена в группе пациентов с изучаемым заболеванием отличается от средней активности этого же гена у здоровых пациентов на величину θ. Параметр θ есть реализация бинарной случайной величины ϑ, принимающей с вероятностью π_0 значение $\vartheta = 0$ и некоторое фиксированное значение $\vartheta = \theta_0$ с вероятностью $\pi_1 = 1 - \pi_0$.

Стандартный анализ данных из монографии [1], на которых иллюстрируются предлагаемые методы, не соответствуют описанной выше модели. Кроме того, в подобного рода исследованиях представляет интерес не только вероятность ошибочного отклонения нулевой гипотезы в пользу односторонней альтернативы.

Мы предлагаем, во-первых, обобщение модели Б. Эфрона, в которой параметр ϑ имеет распределение смеси из трёх нормальных законов: с вероятностью π_0 среднее значение нормального распределения равно 0, с вероятностями π_1, π_2 $(\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1)$ это среднее равно μ_1 (< 0) и μ_2 (> 0) соответственно. Эта модель прекрасно согласуется с данными [1] (p-значение критерия минимума хи-квадрат равно 0.79).

Во-вторых, в рамках предлагаемой модели рассмотрена задача построения критерия различения трех гипотез $H_1 : \theta \in \Theta_1 = (-\infty, 0), H_0 : \theta \in \Theta_1 = 0,\ H_2 : \theta \in \Theta_1 =$

$(0,+\infty)$. Гипотезы H_1, H_2 отвечают ситуациям, когда заболевание приводит к понижению или повышению активности гена. В качестве контролируемых характеристик решающей функции δ выбираются условные вероятности

$$Q_k(\delta) = P\{\vartheta \in \Theta_k \mid \delta = d_k\}$$

с соответствующим решением d_k в пользу гипотезы $H_k,\ k = 0,1,2$.

Установлено, что среди решающих функций, отвергающих нулевую гипотезу в пользу H_1 или H_2, если наблюдаемая статистика $X < C_1$ или $X > C_2$ соответственно, максиминным свойством обладает та решающая функция, для которой все три характеристики надежности совпадают: $Q_1 = Q_2 = Q_3$. Отметим, что для данных, приведенных в [1], для этого критерия характеристики надежности достаточно высоки $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0.944$. В то же время, при различении только двух гипотез, например $H_0 : \theta = 0$ и $H_1 : \theta \underset{\neq}{>} 0$, нельзя построить критерий с достаточной надежностью обоих решений.

Литература

[1] Efron B. *Large–scale Inference.* – New York.: Cambridge University Press, 2010. – 536 p.

НАИБОЛЕЕ ТОЧНЫЕ НАДЕЖНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ

С. В. Симушкин[1]

---

[1] *smshkn@gmail.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

В статье [1] проблема доверительного оценивания рассматривалась с точки зрения d-апостериорного подхода к надёжности статистического вывода. Применительно к задаче построения двусторонних доверительных множеств предложенный в [1] способ предполагает, что для каждого результата наблюдений $X = x$ выдаётся семейство $\mathscr{B} = \mathscr{B}(x)$ интервалов вида $[a;b]$, удовлетворяющее при любых $a < b$ условию

$$\mathbf{P}\{\vartheta \in [a;b] \mid \mathscr{B}(X) \ni [a;b]\} \geqslant 1 - \beta,$$

где ϑ — истинное (случайное) значение оцениваемого параметра, индексирующего вероятностное распределение наблюдаемой сл.в. X, $(1-\beta)$ — заранее заданный уровень надёжности. Здесь предлагается другой подход к определению надёжности, адаптированный к обычному способу построения доверительных интервалов с помощью двух статистик.

Определение. *Пара статистик* $\underline{\theta} < \overline{\theta}$ *образует надёжный интервал (уровня* $(1-\beta)$*), если с вероятностью единица условная вероятность, вычисляемая относительно сигма-алгебры, порождённой вектором* $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$,

$$\mathbf{P}\{\vartheta \in [\underline{\theta};\overline{\theta}] \mid (\underline{\theta},\overline{\theta})\} \geqslant 1 - \beta.$$

Любой байесовский интервал, т.е. интервал $[\underline{\theta};\overline{\theta}]$, для которого $R(\underline{\theta},\overline{\theta}\,|\,x) \geqslant 1-\beta$, где апостериорная вероятность

$$R(a,b\,|\,x) = \mathbf{P}\{\vartheta \in [a;b] \mid X = x\},$$

будет надёжным интервалом. Среди байесовских интервалов часто существует интервал минимальной ширины.

Для построения оптимального надёжного интервала определим $\chi = \chi(a,b)$ как точку достижения максимума (по x) апостериорной вероятности $R(a,b\,|\,x)$, а также функцию $T^*(a) = \min\{b : R(a,b\,|\,\chi) \geqslant 1-\beta\}$.

Теорема. *Если найдётся статистика $\theta_*(x)$ такая, что при всех x имеет место равенство $\chi(\theta_*(x),\theta^*(x)) = x$ с $\theta^*(x) = T^*(\theta_*(x))$, то*

a) интервал $[\theta_*;\theta^*]$ — надёжный интервал уровня $(1-\beta)$;

b) для любого другого надёжного интервала $[\underline{\theta};\overline{\theta}]$

$$\mathbf{P}\big\{\theta_*(\xi) < \underline{\theta}(X) < \overline{\theta}(X) < \theta^*(\xi)\big\} = 0,$$

где X,ξ — независимые копии выборки.

Другими словами, если в каком-то эксперименте построен интервал $[\theta_*;\theta^*]$, то никакая другая пара надёжных границ ни в каком другом эксперименте не даст более узкий интервал.

Примеры.

1. Если выборка X поступает из нормального распределения со средним θ, а θ в свою очередь есть реализация нормальной случайной величины ϑ, то оптимальный надёжный интервал совпадает с байесовским интервалом минимальной ширины $[\underline{\theta};\overline{\theta}] = \arg\min\big\{b-a : R(a,b\,|\,x) \geqslant 1-\beta\big\}$.

2. В случае выбора из экспоненциального распределения со средним $1/\theta$ и гамма-распределением ϑ интервал $[\theta_*;\theta^*]$ совпадает с байесовским интервалом минимальной относительной ширины $[\underline{\theta};\overline{\theta}] = \arg\min\big\{b/a : R(a,b\,|\,x) \geqslant 1-\beta\big\}$.

Литература

[1] Володин И. Н., Симушкин С. В. *Доверительное оценивание в d-апостериорном подходе*// Теор. вероят. и ее примен. – 1990. – Т. 35. – № 2. – С. 242–254.

О СПЕЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ КАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ РИМАНОВА ПРОСТРАНСТВА

Е. Н. Синюкова[1]

---

[1] *Marbel@ukr.net*, Южноукраинский национальный педагогический университет имени К.Д. Ушинского (Одесса, Украина)

Рассмотрение в римановом пространстве V^n римановой системы координат позволяет как для произвольного тензора, так и для объекта аффинной связности этого пространства получить инвариантный ряд типа ряда Тейлора, члены которого зависят не только от координат текущей точки, но и от касательного элемента в ней. Если в рядах для компонент $g_{ij}(x)$ метрического тензора пространства V^n и для компонент $\Gamma^h_{ij}(x)$ объекта аффинной связности пространства V^n соответственно отказаться от слагаемых третьего, второго и больших порядков малости относительно компонент y^h касательного элемента, получаются компоненты метрического тензора

$$\widetilde{g}_{ij}(x;y) = g_{ij}(x) + \frac{1}{3}R_{i\alpha\beta j}(x)y^\alpha y^\beta$$

и компоненты объекта аффинной связности

$$\widetilde{\Gamma}^h_{ij}(x;y) = \Gamma^h_{ij}(x) - \frac{1}{3}R^h_{(ij)\alpha}(x)y^\alpha,$$

которые определяют на V^n геометрию, подобную финслеровой, но отличную от неё, естественным образом связанную с инвариантной теорией приближений в римановых пространствах [1]. С использованием операции типа полного лифта [2] на касательном расслоении $T(V^n)$ построена метрика

$$ds^2 = \widetilde{g}_{\alpha\beta}(x;y)Dy^\alpha \widetilde{D}y^\beta,$$

где

$$Dy^h = dy^h + \Gamma^h_{\alpha\beta}(x)y^\alpha dx^\beta,$$
$$Dy^h = dy^h + \widetilde{\Gamma}^h_{\alpha\beta}(x;y)y^\alpha dx^\beta.$$

Изучены некоторые геометрические свойства пространства касательного расслоения $T(V^n)$ с такой метрикой. В частности, рассмотрены вопросы существования геодезических отображений и проективных преобразований таких пространств в случаях, когда базовое пространство V^n является пространством постоянной кривизны или пространством Эйнштейна. При этом частично использован аппарат исследования автоморфизмов расслоенных пространств, построенный Б.Н. Шапуковым [3].

Литература

[1] Синюков Н. С., Синюкова Е. Н., Мовчан Ю. А. *Некоторые актуальные аспекты развития теории геодезических отображений римановых пространств и её обобщений* // Изв. вузов, Математика. – 1994. – № 3(382). – С. 76–80.

[2] Широков А. П. *Структуры на дифференцируемых многообразиях* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия. – Москва, 1969. – С. 127–188.

[3] Шапуков Б. Н. *Автоморфизмы расслоенных пространств* // Труды геом. сем. Казанск. ун.-та. – 1982. – Т. 14. – С. 97–108.

ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ПОЧТИ КОНТАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА ПЯТИМЕРНЫХ ГРУППАХ ЛИ

Я. В. Славолюбова[1]

[1] *jar1984@mail.ru*, Кемеровский институт (филиал) РЭУ имени Г.В. Плеханова

Рассмотрим 5-мерную алгебру Ли $aff(\mathbf{R}) \times \mathfrak{u}$, являющуюся прямым произведением аффинной алгебры Ли $aff(\mathbf{R})$ и трехмерной унимодулярной алгебры Ли $\mathfrak{u}$. Напомним, что алгебра Ли $aff(\mathbf{R})$ имеет одно коммутационное соотношение $[e_1, e_2] = e_2$. Классификация трехмерных унимодулярных алгебр Ли известна [1], она включает следующие алгебры Ли: $\mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{so}(3)$, $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})$, $\mathfrak{o}(1,2)$, $\mathfrak{e}(2)$, $\mathfrak{e}(1,1)$, $\mathfrak{h}_3$, $\mathbf{R}^3$.

В базисе $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ алгебра Ли $aff(\mathbf{R}) \times \mathfrak{u}$ имеет следующие выражения скобок Ли:

1. $aff(\mathbf{R}) \times \mathfrak{su}(2) \cong aff(\mathbf{R}) \times \mathfrak{so}(3)$: $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_3, e_4] = e_5$, $[e_4, e_5] = e_3$, $[e_3, e_5] = -e_4$.
2. $aff(\mathbf{R}) \times \mathfrak{sl}(2,\mathbf{R}) \cong aff(\mathbf{R}) \times \mathfrak{o}(1,2)$: $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_3, e_4] = 2e_4$, $[e_3, e_5] = -2e_5$, $[e_4, e_5] = e_3$.
3. $aff(\mathbf{R}) \times \mathfrak{e}(2)$: $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_3, e_4] = -e_5$, $[e_3, e_5] = e_4$.
4. $aff(\mathbf{R}) \times \mathfrak{e}(1,1)$: $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_3, e_4] = e_5$, $[e_3, e_5] = -e_4$.
5. $aff(\mathbf{R}) \times \mathfrak{h}_3$: $[e_1, e_2] = e_2$, $[e_3, e_4] = e_5$.

Определим левоинвариантную почти контактную метрическую структуру $(\eta, \xi, \varphi_0, g_0)$ на группе Ли, соответствующей алгебре Ли $aff(\mathbf{R}) \times \mathfrak{u}$, относительно базиса $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$. Действие аффинора φ_0 на базисных векторах $(e_1, \ldots, e_5)$ зададим следующим образом: $\varphi(e_1) = e_2$, $\varphi(e_2) = -e_1$, $\varphi(e_3) = e_4$, $\varphi(e_4) = -e_3$, $\varphi(e_5) = 0$. Зафиксируем также метрику $g_0 = e_1^{*2} + e_2^{*2} + e_3^{*2} + e_4^{*2} + e_5^{*2}$, где e_i^* – ковекторы, дуальные к e_i. В качестве характеристического векторного поля ξ можно взять одно из базисных векторных полей $\xi = \pm e_i$, $i = 1,..,5$. Соответствующие наиболее простые почти контактные формы $\eta = \pm e_i^*$, $i = 1,..,5$. В результате исследования построенных левоинвариантных почти контактных метрических структур $(\eta, \xi, \varphi_0, g_0)$ получим следующий результат.

Теорема 1. *Пусть R – группа Ли размерности 5, соответствующая алгебре Ли $aff(\boldsymbol{R}) \times \mathfrak{u}$, где $\mathfrak{u}$ – любая трехмерная унимодулярная алгебра Ли, наделена левоинвариантной почти контактной метрической структурой $(\eta = \pm e_i^*, \xi = \pm e_i, \varphi_0, g_0)$, $i = 1,..,5$. Тогда:*

1. При $\eta = \pm e_3^*$ нормальную структуру допускают группы Ли, соответствующие следующим алгебрам Ли: $aff(\boldsymbol{R}) \times \mathfrak{e}(2)$, $aff(\boldsymbol{R}) \times \mathfrak{e}(1,1)$.

2. При $\eta = \pm e_5^*$ нормальную структуру допускает группа Ли, соответствующая алгебре Ли $aff(\boldsymbol{R}) \times \mathfrak{h}_3$.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президента “Ведущие научные школы РФ” (проект НШ-9740.2016.1).

Литература

[1] Milnor J. *Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups* // Advances in Mathematics 21. – Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey 08540, 1976. – P. 293–329.

РАНГИ ПЛАНАРНОСТИ МНОГООБРАЗИЙ КОММУТАТИВНЫХ ПОЛУГРУПП

Д. В. Соломатин[1]

---

[1] *solomatin_dv@omgpu.ru*, Омский государственный педагогический университет

Весьма актуальной является проблема нахождения рангов планарности многообразий полугрупп, сформулированная Л. М. Мартыновым [1].

Определение. *Пусть $\boldsymbol{V}$ – произвольное многообразие полугрупп. Если существует такое натуральное число $r \geqslant 1$, что все $\boldsymbol{V}$-свободные полугруппы ранга $\leqslant r$ допускают планарный граф Кэли, а $\boldsymbol{V}$-свободная полугруппа ранга $r+1$ уже не допускает планарный граф Кэли, то рангом планарности многообразия $\boldsymbol{V}$ называется это число $r = r_\pi(\boldsymbol{V})$. Если для многообразия $\boldsymbol{V}$ такого натурального числа не существует, то говорят, что многообразие $\boldsymbol{V}$ имеет бесконечный ранг планарности и пишут $r_\pi(\boldsymbol{V}) = \infty$.*

Нами исследовались вопросы планарности многообразий коммутативных моноидов и графов Кэли во многих классах полугрупп [2]–[3]. В частности, известно [2], что рангами планарности многообразий моноидов могут быть только числа 1, 2 и 3. Все указанные числа могут быть рангами планарности и многообразий коммутативных полугрупп, но здесь появляется многообразие полугрупп с нулевым умножением с бесконечным рангом планарности. В связи с этим, возникает естественный вопрос: будет ли ранг планарности любого нетривиального многообразия коммутативных полугрупп принимать лишь значения 1, 2, 3 или ∞? Положительный ответ на него даёт следующая

Теорема. *Нетривиальное многообразие коммутативных полугрупп либо имеет бесконечный ранг планарности и при этом совпадает с многообразием полугрупп с нулевым умножением, либо имеет ранг планарности 1, 2 или 3.*

Идея доказательства теоремы заключается в применении конфигураций (см., например, рис.1), иллюстрирующих непланарность основ графов Кэли свободных полугрупп некоторых многообразий коммутативных полугрупп относительно небольшого числа образующих, и их модификаций, получаемых путем отождествления некоторых вершин, для доказательства непланарности графов Кэли свободных полугрупп широкого класса многообразий полугрупп, либо для сведения задачи к многообразиям, ранги планарности которых известны.

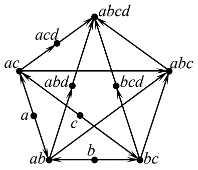

Рис.1

Литература

[1] Мартынов Л. М. [и др.] *Новые проблемы алгебры и логики. Юбилейное 900-е заседание семинара* // Омский алгебраический семинар, ОФ ИМ СОРАН, г. Омск, – 12 ноября 2015 г. [Офиц. сайт]. URL: http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=12900

[2] Соломатин Д. В. *Ранги планарности многообразий коммутативных моноидов* // Вестник Омского университета. – Омск: Изд-во ОмГУ., 2012. – Вып. 4. – С. 41–45.

[3] Соломатин Д. В. *Планарные многообразия полугрупп* // Сиб. электрон. матем. изв. – 2015. – Т. 12. – С. 232–247.

ОСНОВНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ КОНЕЧНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Е. Н. Сосов[1]

---

[1] *evgenii.sosov@kpfu.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики имени Н. И. Лобачевского

Пусть $\mathbb{K}$ — множество конечных метрических пространств одной и той же мощности $N > 1$.

1. *Функция $F : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ называется основным метрическим инвариантом, если выполняются следующие условия $(i–iii)$.*

(i) *$F(X) = F(Y)$ для любых изометричных метрических пространств X, $Y \in \mathbb{K}$.*

(ii) *Для любого $(X, \rho) \in \mathbb{K}$*

$F(X) \in \{\rho(x, y) : x, y \in X,\ x \neq y\}$.

(iii) *Для любых (X, ρ), $(Y, d) \in \mathbb{K}$ $|F(X) - F(Y)| \leqslant 2d_s(X, Y)$, где $d_s(X, Y) = \frac{1}{2}\min\{\operatorname{dis} f : f : X \to Y$ — биекция$\}$, $\operatorname{dis} f = \max\{|\rho(x, y) - d(f(x), f(y))| : x, y \in X\}$* [1].

Примерами основных инвариантов являются диаметр пространства $\mathrm{D}(X)$ (см. [1], [2], с. 305) и K-радиусы, где $1 \leqslant K \leqslant N - 1$, пространства X: $\mathrm{R}_K(X) = \min\{\beta(X, S) : S \subset X, 1 \leqslant \operatorname{card}(S) \leqslant K\}$, здесь $\beta(X, S) = \max\{\rho(x, S) : x \in X\}$, $\operatorname{card}(S)$ — мощность множества S [1].

2. *Пусть $S \subset X$, $\operatorname{card}(S) = k$, где $2 \leqslant k \leqslant N$, $\mathrm{Ld}(S)$ — упорядоченный по неубыванию набор всех расстояний между различными точками в S. $\mathrm{Ld}_n(S)$ — n-й элемент из $\mathrm{Ld}(S)$ $(1 \leqslant n \leqslant C_k^2)$. $\mathrm{Ld}_{mnk}(X)$ — m-й элемент в упорядоченном по неубыванию списке из элементов $\mathrm{Ld}_n(S)$, полученном при переборе всех $S \subset X$ мощности k $(1 \leqslant m \leqslant C_N^k)$.* Отметим, что $\mathrm{Ld}_{m12}(X) = \mathrm{Ld}_{1mN}(X) = \mathrm{Ld}_m(X)$, $\mathrm{Ld}_{11k}(X) = \mathrm{Ld}_1(X) = \mathrm{R}_{N-1}(X)$, $\mathrm{Ld}_{21k}(X) = \mathrm{Ld}_2(X) = \mathrm{R}_{N-2}(X)$, $\mathrm{Ld}_{C_N^k, C_k^2, k}(X) = \mathrm{Ld}_{C_N^2}(X) = \mathrm{D}(X)$.

3. *Пусть $S \subset X$, $\operatorname{card}(S) = r$, где $1 \leqslant r \leqslant [N/2]$, $[N/2]$ — целая часть $N/2$. Обозначим через $\mathrm{Lc}(S)$ упорядоченный по неубыванию набор всех расстояний между точками, первая из которых пробегает S, а вторая пробегает $X \backslash S$, и $\mathrm{Lc}_q(S)$ — q-й элемент из $\mathrm{Lc}(S)$ $(1 \leqslant q \leqslant r(N - r))$. $\mathrm{Lc}_{lqr}(X)$ — l-й элемент в упорядоченном по неубыванию списке из элементов $\mathrm{Lc}_q(S)$, полученном при переборе всех $S \subset X$ мощности r $(1 \leqslant l \leqslant C_N^r)$.* Отметим, что $\mathrm{Lc}_{11r}(X) = \mathrm{Ld}_1(X)$, $\mathrm{Lc}_{21r}(X) = \mathrm{Ld}_2(X)$, $\mathrm{Lc}_{C_N^r, r(N-r), r}(X) = \mathrm{D}(X)$.

4. *Пусть $S \subset X$, $\operatorname{card}(S) = s$, где $3 \leqslant s \leqslant N$. $\mathrm{Lr}_{ijs}(X)$ — i-й элемент в упорядоченном по неубыванию списке из элементов $\mathrm{R}_j(S)$ $(1 \leqslant j \leqslant N - 1)$, полученном при переборе всех $S \subset X$ мощности s $(1 \leqslant i \leqslant C_N^s)$.* Отметим, что $\mathrm{Lr}_{1jN}(X) = \mathrm{R}_j(X)$, $\mathrm{Lr}_{C_N^s, (s-1), s}(X) = \mathrm{Ld}_{C_N^s, 1, s}(X)$, $\mathrm{Lr}_{C_N^s, (s-2), s}(X) = \mathrm{Ld}_{C_N^s, 2, s}(X)$.

Теорема. *Пусть $2 \leqslant k \leqslant N$, $1 \leqslant n \leqslant C_k^2$, $1 \leqslant m \leqslant C_N^k$, $1 \leqslant r \leqslant [N/2]$, $1 \leqslant q \leqslant r(N - r)$,*

$1 \leqslant l \leqslant C_N^r$, $3 \leqslant s \leqslant N$, $1 \leqslant j \leqslant N-1$, $1 \leqslant i \leqslant C_N^s$. *Тогда функции* Ld_{mnk}, Lc_{lqr}, Lr_{ijs} *являются основными метрическими инвариантами на множестве* $\mathbb{K}$.

Литература

[1] Сосов Е. Н. *Об основных метрических инвариантах конечных метрических пространств.* II // Изв. вузов. Матем. –2016. –№ 6. – С. 86–90.

[2] Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. *Курс метрической геометрии.* – Москва–Ижевск: Институт компьютерных иследований, 2004. – 512 с.

О МНОГОГРАННИКАХ С СИММЕТРИЧНЫМИ РОМБИЧЕСКИМИ ВЕРШИНАМИ

В. И. Субботин[1]

---

[1] *geometry@mail.ru*, Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ)

В работе рассмотрены два класса замкнутых выпуклых многогранников в трёхмерном евклидовом пространстве. Особенностью многогранников обоих классов является то, что звёзды некоторых их вершин состоят из равных ромбов.

Определение 1. *Вершина многогранника называется ромбической, если её звезда состоит из равных одинаково расположенных ромбов.*

Определение 2. *Ромбическая вершина называется симметричной, если она расположена на нетривиальной оси вращения многогранника.*

Определение 3. *Ромбическая вершина называется изолированной, если её звезда не имеет общих элементов со звездой любой другой ромбической вершины многогранника.*

Отметим, что во втором определении требование расположения вершины на оси вращения можно заменить на более слабое: вершина должна располагаться на нетривиальной оси вращения звезды и совокупности граней, имеющих общие элементы со звездой рассматриваемой вершины [1].

Если ограничиться многогранниками, каждая вершина которых является симметричной ромбической, но не изолированной, то класс таких многогранников исчерпывается ромбическим додекаэдром и ромботриаконтаэдром [2].

Первый из введённых классов многогранников определяется так, что каждая его вершина является изолированной ромбической. При этом каждая грань F, не входящая в звезду ромбической вершины, имеет нетривиальную ось вращения, перпендикулярную F. Предполагается, что эта ось вращения является осью вращения звезды грани F.

Второй класс многогранников определяется как класс с двумя симметричными изолированными ромбическими вершинами, разделёнными равными правильными многоугольниками одного типа. Причём, ромбические “шапочки” обеих вершин равны между собой.

Доказана следующая теорема, на основании которой находятся все пять типов многогранников первого класса.

Теорема. *Всякий многогранник первого класса может быть получен при помощи преобразования отсечения некоторых трёхгранных вершин одного из сильно симметричных относительно вращения граней многогранников и последующего симметричного продления полученных треугольных сечений до ромбов.*

Доказана также теорема о перечислении всех трёх типов многогранников второго класса.

Литература

[1] Субботин В. И. *О некоторых обобщениях сильно симметричных многогранников* // Чебышевский сб., – 2015. – Т. 16. – № 2. – С. 222–230.

[2] Субботин В. И. *Перечисление многогранников, сильно симметричных относительно вращения* // Тр. участн. международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимова. – Ростов-на-Дону, 2002. – С. 77–78.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СИНЕКТИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ А.П. ШИРОКОВА НА СУММЕ УИТНИ КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ

А. Я. Султанов[1]

---

[1] *sultanovaya@rambler.ru*, Пензенский гос. университет

Изучая касательные расслоения $T^k(M_n)$, А.П. Широков установил, что на $T^k(M_n)$ существует гладкая структура над алгеброй плюральных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon^k)$. Он также показал, что вещественная реализация голоморфной линейной связности $\widetilde{\nabla}$ на $T^k(M_n)$ задается линейной связностью ∇ и тензорными полями Γ_λ $(\lambda = 1, 2, ..., k)$ типа (1,2). Эта связность называется синектическим расширением полного лифта связности ∇ с помощью тензорных полей Γ_λ [1].

В настоящем сообщении рассматривается синектическая связность ∇^{Sh} А.П. Широкова на сумме Уитни $\bigoplus\limits_{i=1}^{k} T_i(M_n)$ касательных расслоений $T_i(M_n) = T(M_n)$. Это расслоение можно рассматривать как расслоение А. Вейля $M_n^{\mathbb{A}}$ над алгеброй $\mathbb{A} = \{a_0 + a_\lambda \varepsilon^\lambda | a_0, a_\lambda \in \mathbb{R}, \varepsilon^\lambda \varepsilon^\mu = 0, \lambda, \mu = 1, 2, ..., k\}$, которая изоморфна сумме Уитни k экземпляров алгебры дуальных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon)$. Для функции $f \in C^\infty(M_n)$ функция $f^{\mathbb{A}}$, заданная на $M^{\mathbb{A}}$ называется естественным продолжением функции f в алгебру $C^\infty(M_n^{\mathbb{A}})$. Пусть $a^* : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ – линейная форма, тогда можно определить функцию $f_{(a^*)} = a^* \circ f^{\mathbb{A}}$. Для произвольного векторного поля X на M_n и фиксированного элемента $a \in \mathbb{A}$ существует единственное векторное поле $X^{(a)}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$, удовлетворяющее условию $X^{(a)} f_{(b^*)} = (Xf)_{(b^* \cdot a)}$ [2].

Предположим, что на базе M расслоения $M_n^{\mathbb{A}}$ заданы линейная связность $\nabla = \Gamma_0$ и тензорные поля Γ_λ $(\lambda = 1, 2, ..., k)$ типа (1,2). Синектическая связность ∇^{Sh} А.П. Широкова на $M_n^{\mathbb{A}}$ определяется условием [2]

$$\nabla^{Sh}_{X^{(a)}} Y^{(b)} = (\Gamma_\alpha(X,Y))^{(\epsilon^\alpha ab)},$$

где по α ведется суммирование от 0 до k, a, b – произвольные элементы алгебры $\mathbb{A}$.

Тензорные поля кручения T^{Sh} и кривизны R^{Sh} удовлетворяют соотношениям $T^{Sh} = T_\alpha^{(\alpha)}$, $R^{Sh} = R_\alpha^{(\alpha)}$ (по α ведется суммирование от 0 до k) [2]. Среди связностей ∇^{Sh} существуют локально симметрические пространства, которые выделяются следующими условиями П.А. Широкова: $T^{Sh} = 0, \nabla^{Sh} R^{Sh} = 0$.

Теорема 1. *Связность ∇^{Sh} является локально симметрической тогда и только тогда, когда $T_\alpha = 0$ и $\nabla R_\alpha = 0 (\alpha = 0, 1, ..., k)$.*

Отметим свойство связности ∇^{Sh} относительно действия группы автоморфизмов $Aut\mathbb{A}$ алгебры $\mathbb{A}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$.

Теорема 2. *Линейная связность ∇^{Sh} А.П. Широкова, заданная на $M_n^{\mathbb{A}}$ является инвариантной относительно действия группы $Aut\mathbb{A}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$ тогда и только тогда, когда $\nabla^{Sh} = \nabla^C$, ∇^C – полный лифт линейной связности ∇.*

Литература

[1] Вишневский В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В. *Пространства над алгебрами.* – Казань:Изд-во Казанского ун-та, 1985. – 263 с.

[2] Султанов, А. Я. *Продолжения тензорных полей и связностей в расслоения Вейля* // Изв. вузов. Математика, 1999. –№9. – С. 64–78.

[3] Широков П. А. *Избранные работы по геометрии.* – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1966.

ДВИЖЕНИЯ В КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ СО СВЯЗНОСТЬЮ ПОЛНОГО ЛИФТА НАД ПРОЕКТИВНО-ЕВКЛИДОВОЙ БАЗОЙ

Г. А. Султанова[1]

Пусть $T(M)$ – касательное расслоение над многообразием M. В работе [1] приведены определения лифтов функций, векторных полей, линейных связностей из M в $T(M)$. Пусть $X \in \Im_0^1(M)$. На $T(M)$ векторные поля $X^{(1)}$ и $X^{(0)}$ в локальных координатах определяются соотношениями: $X^{(1)} = (X^i)_{(0)}\partial_i^1$, $X^{(0)} = (X^i)_{(0)}\partial_i^0 + (\partial_j X^i)_{(0)} x_1^j \partial_i^1$. Если на базе M задана линейная связность ∇, то на $T(M)$ существует единственная линейная связность $\nabla^{(0)}$, удовлетворяющая условиям [1]: $\nabla^{(0)}_{X^{(0)}} Y^{(0)} = (\nabla_X Y)^{(0)}$, $\nabla^{(0)}_{X^{(0)}} Y^{(1)} = \nabla^{(0)}_{X^{(1)}} Y^{(0)} = (\nabla_X Y)^{(1)}, \nabla^{(0)}_{X^{(1)}} Y^{(1)} = 0$. Векторное поле $\tilde{X}$ называется инфинитезимальным аффинным преобразованием расслоения $T(M)$ со связностью $\nabla^{(0)}$, если $L_{\tilde{X}} \nabla^{(0)} = 0$ [1].

---

[1] *sultgaliya@yandex.ru*, Пензенский гос. университет

Известно, что инфинитезимальное аффинное преобразование $\tilde{X}$ пространств $(T(M), \nabla^{(0)})$ над проективно-евклидовой базой имеет вид [3]:

$$\tilde{X} = X^{(0)} + Y^{(1)} + \gamma G, \tag{1}$$

где $X, Y \in \Im_0^1(M)$, $G \in \Im_1^1(M)$, удовлетворяющие условиям: $L_X\nabla = 0, L_Y\nabla = 0$, $\nabla G = 0, R \overset{1}{\bullet} G - G \overset{1}{\bullet} R = 0$, причем $R \overset{1}{\bullet} G(X, Y, Z) = R(G(X), Y)Z$, $G \overset{1}{\bullet} R(X, Y, Z) = G(R(X, Y)Z)$, а векторное поле γG определяется условием $\gamma G = (G_i^j)_{(0)} x_1^i \partial_j^1$.

Обозначим через $\tilde{L}$ алгебру Ли векторных полей вида (1), а через $L^\alpha (\alpha = 0, 1, 2)$ – ее подалгебры Ли векторных полей вида $X^{(0)}, Y^{(1)}$, γG и перейдем к оценке сверху их размерностей. Рассмотрим случай, когда компонента симметрической части тензора Риччи $c_{11} \neq 0$ и существует составляющая антисимметрической части тензора Риччи $a_{12} \neq 0$. Тогда группа движений пространств (M, ∇) в этом случае содержит не более $n^2 - n + 1$ параметров [2]. Отсюда получаем, что $\dim L^0 + \dim L^1 \leqslant 2n^2 - 2n + 2$.

Оценим размерность подалгебры L^2, рассмотрев пространство решений уравнения $\nabla G = 0$. Используя условия интегрируемости этого уравнения, соотношения $R \overset{1}{\bullet} G - G \overset{1}{\bullet} R = 0$, и соотношения, выражающие тензор кривизны R для проективно-евклидовых пространств через тензор Риччи, мы получим, что $G_k^i = \delta_k^i g$. Подставив найденные компоненты G_k^i в уравнение $\nabla G = 0$, получим $\partial_k g = 0$, следовательно g – произвольная постоянная. Значит, $\dim L^2 = 1$. Если $c_{11} \neq 0$, а все составляющие вида $a_{1i} = 0$, но существует составляющая $c_{23} \neq 0$, то $\dim \tilde{L} \leqslant 2n^2 - 4n + 7 < 2n^2 - 2n + 3$. Таким образом, имеет место

Теорема. *Размерность алгебр Ли* $\tilde{L}$ *инфинитезимальных аффинных преобразований пространства* $(T(M), \nabla^{(0)})$ *над проективно-евклидовой базой с несимметричным тензором Риччи не превосходит* $2n^2 - 2n + 3$.

Литература

[1] Yano, K., Ishihara, S. *Tangent and Cotangent Bundles.* — Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.

[2] Егоров, И.П. *Движения в пространствах аффинной связности. Уч. зап. Пенз. пед.инст. – Казань: Изд-во Каз. гос. унив-та, 1965. – С. 5-179.*

[3] Шадыев, Х. *Аффинная коллинеация синектической связности в касательном расслоении* // Труды геом. сем. – 1984. – №16. – С. 117–127.

ПОЛУГРУППЫ ЭНДОМОРФИЗМОВ УНАРОВ НЕРЕГУЛЯРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

С. В. Сыроватская[1]

---

[1] *svs_kagi@mail.ru*, Волгоградский государственный социально-педагогический университет

Унаром называется алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, f \rangle$ с одной унарной операцией f. Необходимые термины из теории унаров можно найти в [1]. Всякое многообразие унаров определяется одним тождеством вида $xf^k = xf^{k+h}$ (регулярное многообразие) либо вида $xf^m = yf^m$ (нерегулярное многообразие) ($k, h, m \in \mathbb{N}_0$) [2].

Пусть $\mathfrak{R} = \langle R, * \rangle$, $\mathfrak{S} = \langle S, * \rangle$ — полугруппы. *Сплетением* $\mathfrak{R} \operatorname{wr}^Y \mathfrak{S}$ *полугрупп* $\mathfrak{R}$ *и* $\mathfrak{S}$ *посредством правого* $\mathfrak{S}$*-полигона* Y [см. 3] называется полугруппа $\langle R^Y \times S, * \rangle$, где R^Y — множество всех отображений множества Y во множество R и для произвольных $\tau_1, \tau_2 \in R^Y$, $s_1, s_2 \in S$, $(\tau_1, s_1) * (\tau_2, s_2) = (\tau_3, s_1 * s_2)$, где $y\tau_3 = (y\tau_1) * ((ys_1)\tau_2)$ для любого $y \in Y$.

Теорема 1. *Полугруппа эндоморфизмов любого унара из нерегулярного многообразия является делителем полугруппы эндоморфизмов некоторого унара из этого же многообразия, не имеющего нециклических узловых элементов.*

Подполугруппу $\{f^m \mid m \in \mathbb{N}_0\}$ полугруппы $\operatorname{End}\mathfrak{A}$ будем обозначать через $\chi_{\mathfrak{A}}$. Далее $\mathfrak{A}$ — неодноэлементный унар нерегулярного многообразия, не имеющий нециклических узловых элементов.
$\{a_i \mid i \in I\}$ — множество всех минимальных элементов $\mathfrak{A}$. Определим два семейства идеалов полугруппы $\chi_{\mathfrak{A}}$:
для любого $i \in I$, $J_i = \left\{f^k \mid \mathbb{N}_0 \ni k \geqslant d(a_i)\right\}$; для произвольных $i, j \in I$,
$K_{i,j} = \begin{cases} \chi_{\mathfrak{A}}, & \text{если } d(a_i) \leqslant d(a_j), \\ \left\{f^l \mid \mathbb{N}_0 \ni l \geqslant d(a_i) - d(a_j)\right\}, & \text{если } d(a_i) > d(a_j). \end{cases}$ $\mathfrak{T}(X) = \langle T(X), \cdot \rangle$ — правая симметрическая полугруппа X. Пусть $X = \{x_i \mid i \in I\}$.

Теорема 2. *Если* $\mathfrak{A}$ *не является моногенным, тогда* $\operatorname{End}\mathfrak{A} \cong K/\theta$*, где* $K = \left\{(\tau, t) \in \chi_{\mathfrak{A}}^X \times T(X) \mid (\forall i \in I)(x_i t = x_j \Rightarrow x_i\tau \in K_{i,j})\right\}$ *есть подполугруппа сплетения* $\chi_{\mathfrak{A}} \operatorname{wr}^X \mathfrak{T}(X)$ *(*X *— естественный полигон над* $\mathfrak{T}(X)$*), конгруэнция* θ *определена по правилу: для любых* $(\tau_1, t_1), (\tau_2, t_2) \in K$

$$(\tau_1, t_1)\theta(\tau_2, t_2) \overset{def}{\Leftrightarrow}$$
$$(\forall i \in I)\left[(x_i\tau_1 \,\theta_{J_i}\, x_i\tau_2) \& (x_i\tau_1 \notin J_i \Rightarrow x_i t_1 = x_i t_2)\right],$$

(θ_{J_i} *— конгруэнция Риса полугруппы* $\chi_{\mathfrak{A}}$ *по идеалу* J_i*).*

Литература

[1] Карташов В. К. *Квазимногообразия унаров* // Математические заметки. – 1980. – Т. 27. – № 1. – С. 7–20.

[2] Мальцев А. И. *Алгебраические системы* – М.: Наука, 1970. – 392 с.

[3] Артамонов В. А., Салий В. Н., Скорняков Л. А., и др. *Общая алгебра. Т. 2.* – М.: Наука, 1991. – 480 с.

ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НУЛЕЙ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ВЫДЕЛЯЕМЫХ МАЖОРАНТОЙ КЛАССА КАРТРАЙТ

Г. Р. Талипова[1]

---

[1] *talipovagaliya@gmail.com*, Башкирский государственный университет

Полагаем $\mathbb{C}_\pm := \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_* := \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\mathbb{C}_* := \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Для произвольной функции $M\colon \mathbb{C}\to[-\infty,+\infty]$ определим *весовой класс* Ent(exp M):= $\{f$ — целая функция: $\left|f(z)\right| \leqslant \mathrm{const}_f\, e^{M(z)},\ z\in\mathbb{C}\}$, где $\mathrm{const}_f \geqslant 0$ — постоянная.

Следуя В. И. Мацаеву и М. Л. Содину (2002 г.), функцию $u\colon \mathbb{C}\to[-\infty,+\infty]$ называем *функцией класса Картрайт*, если

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\max\{0,u(x)\}}{x^2}\,dx<+\infty$$

и выполнены условия: 1) u — субгармоническая в $\mathbb{C}$ с гармоническим сужением $u\,\big|_{\mathbb{C}_\pm}$; 2) $u(z)=u(\bar z)$ для всех $z\in\mathbb{C}$ и $u(0)=0$; 3) u — функция конечного типа при порядке 1. Класс всех функций Картрайт обозначаем через $\mathscr{C}$.

Класс тестовых функций RP_0 — подмножество всех *полунепрерывных сверху функций* $\phi\geqslant 0$ на $\mathbb{R}_*$ для которых выполнены 1) *условие финитности* $\phi\equiv 0$ вне некоторого отрезка;
2) *условие полунормировки в нуле* $\limsup_{0\neq x\to 0}\phi(x)/|\log|x||\leqslant 1$; 3) для любого $x_0\in\mathbb{R}_*$ при некотором $r_{x_0}\in\big(0,|x_0|\big]$

$$\phi(x_0)\leqslant\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x_0+x)\,\frac{1}{x}\,\log\left|\frac{x+r}{x-r}\right|dx\quad\text{при всех } r\in(0,r_{x_0}).$$

Теорема. *Пусть* $0\notin\Lambda=\{\lambda_k\}_{k=1,2,\dots}\subset\mathbb{C}$, *а* $M\in\mathscr{C}$ *с функцией распределения* $\nu_M^{\mathbb{R}}$ *на* $\mathbb{R}$ *ее меры Рисса* ν_M. *Тогда*
1) *если* Λ *— последовательность неединственности для* Ent(exp M), *функция* M *ограничена снизу на некотором интервале* $(-b,b)\subset\mathbb{R}$, $b>0$, *то имеет место соотношение*

$$\sup_{\phi\in\mathrm{RP}_0}\left(\sum_k(\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm}\phi)(\lambda_k)-\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)\,d\nu_M^{\mathbb{R}}(t)\right)<+\infty,\qquad(1)$$

где $\mathrm{P}_{\mathbb{C}_\pm}\phi$ *— преобразование Пуассона функции* ϕ *в* $\mathbb{C}_\pm$*;*
2) *если соотношение* (1) *выполнено для* $\phi\in\mathrm{RP}_0$, *то для любого числа* $\varepsilon>0$ *последовательность* Λ *— последовательность неединственности для* Ent(exp $\mathrm{M}^{*\varepsilon}$), *где*

$$M^{*\varepsilon}(z):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}M(z+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta\ \textit{при}\ |\Im z|<\varepsilon,$$

$$M^{*\varepsilon}(z):=M(z)\ \textit{при}\ |\Im z|\geqslant\varepsilon.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект № 16-01-00024.

Литература

[1] Хабибуллин Б. Н., Талипова Г. Р, Хабибуллин Ф. Б. *Подпоследовательности нулей для пространств Бернштейна и полнота систем экспонент в пространствах функций на интервале* //Алгебра и анализ. 2014. Т. 26, № 2. С. 193–223

[2] Талипова Г. Р., Хабибуллин Б. Н. *Последовательности единственности для классов целых функций экспоненциального типа, ограниченных на вещественной оси* //Вестник Башкирского университета. –2015. Т. 20, № 1. С. 5–9.

[3] Байгускаров Т. Ю., Талипова Г. Р., Хабибуллин Б. Н. *Подпоследовательности нулей для классов целых функций экспоненциального типа, выделяемых ограничениями на их рост вдоль вещественной оси* // Алгебра и анализ. 2016. Т. 26, № 2. С. 1–33.

ОБОБЩЕННЫЕ АЛГЕБРЫ ИНЦИДЕНТНОСТИ

Д. Т. Тапкин[1]

---

[1] *danil.tapkin@yandex.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

В теории колец и модулей большую роль играют кольца формальных матриц. Среди них часто выделяют один интересный класс колец. А именно, кольца формальных матриц $K(\{M_{ij}\}:\{\varphi_{ikj}\})$ порядка n, в которых $M_{ij} = R$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Эти кольца называются кольцами формальных матриц порядка n над (со значением в кольце) R и обозначаются $K_n(R)$ или $K_n(R : \{\varphi_{ikj}\})$. В этом случае $\varphi_{ijk}(a \otimes b) = \eta_{ijk}ab$ для всех $a, b \in R$ и некоторого $\eta_{ijk} \in C(R)$. Кольцо $K_n(R)$ будет алгеброй если и только если кольцо R коммутативно.

Пусть теперь кольцо R коммутативно. Рассмотрим алгебру формальных матриц порядка n, в которой $M_{ii} = R$, для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, а каждый бимодуль M_{ij}, $i \neq j$, равен либо R, либо 0. Нетрудно видеть, что снова $\varphi_{ijk}(a \otimes b) = \eta_{ijk}ab$ для всех $a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$ и некоторого $\eta_{ijk} \in R$. Назовем эту алгебру A и положим $\eta = \{\eta_{ijk}\}$.

С алгеброй A можно связать множество с отношением $(X, \leqslant)$, где $X = \{1, \dots, n\}$ и $i \leqslant j$ в X если и только если M_{ij} отличен от нуля. Заимствуя нотацию из теории алгебр инцидентности, множество X:

- рефлексивно;
- η-транзитивно: если $a \leqslant b$, $b \leqslant c$ и $\eta_{abc} \neq 0$, то $a \leqslant c$.

Также потребуем наличие обобщенной локальной конечности: множество $\{z \mid x \leqslant z \leqslant y$ и $\eta_{xzy} \neq 0\}$ конечно $\forall x, y \in X$. В этом случае будем говорить что задана *обобщенная алгебра инцидентности* $I(X, R; \eta)$ порядка n над (со значением в кольце) R. Множество X будем называть η-предпорядком. Если же дополнительно выполняется свойство $a \leqslant b$, $b \leqslant a$, $\eta_{aba} \neq 0$ влечет $a = b$ (η-антисимметричность), то будем говорить что на X задан *частичный η-порядок*. На множестве X можно ввести отношение эквивалентности: $x \sim y$ если и только если $\eta_{xyx} \in U(R)$.

Были изучены обобщенные алгебры инцидентности конечного порядка со значением в коммутативном локальном кольце R. Получен критерий изоморфизма таких алгебр, в ослабленной форме имеющий следующий вид.

Теорема. *Пусть R — коммутативное локальное кольцо, X – -конечный η-предпорядок, а Y — конечный μ-предпорядок. Тогда если $I(X,R;\eta) \cong I(Y,R;\mu)$ как алгебры, то найдется биекция $\varphi : X \to Y$, сохраняющая отношение $' \leqslant'$, такая что для любой тройки $x \leqslant y \leqslant z \in X$ $\eta_{xyz} = v_{xyz}\mu_{xyz}$, где $v_{xyz} \in U(R)$.*

Изучен вопрос обратимости ослабленного критерия, автоморфизмы обобщенных алгебр инцидентности. Результаты перенесены на кольца формальных матриц над коммутативными локальными кольцами. Получены приложения для классических алгебр инцидентности.

Литература

[1] Крылов П. А. *Об изоморфизме колец обощенных матриц* // Алгебра и логика – 2008. – Т. 47. – № 4. – С. 145–211.

[2] Тапкин Д. Т. *Кольца формальных матриц и обобщение алгебры инцидентности* // Чебышевский сб. – 2015. – Т. 16. – № 3. – С. 422–449.

О ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ ГАРМОНИЧНОСТИ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ РАЗНОСТНОМУ УРАВНЕНИЮ ЛАПЛАСА

Д. С. Теляковский[1]

---

[1] —, Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ

В работе ослабляются достаточные условия гармоничности функций двух переменных.

Пусть функция $u(z)$ определена в области $G \subset \mathbb{R}^2$, точка $z_0 \in G$ и $A_{z_0} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ — набор из четырёх точек области G, для которого отрезки $[z_1;z_2]$ и $[z_3;z_4]$ взаимно перпендикулярны и пересекаются в своей внутренней точке z_0. Обозначим $r_j := |z_j - z_0|$, $u_j := u(z_j)$, $j = 1,\dots,4$. Положим

$$\Delta^{(*)}u(z_0) = 2\frac{u_1r_2 - u_0(r_1+r_2) + u_2r_1}{r_1r_2(r_1+r_2)} + 2\frac{u_3r_4 - u_0(r_3+r_4) + u_4r_3}{r_3r_4(r_3+r_4)}.$$

Будем говорить, что функция $u(z)$ удовлетворяет в точке z_0 *обобщённому разностному уравнению Лапласа* $\Delta^{(*)}u = 0$, если предел $\Delta^{(*)}u(z_0; A_{z_0}^{(n)})$ равен нулю хотя бы для одной последовательности наборов узлов $\{A_{z_0}^{(n)}\}$, стягивающейся к z_0. Для разных последовательностей наборов узлов $\{A_{z_0}^{(n)}\}$, стягивающихся к точке z_0, пределы $\Delta^{(*)}u(z_0; A_{z_0}^{(n)})$ могут быть разными или не существовать.

Прямоугольным крестиком с центром в точке ζ будем называть объединение двух взаимно перпендикулярных интервалов $a_1(\zeta)$ и $a_2(\zeta)$, которые пересекаются в своей середине — точке ζ. Теперь определим условие непрерывности, которое будет накладываться на функцию $u(z)$ в точках области G. Пусть $h(t)$, $t \geqslant 0$, — функция типа модуля непрерывности. Если найдутся прямоугольный крестик T_ζ и число $L_\zeta > 0$, для которых во всех точках $z \in T_\zeta$ выполнено неравенство $|u(z)-u(\zeta)| \leqslant L_\zeta h(|z-\zeta|)$, то функцию $u(z)$ будем называть *h-регулярной в точке $\zeta \in G$ относительно крестика T_ζ.*

Теорема. *Пусть функция $|u(z)|$ локально суммируема в области $G \subset \mathbb{R}^2$, а $h(t)$, $t \geqslant 0$, — некоторая функция типа модуля непрерывности. Если в каждой точке $\zeta \in G$ функция $u(z)$ удовлетворяет обобщённому разностному уравнению Лапласа и является h-регулярной относительно некоторого прямоугольного крестика T_ζ, то функция $u(z)$ гармонична в области G.*

АФФИННЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

П. А. Терехин[1]

Пусть $f = w+\sum_{n=2}^{\infty} a_n w_n$ – ряд Фурье–Уолша функции $f \in L^2[0,1]$. *Дуальной функцией* назовем формальный ряд по системе Уолша $g \sim w+\sum_{n=2}^{\infty} b_n w_n$, коэффициенты которого определяются из рекуррентных соотношений

$$\sum_{\nu=0}^{k} a(s_0,\dots,s_{\nu-1})b(s_\nu,\dots,s_{k-1}), \qquad k \geqslant 1,$$

где полагаем, что $x(s_0,\dots,s_{k-1}) = x_n$ при $n = \sum_{\nu=0}^{k-1} s_\nu 2^\nu + 2^k$ (двоичное разложение).

Аффинной системой функций типа Уолша, порожденной функцией f, называется последовательность

$$f_n(t) = f(2^k t)\prod_{\nu=0}^{k-1} r_\nu^{s_\nu}(t), \qquad n = 1,2,\dots,$$

где снова $(s_0,\dots,s_{k-1})$ – коэффициенты двоичного разложения числа n и $r_k(t)$, $k = 0,1,\dots,$ – функции Радемахера.

Обозначим через $\mathscr{L}^2[0,1]$ – пространство функций $h \in L^2[0,1]$, имеющих абсолютно сходящийся по пачкам ряд Фурье–Уолша, т. е. $\sum_{k=0}^{\infty}\bigl(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}|(h,w_n)|^2\bigr)^{1/2} < \infty$.

Теорема. *Для того чтобы аффинная система функций типа Уолша $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ была базисом Рисса, необходимо, чтобы дуальная функция $g \in L^2[0,1]$ и достаточно, чтобы обе функции $f,g \in \mathscr{L}^2[0,1]$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00152).

Литература

[1] Терехин П. А. *Аффинные базисы Рисса и дуальная функция* // Матем. сборник. – 2016. – Т. 207.

---

[1] *terekhinpa@mail.ru*, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

[2] Mironov V. A., Sarsenbi A. M., Terekhin P. A. *Affine Bessel sequences and Nikishin's example* // Filomat. – 2016. – V. 30.

[3] Аль-Джоурани Х., Миронов В. А., Терехин П. А. *Аффинные системы функций типа Уолша. Полнота и минимальность* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – Т. 16.

[4] Sarsenbi A. M., Terekhin P. A. *Riesz basicity for general systems of functions* // Journal of Function Spaces. – 2014. – V. 2014.

[5] Терехин П. А. *Аффинные системы функций типа Уолша. Ортогонализация и пополнение* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ Х. ХАДВИГЕРА

Б. С. Тимергалиев[1]

---

[1] *timergalievbs@mail.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

Классическое неравенство Брунна-Минковского позволяет сравнить площади и объемы областей, оно имеет вид:

$$|\Omega_0+\Omega_1|^{1/n} \geqslant |\Omega_0|^{1/n} + |\Omega_1|^{1/n},$$

где $|\Omega|$ – мера множества Ω, Ω_0, Ω_1–выпуклые тела в $\mathbb{R}^n$, $\Omega_0+\Omega_1 := \{z_0+z_1 \in \mathbb{R}^n : z_0 \in \Omega_0, z_1 \in \Omega_1\}$ — векторная сумма.

Наш интерес к этой тематике связан с результатами Г. Кэди [1], который доказал неравенство типа Брунна-Минковского для функционала, введенного Ф.Г. Авхадиевым [2]. Развитие результата Г. Кэди, а также неравенства для новых типов функционалов были получены в работах [3], [4]. Целью данной работы является обобщение результатов Х. Хадвигера [5], доказавшего неравенство типа Брунна-Минковского для двух моментов выпуклой области.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, представимая в виде объединения конечного числа выпуклых областей. Определим функционал

$$I(k,\Omega) = \int\limits_{\Omega} \left(\alpha_1|x_1-s_1|^k + \dots + \alpha_n|x_n-s_n|^k\right)^m dx,$$

где $s_1, s_2, \dots, s_n$– координаты точки минимума функции

$$I(y) = \int\limits_{\Omega} \left(\alpha_1|x_1-y_1|^k + \dots + \alpha_n|x_n-y_n|^k\right)^m dx,$$

переменных $y=(y_1,y_2,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$; $x_1,x_2,\dots,x_n$ — декартовы координаты точки $x \in \Omega$; $k \in (0,\ 1]$ при $m \in (0,1)\cup(1,+\infty)$ и $k \in (0,+\infty)$ при $m=1$; $\alpha_j (j=\overline{1,n}) \in (0,\ +\infty)$ — произвольные действительные числа.

Теорема. *Пусть Ω_0, Ω_1 – ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, представимые в виде объединения конечного числа выпуклых областей. Тогда имеет место неравенство*

$$I(k;m;\Omega_t)^{1/(km+n)} \geqslant (1-t)I(k;m;\Omega_0)^{1/(km+n)} + tI(k;m;\Omega_1)^{1/(km+n)},$$

где $\Omega_t = \{(1-t)z_0 + tz_1 \mid z_0 \in \Omega_0, z_1 \in \Omega_1\}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $k \in (0,\ 1]$ *при* $m \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ *и* $k \in (0,+\infty)$ *при* $m = 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-00351).

Литература

[1] Keady G. *On a Brunn-Minkowski theorem for a geometric domain functional considered by Avhadiev* // J. Inequal. Pure Appl. Math. – 2007. – V. 8. – P. 1–10.

[2] Авхадиев Ф. Г. *Решение обобщенной задачи Сен-Венана* // Матем. сб. – 1998. – № 12. – С. 3–12.

[3] Авхадиев Ф. Г., Тимергалиев Б. С. *Неравенства типа Брунна-Минковского для конформных и евклидовых моментов областей* // Изв. вуз. Матем. – 2014. – № 1. – С. 90–106.

[4] Тимергалиев Б. С. *Неравенства типа Брунна-Минковского в форме Хадвигера для степенных моментов* // Уч. зап. Каз. Ун. – 2016. – № 12. – С. 3–12.

[5] Hadwiger H. *Konkave eikerperfunktionale und hoher tragheitsmomente* // Comment Math. Helv. – 1956. – V. 30. – P. 285–296.

О ВЫПУКЛЫХ ТЕЛАХ С ПАРКЕТНЫМИ ГРАНЯМИ

А. В. Тимофеенко[1], Е. С. Отмахова[2]

---

[1] *a.v.timofeenko62@mail.ru*, Сибирский федеральный университет

[2] *nasait123@mail.ru*, Краевое бюджетное образовательное учреждение Школа дистанционного образования

Паркетным называется выпуклый равноугольный или составленный из равноугольных многоугольников многоугольник. В докладе будет отражено состояние вопроса классификации выпуклых многогранников с паркетными гранями. Среди таких тел находим правильногранную пирамиду ${}^2M_3$ с пятиугольным основанием и рёбрами длины 2, архимедово тело M_{19} с пятиугольником и двумя шестиугольниками в каждой вершине. Пирамида ${}^2M_3$ рассекается на правильногранную пирамиду M_3 с единичными рёбрами и усечённую пирамиду M_{3a} (рис. 1).

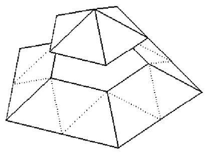

Рис. 1: Семигранник M_{3a} под пирамидой M_3.

Усечённый икосаэдр M_{19} можно рассечь на несоставные части двумя или тремя плоскостями. Две параллельные плоскости от M_{19} отрезают усечённые пирамиды M_{3a}, а оставшуюся часть будем обозначать M_{19a}. Если непараллельными плоскостями отсекать три семигранника M_{3a}, то останется фигура, которую будем обозначать M_{19b}.

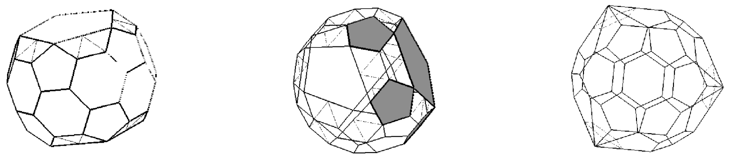

Рис. 2: Слева: многогранник $M_{19\grave{a}}$, в центре: фундаментальные пятиугольные грани тела M_{19b}, справа: рёбра фигуры $Q_{6,1}$.

Как может быть видно по следующей теореме списки (2)–(6) её многогранников получены по алгоритму, входными данными для работы которого служат тела списка (1). По такой схеме были найдены все выпуклые многогранники с правильными и сложенными из правильных многогранников гранями так, что каждая вершина такого многогранника служит и вершиной грани [1].

Теорема. *Существуют только следующие выпуклые соединения многогранников*

$$M_3, M_{3a}, M_{19a}, M_{19b} \tag{1}$$

при условии, что любые два ребра каждого соединения либо равны, либо одно вдвое короче другого, а число соединяемых тел для каждого соединения $Q_{i,j}$*, расположенного в списке* (j) *на месте* i*, минимально:*

$$\begin{gathered} M_3 + M_3, M_3 + M_{3a}, M_3 + M_{19a}, M_3 + M_{19b}, M_3 + M'_{19b}, \\ M_3 + M''_{19b}, M_{3a} + M_{3a}, M_{3a} + M_{19a}, M_{3a} + M_{19b}; \end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} Q_{2,2} + M_{3a}, Q_{2,2} + M_{19a}, Q_{2,2} + M_{19b}, Q_{2,3} + M_3, Q_{2,3} + M'_3, \\ Q_{2,3} + M''_3, Q_{2,3} + M_{3a}, Q_{2,3} + M'_{3a}, Q_{2,4} + M_3, Q_{2,4} + M'_3, \\ Q_{2,4} + M''_3, Q_{2,4} + M_{3a}, Q_{2,5} + M_3, Q_{2,5} + M'_3, Q_{2,5} + M_{3a}, \\ Q_{2,5} + M'_{3a}, Q_{2,8} + M_3, Q_{2,8} + M_{3a}; \end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} Q_{3,1} + M_3, Q_{3,2} + M_3, Q_{3,2} + M_{3a}, Q_{3,3} + M_3, Q_{3,3} + M'_3, \\ Q_{3,3} + M''_3, Q_{3,4} + M_3, Q_{3,4} + M_{3a}, Q_{3,5} + M_{3a}, Q_{3,5} + M'_{3a}, \\ Q_{3,6} + M_{3a}, Q_{3,9} + M_3, Q_{3,9} + M_{3a}, Q_{3,9} + M'_{3a}, Q_{3,10} + M_{3a}, \\ Q_{3,11} + M_{3a}, Q_{3,11} + M'_{3a}, Q_{3,11} + M''_{3a}, Q_{3,13} + M_3, Q_{3,13} + M'_3, \\ Q_{3,13} + M_{3a}, Q_{3,13} + M'_{3a}, Q_{3,14} + M_3; \end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered} Q_{4,2} + M_3, Q_{4,2} + M_{3a}, Q_{4,3} + M_3, Q_{4,4} + M_3, \\ Q_{4,7} + M_{3a}, Q_{4,7} + M'_{3a}, Q_{4,12} + M_{3a}, Q_{4,12} + M'_{3a}; \end{gathered} \tag{5}$$

$$Q_{5,1} + M_{3a}. \tag{6}$$

Доказательство теоремы основано на алгебраическом и компьютерном моделировании с контролем на “живых” моделях многогранников.

Литература

[1] Тимофеенко А. В. *К перечню выпуклых правильногранников* // Современные проблемы математики и механики. –М.: Издательство Моск. ун-та, 2011. – Том VI. Выпуск 3. К 100-летию со дня рождения Н. В. Ефимова / Под ред. И. Х. Сабитова и В. Н. Чубарикова. – С. 155–170.

ПОРОЖДАЮЩИЕ ТРОЙКИ ИНВОЛЮЦИЙ ГРУПП ШЕВАЛЛЕ ТИПА E_6, E_7, E_8 НАД КОЛЬЦОМ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

И. А. Тимофеенко[1]

---

[1] *ivan.timofeenko@gmail.com*, Сибирский федеральный университет

В 2002 году Я.Н. Нужин записал в Коуровской тетради вопрос [1,вопрос 15.67]

(A) Какие присоединенные группы Шевалле (нормального типа) над кольцом целых чисел порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны?

по данному вопросу получены следующие результаты:

- Специальная линейная группа $SL_n(\mathbb{Z})$, при $n \geqslant 14$, порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны [2]. Следовательно, и $PSL_n(\mathbb{Z}$, при $n \geqslant 14$ обладает такой тройкой порождающих инволюций;
- Для проективной специальной линейной группы $PSL_n(\mathbb{Z})$ ответ на вопрос (A) положтельный тогда и только тогда, когда $n \geqslant 5$ [3];
- Из непорождаемости тремя инволюциями, две из которых перестановочны, проективной симплектической группы $PSp_4(3)$ [4] следует отрицательный ответ вопрос (A) для группы $PSp_4(\mathbb{Z})$, которая изоморфна присоединенной группе Шевалле $B_2(\mathbb{Z})$.
- Для группы Шевалле $G_2(\mathbb{Z})$ ответ на вопрос (A) положительный [5];

Доказана

Теорема. *Присоединенные группы Шевалле $E_6(\mathbb{Z})$, $E_7(\mathbb{Z})$, $E_8(\mathbb{Z})$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00707)

Литература

[1] Коуровская тетрадь (Нерешенные вопросы теории групп). – 17-е изд., дополненое. – Новосибирск: ИМ СО РАН, 2010.

[2] Tamburini M. C., Zucca P. *Generation of Certain Matrix Groups by Three Involutions, Two of Which Commute* // J. of Algebra. 1997. V. 195. P. 650–661.

[3] Нужин Я. Н. *О порождаемости группы $PSL_n(\mathbb{Z})$ тремя инволюциями две из которых перестановочны* // Владикавказский матем. журнал. 2008. Т. 10, вып. **1** —. 68–74.

[4] Нужин Я. Н. *Порождающие элементы групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики. II* // Алгебра и логика – 1997. – Т. 36, № 4. – —. 422–440.

[5] Timofeenko I. A. *Generation of the Chevalley group of type G_2 over the ring of integers by three involutions two of which commute* // Журнал СФУ Сер. Матем. и физ. 8:1 (2015), 104–108.

ЕЩЕ РАЗ О РЕШЕТКЕ ПОДМНОГОБРАЗИЙ СПЛЕТЕНИЯ МНОГООБРАЗИЯ ПОЛУРЕШЕТОК И МНОГООБРАЗИЯ ПОЛУГРУПП С НУЛЕВЫМ УМНОЖЕНИЕМ

А. В. Тищенко[1]

---

[1] *alextish@bk.ru*, Финансовый университет при Правительстве, Российской Федерации

Операция произведения многообразий групп определялась через сплетения групп. При определении произведения полугрупповых многообразий возникли разные подходы. Один из подходов был предложен Мальцевым (см. обзор [3]). Другой расматривался в (см. [4]). Эта же операция рассматривалась автором под термином "моноидное сплетение" полугрупповых многообразий. В работе автора [1] дан ответ на вопрос, в каких случаях сплетение полугрупповых атомов решетки полугрупповых многообразий является кроссовым многообразием, т.е. обладает тремя свойствами конечности, а именно: 1) имеет конечный базис тождеств, 2) порождается конечной полугруппой и 3) имеет конечную решетку подмногоообразий. В случае, если решетка подмногообразий сплетения атомов конечна, то она имеет, как правило, не более 11 подмногообразий. Исключение представляет собой сплетение $\mathbf{W} = \mathbf{Sl}\mathrm{w}\mathbf{N_2}$ многообразия **Sl** полурешеток и многообразия $\mathbf{N_2}$ полугрупп с нулевым умножением (см. [1], теорема 3.1). В той же работе найден базис тождеств этого сплетения, а именно:

$$\beta(\mathbf{W}) = \{z_1 z_2 y \approx z_1 z_2 y^2, z_1 z_2 yx \approx z_1 z_2 xy\}.$$

В [2] было указано разложение

$$L = L' \cup L''$$

в объединение двух непересекающихся подрешеток решетки подмногообразий $L = L(\mathbf{W})$, а именно L' - решетка всех подмногообразий в L, содержащих многообразие **Sl** полурешеток, а L'' - решетка всех подмногообразий в L, не содержащих полурешеток. При этом решетка L' точно вычислена и имеет мощность 13, а вторая решетка L'' содержит подрешетку L_0, состоящую из 20 подмногообразий.

Пока мы не имеем полной информации о решетке L и о ее мощности. Доказаны две следующие теоремы.

Теорема 1. Многообразие **W** содержит в точности три максимальных подмногообразия.

Теорема 2. Решеточное объединение подмногообразий $\mathbf{L_{2,3}} \vee \mathbf{Sl}$ в решетке L, где $\mathbf{L_{2,3}}$ - наибольшее подмногообразие в L', совпадает с многообразием $\mathbf{V_{27}} = var\{\beta(\mathbf{W}), z_1 z_2 x \approx z_1 z_2^2 z_1 x\}$.

Следствие. Решетка L содержит не менее 39 элементов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00756).

Литература

[1] Тищенко А. В. *Сплетение атомов решетки полугрупповых многообразий* // Труды ММО. – 2007. – Т. 68. – С. 107–132.

[2] Тищенко А. В. *О решетке подмногообразий сплетения многообразия полурешеток и многообразия полугрупп с нулевым умножением* // Фундам. и прикл. матем. – 2014. – Т. 19. – № 1. – С. 283–305.

[3] Шеврин Л. Н., Волков М. В. *Тождества полугрупп* // Изв. вузов. Математика. – 1985. – № 11. – С. 3–47.

[4] Tilson B. *Categories as algebra: an essential ingredient in the theory of monoids* // J. Pure and Appl. Algebra. – 1987. – V. 48. – No. 1-2. – P. 83–198.

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МОРИТЫ ДЛЯ МНОГООБРАЗИЙ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБР НАД ОПЕРАДАМИ

С. Н. Тронин[1]

---

[1] *stronin@kpfu.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

То, что к настоящему времени известно о теории эквивалентности Мориты для алгебр над линейными симметрическими операдами, содержится в работах [1]–[3]. Аналоги ряда существенных результатов из соответствующей теории для колец до сих пор не получены. Однако в теории операд есть особенности, отсутствующие в теории колец. Одной из таких особенностей является понятие модуля над алгеброй над операдой (см., например, [4]). При этом по каждой алгебре над операдой можно построить ассоциативное кольцо (называемое универсальной обертывающей алгеброй данной алгебры), и модули над алгеброй над операдой оказываются обычными модулями над этим кольцом. Категорию (многообразие) линейных алгебр над линейной симметрической операдой R обозначим через $Alg(R)$, и если A — алгебра над R, то категорию модулей над A обозначим через $Mod(A)$.

Теорема. *Пусть R и D — линейные симметрические операды. Функторы, осуществляющие эквивалентность категорий $Alg(R)$ и $Alg(D)$, индуцируют эквивалентности категорий модулей над соответствующими алгебрами.*

Точнее, если $F\colon Alg(R) \to Alg(D)$ — эквивалентность категорий, и $A \in Alg(R)$, то существует функтор $F_A\colon Mod(A) \to Mod(F(A))$, являющийся эквивалентностью категорий.

Если функтор F и обратный к нему заданы в виде Морита-контекста, то можно указать явно Морита-контекст, соответствующий функтору F_A и обратному к нему.

Данная теорема является обобщением результата из [1], где в качестве операды D рассматривался операдный аналог кольца матриц над R.

Литература

[1] Тронин С. Н., Копп О. А. *Матричные линейные операды* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 8. – С. 53–62.

[2] Kapranov M., Manin Yu. *Modules and Morita theorem for operads* // Amer. J. Math. – 2001. – V. 123. – № 5. – P. 811–838.

[3] Stanculescu A. E. *A Remark on the Morita theorem for operads* // Archivum Mathematicum(Brno). – 2011. – T. 17. – P. 139–150.

[4] Ginzburg V., Kapranov M. *Koszul duality for operads* // Duke Math. J. – 1994. – V. 76. – № 1. – P. 203–272.

МНОЖЕСТВО МАНДЕЛЬБРОТА НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

П. И. Трошин[1]

---

[1] *Paul.Troshin@gmail.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

Мы задались целью изучить разнообразные возможности построения фрактальных множеств в пространстве Лобачевского. В данной работе строится аналог классического множества Мандельброта и множеств Жюлиа на плоскости Лобачевского. Построения совершаются в модели Бельтрами–Клейна, а затем с помощью изометрии переносятся и на другие модели.

Классическое множество Мандельброта — эффективный и эффектный пример из геометрии и теории динамических систем: оно является фрактальным множеством, порожденным единственным простым правилом — квадратичной зависимостью, и вместе с этим демонстрирует сложную динамику этой зависимости, переход к хаосу через каскады бифуркаций периода. Это множество в $\mathbb{C}$ обычно определяется так: пусть $f_c(z) = z^2 + c$, $c, z \in \mathbb{C}$, и $f_c^{\circ n} = \underbrace{f_c \circ \ldots \circ f_c}_{n}$, тогда

$$\mathscr{M} = \{c \in \mathbb{C} : \text{последовательность } \{f_c^{\circ n}(0)\}_{n=0}^{\infty} \text{ ограничена}\}.$$

Пусть Λ — модель Бельтрами–Клейна плоскости Лобачевского (открытый единичный круг $B(O,1) \subset \mathbb{R}^2$ с метрикой $\rho(x,y) = k\mathrm{Arch}\,\frac{1-(x,y)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}$, (x,y) — скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$, $x^2 = (x,x)$, $|x| = \sqrt{x^2}$, мы взяли константу $k = 1$). Определим операцию $q\colon \Lambda \to \Lambda$

$$q(z) \equiv \frac{\mathrm{th}(\mathrm{Arth}^2|z|)}{|z|} z, \quad q(O) = O,$$

таким образом $\rho(O, q(z)) = \rho^2(O, z)$. Как известно [1], параллельный перенос вдоль геодезического сегмента $[O, c] \subset \Lambda$ задается равенством

$$g_c(z) = \frac{((c,z)(1 - \sqrt{1-c^2}) + c^2)c + c^2 z}{c^2(1 + (c,z))}, \quad g_O(z) = z.$$

Мы определяем операцию $F_c\colon \Lambda \to \Lambda$ ($c \in \Lambda$) — аналог f_c:

$$F_c(z) \equiv g_c(q(z)) = \frac{\frac{\mathrm{th}\,\mathrm{Arth}^2|z|}{|z|}\left(((c,z)(1 - \sqrt{1-c^2}) + c^2)c + c^2 z\right)}{c^2\left(1 + \frac{\mathrm{th}\,\mathrm{Arth}^2|z|}{|z|}(c,z)\right)},$$

и гиперболические множества Мандельброта и Жюлиа:

$$\mathscr{M}_\Lambda = \{c \in \Lambda : \text{последовательность } \{F_c^{\circ n}(0)\}_{n=0}^{\infty} \text{ ограничена}\},$$

$$\mathcal{J}_{\Lambda c} = \{z \in \Lambda : \text{последовательность } \{F_c^{\circ n}(z)\}_{n=0}^{\infty} \text{ ограничена}\}.$$

Основным препятствием изучения свойств этих множеств на плоскости Лобачевского является трансцендентный характер формул, задающих даже простые преобразования.

Мы предлагаем критерий, позволяющий эффективно строить множества $\mathcal{M}_{\Lambda}$ и $\mathcal{J}_{\Lambda c}$ (обобщение известного критерия для $\mathbb{C}$) и изучаем топологические и динамические свойства получающихся конструкций (негомеоморфность классическим множествам в $\mathbb{C}$, нахождение константы Фейгенбаума и др.).

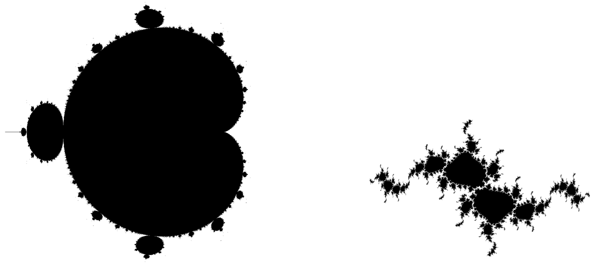

Рис. 1. Множества $\mathcal{M}_{\Lambda}$ (слева) и $\mathcal{J}_{\Lambda c}$ (справа, при $c = \{-0.8, -0.126\}$) в модели Бельтрами–Клейна.

Литература

[1] Сосов Е. Н. *Геометрия Лобачевского и ее применение в специальной теории относительности. Часть 1.: Учебно-методическое пособие.* – Казань : КФУ, 2012. – 38 с.

СИСТЕМЫ ИТЕРИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ В МОДЕЛИ БЕЛЬТРАМИ-КЛЕЙНА ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

П. И. Трошин[1], Ж. А. Бахрамов[2]

Наша цель — построение фракталов в пространстве Лобачевского. Для этого из известных моделей пространства Лобачевского мы выбрали модель Бельтрами – Клейна на открытом круге единичного радиуса $B(O,1) \subset \mathbb{R}^2$. Среди всевозможных способов построения фракталов мы решили использовать системы итерированных функций (СИФ) и L-системы [1].

Поскольку плоскость Лобачевского является полным метрическим пространством, мы можем рассматривать на ней аттракторы СИФ. Тогда по известной теореме Хатчинсона [1] для СИФ $\{\{f_i\}_{i=1}^{N}, B(O,1)\}$ $(N \in \mathbb{N})$, где $f_i : B(O,1) \longrightarrow B(O,1)$ — сжимающие отображения, существует и единственно непустое компактное множество $A = \cup f_i(A)$, называемое аттрактором этой СИФ. Зачастую A является фрактальным множеством.

---

[1] *Paul.Troshin@gmail.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

[2] *bahramovjasurbek@gmail.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

В случае СИФ на $\mathbb{R}^2$ наиболее часто используют аффинные преобразования f_i. Эти преобразования представимы в виде композиции сжатий по двум осям, поворота, отражения и параллельного переноса. Мы даем аналоги этих преобразований для модели Бельтрами–Клейна и строим СИФ на $B(O,1)$, аттракторы которых являются некоторыми геометрическими аналогами аттракторов СИФ на $\mathbb{R}^2$. Для построения аналогии между преобразованиями нами используются формулы и результаты из [2]-[3].

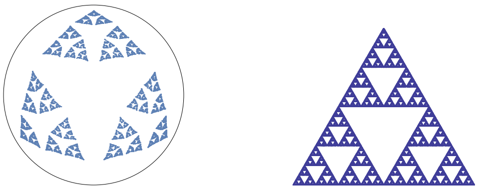

Рис 1. Пример аналога Ковра Серпинского в пространстве Лобачевского (слева аттрактор в $B(O,1)$, справа — в $\mathbb{R}^2$).

Литература

[1] Кроновер Р. М. *Фракталы и хаос в динамических системах.* – М.: Техносфера, 2006. – 488 с.

[2] Сосов Е. Н. *Геометрия Лобачевского и ее применение в специальной теории относительности. Часть 1.* //Учебно-методическое пособие. – Казань: Казанский федеральный университет, 2012. – 38 с.

[3] Сосов Е. Н. *О действии мультипликативной группы ненулевых вещественных чисел на пунктированном пространстве Лобачевского* //Учен. зап. Казан. гос. ун–та. Сер. Физ.-матем. науки, 2012. С. 156–160.

“ОДНОСТОРОННИЙ” ПРИЗНАК ДИНИ-ЛИПШИЦА ДЛЯ СХОДИМОСТИ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРОВ ЛАГРАНЖА-ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

А. Ю. Трынин[1]

Определим оператор Лагранжа по собственным функциям регулярной задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} U'' + [\lambda - q]U = 0, \\ U'(0) - hU(0) = 0, \\ U'(\pi) + HU(\pi) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

с непрерывным потенциалом q ограниченной вариации на $[0,\pi]$ и граничными условиями $h \neq \pm\infty$, $\quad H \neq \pm\infty$ следующим образом

$$L_n^{SL}(f,x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n}) \frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})},$$

---

[1] *atrynin@gmail.com, tayu@rambler.ru*, Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

где U_n есть $n-$ая собственная функция задачи Штурма-Лиувилля (1). Здесь через $0 < x_{1,n} < x_{2,n} < \cdots < x_{n,n} < \pi$ обозначены нули функции U_n. Он обладает интерполяционным свойством Лагранжа: $L_n^{SL}(f, x_{k,n}) = f(x_{k,n})$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$.

Обозначим через Ω множество всех действительнозначных непрерывных, неубывающих, выпуклых вверх на $[0,\pi]$, исчезающих в нуле функций ω. Будем говорить, что для любой фиксированной $\omega \in \Omega$ непрерывная на отрезке $[0,\pi]$ функция f принадлежит классу $C(\omega^L, [0,\pi])$, $(C(\omega^R, [0,\pi]))$, если существует константа K_f (выбор которой зависит только от f) такая, что для любых x и $x+h$, $0 \leqslant x < x+h \leqslant \pi$, справедливо неравенство

$$f(x+h) - f(x) \geqslant -K_f\omega(h) \quad \big(f(x+h) - f(x) \leqslant K_f\omega(h)\big).$$

В отличие от определения модуля непрерывности здесь оценивается только скорость убывания (возрастания) функции f. Ограничений же на скорость её возрастания (убывания) (кроме свойства непрерывности) в этом классе нет.

Справедливо следующее обобщение полученного в [1] классического признака Дини-Липшица для равномерной сходимости синк-аппроксимаций внутри интервала $(0,\pi)$.

Теорема. *Пусть функция $\omega \in \Omega$ удовлетворяет условию*

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ln n = 0,$$

а функция f принадлежит одному из классов $C(\omega^L, [0,\pi])$ или $C(\omega^R, [0,\pi])$, тогда справедливы соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n^{SL}(f,\cdot) - f\|_{C[a,b]} = 0, \quad [a,b] \subset (0,\pi).$$

Несложно убедиться, что в концах отрезка сходимости значений опреаторов $L_n^{SL}(f,\cdot)$ к аппроксимируемой функции не будет даже для случая $q \equiv 0$, $h = H = 0$, $f \equiv 1$.

Литература

[1] Трынин А.Ю. *Критерии поточечной и равномерной сходимости синк-приближений непрерывных функций на отрезке* / А.Ю. Трынин // Математический сборник. – 2007 . – Т. 198 . – № 10 . – С. 141–158.

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ КИЛЛИНГА И ГЕОМЕТРИЯ СУБМЕРСИЙ

Б. А. Турсунов[1]

---

[1] *t.bayramali@yandex.ru*, Национальный университет Узбекистана

Пусть M – гладкое риманово многообразие размерности n с римановой метрикой g, ∇ – связность Леви-Чивита. Множество всех гладких векторных полей на M, является алгеброй Ли относительно скобки Ли векторных полей.

Дифференцируемое отображение $\pi : M \to B$ максималь-ного ранга при $n > m$ называется субмерсией, где $m = dimB$. Субмерсия $\pi : M \to B$ порождает слоение F размерности $k = n - m$ на многообразии M, слоями которого являются подмногообразия $L_q = \pi^{-1}(q), p \in B$. Если дифференциал $d\pi$ субмерсии $\pi : M \to B$ сохраняет длину горизонтальных векторов, то она называется римановой субмерсией.

Отображение $S : V(F) \times H(F) \to V(F)$, заданное формулой $S(X,U) = \nabla^v_X U$, называется втором основным тензором, где $V(F), H(F)$ – множество всех вертикальных и горизонтальных векторных полей соответственно.

Горизонтальное векторное поле U называется слоеным, если для каждого поля $Y \in V(F)$, поле $[Y,U]$ также является вертикальным. В случае, когда поле U является слоеным, собственные значения матрицы A называется главными кривизнами слоения F. Если главные кривизны локально постоянны вдоль слоев, то слоение F называется изопараметрическим.

Рассмотрим некоторе множество $D \subset V(M)$, и обозначим через $A(D)$ наименьшую подалгебру Ли алгебры $K(M)$, содержащую множество D. Так как алгебра $K(M)$ конечномерна, то существуют такие векторные поля $X_1, X_2, ..., X_m$ из $A(D)$, что векторы $X_1(x), X_2(x), ..., X_m(x)$ образуют базис для подпространства $A_x(D)$ для каждого $x \in M$.

С использованием результатов работ [1,2] построена следующая субмерсия.

Рассмотрим векторные поля Киллинга $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y}$, $Z = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}$. Нетрудно проверить, что базисом минимальной алгебры $A(D)$ являются векторные поля $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial z}$, $X_3 = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}$, $X_4 = \frac{\partial}{\partial y}$ и поэтому орбита $L(p)$ для каждой точки $p \in R^3$ совпадает с R^3.

Полагая $\pi(t_1,t_2,t_3,t_4) = X_4^{t_4}(X_3^{t_3}(X_2^{t_2}(X_1^{t_1}(O))))$ определим следующее отображение $\pi : R^4 \to R^3$, где $O-$начало координат в R^3.

Теорема. *Существует такая риманова метрика* $\widetilde{g}$ *на* R^3*, что*

1) Отображение $\pi : R^4 \to R^3$ *является римановой субмерсией;*

2) Субмерсия $\pi : R^4 \to R^3$ *порождает на* R^4 *изопараметрическое слоение;*

3) $(R^3, \widetilde{g})$ *является многообразием неотрицательной кривизны.*

Литература

[1] Нарманов А.Я., Саитова С.С. *О геометрии орбит векторных полей Киллинга.* Дифф. урав. –2014. –Т. 50. –№ 12. –С. 1582–1589.

[2] Sussmann. H. *Orbits of family of vector fields and integrability of systems with singularities.* Bull. Amer. Math. Soc., 1973, 79, p. 197-199.

О СВОЙСТВАХ КОНГРУЭНЦИЙ АЛГЕБР С ОДНИМ ОПЕРАТОРОМ И ОСНОВНОЙ ОПЕРАЦИЕЙ ПОЧТИ ЕДИНОГЛАСИЯ

В. Л. Усольцев[1]

---

[1] *usl2004@mail.ru*, Волгоградский государственный социально-педагогический университет

Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра с дополнительной системой операторов — унарных операций, действующих как эндоморфизмы относительно основных операций.

Операцией почти единогласия (near-unanimity operation) называется n-арная операция φ, удовлетворяющая тождествам $\varphi(x,\dots,x,y)=\varphi(x,\dots,x,y,x)=\dots=\varphi(y,x,\dots,x)=x$ $(n\geqslant 3)$. В тернарном случае φ называют операцией большинства. Пусть $d(x_1,x_2,x_3)$ — операция большинства на множестве А. Определим на А семейство n-арных операций $h^{(n)}$ по правилам: $h^{(3)}(x_1,x_2,x_3)=d(x_1,x_2,x_3)$ и $h^{(n)}(x_1,x_2,\dots,x_n)=d(h^{(n-1)}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),x_{n-1},x_n)$ для всех $n>3$.

Предложение 1. Операции $h^{(n)}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ являются операциями почти единогласия при всех $n\geqslant 3$.

В [1] показано, что на любом унаре $\langle A,f\rangle$ можно так определить операцию большинства $m(x,y,z)$, что алгебра $\langle A,m,f\rangle$ становится алгеброй с оператором f.

Определим на унаре $\langle A,f\rangle$ для $n\geqslant 3$ семейство n-арных операций $g^{(n)}$ по правилам: $g^{(3)}(x_1,x_2,x_3)=m(x_1,x_2,x_3)$, $g^{(n)}(x_1,x_2,\dots,x_n)=m(g^{(n-1)}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}),$ $x_{n-1},x_n)$.

Предложение 2. Операция $g^{(n)}(x_1,x_2,\dots,x_n)$ есть операция почти единогласия, а алгебра $\langle A,g^{(n)},f\rangle$ является алгеброй с оператором f.

Определения и обозначения, связанные с унарами, см. в [2].

Теорема 1. *Неодноэлементная алгебра $\langle A,g^{(n)},f\rangle$ является конгруэнц-простой тогда и только тогда, когда либо операция f инъективна, либо унар $\langle A,f\rangle$ содержит такой элемент a, что $f(x)=a$ для любого $x\in A$.*

Теорема 2. *Каждая конгруэнция унара $\langle A,f\rangle$ является конгруэнцией алгебры $\langle A,g^{(n)},f\rangle$ тогда и только тогда, когда $\langle A,f\rangle$ — один из унаров следующего вида: 1) C_p^0, где p - простое число; 2) $C_1^0+C_1^0$; 3) C_1^t, где $t\in\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{\infty\}$.*

Получено описание строения атомов в решетке конгруэнций алгебры $\langle A,g^{(n)},f\rangle$.

Теорема 3. *Решетка конгруэнций алгебры $\langle A,g^{(n)},f\rangle$ является атомной.*

Теорема 4. *Алгебра $\langle A,g^{(n)},f\rangle$ подпрямо неразложима тогда и только тогда, когда унар $\langle A,f\rangle$ удовлетворяет одному из следующих условий: 1) операция f инъективна; 2) унар $\langle A,f\rangle$ изоморфен C_1^t, где $t\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$; 3) $\langle A,f\rangle$ — связный периодический унар, имеющий единственный узловой элемент, который является циклическим; 4) $\langle A,f\rangle$ — связный унар без кручения, имеющий единственный узловой элемент; 5) унар $\langle A,f\rangle$ является суммой одной компоненты связности вида 2)–4) и произвольного числа компонент вида 1).*

Литература

[1] Усольцев В. Л. *О строго простых тернарных алгебрах с операторами* // Чебышевский сб. – 2013. – Т. 14. – Вып. 4. – С. 196-204.

[2] Усольцев В. Л. *Простые и псевдопростые алгебры с операторами* // Фунд. и прикл. математика. – 2008. – Т. 14. – Вып. 7. – С. 189-207.

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛИМЫЕ НУМЕРАЦИИ КЛАССОВ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СЕМЕЙСТВ

М. Х. Файзрахманов[1]

---

[1] *marat.faizrahmanov@gmail.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского

В докладе рассматриваются вычислимые нумерации классов семейств всюду определенных функций. Устанавливается их связь с арифметическими нумерациями семейств подмножеств натуральных чисел. Также приводится критерий существования универсальной вычислимой нумерации конечного класса вычислимых семейств всюду определенных функций.

Теорема. *Конечный класс функциональных семейств*

$$\mathscr{F} = \{\mathscr{F}_0, \mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_k\}$$

обладает универсальной вычислимой нумерацией тогда и только тогда, когда для каждого $i \leqslant k$ *подкласс*

$$\{\mathscr{F}_j : j \leqslant k,\ \overline{\mathscr{F}_j} = \overline{\mathscr{F}_i}\},$$

где $\overline{\mathscr{F}_j}$ *– замыкание семейства* $\mathscr{F}_j$ *в бэровском пространстве, имеет наименьшее по включению семейство.*

Работа выполнена за счет финансовых средств субсидии, выделенной Казанскому (Приволжскому) федеральному университету на выполнение гос. задания, проект № 1.2045.2014.

ФОРМУЛА СЛЕДОВ ОГРАНИЧЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДВУМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

З. Ю. Фазуллин[1]

---

[1] *fazullinzu@mail.ru*, Башкирский государственный университет

Пусть L_0 – самосопряженный полуограниченный снизу оператор с дискретным спектром $\sigma(L_0)$, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, $\sigma(L_0) = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, ν_k – кратность λ_k, P_k – оператор проектирования на собственное подпространство, соответствующее λ_k. Для ограниченного самосопряженного оператора V, действующего также в пространстве $\mathscr{H}$, положим $L = L_0 + V$ и обозначим $\mu_s^{(k)}$, $s = 1, \ldots, \nu_k$, собственные числа оператора L, соответствующие собственному числу λ_k оператора L_0.

Теорема 1. *Пусть существует постоянная* $C>0$ *такая, что* $\lambda_k = C(k+a)$, $a \geqslant 0$, *и при* $k >> 1$

$$\|P_k V\| \leqslant \mathrm{const}\, k^{-\gamma}, \quad \gamma > 0.$$

Тогда при $k >> 1$ *имеет место неравенство*

$$|\mu_s^{(k)} - \lambda_k| \leqslant \mathrm{const}\, k^{-2\gamma}.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и* $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k = o(\lambda_n), \quad n \to \infty$, *где* $\alpha_k = \sum\limits_{m \neq k} \frac{\mathrm{tr}\, P_k V P_m V}{\lambda_m - \lambda_k}$.

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{\nu_k} (\lambda_k - \mu_s^{(k)}) + \mathrm{tr}\, P_k V \right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2\lambda_n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{tr} \left(P_k V^2 - (P_k V)^2 \right).$$

В качестве применений теоремы 2 можно отметить работы [1], [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ, грант № 01201456408.

Литература

[1] Фазуллин З. Ю., Муртазин Х. Х. *Регуляризованный след двумерного гармонического осциллятора* // Матем. сб. – 2001. – Т. 192. – № 2. – С. 109–138.

[2] Муртазин Х. Х., Фазуллин З. Ю. *Спектр и формула следов двумерного оператора Шредингера в однородном магнитном поле* // Дифф. уравнения. – 2009. – Т. 45. – № 4. – С. 1–15.

НОРМА ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ОПЕРАТОРА ЛАГРАНЖА В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА С ВЕСОМ

А. И. Федотов[1]

Обозначим H_ρ^s пространство Соболева порядка $s \in \mathrm{R}$ с весом ρ, то есть замыкание множества всех гладких действительнозначных функций, определенных на отрезке $[-1,1]$, относительно нормы

$$\|x\|_{H_\rho^s} = \{\sum_{l \in \mathrm{Z}} \underline{l}^{2s} \widehat{x}^2(l)\}^{1/2},$$

где

$$\underline{l} = \left\{ \begin{array}{ll} |\, l\, |, & l \neq 0, \\ 1, & l = 0, \end{array} \right. \quad l \in \mathrm{Z},$$

---

[1] *fedotov@mi.ru*, Московский социально-гуманитарный институт

а

$$\widehat{x}(l) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \rho(\tau)x(\tau)T_l(\tau)d\tau, \ l \in \mathrm{Z},$$

коэффициенты Фурье функции x по системе полиномов $\{T_l\}_{l \in \mathrm{Z}}$.

Обозначим P_n интерполяционный оператор Лагранжа порядка n по узлам Чебышева первого рода.

Теорема 1. *Для любых $n \in N_0$ и $s \in R$, $s > 1/2$, справедлива оценка*

$$\|P_n\|_{H_\rho^s \to H_\rho^s} < \sqrt{1+\zeta(2s)},$$

где $\zeta(t) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-t}$ – дзета-функция Римана, ограниченная и убывающая при $t > 1$.

Обозначим $E_n(x)_s$ наилучшее приближение функции $x \in H_\rho^s$ алгебраическими полиномами степени не выше $n \in N_0$.

Теорема 2. *Для любых $n \in N_0$, и $\sigma, s \in R$, $s > 1/2$, $0 \leqslant \sigma \leqslant s$, и любой функции $x \in H_\rho^s$ справедлива оценка*

$$\|x - P_n x\|_{H_\rho^\sigma} \leqslant \sqrt{1+\zeta(2s)}(n+1)^{\sigma - s}E_n(x)_s.$$

Пусть теперь H_ρ^s обозначает пространство Соболева размерности $m \geqslant 2$.

Теорема 3. *Для любых $m \in N$, $m \geqslant 2$, $\mathbf{n} \in \mathbf{N_0}$, $s \in R$, $s > m/2$ справедлива оценка*

$$\|P_{\mathbf{n}}\|_{H_\rho^s \to H_\rho^s} \leqslant 2^{\frac{m}{2}-s} m^{\frac{s+1}{2}} M^s(\mathbf{n}+\mathbf{1})\sqrt{1+\zeta(2s-m+1)},$$

$$M(\mathbf{n}+\mathbf{1}) = \frac{\sqrt{(\mathbf{n}+\mathbf{1})^2}}{\min(\mathbf{n}+\mathbf{1})}.$$

Теорема 4. *Для любых $m \in N$, $m \geqslant 2$, $\mathbf{n} \in \mathbf{N_0}$, $\sigma, s \in R$, $s > m/2$, $0 \leqslant \sigma \leqslant s$, и любой функции $u \in H_\rho^s$ справедлива оценка*

$$\|u - P_{\mathbf{n}}u\|_{H_\rho^\sigma} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{1 + 2^{m-2s}m^{s+1}M^{2s}(\mathbf{n}+\mathbf{1})\zeta(2s-m+1)}(\underline{\mathbf{n}+\mathbf{1}})^{(\sigma-s)}E_{\mathbf{n}}(u)_s.$$

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРИ ВТУЛОЧНЫХ СВЯЗЯХ В КОНФОРМНО ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. Т. Фоменко[1]

Пусть V^3 — трехмерное конформно евклидово пространство с координатами X, Y, Z и метрикой $ds^2 = E(Z)(dX^2 + dY^2 + dZ^2)$, где $E = E(Z)$ – заданная функция координаты Z. Пусть далее F^2 – поверхность в V^3, заданная уравнениями $X = x$,

---

[1] *vtfomenko@rambler.ru*, Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ)

$Y = y$, $Z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, край ∂F^2 которой лежит на заданной поверхности Σ, называемой втулкой.

Рассматривается следующая задача: допускает ли поверхность F^2 бесконечно малые изгибания, при которых край поверхности F^2 скользит по втулке Σ, не покидая её. Указанное условие, налагаемое на изгибающее поле поверхности F^2, называют втулочной связью. Если поверхности F^2 и Σ в точках кривой ∂F^2 ортогональны, то втулочную связь в этих точках называют ортогонольной.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Односвязная поверхность F^2 положительной внешней кривизны с гладким краем, подчиненная вдоль края ортогональной втулочной связи, допускает точно три линейно независимых бесконечно малых изгибания.*

Теорема 2. *Односвязная поверхность F^2 положительной внешней кривизны с гладким краем в V^3, подчиненная всюду вдоль края неортогональной втулочной связи, допускает не менее трех линейно независимых бесконечно малых изгибания.*

Доказательство приведенных теорем сводится к доказательству существования ненулевых решений следующей краевой задачи в области D относительно компонент ξ, η, ζ изгибающего поля поверхности F^2:

$$\begin{array}{ll}
\xi_x + f_x\zeta_x + (\ln\sqrt{E})'(1+f_x^2) = 0, & \\
\xi_y + \eta_x + f_x\zeta_y + f_y\zeta_x + 2(\ln\sqrt{E})' f_x f_y \zeta = 0, & \\
\eta_y + f_y\zeta_y + (\ln\sqrt{E})'(1+f_y^2)\zeta = 0, & (x, y) \in D, \\
\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0, & (x, y) \in \partial D,
\end{array}$$

где α, β, γ – известные функции, определяемые втулкой Σ.

О СОВПАДЕНИЯХ ОТОБРАЖЕНИЙ УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

Т. Н. Фоменко[1]

---

[1] *tn-fomenko@yandex.ru*, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Доклад составлен по материалам совместной работы с аспирантом Д. А. Подоприхиным, представленной в печать.

Рассматривается задача о совпадениях набора из n ($n \geqslant 2$) многозначных отображений упорядоченных множеств. Пусть $(X, \preceq), (Y, \preceq)$ — частично упорядоченные множества, $\mathscr{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$ — набор из n многозначных отображений $F_1, \dots, F_n : X \rightrightarrows Y$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in X$ — фиксированначя точка. Скажем, что отображения $F_1, \dots, F_{n-1}$ согласованно накрывают отображения $F_2, \dots, F_n$ на $\mathscr{O}_X(x_0) = \{x \in X | x \preceq x_0\}$, если для любой точки $x \in \mathscr{O}_X(x_0)$ и любой невозрастающей цепи $\{y_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ $\mathscr{F}$-значений в точке x, то есть $y_i \in F_i(x), i = 1, \dots, n$, и $y_1 \succeq y_2 \dots \succeq y_n$, существует такая точка $x' \in X, x' \preceq x$, что $y_{i+1} \in F_i(x'), i = 1, \dots, n-1$. Обозначим через $\mathscr{C}_3(x_0; \mathscr{F})$ множество всевозможных пар вида (S, f), где $S \subseteq \mathscr{O}_X(x_0)$ — цепь в X, f — специальный цепной $\mathscr{F}$-селектор на S, то есть $f = \{f_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}, f_i : S \to Y, f_i(x) \in \left(\bigcap\limits_{j=i+1}^{n} F_j(\mathscr{O}_X(x_0)) \right) \bigcap F_i(x), i = 1, \dots, n-1, f_n(x) \in F_n(x)$, $f_1(x) \succeq \dots \succeq f_n(x)$, $x \in S$, и кроме того, если $x, z \in S, x \prec z$, то $f_1(x) \preceq f_n(z)$.

Доказано следующее утверждение.

Теорема *Пусть в описанной ситуации для отображений* $F_i : X \rightrightarrows Y, i = 1,\dots,n, n \geqslant 2$, *выполнены следующие условия.*

1) Для некоторой точки $x_0 \in X$ *существует невозрастающая цепь* $y_0 = \{y_{0,j}\}_{j\in\{1,\dots,n\}}$ $\mathscr{F}$*-значений в* x_0*, то есть* $y_{0,j} \in F_j(x_0), j = 1,\dots,n$*, и* $y_{0,1} \succeq \dots \succeq y_{0,n}$*;*

2) отображения $F_1,\dots,F_{n-1}$ *согласованно накрывают отображения* $F_2,\dots,F_n$ *оп* $\mathscr{O}_X(x_0)$*;*

3) отображение F_n *изотонно, то есть для любых* $x \in X, y \in F_n(x), x' \preceq x, \exists y' \in F(x')$*,* $y' \preceq y$*;*

4) для любой пары $(S,f) \in \mathscr{C}_3(x_0;\mathscr{F})$ *цепь* S *имеет нижнюю границу* $w \in X$*, и существует невозрастающая цепь* $z_0 = \{z_{0,j}\}_{1\leqslant j\leqslant n}$ $\mathscr{F}$*-значений в точке* w*, где каждое значение* $z_{0,j}$ *есть нижняя граница множества* $\{f_j(x)|x \in S\}$*,* $j = 1,\dots,n$*.*

Тогда множество совпадений $\mathrm{Coin}(F_1,\dots,F_n) = \{x \in X|\bigcap_{i=1}^{n} F_i(x) \neq \varnothing\}$ *отображений* $F_1,\dots,F_n$ *непусто.*

В докладе будут также представлены усиления этой теоремы, обеспечивающие наличие в множестве совпадений $\mathrm{Coin}(F_1,\dots,F_n)$ минимального и наименьшего элементов, и проведено сравнение полученных результатов с некоторыми известными утверждениями о совпадениях двух многозначных отображений.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ РАДИУС

Б. Н. Хабибуллин[1], Н. Р. Таминдарова[2]

---

[1] *Khabib-Bulat@mail.ru*, Башкирский государственный университет
[2] *nargiza89@gmail.com*, Башкирский государственный университет

Пусть $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ — *расширенная комплексная плоскость,* $\mathscr{O}\subset\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ — *открытое множество* в $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, $\mathrm{sbh}(\mathscr{O})$ — класс всех *субгармонических в* $\mathscr{O}$ функций u с *мерами Рисса* $\nu_u := \frac{1}{2\pi}\Delta u$, где Δ — оператор Лапласа, $D \neq \varnothing$ — *область* в $\mathbb{C}_\infty \neq D$ с *границей* ∂D*,* $K \neq \varnothing$ — *компакт* в D. Функцию $v \in \mathrm{sbh}(D\setminus K)$ называем *тестовой вне* K, если $v(z) \geqslant 0$ во всех точках $z \in D\setminus K$ и $\lim\limits_{D\setminus K\ni z'\to z} v(z') = 0$ для всех $z \in \partial D$.

Теорема 1 [1; Следствие 1.1]. *Пусть* v — *тестовая функция вне* K*,* $-\infty \not\equiv u \in \mathrm{sbh}(D)$ *и* $\int\limits_{D\setminus K} v\,\mathrm{d}\nu_u < +\infty$*,* f — *голоморфная функция в* D *и* $\bigl|f(z)\bigr| \leqslant \exp u(z)$ *при всех* $z \in D\setminus K$*. Если* $f(z_k) = 0$ *на попарно различных точках* $z_k \in D\setminus K$*,* $k = 1,2,\dots$*, и при этом* $\sum_k v(z_k) = +\infty$*, то* $f \equiv 0$ *на* D*.*

По теореме 1 каждая построенная тестовая функция v порождает теорему единственности. Обсуждаем построения таких функций через *гиперболический радиус* $R_D\colon D \to (0,+\infty)$ области D, когда *на* ∂D *не менее трёх различных точек* [2]. Пусть $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ — *выпуклая возрастающая функция и* $f(0) = 0$*,* а $s \in \mathrm{sbh}(D\setminus K)$ — *положительная функция.*

Теорема 2 [1; Пример 5.5]. *Пусть область* $D \subset \mathbb{C}$ *выпуклая и* $\infty \notin \partial D$*. Тогда* $-R_D \in \mathrm{sbh}(D)$ *и при ограниченности образа* $(s/R_D)(D\setminus K) \subset [0,+\infty)$ *произведение* $f(s/R_D)\,R_D$ — *тестовая функция вне* K*.*

Другой подобный результат с участием гиперболического радиуса R_D возможен, когда a priori конечна характеристика

$$S(K,D) := \sup_{z \in D \setminus K} (\Delta R_D)(z). \tag{1}$$

Теорема 3 [1; Пример 5.6]. *Если* $S(K,D) \leqslant 4N \in [0,+\infty)$ *и* $\infty \notin \partial D$, *то* $-\log(1+NR_D) \in \mathrm{sbh}(D \setminus K)$ *и при ограниченности образа* $\big(s/\log(1+NR_D)\big)(D \setminus K) \subset [0,+\infty)$ *произведение* $f\big(s/\log(1+NR_D)\big)\log(1+NR_D)$ *— тестовая функция вне* K.

Роль компакта K в теореме 3 несущественна. В связи с теоремой 3 возникают интересные и сами по себе

Задачи. Выяснить, желательно в геометрических терминах,

- *при каких условиях на* D, *или* ∂D, $S(K,D) \overset{(1)}{<} +\infty$?
- *как вычислять, по возможности точно,* $S(K,D)$?
- *имеет свойство конечности характеристики* $S(K,D)$ *из* (1) *локальный характер на* ∂D *или не всегда*?
- *как характеристика* $S(K,D)$ *связаны с другими классическими геометрическими, топологическими и прочими характеристиками области* D *и/или границы* ∂D?

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16–01–00024).

Литература

[1] Bulat Khabibullin, Nargiza Tamindarova *Distribution of zeros and masses for holomorphic and subharmonic functions. I. Hadamard- and Blaschke-type conditions* – arXiv : 1512.04610v2 [math.CV] – 12/2015–03/2016 – 70 pages, list of references 71. Статья направлена в журнал «Математический сборник» в 2015 г.

[2] Авхадиев Ф. Г. *Интегральные неравенства в областях гиперболического типа и их применения* // Матем. сб. – 2015. Т. 206. –№ 12. – С. 3–28.

СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СОСТОЯНИЙ НА АЛГЕБРАХ ФОН НЕЙМАНА

С. Г. Халиуллин[1]

---

[1] *Samig.Haliullin@kpfu.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

Мы вводим понятие контигуальности двух последовательностей состояний, заданных на алгебрах фон Неймана. Использование техники ультрапроизведений [1], [2] позволяет свести это понятие к понятию эквивалентности двух состояний.

Обозначим элементы банахова пространства $(H_n)_{\mathcal{U}}$, являющегося ультрапроизведением последовательности банаховых пространств (опр. см. в [3]), через $(h_n)_{\mathcal{U}}$, где $\mathcal{U}$ — произвольный нетривиальный ультрафильтр на $\mathbb{N}$.

Пусть (x_n) — последовательность линейных ограниченных операторов, заданных на соответствующих пространствах H_n со свойством $\sup_n \|x_n\| < \infty$. Определим на $(H_n)_{\mathfrak{U}}$ оператор ультрапроизведения, полагая $(x_n)_{\mathfrak{U}}((h_n)_{\mathfrak{U}}) = (x_n(h_n))_{\mathfrak{U}}$. При таком определении оператор $(x_n)_{\mathfrak{U}}$ является линейным и ограниченным и $\|(x_n)_{\mathfrak{U}}\| = \lim_{\mathfrak{U}} \|x_n\|$.

Пусть $(\mathcal{M}_n)$ — последовательность σ-конечных алгебр фон Неймана, φ_n — точное нормальное состояние на $\mathcal{M}_n$. Положим

$$l^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{M}_n) = \{(x_n), x_n \in \mathcal{M}_n : \sup_n \|x_n\| < \infty\},$$

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{U}}(\mathcal{M}_n, \varphi_n) = \{(x_n) \in l^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{M}_n) : \lim_{\mathfrak{U}} \varphi_n(x_n^* x_n + x_n x_n^*)^{\frac{1}{2}} = 0\},$$

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{U}}(\mathcal{M}_n, \varphi_n) = \{(x_n) \in l^\infty(\mathbb{N}, \mathcal{M}_n) : (x_n)\mathcal{N}_{\mathfrak{U}}(\mathcal{M}_n, \varphi_n) \subset$$
$$\subset \mathcal{N}_{\mathfrak{U}}(\mathcal{M}_n, \varphi_n), \ \mathcal{N}_{\mathfrak{U}}(\mathcal{M}_n, \varphi_n)(x_n) \subset \mathcal{N}_{\mathfrak{U}}(\mathcal{M}_n, \varphi_n)\}.$$

Теперь определим ультрапроизведение алгебр фон Неймана с заданными на них состояниями как фактор-пространство

$$(\mathcal{M}_n, \varphi_n)_{\mathfrak{U}} = \mathcal{M}_{\mathfrak{U}}(\mathcal{M}_n, \varphi_n) / \mathcal{N}_{\mathfrak{U}}(\mathcal{M}_n, \varphi_n).$$

Зададим состояние на ультрапроизведении $(\mathcal{M}_n, \varphi_n)_{\mathfrak{U}}$ как

$$\varphi_{\mathfrak{U}}((x_n)_{\mathfrak{U}}) = \lim_{\mathfrak{U}} \varphi_n(x_n).$$

Известно (см. [1]), что тогда $(\mathcal{M}_n, \varphi_n)_{\mathfrak{U}}$ есть алгебра фон Неймана с точным нормальным состоянием $\varphi_{\mathfrak{U}}$.

Определение 3. *Пусть $(\mathcal{M}_n)$ — последовательность σ-конечных абгебр фон Неймана, (φ_n) и (ψ_n) — точные номальные состояния на $\mathcal{M}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Последовательности (φ_n) и (ψ_n) называются контигуальными, если $\varphi_n(x_n) \to 0 \ \Leftrightarrow \psi_n(x_n) \to 0$, $x_n \in \mathcal{M}_n$.*

Это определение обобщает понятие эквивалентности (взаимной абсолютной непрерывности) состояний.

Теорема. *Пусть $(\mathcal{M}_n)$ — последовательность σ-конечных алгебр фон Неймана, (φ_n) и (ψ_n) — точные нормальные состояния на $\mathcal{M}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда последовательности (φ_n) and (ψ_n) контигуальны тогда и только тогда, если состояния $(\varphi_n)_{\mathfrak{U}}$ и $(\psi_n)_{\mathfrak{U}}$ эквивалентны для любого нетривиального ультрафильтра $\mathfrak{U}$ на $\mathbb{N}$.*

Литература

[1] Ando H., Haagerup U. *Ultraproducts of von Neumann algebras* // Journal of Functional Analysis. – 2014. – T. 266. – № 12, P. 6842–6913.

[2] Mushtari D.H., Haliullin S.G. *Linear spaces with a probability meassure, ultraproducts and contiguity* // Lobachevskii Jornal of Mathematics. – 2014. – T 35. – № 2, 138–146.

[3] Heinrich S. *Ultraproducts in Banach space theory* // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1980. – T. 313. – P. 72–104.

О ПРИБЛИЖЕНИИ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ

Ю. Х. Хасанов[1]

---

[1] *yukhas60@mail.ru*, Российско-Таджикский (славянский) университет

Непрерывная на всей действительной оси функция $f(x)$ называется равномерной почти-периодической, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число $l = l(\varepsilon)$, что в каждом интервале длины l найдется хотя бы одно число τ, для которого выполняется неравенство $|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon$, $-\infty < x < \infty$.

Пусть $\mathbf{B}(R)$ — пространство всех ограниченных и равномерных почти-периодических функций $f(x) \in B$ с нормой $\|f(x)\|_B = \sup\{|f(x)| : x \in R\}$. Рассмотрим величину

$$R(f;x) = \|U_\sigma(f;\varphi;x) - f(x)\|_B, \tag{1}$$

в которой

$$U_\sigma(f;\varphi;x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\Phi_\sigma(t)dt,$$

$$\Phi_\sigma(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \varphi_\sigma(u)K_u(t)du,\ K_u(t) = \frac{4\sin(ut)}{t},$$

$\varphi_\sigma(u)$ — четная функция, абсолютно интегрируемая в интервале $(0,\infty)$ при любом фиксированном $\sigma > 0$ и такая что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_\sigma(t)|dt < \infty,\ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\sigma(t)dt = 1.$$

В данной работе исследуется вопрос о поведении величины (1) в зависимости от скорости стремления к нулю

$$E_\sigma(f)_B = \inf_{A_n} \|f(x) - \sum_{|\lambda_n| \leqslant \sigma} A_n \exp(i\lambda_n x)\|_B\ (\sigma \to \infty),$$

в случае, когда в качестве $\varphi_\sigma(u)$ выбраны функции

$$f(x) = \begin{cases} 1,\ |u| \leqslant a\ (0 < a < \sigma); \\ \frac{\sigma-|u|}{\sigma-a},\ a < |u| < \sigma; \\ 0,\ |u| \geqslant \sigma. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 1. *Если $f(x) \in \boldsymbol{B}(R)$, функция $\varphi_\sigma(u)$ определена соотношением (2), то при любом Λ $(0 < \Lambda < a < \sigma)$ справедлива оценка*

$$R(f;\varphi_\sigma) \leqslant M\frac{\sigma+a}{\sigma-a}E_\Lambda(f)_B,$$

где M — константа.

Далее рассмотрим отклонение функции $f(x) \in \mathbf{B}$ от сумм типа Марцинкевича [1]

$$\Omega(f;x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f;x),$$

где $S_k(f;x)$ — частичные суммы порядка k ряда Фурье функции $f(x) \in \mathbf{B}$.

Теорема 2. *Пусть* $f(x) \in \boldsymbol{B}$. *Если*

$$E_k(f)_B = \inf_{A_n} \left\| f(x) - \sum_{|\lambda_n| \leqslant k} A_n \exp(i\lambda_n x) \right\|_B$$

— наилучшее приближение функции $f(x)$ *тригонометрическими полиномами порядка не выше* k*, то справедлива оценка*

$$\|f(x) - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f;x)\|_B \leqslant \frac{M}{n+1} \sum_{k=0}^{n} E_k(f)_B.$$

Заметим, что аналогичные результаты для периодических функций рассмотрены в работе [2], а для почти-периодических в смысле Безиковича функций автором [3].

Литература

[1] Marcinkiewicz I. *Sur une methode remarquable de sommation des series doubles de Fourier* // Collecfed papers. Warszawa. – 1964. – P. 527–538.

[2] Тиман М.Ф., Пономаренко В.Г. *О приближении периодических функций двух переменных суммами типа Марцинкевича* // Изв. вузов. Математика. – 1975. – No. 9. – С. 59–67.

[3] Хасанов Ю.Х. *О приближении почти-перидических функций двух переменных* // Изв. вузов. Математика. – 2010. – No. 12. – С. 82–86.

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ КЛАССОВ C^1-РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЭЙКОНАЛА

И. Г. Царьков[1]

---

[1] *tsar@mech.math.msu.su*, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Мы будем изучать аппроксимативные свойства непустого и замкнутого множества M в произвольном действительном конечномерном банаховом пространстве X с нормой $\|\cdot\|$, что имеет отношение к уравнению эйконала вида $\|\nabla u\|_{X^*} = 1$. Здесь X^* – сопряженное с X пространство, а $u = u(x)$ – функция на подмножестве пространства X. Отметим, что более общий вид этой задачи может быть записан в виде $f(\nabla u) = 1$ для некоторой выпуклой функции на X^*. В частности рассмотрение функции $f(x^*) := \|x^*\|_{X^*} + (x_0, x^*)$ $(\|x_0\|_X < 1)$ приводит к необходимости исследования задач геометрической теории приближения в несимметричном пространстве $(X, \|\cdot - x_0\|)$. В случае $X = \mathbb{R}^m$ с несимметричной нормой $\|x\| := \sqrt{1 + \frac{|a|^2}{4}}|x| + \frac{1}{2}(x, a)$ уравнение эйконала эквивалентно уравнению: $|\nabla u|^2 + (a, \nabla u) = 1$, где $a \in \mathbb{R}^m$ – некоторый постоянный вектор. Последнее уравнение сводится заменой переменных к известному уравнению распространению фронта световой волны в анизотропной среде с постоянной скоростью v и постоянным вектором преломления $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{R}^m$: $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{u'_{x_k}}{n_k}\right)^2 + \frac{2}{c}(v, \nabla u) = 1$.

Через $\varrho(x,M)$ обозначим величину $\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$. Точка $y_0\in M$ называется ближайшей точкой в M для точки x, если $\|x-y_0\|=\varrho(x,M)$. Точка $x\in X\setminus M$ называется регулярной для замкнутого множества $M\subset X$, если все точки некоторой окрестности $O(x)$ являются точками единственности (т.е. для них существует единственная ближайшая в M). Точки, не являющиеся регулярными или принадлежащие замыканию $\operatorname{int}M$, будем называть особыми. Роль этих множеств в задаче эйконала можно посмотреть в обзоре [1].

Теорема 1. *Пусть X – гладкое строго выпуклое конечномерное пространство, N – выпуклая оболочка замкнутого множества $T\subset X$, представляющая собой такое замкнутое множество, не совпадающее с X, что во внешности некоторой окрестности $O_r(N)$ все точки регулярны для T. Тогда $\partial N\subset T$.*

Теорема 2. *Пусть X – гладкое конечномерное пространство. Тогда, если область $\Omega\subset X$ состоит из регулярных точек по отношению к ее границе, то $X\setminus\Omega$ выпукло.*

Теорема 3. *Пусть X – строго выпуклое конечномерное пространство с непрерывно дифференцируемой нормой, $\Omega\subset X$ – область, граница которой $T=\partial\Omega$ компактна. Тогда весь класс C^1-решений уравнения эйконала $\|\nabla u\|_{X^*}=1$ состоит из функций вида $u(x)=c\pm\varrho(x,M)$, где $M\subset X$ – некоторая произвольная выпуклая поверхность, особые точки которой лежат в $X\setminus\Omega$.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 16-01-00295-а.

Литература

[1] Алимов А. Р., Царьков И. Г. *Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения*// Успехи математических наук. 2016. –Т. 71. – № 1 (427). – С. 3–84.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ОДНОСТОРОННИЕ ПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. А. Чешкова[1]

---

[1] *cma41@yandex.ru, cma@math.asu.ru*, Алтайский государственный университет

Если на поверхности в E^3 существует замкнутая кривая (дезориентирующий контур), обладающая тем свойством, что при ее обходе локальная ориентация в касательном пространстве меняет знак, то поверхность называется односторонней.

Простейшей однрсторонней поверхностью является лента Мебиуса. К односторонним поверхностям относятся: скрещенный колпак, бутылка Клейна, римская поверхность [1-4].

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую γ, заданную 4π-периодической вектор-функцией $\rho=\rho(u)$, которая не является 2π-периодической и 2π-антипериодической.

Так как $\rho(u) = \rho(u+4\pi)$, то вектор-функция $s(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) + \rho(u+2\pi))$ есть 2π-периодическая, а вектор-функция $l(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) - \rho(u+2\pi))$ есть 2π - антипериодическая.

С помощью этих функций построим примеры односторонних поверхностей.

Определим поверхность M уравнением

$$r(u,v) = s(u) + vl(u), u = [-\pi,\pi], v = [-1,1]. \tag{1}$$

Утверждение 1. *Поверхность M есть модель ленты Мебиуса, для которой кривая* $\rho = \rho(u)$ *есть край.*

Дезориентирующий контур поверхности M (средняя линия) имеет вид $r(u,0) = s(u)$.

Рассмотрим замкнутую поверхность K:

$$r(u,v) = (p + cos(v))s(u) + sin(v)l(u), p \neq \mp 1, \tag{2}$$

$u = [-\pi,\pi], v = [-\pi,\pi]$.

Утверждение 2. *Формула (2) определяет модель бутылки Клейна.*

Поверхности K имеет два дезориентирующих контура $r(u,0) = (p+1)s(u), r(u,\pi) = (p-1)s(u)$.

Разрежем K вдоль кривой $r = r(u,v_0), u = [-2\pi,2\pi], v_0 \neq 0, \mp\pi$. Получим две ленты Мебиуса (криволинейные) со средними линиями $r(u,0) = (p+1)s(u), r(u,\pi) = (p-1)s(u)$.

Рассмотрим замкнутую поверхность P:

$$r(u,v) = (1 + cos(v))s(u) + sin(v)l(u), u = [-\pi,\pi], v = [-\pi,\pi]. \tag{3}$$

Утверждение 3. *Формула (3) определяет модель проективной плоскости P.*

Литература

[1] Кривошапко С., Иванов В., Халаби С. *Аналитические поверхности.* – М.: Наука, 2006. – 539 с.

[2] Гильберт Д., Кон-Фоссен С. *Наглядная геометрия.* – М.: Наука, 1981. – 344 с.

[3] Чешкова М. А. *Об одной модели бутылки Клейна в* E^3 // Тезисы международной конференции:Дни науки в Новосибирске. – 2015. – С. 65-66.

[4] Чешкова М. А. *Односторонние поверхности* // Известия Алтайского университета. – 2015. – № 1/2. – С. 164–168.

О НАИЛУЧШЕЙ ПРИБЛИЖЕННОЙ ЗАМЕНЕ КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА ОПЕРАТОРА ФУРЬЕ

И. А. Шакиров[1]

---

[1] *iskander@tatngpi.ru*, Набережночелнинский институт социально-педагогических технологий и ресурсов

В процессе изучения равномерной сходимости частичных сумм ряда Фурье функции принципиальное значение имеет поведение соответствующих констант Лебега [1, с. 125]

$$L_n = \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{n,k}}{4k^2-1}, \qquad c_{n,k} = \sum_{m=1}^{(2n+1)k}\frac{1}{2m-1},\ n\in N; \tag{1}$$

$L_0 = 1,\ L_1 = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}$.

Исследованием их свойств в первой половине прошлого столетия активно занимались А. Лебег, Л. Фейер, Г. Сеге, Г. Харди, Г. Ватсон, а во второй половине – советские математики С. Б. Стечкин, Н. И. Ахиезер, С. А. Теляковский, Ю. Н. Субботин, П. В. Галкин [2], Г. И. Натансон [3] и др. Однако некоторые вопросы наилучшего приближения константы (1) вполне определенной функцией из семейства функций вида $(4/\pi^2)\ln(n+a)+b$ до сих пор оставались неизученными. Рассматривается приближение

$$L_n \approx \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a)+b \quad (a\in[0,+\infty), b\in[0,+\infty), n\in N), \tag{2}$$

где в смысле оптимальности содержательным является лишь случай $(a,b)\in D = [0,1]\times[0,2]$.

С использованием результатов работ [2] и [3], доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Для всех значений параметра* $a\in[0,1/2]$ *остаточный член* $O(n,a) \equiv L_n - (4/\pi^2)\ln(n+a)$ *является строго убывающей функцией натурального аргумента* n, *где* $\alpha_0 = \lim\limits_{n\to\infty} O(n,a) = \frac{8}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{4k^2-1} + \frac{4}{\pi^2}(3\ln n+\gamma) = 1{,}27035324...$ – *известное* [4] *предельное значение остаточного члена, не зависящее от выбора* a.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *наилучшее равномерное приближение в* (2) *достигается при значениях* $a = a_0 = 0.5$ *и* $b = b_0 = (\alpha_0 + O(1,0.5))/2 = 1{,}27100777...$, *которые определяют решение следующей экстремальной задачи:*

$$\sup_{n\in N}\inf_{(a,b)\in D}\left|L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b\right| =$$

$$= \sup_{n\in N}\left|L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a_0) - b_0\right| = \varepsilon_1 = 0{,}00065453... \tag{3}$$

Примечание. Рассматривая задачу (3) на вложенных друг в друга подмножествах множества натуральных чисел, погрешность $\varepsilon_1 = L_1 - (4/\pi^2)\ln(1+a_0) - b_0$ мы можем сколько угодно уменьшить. Например, соответствующая множеству $N_2 = \{3,4,5,\ldots\} \subset N$ погрешность, вычисленная согласно использованному в теореме 2 алгоритму, уже равна $\varepsilon_2 = 0.00012195...$, т. е. она уменьшена более чем в 5 раз.

Литература

[1] Зигмунд А. *Тригонометрические ряды, Т. 1.* – М.: Мир, 1965.

[2] Галкин П. В. *Оценки для констант Лебега*// Тр. МИАН СССР. – 1971. – Т. 109. – С. 3–5.

[3] Натансон Г. И. *Об оценке констант Лебега сумм Валле–Пуссена*/ Геометрические вопросы теории функций и множеств. – Калинин, 1986.

[4] Watson G. H. *The constant of Landau and Lebesgue*// Quart. J. Math. – 1930, Ser. 1. – P. 310–318.

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОСОБЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ф. М. Шамсудинов[1]

---

[1] *faizullo100@yahoo.com*, Курган-Тюбинский государственный университет, Таджикистан

Пусть D — прямоугольник $D = \{(x,y) : 0 < x < \delta_1, 0 < y < \delta_2\}$, $\Gamma_1 = \{y = 0,\ 0 < x < \delta_1\}$, $\Gamma_2 = \{x = 0,\ 0 < y < \delta_2\}$.

В области D рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{a_1(x,y)}{r^\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{b_1(x,y)}{r^\beta}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{c_1(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}u = \dfrac{f_1(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}, \\ \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{a_2(x,y)}{r^\gamma}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{c_2(x,y)}{r^\gamma}u = \dfrac{f_2(x,y)}{r^\gamma}, \end{cases} \tag{1}$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $a_j(x,y)$, $b_1(x,y)$, $c_j(x,y)$, $f_j(x,y)$, $j = 1,2$ — заданные функции в области D, $\alpha < 1$, $\beta > 2$, $\gamma > 2$ (β, γ — целые положительные числа).

Проблеме исследования дифференциальных уравнений и переопределенных систем с регулярными, сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами посвящены работы [1]–[3].

С использованием методики, разработанной в [2] и [3] для системы (1), получено представление многообразия решений системы уравнений (1) при помощи одной произвольной функции одной независимой переменной и одной произвольной постоянной.

В дальнейшем под $C_2(D)$ понимаем класс функций, которые имеют производные первого порядка в D и такие, что $u_{xy} \in C(D)$.

Теорема. *Пусть в системе уравнений (1) коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям*

A. $a_1(x,y), a_2(x,y) \in C^1_x(\overline{D})$, $a_2(x,y) \in C^1_y(\overline{D})$, $c_j(x,y)$, $f_j(x,y) \in C(\overline{D})$, $j = 1,2$;

B. $c_1(x,y) = r^{\alpha+\beta}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{a_1(x,y)}{r^\alpha}\right) + a_1(x,y)b_1(x,y)$, $c_2(x,y) = r^\gamma \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{a_2(x,y)}{r^\gamma}\right)$;

C. $\mid b_1(x,y) - b_1(0,0) \mid \leqslant H_1 r^{\beta_1},\ H_1 = \mathrm{const},\ \beta_1 > \beta - 1,$
$\mid a_2(x,0) - a_2(0,0) \mid \leqslant H_2 x^{\nu_1},\ H_2 = \mathrm{const},\ \nu_1 > \gamma - 1;$

D. $b_1(0,0) > 0,\ a_2(0,0) > 0;$

E. a) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{a_1(x,y)}{r^{\alpha}}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{a_2(x,y)}{r}\right)$ *в* D,

b) $f_1(x,y)$ *и* $f_2(x,y)$ *связаны при помощи коэффициентов системы в явном виде;*

F. $f_1(x,y) = o(r^{\mu_1}),\ \mu_1 > \alpha + \beta - 1,\ f_2(x,0) = o(x^{\nu_2}),\ \nu_2 > \alpha - 1.$

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса $C_2(D)$ *представимо в виде*

$$u(x,y) = \chi\left(\varphi_1(x), \psi_1(y), f_1(x,y)\right),\ \ \varphi_1(x) = N\left(c_1, f_2(x,0)\right),$$
$$\psi_1(y) = M(f_1(0,y), \psi_2(y)),$$

где $\chi\left(\varphi_1(x), \psi_1(y), f_1(x,y)\right)$, $N\left(c_1, f_2(x,0)\right)$ *— известные интегральные операторы* $M(f_1(0,y), \psi_2(y))$ *— известная функция,* $\psi_2(y)$ *— произвольная функция одной независимой переменной* y *точек* Γ_2*,* c_1 *— произвольная постоянная.*

Литература

[1] Wilczynski E.J. *Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces.* — Leipzig, 1906. — 120 p.

[2] Раджабов Н. *Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами.* — Душанбе: Изд. ТГУ, 1992 . — 236 с.

[3] Раджабов Н., Мохамед Эльсаед Абдель Аал. *Переопределеная линейная система второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными линиями.* — Lap Lambert Academic Publishing, 2011. – 234 с.

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ С СИНГУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ

Б. Шарипов[1]

---

[1] *safarov-5252@mail.ru*, Институт предпринимательства и сервиса, г. Душанбе

В предлагаемой сообщении по аналогии с работами [1-3] рассматриваются некоторые типы нелинейных систем уравнений в полных дифференциалах (п.д.-систем) с сингулярными линиями, для которых в случае тождественного выполнения условия совместности их решения находятся как непрерывные функции.

Рассмотрим п.д.-систему вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a(x,y;u),\ \ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{b(x,y;u)}{x^n},\ \ (n \geqslant 0), \tag{1}$$

где $a, b \in C^1(\overline{D})$, $u(x,y) \in C^2(D_0)$, $D_0 = \overline{D} - (\widetilde{A_1} : x = 0)$. Условие совместности п.д.-системы (1) имеет вид:

$$D_y(a) = D_x(\frac{b}{x^n});\quad x^{n+1}a'_y + x(ba'_x - b'_x - ab'_u) + nb. \tag{2}$$

Допустим, что необходимое условие совместности (2) выполняется. То есть, пусть существует некоторое решение системы (1). Тогда при подстановке этой условной функции в каждое уравнение системы должны получиться тождества. Покажем, что тождественное выполнение условия (2) является также достаточным. Для этого, учитывая задачу Коши, или начальное условие, для первого уравнения системы (1) в виде

$$u_{x=x_0} = u_0 \ \ (x_0 \neq 0), \ \ (u_0 = u(x_0, y)), \tag{3}$$

будем интегрировать первое уравнение системы (1) как обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) по переменной x, считая y параметром. После применения метода последовательных приближений будем иметь:

$$u(x, y) = h[x, y; V(y)], \quad (h'_x = a(x, y; h)), \tag{4}$$

где $V(y) = u(x_0, y)$, $(V(y_0) = u_0)$ — новая функция, а $h[x, y; V(y)]$ — известная, причём непрерывная по всем переменным. Дифференцируя соотношение (4) по переменной y, подставляя результат во второе уравнение системы (1), получим регулярное ОДУ вида:

$$\frac{dV}{dy} = f(y, V), \quad f(y, V) = \frac{1}{h'_y}\left(\frac{b}{x^n} - h'_y\right), \ \ (h'_y \neq 0). \tag{5}$$

Легко показать, что правая часть ОДУ (5) не зависит от переменной x. Поэтому интегрируя ОДУ (5) по переменной y, с учётом условия Коши вида (3), получим: $V = \Phi(C, y)$ или $V = \Phi(V_0, y)$, $(V_0 = V(x_0, y_0))$. Тогда все решения системы (1) будут представлены соответствующей формулой:

$$u(x, y) = h[x, y; \Phi(V_0, y)]. \tag{6}$$

Теорема. *Пусть в п.д.-системе (1) $a, b \in C^1(\overline{D})$, $u(x, y) \in C^2(D_0)$, $D_0 = \overline{D} - \{\Gamma_1\}$. Если условие совместности (2) будет выполнено, но не тождественно, тогда из этого соотношения можно определить некоторую функцию $u = p(x, y)$, являющуюся частным решением системы (1). Если же условие (2) для п.д.- системы (1) будет выполнено тождественно, тогда существует многообразие всех решений системы (1), либо решение задачи Коши для системы (1), даются формулой вида (6), непрерывной во всей области $\overline{D}$.*

Литература

[1] Михайлов Л.Г. *О вырождении порядка дифференциальных уравнений до нулевого порядка и о некоторых вопросах сингулярного анализа* // ДАН России, 2002, т. 384, № 6, с. 731-737.

[2] Михайлов Л.Г. *О некоторых переопределенных системах уравнений в частных производных с сингулярными точками* // ДАН России, 2004, т. 398, № 2, с. 164-167.

[3] Шарипов Б. *Представления решений одного класса системы уравнений в полных дифференциалах с сингулярными точками.* – Труды межд.конференции посвященной 110-летию со дня рождения академика С. М. Никольского. — Москва, 2015 г.

О ЛИНЕЙНЫХ K-УПОРЯДОЧЕННЫХ АЛГЕБРАХ

Е. Е. Ширшова[1]

---

[1] *shirshova.elena@gmail.com*, Московский педагогический государственный университет

Пусть F – частично упорядоченное (po-) поле [1], A – линейная алгебра над полем F. Алгебра $A =< A,+,\cdot,\leqslant>$ называется *K-алгеброй*, если: $< A,+,\leqslant>$ является po-группой; из $a \leqslant b$ следует $\alpha a \leqslant \alpha b$ для всех $a, b \in A$ и $\alpha \in F(\alpha > 0)$; из $0 \leqslant a \in A$ следует $ab, ba \leqslant a$ для всех $b \in A$. $A^+ = \{a \in A |\ 0 \leqslant a\}$.

Теорема 1. *В K-алгебре A над po-полем F для каждого $a \in A^+ (a \neq 0)$ существует выпуклый направленный идеал $[a]$, где $u \in [a]^+$, если $u \leqslant \alpha a$ для некоторого $\alpha \in F$.*

Теорема 2. *Пусть A – K-алгебра над po-полем F, I – выпуклая направленная подгруппа группы $G =< A,+,\leqslant>$, где $FI \subset I$, ε – естественный гомоморфизм группы G на группу G/I. Тогда существует K-алгебра A/I над F, и ε является o-гомоморфизмом K-алгебры A на K-алгебру A/I.*

Литература

[1] Фукс Л. *Частично упорядоченные алгебраические системы.* – М.: Мир, 1965. – 342 с.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ, НАСЫЩЕННЫЕ КОНЕЧНЫМИ ПРОСТЫМИ ГРУППАМИ ТИПА L_3, U_3.

А. А. Шлепкин[1]

---

[1] *shlyopkin@mail.ru*, Сибирский федеральный университет

Говорят, что группа G *насыщена* группами из множества групп $\mathfrak{R}$, если любая конечная погруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{R}$. Получен следующий результат [1].

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество, элементами которого являются простые трёхмерные унитарные группы $U_3(q)$ или линейные группы $L_3(q)$ над конечными полями. Доказывается, что периодическая группа, насыщенная группами из $\mathfrak{M}$ локально конечна и изоморфна $U_3(Q)$ или $L_3(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q.

Теорема. *Пусть периодическая группа G насыщена группами из множества*

$$\mathfrak{M} = \{U_3(q), L_3(q) \mid q \text{ — степень простого числа, } q \geqslant 3\}.$$

Тогда G изоморфна $U_3(Q)$ или $L_3(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q.

Литература

[1] Шлепкин А. К. *Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие ко- нечные неразрешимые подгруппы* – Сб. тез. 3-й междунар. конф. по алгебре (23–28 августа 1993), – 369 с.

КОНДЕНСАТОРЫ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ И СОБОЛЕВСКИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ

В. А. Шлык[1], А. А. Яковлев

---

[1] *shlykva@yandex.ru*, Дальневосточный федеральный университет

Ниже под римановой поверхностью понимается поверхность $\mathfrak{R}$, склеенная из конечного или счетного числа областей замкнутой комплексной плоскости таким образом, чтобы выполнялось условие: проекция точки поверхности $\mathfrak{R}$ совпадает с точкой склеиваемой области, окрестность каждой точки $\mathfrak{R}$ представляет собой однолистный или конечнолистный круг (подробнее см. [1, гл. 8, §10]).

Операция проектирования $\mathfrak{R} \ni W \to \text{пр W} = w$ индуцирует на поверхности $\mathfrak{R}$ метрику $|dW|$, площадь $d\sigma$.

Пусть далее G — открытое множество с компактным замыканием в $\mathfrak{R}$, $u : G \to (-\infty; +\infty)$ — гладкая функция. Положим

$$\|u\| = \left(\int\limits_G |\nabla u|^2 \, d\sigma \right)^{1/2} + \left(\int\limits_G |u|^2 \, d\sigma \right)^{1/2}$$

и определим соболевское пространство $H_1^2(G)$ как пополнение $\{u \in C^\infty(G) : \|u\| < \infty\}$ в $\| \cdot \|$.

Пусть F_0, F_1 — непересекающиеся компакты в замыкании открытого множества $\Omega \subset \mathfrak{R}$. Тогда тройку (F_0, F_1, G) назовем конденсатором на поверхности $\mathfrak{R}$. Конформную емкость $C(F_0, F_1, G)$ конденсатора на $\mathfrak{R}$ определим равенством

$$C(F_0, F_1, G) = \inf \int\limits_G |\nabla u|^2 \, d\sigma,$$

где инфимум берется по всем допустимым функциям u, т.е. числовым функциям, равным нулю в окрестности F_0 и единице в окрестности F_1 и удовлетворяющим локально условию Липшица в $G \setminus (F_0 \cup F_1)$ (см. [2]).

Компакт $E \subset \mathfrak{R}$ назовем NED-множеством, если для каждого однолистного круга $U \subset \mathfrak{R}$ проекция пр $(U \cap E)$ — NED-множество в комплексной плоскости (см. [3]).

Обозначим через $m(F_0, F_1, G)$ конформный модуль семейства всех локально спрямляемых кривых, соединяющих F_0 и F_1 в $G \subset \mathfrak{R}$. Справедливы следующие утверждения:

Теорема 1. *$m(F_0, F_1, G) = C(F_0, F_1, G)$ для конденсатора (F_0, F_1, G) на $\mathfrak{R}$.*

Теорема 2. *NED-множество E является устранимым множеством для $H_1^2(G)$ и не влияет на конформный модуль $m(F_0, F_1, G)$.*

Литература

[1] Гурвиц А., Курант Р. *Теория функций.* – М.: Наука, 1968. – 648 с.

[2] Дубинин В. Н. *Круговая симметризация конденсаторов на римановых повехностях* // Матем. сб. – 2015. – Т. 206. – № 1. – С. 69–96.

[3] Ahlfors L., Beurling A. *Conformal invariants and function-theoretic null-sets* // Acta Mathematica. – 1950. – vol. 83. – P. 101–129.

О ПРОИЗВЕДЕНИИ МНОЖЕСТВ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Ю. Н. Штейников[1]

---

[1] *yuriisht@yandex.ru*, Математический институт имени В.А. Стеклова

Пусть имеются два подмножества A, B множества рациональных дробей с ограниченными числителями и знаменателями, то есть:

$$A, B \subseteq F_Q := \{\frac{r}{s} : 1 \leqslant r, s \leqslant Q\}.$$

Везде ниже будем считать Q – достаточно большим натуральным числом. Ж. Бургейн, С. В. Конягин и И. Е. Шпарлинский установили следующий интересный результат [1].

Теорема 1. *Если* $A, B \subseteq F_Q$ *то справедлива следующая оценка*

$$|A * B| \geqslant |A||B| \exp\left\{(-9 + o(1))\frac{\log Q}{\sqrt{\log\log Q}}\right\}.$$

Отметим, что эта оценка неоднократно использовалась при получении различных утверждений. Х. Силлеруело другим способом установил теорему 1, при этом улучшил показатель 9 и несколько расширил этот результат [3]. Для ознакомления с этим утверждением и его различным приложениям мы отсылаем читателя к работам [1-3].

В своем докладе я расскажу о более сильном варианте теоремы 1. А именно, справедлива

Теорема 2. *Существует такая абсолютная постоянная* $C > 0$, *что если* $A, B \subseteq F_Q$ *то справедлива следующая оценка*

$$|A * B| \geqslant |A||B| exp\{(-C + o(1))\frac{\log Q}{\log\log Q}\}, Q \to \infty.$$

при этом в качестве C *можно взять* $8\log 2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 14-50-00005

Литература

[1] Bourgain J., Konyagin S., Shparlinski I. *Product sets of rationals, multiplicative translates of subgroups in residue rings and fixed points of the discrete logarithm*// Int. Math Research Notices. 2008. rnn 090, P. 1–29.

[2] Cilleruelo C., Garaev M. *Congruences involving product of intervals and sets with small multiplicative doubling modulo a prime and applications* // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. (to appear)

[3] Cilleruelo C *A note on product sets of rationals* //http://arxiv.org/pdf/1405.1187.pdf

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ УРАВНЕНИЙ АБЕЛЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ УПРАВЛЯЮЩЕГО ПАРАМЕТРА

В. В. Шурыгин (мл.)[1]

Мы рассматриваем вопрос об эквивалентности уравнений Абеля первого порядка

$$y' = a(x,u)y^3 + b(x,u)y^2 + c(x,u)y + d(x,u),$$

коэффициенты которых зависят от одномерного управляющего параметра u, относительно действия псевдогруппы G преобразований вида

$$x \mapsto f(x), \quad u \mapsto w(x,u), \quad y \mapsto g(x)\cdot y + h(x).$$

Действие псевдогруппы G продолжается до действия на пространстве джетов расслоения $\pi\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2$, где $\pi\colon (x,u,a,b,c,d) \mapsto (x,u)$. Каждое уравнение Абеля есть сечение такого расслоения.

Дифференциальным инвариантом порядка $\leqslant k$ будем называть функцию $I \in C^\infty(J^k\pi)$, инвариантную относительно продолженного действия псевдогруппы G. Под *инвариантным дифференцированием* будем понимать комбинацию полных производных $\nabla = A\frac{d}{dx} + B\frac{d}{du}$, где $A, B \in C^\infty(J^\infty\pi)$, инвариантную относительно продолженного действия G.

Теорема 1. *Алгебра дифференциальных инвариантов порождена двумя инвариантами первого порядка*

$$I_1 = \frac{a^2(3a_uc_u - b_u^2)}{(ab_u - ba_u)^2}, \qquad I_2 = \frac{(2b_u^3 - 9a_ub_uc_u + 27a_u^2d_u)a^3}{(ab_u - ba_u)^3},$$

двумя инвариантами второго порядка

$$J_1 = \frac{a^2(a_ub_{uu} - b_ua_{uu})}{a_u^2(ab_u - ba_u)^2}, \qquad J_2 = \frac{a_uM_2}{(ab_u - ba_u)^4},$$

где $M_2 = a^2(9ab_x - 9ba_x + 27a^2d - 9abc + 2b^3)(a_ub_{uu} - b_ua_{uu}) + 9a^2(b_ua - a_ub)(b_ua_{xu} - a_ub_{xu}) - a_u(b_ua - a_ub)(-9a^2cb_u + 27a^2da_u + 3ab^2b_u - b^3a_u)$, *и двумя инвариантными дифференцированиями*

$$\nabla_1 = \frac{9aa_u^2}{(ab_u - ba_u)^2}\frac{d}{dx} - \frac{aa_u^2(9ab_x - 9ba_x + 27a^2d - 9abc + 2b^3)}{(ab_u - ba_u)^3}\frac{d}{du},$$

$$\nabla_2 = \frac{a}{a_u}\frac{d}{du}.$$

---

[1] *vshjr@yandex.ru, 1Vadim.Shurygin@kpfu.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

Рассмотрим пространства $\mathbb{R}^2$ с координатами (x,u) и $\mathbb{R}^{17}$ с координатами $(i_1, i_2, j_1,\ j_2, i_{11}, i_{12}, i_{21}, i_{22}, i_{111}, i_{121}, i_{122}, i_{211}, i_{221}, i_{222}, j_{11}, j_{12}, j_{21})$. Каждое уравнение Абеля $\mathscr{E}$ определяет отображение $\sigma_{\mathscr{E}}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{17}$ по формулам $i_k = I_k^{\mathscr{E}}$, $j_k = J_k^{\mathscr{E}}$, $i_{k\ell} = \nabla_\ell I_k^{\mathscr{E}}$, $j_{k\ell} = \nabla_\ell J_k^{\mathscr{E}}$, $i_{k\ell m} = \nabla_\ell \nabla_m I_k^{\mathscr{E}}$, где верхний индекс $\mathscr{E}$ означает, что дифференциальные инварианты вычисляются для коэффициентов уравнения $\mathscr{E}$. Образ $\Sigma_{\mathscr{E}} = \operatorname{im}\sigma_{\mathscr{E}} \subset \mathbb{R}^{17}$ зависит только от класса эквивалентности уравнения $\mathscr{E}$ относительно действия G.

Теорема 2. *Два уравнения Абеля $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}'$ эквивалентны относительно действия псевдогруппы G тогда и только тогда, когда $\Sigma_{\mathscr{E}} = \Sigma_{\mathscr{E}'}$.*

Литература

[1] Appell P. *Sur les invariants de quelques équations différentielles* // Journal de Mathématique. — 1889. — Vol. 5. — P. 361–423.

[2] Lychagin V. *Feedback Equivalence of 1-dimensional Control Systems of the 1-st Order* // “Geometry, topology and their applications”, Proceedings of the Institute of mathematics of NAS of Ukraine. — 2009. — Vol. 6(2). — P. 288–302.

ИНДУКТИВНЫЕ И ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ПРОСТРАНСТВ С ПОРЯДКОВЫМИ ЕДИНИЦАМИ

З. Эскандариан[1], А. А. Новиков[2]

---

[1] *Zohreh.Eskandarian@gmail.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

[2] *A.Hobukob@gmail.com*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

За $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ обозначено пространство всех измеримых вещественно-значных функций на Ω, определенных с точностью до почти всюду.

Пусть $f \in L_0^+(\Omega, \Sigma, \mu)$. Рассматривается множество

$$I(f) = \{g \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu) \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ :\ -\lambda f \leqslant g \leqslant \lambda f\}.$$

За p_f обозначается отображение

$$p_f(g) := \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid -\lambda f \leqslant g \leqslant \lambda f\ \}.$$

Очевидно, p_f норма на $I(f)$. Также очевидно, что $I(\mathbf{1}) = L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ [1, 5, 8, 9]. Для $f \in L_0^+(\Omega, \Sigma, \mu)$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, верно равенство $\lambda p_{\lambda f} = p_f$. Для $f,\ g \in L_0^+(\Omega, \Sigma, \mu)$, если $f \leqslant g$, то $p_f \geqslant p_g$.

Далее f' обозначает $f|_{\Omega\setminus\ker f}$. Соответственно $\|f'\|'_\infty := \|f|_{\Omega\setminus\ker f} \oplus \mathbf{0}|_{\ker f}\|_\infty$. Также всюду далее $I(f')$ идентифицируется с $I(f)$, а $p_{f'}$ идентифицируется с p_f.

Теорема 1. *Для $f \in L_0^+(\Omega, \Sigma, \mu)$ следующие условия эквивалентны:*

i) $\exists \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^+\ p_{f^\alpha} \sim p_{f^\beta}$;

ii) $\forall\alpha\in\mathbb{R}^+\ p_{f^\alpha}\sim\|\cdot\|'_\infty$;
iii) $\forall\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}^+\ p_{f^\alpha}\sim p_{f^\beta}$.

Пусть τ_α обозначает топологию нормы p_{f^α} на $I(f^\alpha)$, где $\alpha\in\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$. Для $\alpha\leqslant\beta$ $\tau_\alpha^\beta:=\{A\cap I(f^\beta)|A\in\tau_\alpha\}$. Если $\alpha\leqslant\beta$, то $\tau_\alpha^\beta\subset\tau_\beta$. Включения $\tau_\alpha^\beta\subset\tau_\beta$ и $I(f^\beta)\subset I(f^\alpha)$ выполняются всегда, когда $\alpha\leqslant\beta$ и $\|f\|_\infty<+\infty$.

В случае, когда $\|f^{-1}\|\leqslant 1$ (т.е. $f\geqslant 1$), для $\alpha\leqslant\beta$, $\|f^{-1}\|<+\infty$ верны включения $I(f^\alpha)\subset I(f^\beta)$. Для $\alpha\leqslant\beta$ определим τ^α_β как топологию на $I(f^\alpha)$ индуцированную топологией τ_β. Верно, что $\tau_\alpha\supset\tau^\alpha_\beta$.

Пусть $\Omega_0=\{x\in\Omega|f\leqslant 1\}$ и $\Omega_\infty=\{x\in\Omega|f>1\}$. При этом f представима в виде $f=f_0\oplus f_\infty$, где $f_0=f|_{\Omega_0}$, $f_\infty=f|_{\Omega_\infty}$ причем $\|f_0\|_\infty\leqslant 1$ и $\|(f_\infty)^{-1}\|_\infty\leqslant 1$. Соответственно, $I(f)=I(f_0)\oplus I(f_\infty)$ в том смысле, что $I(f)$ представимо как декартово произведение $I(f_0)\times I(f_\infty)$ и $p_f(g)=\max\{p_{f_0}(g_0),p_{f_\infty}(g_\infty)\}$ для любого $g\in I(f)$.

Теорема 2. *Линейное пространство* $I^\infty(f)\equiv\lim I(f^n)$ *корректно определено, причем*

$$I^\infty(f)=\bigcup_{\alpha>0}\bigcap_{\beta\geqslant\alpha}I(f^\beta)=\bigcap_{\alpha>0}\bigcup_{\beta\geqslant\alpha}I(f^\beta)=\bigcap_{\alpha>0}I(f_0^\alpha)\times\bigcup_{\alpha>0}I(f_\infty^\alpha).$$

Пусть τ_α^0 обозначает топологию на $I^\infty(f_0)$ индуцированную τ_α. На $I^\infty(f_0)$ естественно определить инициальную топологию τ_0 для вложений $L^\infty(f_0)$ в $(L(f_0^\alpha),\tau_\alpha^0)$.

Лемма 1. $(I^\infty(f_0),\tau_0)$ *– полное метризуемое локально выпуклое пространство (пространство Фреше).*

Пусть τ_α^∞ обозначает топлогию на $I(f_\infty^\alpha)$ индуцированную топологией τ_α. На $I^\infty(f_\infty)$ естественно ввести финальную топологию τ_∞ Топология на $I(f_\infty^\alpha)$ индуцированная τ_∞ обозначена τ_∞^α.

Лемма 2. *Топология* τ_∞^α *совпадает с* $\bigcap\limits_{\beta>\alpha}(\tau_\beta^\infty)^\alpha$ *для всех* $\alpha>0$.

Пусть $\mathscr{RI}(f)=\{g\in L_0(\Omega_\infty,\Sigma_\infty,\mu_\infty)|\forall\alpha>0\ \exists\ C_\alpha\ f_\infty^\alpha\leqslant C_\alpha g$ на $\Omega_\infty\}$, где $\Sigma_\infty=\{A\cap\Omega_\infty|A\in\Sigma\}$, $\mu_\infty=\mu|_{\Sigma_\infty}$. Топология нормы p_g на $I(g)$ обозначена $\tau(g)$. Соответствующая индуцированная топология на $I(f_\infty^\alpha)\subset I(g)$ обозначена $\tau^\alpha(g)$.

Предложение. *Для любого* $\alpha>0$ *верно, что* $\bigcap\limits_{\beta>\alpha}(\tau_\beta^\infty)^\alpha$ *не слабее топологии* T_∞^α *с базой* $\bigcup\limits_{g\in\mathscr{RI}(f)}\tau^\alpha(g)$.

Лемма 3. *Инициальная топология* T_∞ *вложений* $f_g:x\in I^\infty(f_\infty)\mapsto x\in(I(g),\tau(g))$, *где* $g\in\mathscr{RI}(f)$, *не сильнее топологии* τ_∞.

Предельной топологией τ на $I^\infty(f)$ естественно считать топологию с базой $\tau_0\times\tau_\infty$. Также разумно рассмотреть топологию T, базой для которой является $\tau_0\times T_\infty$.

Теорема 3. *Топология* τ *мажорирует отделимую локально выпуклую топологию* T.

Литература

[1] Asimow L. Ellis A. J., *Convexity theory and its applications in functional analysis.* – London: Academic Press, 1980. – 266 p.

[2] Dubinsky E. *Projective and inductive limits of Banach spaces* // Stud. Math. – 1972. – V. 42. – p. 259–263.

[3] Novikov A. *L_1-space for a positive operator affiliated with von Neumann algebra* // – 2015. – arXiv:1510.03472v1 [math.OA].

[4] Valdivia M. *On inductive limits of Banach spaces,* // Manuscripta math. – 1975. – V. 15. – p. 153–163.

[5] Канторович Л. В., Акилов Г. П., *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1984. – 752 с.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НУЛЕЙ КВАЗИПОЛИНОМОВ

М. Г. Юмагулов[1]

---

[1] *yum_mg@mail.ru*, Башкирский государственный университет

Пусть n – натуральное число и $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \ldots, \alpha_{n-1}(t)$ – функции ограниченной вариации на отрезке $[0, r]$, где $r > 0$. Рассмотрим функцию комплексного переменного p:

$$L(p) = p^n + \sum_{j=0}^{n-1} p^j \int_0^r e^{-ps} d\alpha_j(s),$$

где интегралы понимаются в смысле Лебега-Стилтьеса. Функцию $L(p)$ называют квазиполиномом степени n. Квазиполином $L(p)$ является целой функцией комплексного переменного p. Она обладает свойствами:

– функция $L(p)$ не может иметь более чем счетное число нулей;

– кратность каждого из нулей функции $L(p)$ конечна;

– функция $L(p)$ может иметь лишь конечное число вещественных нулей;

– множество нулей функции $L(p)$ не может иметь конечную точку сгущения.

Пусть функция $L(p)$ имеет счетное число нулей. Тогда они могут быть расположены в последовательность $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k, \ldots$, в порядке возрастания их модулей: $|\tau_k| \leqslant |\tau_{k+1}|$, при этом $|\tau_k| \to \infty$. В докладе обсуждаются условия, при которых имеют место следующие асимптотические формулы распределения нулей τ_k: $\mathrm{Re}\,\tau_k = O(\ln k)$ и $\mathrm{Im}\,\tau_k = O(k)$ при $k \to \infty$.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЫБОРОЧНЫХ ОЦЕНОК СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА МНОГООБРАЗИЯХ

Ю. А. Янович[1]

---

[1] *yyanovich@hse.ru*, Институт проблем передачи информации имени А. А. Харкевича Российской академии наук, Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

Многие задачи анализа данных, такие как распознавание образов, классификация, кластеризация, восстановление регрессии и другие, связаны с реальными данными, которые лежат в пространствах высокой размерности, и "проклятие размерности" часто является препятствием для использования алгоритмов машинного обучения при решении таких задач.

К счастью, во многих приложениях реальные многомерные данные заполняют лишь очень малую часть многомерного пространства наблюдений $\mathbb{R}^p$, чья внутренняя размерность q мала (обычно, $q \ll p$) [1]. Так, множество алгоритмов снижения размерности (извлечения признаков), чьей задачей является нахождение низкоразмерной параметризации многомерных данных по конечным выборкам, могут быть использованы для сведения таких "многомерных" задач к низкоразмерным с сохранением их свойств [2].

Наиболее популярной моделью многомерных данных, занимающей малую часть пространства наблюдений $\mathbb{R}^p$, является модель многообразия, в соответствии с которой данные лежат на или вблизи неизвестного многообразия (многообразия данных) $\mathbb{X}$ меньшей размерности $q < p$, вложенного в многомерное пространство входов $\mathbb{R}^p$ (гипотеза многообразия [3] о многомерных данных). Снижение размерности при условии гипотезы многообразия для обрабатываемых данных обычно называется оцениванием многообразий.

Большинство алгоритмов оценивания многообразий рассматривают задачу минимизации функционала вида

$$\int_{\mathbb{X}} f(X) \cdot Lf(X) dF(X)$$

по скалярной функции $f(X)$ при ограничениях, исключающих тривиальные решения, где X — точка многообразия, L — специфический для каждого алгоритма линейный (дифференциальный) оператор, $F(X)$ — вероятностная мера на многообразии. Данная задача эквивалентна задаче нахождения наименьших собственных значений оператора L и соответствующих им собственных функций. Однако, так многообразие $\mathbb{X}$ неизвестно, а оператор L зависит от него, то возникает подзадача оценивания $Lf(X)$ по конечной выборке.

Автором доказана состоятельность непараметрических оценок $Lf(X)$, найдена верхняя граница на вероятность максимального по многообразию уклонения оценки собственных функций и собственных значений от истинных (равномерная оценка). Равномерность является необходимым условием для использования результатов работы алгоритмов в суррогатной оптимизации.

Литература

[1] Donoho D. L. *High-dimensional data analysis: The curses and blessings of dimensionality* // AMS conference on math challenges of 21st century, 2000. – P. 1–31.

[2] Bernstein A. V., Kuleshov A. P. *Low-Dimensional Data Representation in Data Analysis* // Artificial Neural Networks in Pattern Recognition, 2014. – Vol. 8774. – P. 47–58.

[3] Seung H. S., Lee D. D. *COGNITION: The Manifold Ways of Perception* // Science, 2000. – Vol. 290. –Iss. 5500. P. 2268–2269.

О СРЕДНИХ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ШАРЕ

В. В. Карачик[1]

---

[1] *karachik@susu.ru*, Южно-Уральский государственный университет

Найдем значения интеграла по единичной сфере ∂S от нормальных производных полигармонической в единичном шаре функции. Пусть $(a,b)_k = a(a+b)\cdots(a+(k-1)b)$ – обобщенный символ Похгаммера, с соглашением $(a,b)_0 = 1$, а $t^{[k]} = t(t-1)\dots(t-k+1)$ – факториальная степень t. Обозначим $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$ и пусть ω_n – площадь ∂S.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любого $m \in \mathbb{N}_0$ и всякой полигармонической в единичном шаре S функции $u \in C^m(\bar{S})$ справедливо равенство*

$$\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial S}\frac{\partial^m u}{\partial\nu^m}\,ds_x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)^{[m]}}{(2,2)_k(n,2)_k}\Delta^k u(0),$$

где ν – внешняя нормаль к единичной сфере ∂S.

Найдем значения полигармонической функции $u(x)$ и лапласианов от нее $\Delta^m u(x)$ в центре единичного шара, выраженные через интегралы по единичной сфере от нормальных производных этой функции. Рассмотрим оператор $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial}{\partial x_i}$. В работе [1] было установлено следующее равенство $\frac{\partial^k u}{\partial\nu^k} = \Lambda^{[k]}u$, справедливое на ∂S.

Теорема 2. *Для всякой полигармонической в единичном шаре S функции $u \in C^{k-1}(\bar{S})$ справедливо равенство*

$$\Delta^m u(0) = \frac{1}{\omega_n}\frac{(2,2)_m(n,2)_m}{H_{k-1}^{(m)}(2m)}\int_{\partial S}H_{k-1}^{(m)}(\Lambda)u(x)\,ds_x, \tag{1}$$

где многочлен $H_{k-1}^{(m)}(\lambda)$ находится из равенства

$$H_{k-1}^{(m)}(\lambda) = \lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2m+2)(\lambda-2m-2)\cdots(\lambda-2k+2)$$

и $m = 0,\dots,k-1$.

При $m = 0$ коэффициенты в формуле (1) образуют арифметический треугольник [2]. Эти числа связаны с условиями разрешимости задачи Неймана [3,4]. Некоторые свойства среднего исследованы также в [5].

Литература

[1] Карачик В. В. *Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2014. – Т. 54. – № 7. – С. 1149–1170.

[2] Карачик В. В. *Об арифметическом треугольнике, возникающем из условий разрешимости задачи Неймана* // Математические заметки. – 2014. – Т. 96. –№ 2. – С. 228–238.

[3] Карачик В. В. *Условия разрешимости задачи Неймана для однородного полигармонического уравнения* // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50. – № 11. – С. 1455–1461.

[4] Карачик В. В. *Об условиях разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре* // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2013. – Т. XVI. – № 4. – С. 61–74.

[5] Карачик В. В. *О свойстве среднего для полигармонических функций в шаре* // Математические труды. – 2013. – Т. 16. – № 2. – С. 69–88.

ОБ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ С. ПОННУСАМИ

И. Р. Каюмов[1], Л. А. Суан[2]

---

[1] *ikayumov@kpfu.ru*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

[2] *laxuan@ctuet.edu.vn*, Казанский (Приволжский) федеральный университет

Пусть $f = h + \overline{g}$ – гармоническое отображение круга $\mathbb{D}$ на однолистную область на комплексной плоскости. Здесь g и h – аналитические компоненты этого отображения. С. Поннусами [1] была выдвинута гипотеза, которая состоит в том, что если f – выпуклая функция, т.е. образ круга при этом отображении является выпуклым, то найдется вещественное число α, такое, что функция $h + e^{i\alpha}g$ является выпуклой в круге $\mathbb{D}$.

Нами выделены классы выпуклых гармонических отображений в которых эта гипотеза справедлива.

Литература

[1] Ponnusamy S., A. Sairam Kaliraj *On the coefficient conjecture of Clunie and Sheil-Small on univalent harmonic mappings* // Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) – 2015. – V. 125. – № 3.– P. 277–290.

О ДВУХ ПРОБЛЕМАХ ТЕОРИИ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТРИ-ТКАНЕЙ

В. Б. Лазарева[1], А. М. Шелехов[2]

---

[1] *lazvalya@rambler.ru*, Московский педагогический государственный университет

[2] *amshelekhov@rambler.ru*, Международный университет природы, общества и человека «ДУБНА», филиал «УГРЕША»

Сообщение посвящается двум известным проблемам теории криволинейных три-тканей на плоскости, которые авторам удалось решить в течение последних лет. Первая проблема была сформулирована Вильгельмом Бляшке в начале 50-х годов 20 века: найти все регулярные три-ткани, образованные пучками окружностей (регулярной называется три-ткань, эквивалентная (локально диффоморфная) трем семействам параллельных прямых). Все найденнные три-ткани перечислены в [1]. Доказательство основано на теореме о границах, по которой границами регулярной три-ткани являются линии этой ткани [2].

Вторая проблема связана со следующей гипотезой: всякий локальный диффеоморфизм плоскости, преводящий прямолинейную три-ткань (т.е. 3 семейства прямых) также в прямолинейную три-ткань, является проективным преобразованием. Это утверждение в эквивалентной, но несколько более тяжелой формулировке, было высказано в 1912 году Гронволом (Gronwall). К настоящему времени реализовано несколько подходов к доказательству гипотезы Гронвола, но до сих пор убедительного ответа их авторы не получили. Мы предлагаем положительное решение проблемы Гронвола, основанное на применении классического метода Эли Картана [3].

В [4] доказано следующее утверждение (теорема Дюфура): всякий локальный гомеофорфизм плоскости, переводящий три семейства гладких кривых в три семейства гладких кривых, является гладким преобразованием. Имея в виду положительное решение проблемы Гронвола, отсюда получаем: всякий локальный гомеофорфизм плоскости, переводящий прямолинейную три-ткань в прямолинейную три-ткань, является проективным преобразованием.

Верно также следующее многомерное обобщение: всякий локальный диффеоморфизм, преводящий грассманову три-ткань в грассманову три-ткань, является проективным преобразованием [5].

Близкие вопросы рассматривались в [6]–[9].

Работа выполнена в рамках государственного задания по проекту 1686.

Литература

[1] Лазарева В. Б., Шелехов А. М. *О триангуляциях плоскости пучками коник//* Матем. сб. – 2007. – Т. 198. – № 11. – С. 107–134.

[2] Шелехов А. М. *О три-тканях, образованных пучками окружностей//* Итоги науки и техники ВИНИИ. Современная математика и ее приложения. –2005. – Т. 32. – С. 7–28.

[3] Шелехов А. М. *Решение проблемы Гронвелла об эквивалентности грассмановых тканей//* Известия Пензенского государственного педагогического универ-

ситета им. В.Г. Белинского, физико-математические и технические науки. – 2011. – Т. 1. – № 26. – С. 311–320.

[4] Dufour J.Ṗ., Jean P. *Rigidity of webs and families of hypersurfaces.//* Singularities and Dynamical Systems (Iráklion, 1983)// North-Holland Math. Stud., 103. North-Holland, Amsterdam/New York, 1985, С. 271–283.

[5] Шелехов А. М. *Об условиях линеаризуемости гладких отображений грассмановых многообразий//* Теория функций и ее приложения. Материалы Всесоюзной научной конференции. – Тверь. – 2009. – С. 89–94.

[6] Лазарева В. Б., Шелехов А. М. *Конфигурации и ткани, порождаемые пучками сфер//* Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. – Чебоксары: Изд. ЧГПУ, 2006. – С. 87–95.

[7] Лазарева В. Б., Шелехов А. М. *К проблеме классификации регулярных 4-тканей, образованных пучками сфер//* Изв. Вузов. Матем. – № 12. – 2007. – С. 70–76.

[8] Лазарева В. Б., Шелехов А. М. *О триангуляциях плоскости пучками коник II//* Матем. сб. – 2013. – Т. 204. – № 6. – С. 93–134.

[9] Шелехов А. М. *О три-тканях, образованных семействами окружностей//* Proc. Intern. Geom. Center. – 2012. – Т. 5. – N 2. – С. 6–16.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ ПО АЛГЕБРЕ, АНАЛИЗУ И ГЕОМЕТРИИ

Материалы международной конференции
по алгебре, анализу и геометрии,
посвященной юбилеям выдающихся профессоров Казанского университета,
математиков Петра Алексеевича (1895-1944)
и Александра Петровича (1926-1998) Широковых,
и молодежной школы-конференции по алгебре, анализу, геометрии

Подписано в печать 06.06.16
Бумага офсетная. Формат 60×84/16. Печать ризографическая.
Усл.печ. л. 11,04. Тираж 300 экз. Заказ 17/В

Издательство Академии наук Республики Татарстан
420111, г. Казань, ул. Баумана, 20
e-mail: izdat.anrt@yandex.ru