

Южный федеральный университет  
Донской государственный технический университет

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И БИОМЕХАНИКА  
В СОВРЕМЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

**ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ  
XI ВСЕРОССИЙСКОЙ ШКОЛЫ-СЕМИНАРА**

23 – 27 мая 2016 года

Ростов-на-Дону  
Издательство Южного федерального университета  
2016

УДК 517.977.5

ББК В2.Я 431

М34

Редакторы: А. О. Ватульян, М. И. Карякин, А. В. Попов

М34 Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тезисы докладов XI Всероссийской школы-семинара, пос. Дивноморское, 23–27 мая 2016 г. ; Южный федеральный университет – Ростов-на-Дону : Издательство Южного федерального университета, 2016. – 154 с.  
ISBN 978-5-9275-1966-8

Сборник содержит тезисы докладов, представленные на XI Всероссийскую школу-семинар «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете».

Основной целью школы-семинара является обсуждение современных направлений и тенденций научных исследований в области математического моделирования деформирования новых материалов и его применений к актуальным задачам механики и биомеханики. Обсуждаются результаты моделирования тел из физически и геометрически нелинейных материалов, проблемы вычислительной механики (методы конечных и граничных элементов), идентификации параметров для материалов со сложными физико-механическими свойствами (пористость, нелинейность, неоднородность, микроструктура, пьезоэффект), задачи моделирования, функционирования и роста различных биологических тканей и систем (костная и мышечная ткани, ткань кровеносных сосудов), задачи гидродинамики кровообращения, моделирование и оптимизация имплантантов.

Важными аспектами работы школы являются изучение вопросов интеграции этих направлений с процессом современного классического естественно-научного и инженерного образования, анализ влияния междисциплинарных исследований на формирование современного ученого, обсуждение современных методов и технологий преподавания технических и естественнонаучных дисциплин, формирование новых учебных курсов и специализаций в рамках обсуждаемых на школе-семинаре научных направлений, приобщение молодых исследователей к моделированию новых объектов.

Публикуется в авторской редакции.

*XI Всероссийская конференция «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (пос. Дивноморское, 23–27 мая 2016 г.) поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 16-01-20247.*

ISBN 978-5-9275-1966-8

УДК 517.977.5

ББК В2.Я 431

© Южный федеральный университет, 2016

## Программный комитет школы-семинара

- Ватульян А. О., профессор, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону —  
председатель Программного комитета
- Бауэр С. М., профессор, Санкт-Петербургский государственный университет
- Глушков Е. В., профессор, Кубанский государственный университет, Краснодар
- Горячева И. Г., академик РАН, Институт проблем механики РАН, Москва
- Гузев М. А., член-корреспондент РАН, Институт прикладной математики Дальневосточного отделения РАН, Владивосток
- Еремеев В. А., Жешувский политехнический университет
- Индейцев Д. А., член-корреспондент РАН, Институт проблем машиноведения РАН,  
Санкт-Петербург
- Карякин М. И., Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону — председатель  
Оргкомитета
- Коссович Л. Ю., профессор, Саратовский государственный университет
- Любимов Г. А., Институт механики Московского государственного университета
- Манжиров А. В., Институт проблем механики РАН, Москва
- Месхи Б. Ч., Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону
- Морозов Н. Ф., академик РАН, Санкт-Петербургский государственный университет
- Наседкин А. В., профессор, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
- Няшин Ю. И., профессор, Пермский национальный исследовательский политехнический университет
- Соловьев А. Н., профессор, Донской государственный технический университет,  
Ростов-на-Дону
- Устинов Ю. А., профессор, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
- Цатурян А. К., Институт механики Московского государственного университета
- Штейн А. А., Институт механики Московского государственного университета

## Изменение напряженно-деформированного состояния склеры и внутриглазного давления после интравитреальных инъекций

**Бауэр С. М.<sup>1</sup>, Воронкова Е. Б.<sup>1</sup>, Котляр К. Е.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Санкт-Петербургский государственный университет*

<sup>2</sup>*Ахенский университет прикладных наук*

Решается задача о деформации ортотропного сферического слоя, находящегося под действием нормального давления. Для изотропного слоя эта задача известна как задача Ламе и имеет аналитическое решение. Для трансверсально-изотропного сферического слоя также построено аналитическое решение (Бауэр С. М., Замураев Л. А., Котляр К. Е. Модель трансверсально-изотропного сферического слоя для расчета изменения внутриглазного давления (ВГД) при интрасклеральных инъекциях, *Российский журнал биомеханики*, 2006, № 2, С. 43–49) и проведено асимптотическое исследование решения.

Известно, что в большинстве случаев миопия (близорукость) связана с тем, что модуль упругости в меридиональном направлении становится меньше, чем модуль Юнга в направлении параллели и внешняя оболочка глаза приобретает форму вытянутого эллипсоида (Danilov N. A., Iomdina E. N. et al. Stabilization of scleral collagen by glycerol aldehyde cross-linking // *Biochimica et Biophysica Acta*, 2008, Vol. 1780, pp. 764–772). В данной работе рассматривается ортотропная склера (внешняя оболочка глаза), близкая к трансверсально-изотропной, что позволяет получить уравнения первого приближения для нормального прогиба и меридиональных перемещений точки сферического слоя под действием нормального давления. Представленная модель может быть использована для оценки влияния внутриглазного давления на изменение формы глазного яблока (длины передне-задней оси и экваториальной зоны), а также для описания изменения напряженно-деформированного состояния внешней оболочки глаза при введении внутриглазных инъекций. Аналитическое решение сравнивалось с решением, полученным с использованием конечных элементов в пакете COMSOL. В широком диапазоне параметров отмечается хорошее соответствие результатов. Исследовалось также изменение напряженно-деформированного состояния двухслойной оболочки. Проводится также сравнение с имеющимися клиническими данными (K. Kotliar, M. Maier, S. Bauer, N. Feucht, C. Lohmann, I. Lanzl. Effect of Intravitreal Injections and volume changes on Intraocular Pressure: clinical results and biomechanical model, *Acta Ophthalmologica Scandinavica*, 2007, Nov. 85(7), pp. 777–781).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 15-01-06311-а.

## Асимптотическая теория волновых процессов в тонких оболочках при ударных торцевых и поверхностных воздействиях

**Кириллова И. В., Коссович Л. Ю.**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*

В представленной работе обобщаются работы авторов и их учеников по математическому моделированию процесса распространения нестационарных волн в тонких оболочках асимптотическими методами на основе точных трехмерных уравнений теории упругости.

Разные типы ударного торцевого воздействия приводят к разным видам напряженно-деформированного состояния (НДС), качественно отличающимся друг от друга. При этом выделяются зоны малой изменчивости, описываемые двумерными уравнениями Кирхгофа–Лява, и зоны быстроизменяющихся видов НДС в малых окрестностях торца, места приложения поверхностной нагрузки, фронтов волн и квазифронтов.

Применяемый асимптотический подход позволяет использовать в разных областях фазовой плоскости соответствующие приближенные теории и доказать полноту описания НДС рассмотрением областей их согласования.

Так, в случае тангенциального типа торцевого ударного воздействия зоны быстроизменяющегося волнового НДС находятся в окрестностях фронта волны расширения и квазифронта (фронта волны растяжения-сжатия по двумерной теории Кирхгофа–Лява). Соответственно применяются безмоментная составляющая теории Кирхгофа–Лява, гиперболический погранслои в окрестности фронта волны расширения и параболический погранслои в окрестности квазифронта.

В случае изгибающего типа торцевого воздействия зона быстроизменяющегося НДС находится в окрестности фронта волны расширения. Применяются двумерная изгибная составляющая теории Кирхгофа–Лява и гиперболический погранслои.

Самым сложным для анализа оказался случай нормального типа торцевого воздействия. В этом случае зона быстроизменяющегося НДС находится в окрестности фронта волны сдвига и квазифронта, являющегося условным фронтом поверхностных волн Рэлея. Применяются двумерная изгибная составляющая теории Кирхгофа–Лява, гиперболический погранслои в окрестности фронта волны сдвига и эллиптический погранслои в окрестности квазифронта.

Эллиптический погранслои обобщает нестационарное НДС в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея для классической задачи Лэмба о действии ударной силы на поверхность полупространства. Уравнения погранслоя являются эллиптическими с граничными условиями на поверхностях оболочки, задающимися уравнениями гиперболического типа. Уравнения выведены с помощью асимптотического разложения в окрестности квазифронта и применения символического метода Лурье. Построено аналитическое решение погранслоя для общего случая оболочек вращения при действии ударной силы на поверхность оболочки с помощью двойных интегральных преобразований Лапласа (по времени) и Фурье (по продольной координате).

Механическая модель сердечной аорты,  
учитывающая различные характеристики слоев

Агаян К. Л.<sup>1</sup>, Хуршудян А. Ж.<sup>2</sup>, Мкоян А. А.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Институт механики НАН Армении, Ереван

<sup>2</sup>Ереванский государственный университет

<sup>3</sup>Ереванский государственный медицинский университет

Сердечная аорта состоит из огромного количества упругих волокон, вследствие чего она рассматривается как упругое *трехмерное* тело. Структура аорты состоит из трех разнородных слоев: внутренний (*tunica intima*), средний (*tunica muscularis* или *media*) и верхний (*tunica adventitia*). Внутренняя оболочка состоит из тонкого слоя эндотелиальных клеток и тонкой базальной пластинки. Средний слой состоит из мышечных волокон и, в основном, подвергается растяжению-сжатию. Внешняя оболочка аорты также имеет волокнистую структуру.

Как геометрические, так и механические характеристики слоев (толщины и модули Юнга) аорты удовлетворяют неравенствам  $h_1 < h_3 < h_2$ ,  $E_1 < E_3 < E_2$ , где индексы 1, 2 и 3 соответствуют внутреннему, среднему и внешнему слоям.

Существуют несколько механических моделей аорты, в которых она, в основном, моделируется как полый упругий цилиндр. Установлено, что радиальные и тангенциальные напряжения, найденные при помощи существующих теорий, отличаются от значений, полученных в результате опытов. Следовательно, есть потребность уточнения механических моделей с целью получить выражения для нормальных напряжений, численные значения которых по возможности близки к соответствующим значениям, полученным в результате экспериментов.

С этой целью принимаются следующие гипотезы:

- Структура аорты в виде полого цилиндра считается трехслойной.
- Внутренний и внешний слои аорты рассматриваются как мембраны, подвергающиеся растяжению-сжатию.
- Средний слой рассматривается как волокнистая оболочка, подвергающаяся растяжению-сжатию.

При этих гипотезах будет рассмотрена задача минимизации функционала невязки расчетных и экспериментальных данных при следующем виде упругой энергии аорты

$$E[\mathbf{u}] = \int_{\gamma} W(\mathbf{r}, \nabla \mathbf{u}) d\gamma, \quad \mathbf{r} \in \gamma.$$

Здесь  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений точек аорты,  $\gamma$  — область, занимаемая аортой,  $W$  — плотность энергии. В рассматриваемом случае  $W$  состоит из трех слагаемых, каждое из которых соответствует определенному слою аорты.

## О моделировании устойчивости почв к загрязнению тяжелыми металлами

**Бакоев С. Ю.<sup>1</sup>, Курбатова Н. В.<sup>2</sup>, Воронов М. Б.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Донской государственной аграрный университет, пос. Персиановский*

<sup>2</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Оценка устойчивости почв к загрязнению тяжелыми металлами (ТМ) в результате техногенных нагрузок является целью данной работы. Здесь устойчивость почв означает стабильное равновесие между содержанием прочно и непрочно связанных соединений ТМ. В этом случае почвы способны ограничивать негативное воздействие поллютантов на почвенную биоту, растения и другие компоненты ландшафта.

Способность системы быстро возвращаться в исходное состояние после прекращения внешнего воздействия количественно оценивается буферностью и определяется на основе изотерм адсорбции, здесь уравнение Ленгмюра:  $S = S_{\infty}kC/(1 + kC)$ ,  $S$  — количество поглощенных катионов;  $S_{\infty}$  — величина максимальной адсорбции ТМ (мМ/100 г почвы);  $k$  — константа;  $C$  — концентрация ТМ в равновесном растворе (мМ/л).

Основу модели составляют балансовые соотношения между поступлением, поглощением, трансформацией различных форм ТМ и эмпирическими зависимостями входящих и исходящих составляющих. Соотношение групп прочно связанных и непрочно связанных соединений ТМ в почве и определяет экологическое состояние загрязненной почвы. Для описания устойчивости почв предлагается модель, которая описывается системой дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{cases} dY_1/dt = \alpha_1\alpha S_{\infty}kY_1/(\alpha Y_1 + S_{\infty}) - \alpha_2 S_{\infty}Y_1/(S_{\infty} + Y_2) - d \cdot Y_1 \\ dY_2/dt = \alpha_2 S_{\infty}Y_1/(S_{\infty} + Y_2) \end{cases}$$

где  $Y_1$  — количество непрочно связанных соединений ТМ в почве (мг/кг);  $Y_2$  — количество прочно связанных соединений ТМ в почве (мг/кг);  $t$  — время (год);  $k$  — показатель сродства ТМ с поверхностью почвенных частиц (л/мМ); коэффициенты  $\alpha$  — эффективности адсорбции (год<sup>-1</sup>),  $\alpha_1$  — скорости поступления ТМ (мг/кг (· в год)),  $\alpha_2$  — эффективности трансформации (год<sup>-1</sup>),  $d$  — суммарный показатель выноса ТМ из почвы (год<sup>-1</sup>).

Для верификации модели были использованы материалы почвенно-экологического мониторинга по тяжелым металлам Cu, Pb и Zn (2000–2014 гг.) в зоне влияния Новочеркасской ГРЭС (Minkina et al., 2009, 2013; Mandzhieva et al., 2012).

## Бифуркации в термогравитационных пограничных слоях вблизи свободной границы

**Батищев В. А.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Активные исследования температурных пограничных слоев вблизи свободной границы однородной жидкости выполнялись во второй половине прошлого века в связи проведением в космосе экспериментов с жидкими средами. Первые расчеты термокапиллярных пограничных слоев Марангони для однородной жидкости выполнены L. G. Napolitano в 1979 г. Затем появился большой цикл публикаций по этой тематике. Однако, термогравитационные пограничные слои без учета капиллярных сил не изучались. В докладе рассматривается термогравитационный пограничный слой вблизи свободной границы неоднородной жидкости без учета эффекта Марангони. Здесь, в отличие от однородной жидкости, большую роль играет обратное влияние температурного поля на поле скоростей в жидкости.

Рассматривается стационарное осесимметричное термогравитационное течение неоднородной жидкости в горизонтальном слое, ограниченном сверху свободной границей, а снизу — твердой стенкой. Движение жидкости вызвано неравномерным нагревом свободной границы, причем вблизи оси симметрии граница либо нагревается, либо охлаждается. Решение задачи строится асимптотически на основе уравнений движения жидкости в приближении Обербека–Буссинеска при условии малости диффузионных коэффициентов и без учета эффекта Марангони. Главный член асимптотики описывает нелинейный термогравитационный пограничный слой вблизи свободной границы с учетом внешнего течения. Численные расчеты показали, что при локальном охлаждении свободной границы вблизи оси симметрии может возникать вращательный режим, причем вне пограничного слоя вращение отсутствует. При локальном нагреве свободной границы вращательный эффект не возникает. Полученный результат может объяснить одну из причин возникновения торнадо в атмосфере.

В работе рассчитаны два типа режимов течений неоднородной жидкости — основные и вращательные. Основным режимам соответствует течение жидкости без вращения. Вращательные режимы возникают в результате бифуркации основных режимов только при локальном охлаждении свободной границы. Показано, что основные режимы существуют не для всех значений параметров задачи. Точки бифуркации найдены при численном решении краевой задачи на собственные значения. Построена асимптотика вращательных режимов вблизи точек ветвления. В случае, когда термогравитационный пограничный слой ограничен снизу твердой стенкой, приведен вывод уравнения разветвления. В зависимости от значения параметров задачи получено три типа уравнений разветвления. Во всех случаях от основного режима в точке бифуркации ответвляются по два вращающихся режима, которые отличаются друг от друга только направлением вращения.

## Исследование структурной устойчивости процессов кристаллизации в сложных системах

**Благин А. В., Нефедов В. В., Мамедова А. А.**

*Южно-российский государственный политехнический университет (НПИ)  
им. М. И. Платова, Новочеркасск*

Известно, что на начальных стадиях градиентной кристаллизации предположение о равновесии жидкой и твердой фаз на гетерогранице не выполняется. Равновесие отсутствует, если хотя бы для одного из компонентов контактирующих фаз имеет место неравенство химических потенциалов.

Переход гетерогенной системы к равновесному состоянию сопровождается сложными физико-химическими процессами на границе раздела, приводящими к изменению состава жидкой и твердой фаз, а в стадии кристалла — к структурной перестройке. Эти процессы можно объединить термином «структурная эволюция», поскольку, несмотря на их многообразие, их ход подчиняется некоторым общим закономерностям, имеет в целом нелинейный характер и может протекать по различным сценариям, выбор которых происходит в точках бифуркации системы, находящейся во внешнем силовом поле. Поступательное движение жидких зон при градиентной кристаллизации сопровождается явлениями релаксации гетеросистем. Различие компонентного состава подложки и насыщенной многокомпонентной жидкой фазы вызывает массоперенос атомов через межфазную границу. Потоки вещества вблизи межфазной границы определяются начальными составами контактирующих фаз, концентрациями компонентов на межфазной границе и кинетическими коэффициентами системы. Если ограничиться диффузионным приближением для описания взаимодействия, то концентрации компонентов на границе раздела оказываются связанными условиями фазового равновесия. Поэтому даже при насыщении расплава на поверхности растворяющейся подложки существует вполне определенная концентрация каждого элемента многокомпонентной системы. Это, в свою очередь, вызывает массоперенос вещества и в объемах контактирующих фаз.

Большой интерес представляет анализ процессов структурной эволюции в гетеросистемах, кристаллизующихся из Bi-содержащих расплавов, поскольку висмут играет неоднозначную роль — его наличие в жидкой фазе может обеспечить высокую морфологическую стабильность фронта кристаллизации, а также способствовать уменьшению плотности дефектов, вызванных отклонением от стехиометрии. В работе рассмотрены особенности формирования структуры многокомпонентных висмутидов.

Для оценки стабильности контактирующих фаз проводился расчет параметров устойчивости применительно к контактам расплавов GaSbBi с подложками GaSb, GaAsP<Bi> с подложками GaP и InSbBi с InSb. В результате расчетов установлено, что оптимальные температурные режимы составляют: GaSb<Bi>/GaSb — 830–883 К; GaAsP<Bi>/GaP, — 1253–1290 К; InSbBi/InSb — 673–693 К.

Подобный анализ проведен и для других висмутсодержащих гетероструктур, включая ПТР AlGaInSbBi/InSb. Указанный анализ особенно важен при создании условий самоорганизации, когда для создания поля незатухающих флуктуаций температура выбирается максимальной из всего допустимого диапазона.

## Математическое моделирование и исследование процессов формирования материалов для мехатронных модулей

Благина Л. В.<sup>1</sup>, Нефедова Н. А.<sup>2</sup>, Ануфриева В. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону

<sup>2</sup>Южно-российский государственный политехнический университет (НПИ)  
им. М. И. Платова, Новочеркасск

Недостатком большинства используемых в контрольно-следящей аппаратуре металлообрабатывающего оборудования фотоэлектрических датчиков является быстрая деградация их частотных характеристик и добротности, обусловленная наличием разрывов энергетических зон в резких гетеропереходах.

Эффективность гетероперехода как инжектора оценивается экспонентой потенциала в валентной зоне на границе гетероперехода. Потенциал определяет также дырочную компоненту тока. Захват носителей (главным образом, дырок) на интерфейсе гетероперехода сопровождается появлением длинновременного хвоста в релаксации фотоприемника. Таким образом, величина потенциала оказывается существенным параметром быстродействующих фотоприемников на гетероструктурах. Для сглаживания гетероперехода применяют буферные слои постоянного или переменного состава по толщине. Ранее были созданы фотоприемные многослойные гетероструктуры InSbBi-InSb. Недостатком этих материалов были значительные упругие напряжения, возникающие на гетерограницах вследствие решеточного несоответствия. Проблема была решена использованием в твердом растворе, наряду с висмутом — полуметаллом с большим ковалентным радиусом атомов, широкозонного материала — антимонида алюминия, длина химической связи в котором мала настолько, что имеет место взаимная компенсация решеточного несоответствия до значений 500 мВ. При этом отпадает необходимость на малых длинах (около 0,1 мкм) программированно изменять состав полупроводниковой структуры. Градиентный слой уменьшает величину скачка в валентной зоне и длинновременная составляющая релаксации фототока близка к нулю.

Осцилляции температурного поля при движении плоских жидких зон в температурном градиенте по величине сравнимы с локальным переохлаждением расплава и обуславливают соответствующее концентрационное пересыщение. Такая зависимость позволяет управлять составом кристаллизующегося слоя, т.е. получать многослойные структуры. При снижении температуры на 0,5–2 К через определенное время задержки происходит изменение скорости роста и состава слоя.

Полученные пленки имели морфологию пространственно-периодических структур с периодом около 0,15 мкм. Длина волны принимаемого излучения составила 6,55 мкм, максимум пороговой чувствительности — 100 нВт при соотношении сигнал/шум равному 10.

Основными областями применения разработанных фотодетекторов на основе гетероструктур, выращиваемых на подложках антимонида индия, являются регистрация экстремально слабого излучения (в случае одноэлементных дискретных фотоприемников), а также формирование изображения в средневолновом ИК-диапазоне достаточно высокой чувствительности.

## О радиальных колебаниях неоднородного пьезокерамического цилиндра

**Богачев И. В., Кондратьев В. С.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В настоящее время разрабатывается большое количество разнообразных элементов пьезоэлектронной техники, на основе которых создаются эффективные устройства и датчики. Важным аспектом является гарантия надежности и выбор приемлемых условий функционирования конкретных устройств, что служит причиной активного изучения свойств пьезокерамических материалов и элементов из них. В последние годы в приложениях активно используются пьезоэлементы с неоднородной поляризацией, которая открывает новые возможности в их применении. Неоднородность физических свойств пьезоматериалов возникает как на стадии их изготовления, так и на стадии эксплуатации устройств.

Задачи о колебаниях пьезоэлементов с неоднородной поляризацией требуют совершенствования методов расчета и определения функций, описывающих законы изменения характеристик пьезоэлементов. В настоящей работе рассмотрена задача о радиальных осесимметричных свободных колебаниях сплошного кругового пьезокерамического цилиндра с радиальной поляризацией, причем материальные характеристики (модули упругости, пьезомодули, коэффициенты диэлектрической проницаемости) являются функциями радиальной координаты.

Путем исключения из рассмотрения компоненты электрической индукции из основных уравнений электроупругости получена каноническая система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно безразмерных переменных — радиального смещения и радиального напряжения. В силу переменности коэффициентов дифференциального оператора анализ динамического поведения (резонансных частот) может быть осуществлен лишь численно.

Сформулированная однородная краевая задача решалась численно на основе метода пристрелки. Составлена программа в среде Maple, позволяющая определять резонансные значения и собственные формы радиальных колебаний для неоднородного пьезокерамического цилиндра. Проведен контроль точности результатов путем сравнения с однородным случаем, в котором частотное уравнение записывается явно через функции Бесселя. Сравнительный анализ результатов для первых трех резонансных значений показал эффективность предложенного подхода. Проведена серия расчетов, позволившая проанализировать зависимость резонансных частот и собственных форм колебаний от законов изменения физических характеристик цилиндра и условных коэффициентов электромеханической связи.

Авторы выражают благодарность за внимание к работе научному руководителю проф., д. ф.-м.н. А. О. Ватульяну.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 16-01-00354).

## Реконструкция неоднородных механических характеристик вязкоупругой пластины

**Богачев И. В., Лапина П. А.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Моделирование материалов со сложными неоднородными характеристиками, таких как полимеркомпозиты, функционально-градиентные материалы, биологические ткани, является актуальным направлением современной механики. Модели неоднородных пластин часто применяются при решении задач, связанных с техническими объектами: пластинами с напылением из различных материалов, используемых при изготовлении лезвий и режущих дисков, мембранными датчиками давления, фланцами труб, поршневыми системами. Они также находят применение и в задачах биомеханики, например, при разработке протезов суставов и позвоночных дисков, а также в офтальмологии при исследовании тканей глазного яблока, в частности, решетчатой пластинки (*lamina cribrosa*) склеры. Решетчатая пластинка является существенно неоднородной слоистой структурой переменной толщины, ослаблена большим числом отверстий (сквозь которые проходят нервные волокна), испытывает нагрузки и деформации (из-за перепадов между внутричерепным и внутриглазным давлениям). Потеря ею эластичности, ущемление зрительного нерва и атрофия его волокон приводит к распространенному заболеванию — глаукоме. Глаукоме трудно диагностировать на ранних стадиях, и к тому моменту, когда будет поставлен диагноз, многие волокна нервов могут быть уже необратимо атрофированы.

Создание методов реконструкции характеристик и исследование напряженно-деформированного состояния решетчатой пластинки на основе теории пластин могут дать возможность выявления глаукомы на ранних стадиях и являются актуальной и важной задачей биомеханики.

В данной работе построена модель вязкоупругой круговой пластины, зажатой по контуру, которая является существенно неоднородной по радиальной координате. Данная задача является первым этапом моделирования поведения решетчатой пластинки склеры глаза с учетом ее существенной неоднородности и выраженного эффекта затухания. Представлено решение обратной задачи определения мгновенного и длительного модулей пластины, входящих в состав комплексного модуля) по измеренному в некотором частотном диапазоне смещению в точке. Был проведен ряд вычислительных экспериментов по восстановлению функций разного характера, показавших эффективность предложенного подхода.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-31-00144 мол-а) и в рамках проекта Минобрнауки России № 9.665.2014/К.

## Анализ кардиосигнала с помощью преобразования Гильберта–Хуанга

**Богачева М. О.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Одной из существенных проблем при анализе биологических сигналов является выявление отклонений и пограничных состояний, незаметных для невооруженного глаза, а также прогнозирование возможных заболеваний. Так, при исследовании кардиосигналов существенными являются даже незначительные отклонения от нормы амплитуды и длительности отдельных зубцов. В частности, большое внимание уделяется исследованию QRS-комплекса, а также R-зубца, характеризующего сокращение желудочков сердца. Его продолжительность, амплитуда и морфология позволяют диагностировать различные виды сердечно-сосудистых заболеваний на ранней стадии: аритмию, гипертрофию желудочков, инфаркт миокарда и др. При этом нестационарность кардиосигнала является существенным препятствием для его анализа.

В настоящее время одним из основных подходов для идентификации постоянных характеристик сигнала является его разложение на эмпирические моды (Empirical Mode Decomposition — EMD) с последующим спектральным анализом Гильберта (Hilbert Spectral Analysis — HSA). Этот метод носит общее название преобразования Гильберта–Хуанга (Hilbert–Huang Transform — ННТ).

Модовая декомпозиция сигналов основывается на предположении, что любые данные состоят из различных внутренних колебаний. По сравнению с классическим анализом Фурье и вейвлет-разложением, эмпирическая модовая декомпозиция характеризуется высокой степенью адаптации к обработке различных нестационарных сигналов. С помощью эмпирической модовой декомпозиции любой сигнал может быть разложен на конечное число внутренних эмпирических мод, каждая из которых содержит информацию о начальном сигнале.

В настоящей работе с помощью эмпирической модовой декомпозиции были проанализированы кардиосигналы из базы данных биомедицинских сигналов [www.physionet.org](http://www.physionet.org), записанные во втором стандартном отведении. Все расчеты были реализованы в среде Maple. Было определено оптимальное количество итераций для отсеивания модовых функций и получено распределение количества эмпирических мод для исследуемых кардиограмм. Анализ QRS-комплекса включал в себя разложение исходного кардиосигнала на внутренние модовые функции с последующим нелинейным преобразованием для получения точного максимального значения каждого QRS-комплекса. На основании преобразования Гильберта были получены мгновенная амплитуда и мгновенная частота для составляющих модовых функций.

## Прохождение плоской акустической волны через тройкопериодическую систему твердых шаровых препятствий

**Боев Н. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассматриваемая задача исследуется в рамках геометрической теории дифракции (ГТД). Разработан алгоритм решения задачи о прохождении плоской продольной волны через тройко периодическую систему твердых шаровых препятствий, находящихся в акустической среде, ограниченной двумя твердыми стенками. Система препятствий расположена в кубе, пара противоположных граней которого находятся на твердых стенках и отнесена к глобальной декартовой системе координат с осями, направленными вдоль ребер куба. С одной из этих граней в куб вводится плоская высокочастотная акустическая монохроматическая волна, а на противоположной грани принимается прошедшая волна. При этом эта грань разбивается на  $N \times N$  малых квадратов и плоская волна заменяется набором точечных источников сферических волн, расположенных в центрах малых квадратов. Телесный угол с вершиной в источнике, направленный в сторону препятствий и стягивающийся полусферой делим на  $M \times M$  малых телесных углов, каждый из которых заменяем волной, распространяющейся вдоль соответствующего луча. Таким образом, проблема сводится к исследованию задачи коротковолновой дифракции в локальной постановке. Суммарное поле на грани приема распространяющихся волн складывается из лучей, прошедших через систему шаров, которые могут быть трех типов: а) лучи, прошедшие через систему препятствий без дифракции; б) лучи, отразившиеся от системы только один раз (в этом случае хорошо известно явное выражение давления в однократно отраженной волне); в) лучи многократно отраженные от системы препятствий.

Наиболее сложным является расчет давления в многократно отраженных волнах. Многократная дифракция высокочастотной волны может быть исследована в рамках интегрального представления. Основу формирования интегрального представления давления в  $N$  раз переотраженной акустической волне составляет модификация интегрального представления давления физической теории дифракции Кирхгофа. Методом многомерной стационарной фазы получено аналитическое выражение главного члена асимптотики давления в точке приема многократно отраженной волны, которое соответствует ГТД.

Таким образом, в локальной постановке задачи для каждого луча расчет давления в прошедшей волне на грани приема проходит в два этапа. На первом этапе решается геометрическая задача. Рассчитываются траектории каждого однократно или многократно отраженного луча. После этого становятся известными все геометрические параметры его траектории. На втором этапе на основе полученных явных выражений вычисляются давления в точках приема однократно и многократно отраженных лучей. Далее вычисляется суммарное давление в прошедшей волне.

Исследования проведены при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, грант № 15-19-10008.

О методе диагностики внутренних структурных дефектов, основанном на анализе особенностей поверхностных волновых полей

**Бочарова О. В., Анджинович И. Е., Калинин В. В., Седов А. В.**

*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

Сложные ответственные механические конструкции нуждаются в постоянном мониторинге прочностного ресурса. Поэтому разработка методов неразрушающего контроля для деталей инженерных конструкций ответственного назначения является очень актуальной задачей. Целью настоящего исследования является создание методики оперативного определения степени деформации, измерения концентрации дефектов в виде пустот и инородных включений в неоднородных средах.

Создан многофункциональный измерительный комплекс, который позволяет проводить исследования, сопоставлять сигналы и строить спектральные характеристики датчиками различного типа. Проведены испытания пленочных датчиков деформации. Особенностью этих датчиков является их низкая себестоимость и минимальная толщина. Всё это позволяет «пожизненное» размещение датчиков в различных исследуемых средах и любых желаемых местах многоэлементных конструкций с возможностью постоянного мониторинга состояния. В настоящей работе продемонстрирована корреляция изменений поверхностной волны, регистрируемой датчиком деформации с изменением механического состояния модели. Исследована перспектива возможности диагностики дефектов по спектральному признаку сигнала датчика деформации неразрушающим методом.

Проведен вычислительный эксперимент, основанный на использовании метода конечных элементов. Исследованы особенности динамического процесса на поверхности прямоугольного образца, выполненного из низкоскоростного материала. Образец ослаблен дефектом в форме цилиндрической полости или цилиндрического включения. Диаметр дефекта, равно как расположение и глубина залегания, варьировались. Поверхностные колебания в образце возбуждались импульсным воздействием. Для расчета волнового поля на поверхности образца, ослабленного наличием дефекта, был применен пакет ANSYS .

Предложен метод распознавания характеристик дефекта по функции отклика на поверхности среды, основанный на настраиваемом ортонормированном базисе. Главным достоинством этого метода является адаптивная настройка базиса, в соответствии с критериями наилучшего распознавания дефекта. Проведена серия вычислительных экспериментов. Использование предложенного подхода обеспечило достаточную возможность идентификации типа дефекта, его размера, заглупления и расположения в образце.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований (номера проектов 14-08-01213, 16-08-00802).

Приближенные аналитические решения для плоских  
и осесимметричных контактных задач для трансверсально-изотропных  
полубесконечных тел с неоднородными по глубине покрытиями

**Васильев А. С., Айзикович С. М., Волков С. С.**

*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

Рассматриваются плоские и осесимметричные контактные задачи о вдавливании штампов различной формы в упругую трансверсально-изотропную полуплоскость (полупространство — для осесимметричной задачи) с неоднородным по глубине трансверсально-изотропным покрытием. Все пять упругих модулей в покрытии изменяются с глубиной по произвольным независимым друг от друга законам. На границе стыка покрытия и подложки возможно существенное отличие значений модулей упругости, что позволяет моделировать мягкие и жесткие покрытия. Построены приближенные аналитические решения контактных задач с использованием двухсторонне асимптотически точного метода. Для этого исходные задачи были сведены к решению некоторых парных интегральных уравнений. При помощи замены трансформанты ядра интегральных уравнений аппроксимациями в виде произведения дробно-квадратичных функций получены приближенные парные интегральные уравнения, для которых удастся построить замкнутые решения. Изучается связь между контактными напряжениями, возникающими на поверхности полуплоскости (полупространства) с покрытием и без него в зависимости от значения геометрического параметра задачи  $\lambda$ , равного отношению толщины покрытия к характерному размеру зоны контакта. Проведена серия численных расчетов, иллюстрирующих влияние неоднородности, значения относительной толщины покрытия  $\lambda$ , а также отношения упругих свойств подложки и покрытия в зоне их сопряжения на контактные напряжения. Рассмотрены изотропные и трансверсально-изотропные однородные и неоднородные покрытия с модулями упругости изменяющимися с глубиной по линейным или экспоненциальным законам. Особое внимание уделено вопросам сходимости контактных напряжений, возникающих на поверхности неоднородного покрытия, к контактными напряжениями на поверхности однородной полуплоскости (полупространства) без покрытия при уменьшении или увеличении значения параметра  $\lambda$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 15-38-20790-мол\_а\_вед, 16-07-00958-а) и Гранта Президента РФ (МК-5342.2016.1). Айзикович С. М. благодарит Министерство образования и науки РФ за финансовую поддержку в рамках выполнения работы «Организация проведения научных исследований» Госзадания.

## О реконструкции параметров закрепления вязкоупругой балки

**Васильев Л. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

При моделировании различных объектов часто используются балочные модели с каноническими граничными условиями (жесткая заделка, шарнирное опирание, свободный край). Вместе с тем упругие свойства опор часто вносят весомый вклад в структуру амплитудно-частотных характеристик и нуждаются в идентификации по данным зондирования. Эти модели используются для решения конкретных задач, а именно, в диагностике трубопроводов, при определении жесткости элементов биомеханических систем и др.

К настоящему времени достаточно подробно исследованы вопросы диагностики характеристик закрепления однородных балок и трубопроводов на основе информации о резонансных частотах конструкции (Ахтямов А. М. с соавторами), при этом такой анализ существенно опирается на исследование частотного уравнения, которое для упругих балок с постоянными характеристиками записывается в явном виде. Подобные задачи для неоднородных упругих балок рассмотрены ранее (Ватульян А. О., Васильев Л. В. Экологический вестник ЧЭС 2015). Для вязкоупругих структур переменной жесткости такой подход неприменим и требует усовершенствования, так как частотное уравнение уже невозможно записать в явном виде и оно содержит комплекснозначные функции.

В настоящей работе изучены изгибные колебания неоднородного вязкоупругого стержня с жестким закреплением на одном конце и упругим опиранием на другом, характеризуемым двумя параметрами упругости. Оценено влияние этих параметров на резонансные значения балки и амплитуду колебаний. Рассмотрена обратная задача о восстановлении параметров упругого опирания вязкоупругой неоднородной балки при известных резонансных значениях. Представлены методы восстановления, базирующиеся на методе пристрелки. Проведена серия вычислительных экспериментов. Показана неприменимость метода в случае одного резонансного значения из-за наличия множества фантомных решений. Проведена оценка точности и применимости в расчетах представленного метода по двум известным резонансным значениям. Стоит отметить, что для восстановления параметров упругого опирания можно использовать не только резонансные значения, но и две любые частоты, для которых известна амплитуда.

Автор выражает благодарность научному руководителю проф. Ватульяну А. О. за постановку задачи и внимание к работе.

## Об оценке свойств биологических тканей

**Ватульян А. О.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В современной медицинской практике замещения биологических тканей имплантатами особую роль приобретает оценка упругих свойств исходного фрагмента (кости, сустава, сосуда, кожи), поскольку недостаточная информация о свойствах ткани может привести к нежелательной концентрации напряжений в новой биомеханической конструкции. Среди наиболее часто используемых методов отметим акустический мониторинг и контактный способ оценки податливости фрагмента ткани.

В работе обсуждена постановка задачи о контакте двух упругих (возможно неоднородных) тел с различными размерами площадки контакта при наличии как полного сцепления, так и при контакте без трения. Упругие свойства одного из них известны, свойства второго требуется определить, исходя из данных контактного взаимодействия. Такая задача в общей постановке представляет собой коэффициентную обратную задачу для оператора теории упругости. Представлена приближенная схема оценки податливости в контактной зоне. На основе вариационной трактовки задачи и упрощения функционала потенциальной энергии представлено сведение исходной задачи к задаче со специальными граничными условиями в области контакта, где присутствуют два коэффициента податливости идентифицируемого тела. Эти коэффициенты зависят как от упругих характеристик исследуемого тела, его конфигурации и от способа закрепления. Сформулирована слабая постановка задачи и на ее основе построены операторные уравнения для определения функций-коэффициентов податливости и регуляризованная вычислительная схема их определения из дискретной задачи. Обсуждены приложения к проблемам идентификации коэффициентов упругих закреплений пластин и близкие вопросы индентирования кантилевером, в которых требуется определить не функции, а лишь несколько параметров упругого контакта.

В качестве примера рассмотрена задача об идентификации параметров упругого закрепления для круглой пластины переменной жесткости (решетчатая пластина) при известных данных о прогибе, причем в этой задаче определяются два положительных параметра, характеризующих податливость закрепления. Изучена структура функции прогиба и выявлено влияние идентифицируемых параметров на нее. Предложена простая схема определения параметров.

Работа выполнена при поддержке проекта Министерства образования и науки РФ №9.665.2014/К на выполнение научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности.

## Исследование дисперсионных свойств неоднородного пьезоэлектрического волновода при наличии затухания

**Ватульян А. О., Юров В. О.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В настоящее время широко применяются изделия из пьезокерамических композитных материалов, состоящих из пьезокерамической основы и полимерного наполнителя. Отличительными свойствами таких композитных материалов являются значительный коэффициент затухания, низкая теплопроводность и высокие коэффициенты электромеханической связи. Для моделирования распространения волн и затухания в элементах конструкций из таких материалов в современных КЭ пакетах использованы аппроксимации комплексных модулей, справедливые в низкочастотной области, где мнимые части пропорциональны частоте колебаний. В настоящем исследовании для более точного учета затухания использована концепция комплексных модулей, базирующаяся на модели стандартного вязкоупругого тела, и позволяющая анализировать реакцию объекта в широком диапазоне частот. В рамках такого подхода исследованы волны в неоднородном пьезоэлектрическом волноводе при наличии затухания, обусловленном комплексной структурой упругих модулей и пьезомодулей. В качестве волновода рассмотрен неоднородный пьезополимерный слой со свободными границами. Лицевые поверхности электродированы и на них электрический потенциал равен нулю. На основе уравнений движения волновода из пьезополимера составлено матричное дифференциальное уравнение первого порядка, где комплексная матрица порождает собой операторный пучок, содержащий два спектральных параметра — безразмерные частоту и волновое число. Матрицы, определяющие пучок, в общем случае имеют переменные коэффициенты, но не содержат производных от материальных характеристик. Такой подход позволил исследовать с единых позиций дисперсионные соотношения для неоднородностей различного вида — непрерывных и разрывных, причем слои могут быть проводящими и диэлектрическими, в том числе содержащими слои полимера, клея и пьезокерамики. Выполнено разделение задачи на вещественную и мнимую части, а для решения однородной краевой задачи использован метод пристрелки. Удовлетворение граничным условиям порождает пристрелочную систему алгебраических уравнений для определения точек дисперсионных кривых.

Численно исследованы закономерности строения дисперсионных соотношений для различных типов неоднородности, выявлена структура действительных и мнимых компонент дисперсионного множества.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 16-01-00354).

## Об одном подходе к идентификации механических свойств неоднородных цилиндрических областей

Ватульян К. А.<sup>1</sup>, Явруян О. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А, Владикавказ*

Обратные коэффициентные задачи идентификации механических свойств биоматериалов занимают основную позицию в биомеханике. Это направление находит свое применение при математическом моделировании биологических процессов, при изготовлении искусственных тканей, протезов, имплантантов.

Одной из основных проблем при изучении механического поведения биологических материалов является необходимость учета влияния не только механических, но и целого ряда биологических факторов.

Поскольку многие биологические объекты моделируются цилиндрическими областями и имеют неоднородную структуру, рассматриваемая задача идентификации неоднородных механических изотропных свойств цилиндрических областей актуальна при решении многих проблем биомеханики. Восстановление осуществляется из анализа амплитудно-частотных характеристик полей смещений внешней границы, полученных в результате частотного зондирования в режиме крутильных и радиальных колебаний исследуемой области. Рассмотрен случай радиальной неоднородности, когда характеристики области — неизвестные функции, зависящие от радиуса цилиндрической области. Для устойчивой реконструкции достаточно рассмотреть случай, когда внутренняя граница жестко закреплена, а возбуждающая нагрузка в обоих случаях приложена к внешней границе, вследствие чего, задачи сводятся к осесимметричным случаям и представляет собой коэффициентные обратные задачи для кольцевой области.

Основная идея предлагаемого подхода заключается в последовательном решении двух задач на крутильные и радиальные колебания исследуемой области. В результате удается сформулировать две коэффициентные обратные задачи для нахождения неизвестных функций. Построены итерационные процессы для решения полученных обратных задач, в каждом из которых решаются системы интегральных уравнений Фредгольма 1-ого и 2-ого рода для определения поправок к неизвестным функциям относительно начальных приближений.

Согласно предложенной схеме был проведен вычислительный эксперимент по восстановлению неизвестных безразмерных функций различного характера монотонности. Погрешность реконструкции не превосходит 5%, что подтверждает эффективность предлагаемого подхода к решению задачи идентификации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 16-31-00144 мол-а, 16-38-60157 мол-а-дк и 16-01-00354 А) и проекта Министерства образования и науки РФ №9.665.2014/К.

Применение уточненных теорий оболочек и трехмерной теории упругости к описанию явления краевого резонанса в цилиндрической оболочке

**Вильде М. В., Ардазишвили Р. В.**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*

Явление краевого резонанса, впервые обнаруженное при экспериментальном исследовании колебаний круглого диска (Shaw E. A G. On the resonant vibrations of thick barium titanate disks // J. Acoust. Soc. Am. 1956. Vol. 28, № 1. P. 38–50), вызывает интерес в силу ряда особых свойств, важных с точки зрения практических расчетов. В рамках теории оболочек Кирхгофа–Лява показано (Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Wilde M. V. // J. Acoust. Soc. Am. 2000. Vol. 107, № 3. P. 1383–1393), что в цилиндрической оболочке существует три типа краевых резонансов: изгибный резонанс, аналогичный краевому резонансу при изгибных колебаниях пластин, тангенциальный резонанс, связанный с планарной волной рэлеевского типа, и сверхнизкочастотный резонанс, сменяющий изгибный при малых значениях числа волн по окружной координате и приближенно описываемый полубезмоментной теорией оболочек.

Данная работа посвящена исследованию явления краевого резонанса в тонкой круговой цилиндрической оболочке в рамках трехмерной теории упругости. Решение краевой задачи о гармонических колебаниях полубесконечного полого цилиндра, возбуждаемых нагрузкой, приложенной на торце, ищется в виде разложения по модам бесконечного полого цилиндра. Изучается поведение резонансных частот в зависимости от числа волн по окружной координате  $p$ . Численное исследование показало, что в пределах применимости теории Кирхгофа–Лява результаты, полученные по трехмерной теории, мало отличаются от полученных ранее. Вне пределов применимости теории оболочек изгибный краевой резонанс продолжает существовать, однако закон изменения частоты с ростом  $p$  становится совершенно иными и при  $p \rightarrow \infty$  асимптотически приближается к прямой  $p c_E / (1 + \eta)$ , где  $c_E$  — скорость волны, локализованной около угла четвертьпространства,  $\eta$  — относительная полутолщина оболочки. Форма колебаний при этом локализуется у наружной угловой окружности. Тангенциальные резонансы существуют при любых  $p$  только в случае тонкой оболочки. Закон изменения частоты для этих резонансов асимптотически приближается к прямой  $p c_E / (1 - \eta)$ , а форма колебаний локализуется у внутренней угловой окружности. Приведены результаты исследования поведения коэффициента демпфирования тангенциального краевого резонанса распространяющейся модой вне пределов применимости теории оболочек.

Исследована возможность расширения области применимости двумерных теорий при описании краевых резонансов в оболочках путем использования уточненных теорий (теории типа Тимошенко, асимптотической теории высшего порядка с приведенной инерцией). Показано, что в задачах данного типа требуется уточнение не только уравнений движения, но и граничных условий.

## Термоупругое выпучивание круглой пластинки из нелинейно-упругого материала

**Волокитин Г. И.**

*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

В рамках нелинейной теории термоупругости рассматривается задача Сенсенига о торцевом выпучивании короткого кругового цилиндра. Закон состояния обобщает на термоупругость пятиконстантную зависимость Мурнагана. Температурное поле предполагается неоднородным. Используются соотношения теории второго порядка изотропных однородных термоупругих материалов, включая определяющее уравнение для вектора потока тепла.

Наряду с основным равновесным состоянием нагруженного и нагретого тела изучаются смежные равновесные формы, описываемые вектор-радиусом  $\mathbf{R} + \eta \mathbf{w}$  и температурой  $\theta + \eta t$ , где  $\mathbf{R}$ ,  $\theta$  — радиус-вектор и температура точки начально деформированного тела,  $\eta \mathbf{w}$  и  $\eta t$  — вектор добавочного перемещения и добавочная температура. Выбрав в качестве материальных координат цилиндрические  $(r, \varphi, z)$ , задающие положение точки недеформированного цилиндра, для деформированного цилиндра примем соотношения  $R = ar$ ,  $\Phi = \varphi$ ,  $Z = \alpha z$ ,  $\theta = \theta(r)$ , где  $a$ ,  $\alpha$  — *const.* Такое состояние возникает, если цилиндр зажат в смазанной цилиндрической шайбе, а торцы свободны от нагрузки. С учетом выбранного материала получено выражение оператора Лурье, применяемого в уравнениях равновесия для варьированного состояния. Последовательное рассмотрение проблемы термостатической устойчивости помимо уравнений нейтрального равновесия требует аналогичных соотношений для температуры. Основываясь на уравнении баланса энергии, получено уравнение для добавочной температуры. Использовано варьированное уравнение баланса энергии в случае практически важного обобщения закона Фурье для вектора потока тепла, учитывающего линейную зависимость коэффициента теплопроводности от температуры;  $\theta$  и параметры деформации находятся из начальной задачи — связанной задачи для термоупругого цилиндра.

Вектор добавочного перемещения и добавочная температура выбраны в виде:  $\mathbf{w} = u(r, z)\mathbf{e}_r + w(r, z)\mathbf{i}_3$ ,  $t = t(r, z)$ . Условия нейтрального равновесия определяются системой трех линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с коэффициентами, зависящими от модулей термоупругости, начальной температуры и параметров деформации, а также соответствующими краевыми условиями. Отыскивая решение с помощью функций Бесселя первого рода, после разделения переменных приходим к однородной системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и шести краевым условиями. Бифуркационные значения параметра  $a$  — собственные значения этой краевой задачи. Задача на собственные значения — нелинейная, собственные значения находились численно. Ее решение позволяет исследовать влияние температуры, термоупругих модулей и числа волнообразования  $k_n$  на величину критической деформации.

## Оценка чувствительности биомеханических моделей

**Воронкова Е. Б., Журавлева Д. И.**

*Санкт-Петербургский государственный университет*

В данной работе показаны возможности применения критериев глобальной чувствительности для анализа моделей биомеханики.

Анализ чувствительности (АЧ) позволяет оценить влияние неопределенности исходных параметров модели на результат моделирования, а также выявить наиболее влиятельные параметры или группу параметров (Saltelli A. et al. Variance based sensitivity analysis of model output. Design and estimator for the total sensitivity index. Computer Physics Communications, 181 (2010), pp. 259–270). Локальные методы АЧ основаны на оценках градиента модели в некоторой фиксированной точке области параметров. Глобальные методы АЧ содержат информацию о всей области изменения переменных и предпочтительнее при исследованиях нелинейных и немонотонных моделей, особенно, если модель представляет собой «черный ящик» (например, при конечно-элементных расчетах).

Для глобального анализа чувствительности задач небольшой размерности применяется, например, метод Соболя. Пусть математическая модель описывается функцией  $y = y(x)$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{I}^k$ ,  $\mathbb{I} = [0, 1]$ . Главным и полным показателями глобальной чувствительности произвольного набора переменных  $x_Z$ ,  $Z = \{i_1, \dots, i_m\}$  называют величины

$$S_{x_Z} = \frac{\sum_{s=1}^m \sum_{(i_1 < \dots < i_s) \in Z} D_{i_1 \dots i_s}}{D}, \quad S_{x_Z}^{TOT} = \frac{D_{x_Z}^{TOT}}{D} = \frac{D - D_{x_T}}{D},$$

где  $x_T = x \setminus x_Z$ ;  $D = \int_0^1 y^2(x) dx - y_0$ ;  $D_{i_1 \dots i_s} = \int_0^1 y_{i_1 \dots i_s}^2 dx_{i_1} \dots dx_{i_s}$ ;  $y_0$ ,  $y_{i_1 \dots i_s}$  — компоненты ANOVA-разложения функции  $y(x)$ .

В качестве примера рассмотрена модель корнеосклеральной оболочки глаза для исследования зависимости «объем–давление» (Бауэр С. М., Воронкова Е. Б. Модели теории оболочек и пластин в задачах офтальмологии. Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2014. Вып. 3. С. 438–458). Представляя в первом приближении глаз в виде сферической оболочки, можно вывести соотношение между изменением внутреннего радиуса  $\Delta R_i$  и давлением, приложенным к внутренней поверхности оболочки  $p$  (ВГД) с одной стороны, и изменением внутреннего объема  $\Delta V$  с другой стороны. Показано, как меняются показатели чувствительности в зависимости от распределения параметров модели.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 15-01-06311-а.

## Точное решение задачи гидродинамического расчета радиального подшипника с электропроводящим смазочным материалом

**Гармони́на А. Н.**

*Ростовский государственный университет путей сообщения*

В настоящее время в качестве смазочного материала в подшипниках используются жидкости, обладающие электропроводящими свойствами. Электропроводящие свойства смазочного материала с проводящими частицами, а так же их поведение при эксплуатации в условиях действия электромагнитного поля мало изучены.

Правильно подобранный количественный и качественный состав смазочной композиции позволяет улучшить работу смазочного материала, поверхность шипа и подшипника. Кроме того, анализ опубликованных по представленной теме работ подтверждает, что в настоящее время отсутствует расчет радиальных подшипников, работающих на электропроводящем смазочном материале, обладающем демпфирующими свойствами.

Этим обуславливается актуальность представленного исследования с точки зрения современных проблем трибологии.

В работе на основе линейных уравнений движения электропроводящей смазки для случая «тонкого слоя» и уравнения Дарси приводится метод построения точного автомоделного решения задачи гидродинамического расчета радиального подшипника с электропроводящим смазочным материалом.

Найдено поле скоростей и давлений смазочного и пористого слоев, в последующем получены аналитические зависимости для основных рабочих характеристик подшипников с учетом и без учета зависимости вязкости, электропроводности смазочного материала и проницаемости пористого слоя от давления.

Дана оценка влияния электропроводящих свойств смазочного материала, наличия пористого слоя на основные рабочие характеристики подшипника.

Рассмотрено установившееся движение электропроводящей смазки в зазоре радиального подшипника. Полагается, что подшипник неподвижен, а шип с пористым слоем на рабочей поверхности вращается с постоянной угловой скоростью.

Получены следующие основные выводы:

- Несущая способность радиального подшипника существенно зависит не только от электропроводящих свойств смазочного материала, но и от вязкости и проницаемости пористого слоя.

- Как в случае расчета упорного подшипника, несущая способность радиального подшипника с увеличением значения параметра, характеризующего напряженность электрического поля, резко возрастает.

- При выявленном определенном значении безразмерной экспериментальной постоянной несущая способность принимает максимальное значение.

- Наличие пористого слоя на поверхности вала обеспечивает радиальному подшипнику демпфирующие свойства при незначительном снижении его несущей способности.

## Математическое моделирование диэлектрического и деформационного гистерезиса в двумерном случае

**Герасименко Т. Е.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Основной целью настоящей работы является алгоритм построения диэлектрического и деформационного гистерезиса сегнетоэлектрических поликристаллических материалов при одновременном действии электрического поля и механических напряжений в рамках модели плоской деформации.

На сегодняшний день задачи комплексного учета влияния механических и электрических полей на процесс переключения доменов являются наиболее сложными и малоизученными.

В рамках ориентационной модели поляризации строится функция распределения доменов представительного объема сегнетоэлектрического поликристаллического тела в двумерном случае.

Чтобы учесть совместное влияние электрических и механических полей на процесс поляризации в двумерном случае, в данной работе используется энергетический критерий переключения доменов. Для определенного уровня внешних нагрузок вычисляются вектор предельной поляризации и тензор предельной деформации в идеальном случае.

Чтобы учесть механизмы запираания доменных стенок и влияние соседних доменов, оценивается работа электрического поля в реальном процессе поляризации и соответствующие затраты на поляризацию. В результате получаем энергетическое балансное уравнение, из которого выводим систему уравнений в дифференциалах. Для решения этой системы предложен метод последовательных приближений, позволяющий определить приращения остаточной поляризации и деформации представительного объема при переходе от одного равновесного состояния к другому в зависимости от приращения электрического поля и механического напряжения.

Так как полная поляризация складывается из остаточной и индуцированной части, предлагается закон определения индуцированной части поляризации и деформации.

Для применения к конкретным материалам модель включает в себя шесть параметров, которые необходимо подбирать из условия совпадения расчетных и экспериментальных зависимостей, например больших петель диэлектрического гистерезиса.

Проведен комплекс численных расчетов по определению электрического и механического отклика материала на внешние нагрузки. Проведено исследование влияния параметров модели на поведение петель гистерезиса, а именно на их наклон и форму. Результаты представлены в виде больших петель диэлектрического и деформационного гистерезиса.

## Развитие модели спирального течения крови в восходящей аорте

Гетман В. А., Батищев В. А.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Одной из проблем биомеханики кровообращения является возникновение спирального течения крови в крупных сосудах человека и животных. Отметим, что Harwey W. заметил закрученные потоки крови в сердце еще в семнадцатом веке. Исследователи установили, что одной из причин возникновения спиральных волновых движений крови на выходе из левого желудочка сердца является закрученная структура стенок этого желудочка.

В докладе представлена математическая модель коротких спиральных волн в аорте. Эта модель построена совместно с профессором Ю. А. Устиновым на основе нелинейной системы уравнений Навье–Стокса и динамических уравнений оболочки. Аорта моделируется круговым цилиндром, ограниченным тонкой упругой изотропной оболочкой. Предполагается, что причиной возникновения спиральных волн в восходящей аорте является закрученный поток крови, вытекающий из левого желудочка сердца.

Наблюдения показывают, что в аорте распространяется средний стационарный поток. В докладе этот поток моделируется в первом случае течением Пуазейля, а во втором случае — равномерным потоком. Этот поток индуцирует стационарный пограничный слой на стенках аорты и в главном приближении описывается уравнением пограничного слоя Блазиуса. Эксперименты показывают, что в центральной части сечения кровеносного сосуда реализуется именно равномерный поток. На фоне этого потока распространяются как длинные продольные волны, так и спиральные волны двух типов — длинные и короткие. Отметим, что длинные спиральные волны локализованы в пограничном слое вблизи стенок сосуда, а короткие волны заполняют все поперечное сечение этого сосуда.

В докладе, путем применения асимптотических методов, включая и метод пограничного слоя, рассчитаны короткие спиральные волны. В отличие от модели с течением Пуазейля, в модели с равномерным потоком получены явные формулы для окружной компоненты скорости. Эти формулы выражаются через функции Бесселя. Волновые числа коротких спиральных волн также получены явно. В аорте распространяются также и квазистационарные моды, которые в главном приближении не зависят от времени. Первая квазистационарная мода не изменяет направления вращения жидкости ни со временем, ни по сечению.

Приведены результаты расчетов коротких волн. Показано, что в течении систолы могут возникать различные случаи закручивания потока жидкости. Систола — одна из фаз сердечного цикла — сокращение сердца. Расчитан режим, который подтверждается экспериментально. Большую часть систолы жидкость вращается в одну сторону, кроме малого промежутка времени, когда направление вращения противоположно. При удалении от входа в цилиндр амплитуды спиральных волн затухают по экспоненциальному закону. Показано, что короткие спиральные волны слабо зависят от упругих свойств стенок аорты. Механизм переноса этих волн определяется стационарным потоком и длинными продольными волнами.

## Кинематика и термодинамика облака сильного взрыва

Гетманский М. С., Снопов А. И.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Общепринятая модель точечного взрыва не позволяет изучать термодинамику процессов, происходящих внутри облака взрыва, а рассматривает только среду, окружающую облако взрыва.

В докладе на основе точных частных решений уравнений движения вязкого газа представлены результаты расчетов кинематики и термодинамики процессов, происходящих в облаках, порожденных сильным взрывом.

Произведено сравнение с моделью точечного взрыва, минус которой заключается в том, что ее автомодельное решение не учитывает среду внутри газового объема, а также исключает рассмотрение начального момента времени  $t = 0$ .

Предложенная модель позволяет получить информацию о поведении среды во внутренней части облака взрыва, а также дает возможность оценить температуру, давление и плотность в заданной точке, находящейся в внутри рассматриваемой области. При исследовании взрыва рассматривается расширяющееся облако, образованное в основном парами железа.

Исходными данными служат фотографии известного эксперимента, на которых запечатлен последовательный рост радиуса облака взрыва в определенные моменты времени. Допускается, что облако взрыва имеет шаровую форму и сферическую симметрию. Также не учитывается влияние силы тяжести.

Процесс расширения определяется по закону:

$$r = r_0 \sqrt{1 + 2bt},$$

где  $0 \leq \xi \leq r_0$  — начальный радиус облака,  $\xi$  определяет положение частицы газа в начальный момент времени,  $t$  — время от начала взрыва,  $b$  — произвольная постоянная, характеризующая скорость расширения облака. Величина параметра  $b \approx 3.4 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}$  определена на основе результатов эксперимента, описанного в работе. Начальный радиус облака взрыва принят  $r_0 = 0,5 \text{ м}$ , начальная температура  $T_0 = 10^6 \text{ К}$ .

Полученная теоретическая кривая  $r = r(t)$  при принятых  $b$  и  $r_0$  с удовлетворительной точностью порядка 5%–10% аппроксимирует экспериментальные данные. Определены поля давлений, температур и плотностей внутри облака взрыва.

Данная модель представляет не только картину расширения облака взрыва, а также дает еще и информацию о внутреннем состоянии среды, в отличие от теории точечного взрыва, которая не дает возможности рассмотреть начальный момент явления.

## Трансформации в топологии дисперсионных спектров локализованных волн с варьируемыми направлениями распространения вдоль ортотропного слоя между ортотропными полупространствами

**Глухов И. А.**

*Донецкий национальный университет*

Одним из аспектов исследования свойств трехпарциальных бегущих локализованных волн деформаций в ортотропном слое между ортотропными полупространствами с коллинеарными упруго-эквивалентными направлениями является описание эффектов изменения топологии их дисперсионных спектров при варьировании направлений распространения между смежными упруго-эквивалентными направлениями в плоскости слоя. Анализ данных эффектов базируется на качественном исследовании вопросов о трансформациях в расположении зон постоянства типов корней характеристических полиномов для систем дифференциальных уравнений относительно зависящих от поперечной координаты амплитудных составляющих волновых перемещений в компонентах волновода и о выделении подобластей на диаграммах дисперсионных кривых, в которых расположены действительные ветви спектров. Качественная схема выделения искомым подобластей имеет различия в случаях подобия либо различия свойств материалов вмещающих ортотропных полупространств. При однотипных материалах полупространств она является сходной для случаев симметричных и антисимметричных по толщине слоя волн. На основе анализа характеристических полиномов определяются линейные зависимости между параметрами частоты и волнового числа, при которых корни характеристических полиномов являются кратными, и определяются секторные подобласти на плоскости изменения этих параметров, внутри которых тип корней соответствующих бикубических характеристических полиномов является постоянным. Угловые коэффициенты отделяющих секторные подобласти прямых являются функциями параметра направления распространения волны, а порядок чередования подобластей является критерием для классификации волноводных свойств материалов слоя и полупространств. В общем случае для структуры с однотипными вмещающими полупространствами областями потенциального существования действительных ветвей спектра являются области пересечения четырех секторных подобластей для материала слоя и четырех секторных подобластей для материала полупространств, в которых корни обоих характеристических полиномов являются действительными. Для структуры с разнотипными вмещающими полупространствами, областями потенциального существования действительных ветвей спектра являются области пересечения двенадцати секторных подобластей указанного типа, в которых корни всех трех характеристических полиномов являются действительными. Описанная методика предварительного анализа топологических особенностей спектров локализованных волн с варьируемыми направлениями распространения в волноводе рассматриваемой структуры реализована и для широкого круга сочетаний реальных ортотропных геоматериалов и кристаллов.

## Сигма-спецификация реагирующих систем реального времени

Глушкова В. Н.

Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону

Проверка корректности функционирования систем реального времени осуществляется на основе  $\Sigma$ -формулы исчисления предикатов (ИП) 1-го порядка, допускающих использование многосортных переменных. Это позволяет более просто по сравнению с моделированием временными автоматами выразить количественную информацию о временных свойствах событий системы. Ключевым моментом для практического применения спецификаций из формул ИП является сложность их интерпретации. Специфика построения  $\Sigma$ -формулы состоит в явном использовании переменных сорта «список» с ограниченными кванторами по списочным структурам. Иерархизация этих структур правилами КС-грамматик позволяет по аналогии с атрибутивными грамматиками выделить класс  $\Delta_0 T$ -формулы, интерпретируемых на «древесном» списке с полиномиальной сложностью относительно его «размера».

На первом уровне система моделируется конечным автоматом, состояния и дуги которого помечены именами действий, осуществляемых системой. Автомат представляется правилами КС-грамматики с использованием нетерминальных символов, отражающих временные характеристики действий.

Например, упрощенный FDDI протокол связи описывается тремя правилами грамматики:

1.  $Idle \rightarrow Time GT HPM$ ;
2.  $HPM \rightarrow Time RT Idle \mid Time ES LPM$ ;
3.  $LPM \rightarrow Time RT Idle$

Здесь  $Idle$ ,  $HPM$ ,  $LPM$  — состояния ожидания получения маркера, пересылки высокоприоритетных и низкоприоритетных сообщений соответственно;  $GT$ ,  $RT$ ,  $ES$  — метки дуг, означающие мгновенные действия: «получение маркера», «возврат маркера» и «окончание пересылки высокоприоритетных сообщений». Деревья выводов грамматики представляются иерархическими списками, являющимися областью действия ограниченных кванторов, входящих в  $\Delta_0 T$ -формулы, которые составляют логическую спецификацию системы.

Логическая спецификация  $Th$  (теория) состоит из квазитождеств с ограниченными кванторами вида  $\forall x \dot{\in} t$ , где  $\dot{\in}$  — отношение подчинения на узлах дерева. Например, правилу (1) грамматики соответствует квазитождество:  $\forall \tau \dot{\in} s (wait(\tau) \rightarrow gt(\tau), hpm((\tau, \tau + \delta)))$ , где  $wait$ ,  $gt$ ,  $hpm$  — предикаты: «ожидания», «получения маркера», «передачи высокоприоритетных сообщений» соответственно. Результатом интерпретации теории  $Th$  является атрибутивное дерево действий, которое строится на основе прямого логического вывода с применением правил грамматики, приписанным к аксиомам теории  $Th$ . На полученном атрибутивном дереве можно за полиномиальное время относительно количества узлов дерева верифицировать свойства моделируемой системы, формализованные  $\Delta_0 T$ -формулами спецификации.

## Бифуркации в задачах фильтрационной конвекции при разрушении косимметрии: численный анализ

**Говорухин В. Н.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Численно исследуются задачи фильтрационной конвекции в двумерном контейнере при поддерживаемом линейном по вертикали профиле температуры на границе и различных внешних возмущениях. Такими воздействиями могут быть внутренние источники тепла, анизотропия среды, просачивание жидкости через границу области течения и пр. Рассматриваемые задачи представляют интерес благодаря реализующимся в них нетривиальных нелинейных явлений, обусловленных косимметрией невозмущенной задачи. Математически задачи формулируются в виде следующей системы уравнений в частных производных

$$\Delta\psi = \theta_x, \quad (1)$$

$$\theta_t + \psi_y\theta_x - \psi_x\theta_y = \Delta\theta + \lambda\psi_x + \delta f(x, y). \quad (2)$$

Здесь  $\psi$  — функция тока,  $\theta$  — отклонение температуры от равновесного по вертикали профиля,  $\lambda$  — фильтрационное число Релея,  $f(x, y)$  — функция распределения внутренних источников тепла,  $\delta$  — их интенсивность.

Рассматривается прямоугольная область течения  $D = [0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b]$  на границах которой заданы условия

$$[\psi]_{\partial\Omega} = \eta g(x, y), \quad (3)$$

где  $\eta$  — интенсивность просачивания, а функция  $g(x, y)$  определяет его скорость.

Задача (1)–(3) обладает косимметрией и при потере устойчивости состояния покоя в ней возникает однопараметрическое семейство устойчивых стационарных конвективных режимов. При нарушении косимметрии семейство разрушается, например, при  $\delta \neq 0$  или при  $\eta \neq 0$  в рассматриваемой здесь задаче.

Рассматриваются сценарии распада семейства стационарных режимов при наличии источников тепла малой интенсивности ( $0 < \delta \ll 1$ ) и слабой фильтрации через границу ( $0 < \eta \ll 1$ ). Обнаружены теоретически предсказанные сценарии: распад семейства на конечное число стационарных режимов, и возникновение медленных периодических движений. Количество сохраняющихся режимов варьируется в зависимости от параметров  $\lambda, \delta, \eta$  и вида функций  $f(x, y), g(x, y)$  от одного до десяти в рассматриваемых случаях. Кроме того, были найдены релаксационные квазипериодические и хаотические колебательные режимы, состоящие из двух стадий: медленных движений с траекторией, лежащих в окрестности дуг распавшегося семейства, и быстрых колебаний. Это возможно, когда при распаде семейства все стационарные режимы исчезают или являются неустойчивыми, а семейство состоит из устойчивых и неустойчивых дуг при  $\delta = \eta = 0$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 14-01-00470).

## Биомеханический анализ грудного отдела аорты

Голядкина А. А.<sup>1</sup>, Кириллова И. В.<sup>1</sup>, Коссович Л. Ю.<sup>1</sup>,  
Мурылев В. В.<sup>2</sup>, Полиенко А. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

<sup>2</sup>Первый Московский государственный медицинский университет им. И. М. Сеченова

В Европе каждый год регистрируется более 16 тысяч случаев поражения грудной аорты. Развитие аневризмы аорты — конечная точка патологического процесса. При этом двухлетняя выживаемость больных составляет менее 30%. Единственным действенным методом лечения данной патологии является хирургическое вмешательство. В настоящее время используются гибридные технологии — сочетание эндопротезирования аорты с открытым переключением ветвей аорты в новые устья, расположенные вне зоны перекрытия стент-графтом. Существует множество вариантов переключения ветвей аорты. Ключевым моментом выбора является понимание локальной гемодинамики в протезах и изучение кровоснабжения головного мозга и внутренних органов. Применение компьютерного моделирования в клинической практике является перспективным методом прогнозирования возможных осложнений при патологиях и хирургическом лечении грудной аорты. С медицинской точки зрения, основным пусковым моментом формирования расслоения с последующим разрывом стенки грудного отдела аорты является дезорганизация волокон среднего слоя аортальной стенки. Данные изменения, связанные с возрастом, наследственной патологией и вследствие прогрессирования заболевания, носят индивидуальный характер и также влияют на частоту возможных осложнений.

Для определения биомеханических факторов, приводящих к данным патологиям, проведено конечно-элементное моделирование грудного отдела аорты человека. Построение модели осуществлялось в программных пакетах MIMICS и SolidWorks по данным компьютерной томографии с введением контрастного вещества. Численный анализ проведен с использованием метода конечных элементов в расчетном комплексе Ansys Workbench. Кровь предполагалась однородной, несжимаемой, ньютоновской жидкостью с заданными плотностью и динамической вязкостью, данные параметры были определены по результатам общего и биохимического анализа крови пациента. Параметры материалов тканей аорты были выбраны из базы данных, сформированной по результатам натуральных экспериментов. Анализ результатов позволил определить, что основным пусковым моментом формирования расслоения аортальной стенки является высокое радиальное напряжение. При формировании разрыва большее значение имеет как радиальное, так и продольное напряжения. Показатель пикового напряжения аортальной стенки коррелирует с темпом роста аневризмы и может служить предиктором нежелательных клинических исходов. Полученные результаты были верифицированы на основе сравнения с клиническими данными исследованного пациента. Выявлено, что погрешность составила 10%. Для увеличения точности результатов компьютерного моделирования необходимо учитывать упруго-деформационные свойства аорты пациента.

Работа выполнена при поддержке Государственного задания № 2014/203, код проекта 1617.

Влияние вертикальной структуры плотности  
на параметры внутренних волн в северо-восточной части Черного моря

Григоренко К. С.<sup>1</sup>, Хартиев С. М.<sup>2</sup>, Лемешко Е. М.<sup>3</sup>, Соловьева А. А.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону

<sup>2</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

<sup>3</sup>Морской гидрофизический институт РАН, Севастополь

Внутренние волны оказывают большое влияние на перемешивание вод и связанные с этим биологические процессы в океане, кроме этого важным аспектом изучения глубинных волновых процессов является их критическое воздействие на объекты подводной инфраструктуры добычи и транспортировки углеводородов, а так же на плавсредства. Северо-восточная часть Черного моря и акватория Крымского полуострова являются регионами где эти исследования особенно актуальны. В частности, и в этой связи Южным научным центром РАН проводятся широкомасштабные экспедиционные исследования этих районов.

В данной работе, на основе экспедиционной базы данных Южного научного центра РАН, исследуется влияние гидрологических полей на кинематические характеристики внутренних волн в северо-восточной части Черного моря. В работе использованы материалы экспедиции мая-июня и сентября 2011 г. Изучение термохалинных характеристик водных масс проводилось с помощью океанографических CTD-зондов SBE-19 и SBE-19+V2. Полученные данные обрабатывались при помощи программного обеспечения фирмы-производителя зонда Sea-Bird Electronics Inc. Картографическая обработка данных проведена с помощью программного геоинформационного пакета ArcGIS. Распределение термохалинных характеристик характерно для соответствующих времен года (Тужилкин В. С. Сезонная и многолетняя изменчивость термохалинной структуры вод Черного и Каспийского морей и процессы ее формирования: дис. д. г. н. М., 2008. 314 с.): в летний период сезонный слой скачка плотности расположен максимально близко к поверхности (3–5 м), которая, в свою очередь, максимально, в течение года, прогрета (до температур, во время экспедиции, 23° С), в начале осеннего периода наблюдается более активное перемешивание верхнего квазиоднородного слоя и опускание сезонного слоя скачка до глубины 20 м. Температура на поверхности достигает 20° С на Абхазской акватории. Для Черного моря, в целом, характерна квазистабильность термохалинной структуры в течение теплого времени года. В работе представлены графическая информация с изображением вертикальных профилей температуры, солёности, плотности и частоты Вайсяля-Брента, а также соответствующие им дисперсионные кривые внутренних волн. Следует отметить, что стратификация плотности в сентябре более динамична, и пик частоты Вайсяля-Брента, расположенный на основном слое скачка плотности охватывает слои от глубин 40 до 140 м, тогда как в июне слой пик частоты плавучести расположен на горизонтах от 40 до 90 м. Приведена иллюстрация того, что более подвижная структура верхних слоев Черного моря приводит к перестроению режимов внутренних волн, которые в сентябре являются более энергоёмкими, то есть, волны одинаковой длины имеют в сентябре более высокие частоты.

Авторы выражают благодарность проф. А. Н. Соловьеву за внимание к работе.

## Идентификацией свойств графена на основе моделирования методом молекулярной динамики

Груздев Р. Ю.<sup>1</sup>, Lahderanta Е.<sup>2</sup>, Держун А. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Lappeenranta University of Technology*

Графен представляет собой двумерную структуру, образованную слоем атомов углерода толщиной в один атом. Предполагается, что данный материал может получить широкое применение в силу своих уникальных свойств — например, в ряде работ предполагается, что под воздействием солнечного света на графен, один фотон производит более одного электрона, в отличие от других материалов, применяющихся в производстве солнечных батарей. Слоистый композит, образованный из графена и оксида цинка, позволит создавать эффективные, гибкие и легкие солнечные панели.

Первым материалом был выбран ZnO из-за его уникальных свойств, которые позволяют применять его в различных областях современной электроники и приборостроения. Одной из наиболее важных особенностей ZnO является четко выраженное направление роста, что позволяет получать высококачественные структуры с требуемыми высотой и диаметром.

Моделирование проводилось в программном комплексе LAMMPS, при этом был использован COMB-потенциал (charge-optimized many-body potential). Его применение обусловлено тем, что многие вещества содержат разнородные связи, например: металлы и оксиды металлов, полупроводники и оксиды металлов, оксиды металлов и газообразные молекулы и др. В связи с этим, National Science Foundation (NSF) и Department of Energy (DOE) совместно с профессором Simon Phillpot (University of Florida) разработали COMB-потенциал. Этот потенциал учитывает динамический перенос заряда между атомами. На данный момент ведется работа по параметризации третьего поколения COMB-потенциала, который будет применен для металлических и металлоксидных систем. В настоящее время параметризация проведена для многих веществ, в частности для ZnO, и данный потенциал может быть использован в LAMMPS.

Поскольку графен является относительно новым материалом, до сих пор ведутся исследования, касающиеся применимости различных методов моделирования для графена. Метод молекулярной динамики может быть применен для идентификации механических свойств и получения моделей образцов для других методов, в силу своих особенностей. В данной работе были определены основные механические константы для двумерного материала — коэффициент Пуассона и модуль Юнга. Рассмотрен размерный эффект, исследованы образцы различных размеров. Проведен анализ потенциалов взаимодействия (LCBOP, LCBOPII). Результаты согласуются с результатами других методов, представленных в литературе.

Данная работа выполнена в рамках программы ERASMUS+.

## Исследование дисперсионных свойств пороупругих материалов

Гусаков Д. В.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассмотрена задача об установившихся колебаниях неоднородного по толщине пороупругого трансверсально-изотропного слоя. Моделирование слоя произведено в рамках плоской деформации. Для рассмотрения пороупругой среды применена модель М. Био. Все характеристики слоя считаются произвольными функциями толщинной координаты. Данный подход к рассмотрению неоднородности в слое позволяет решать более широкий спектр задач, нежели разбиение слоя на несколько однородных подслоев с однородными характеристиками. В рассматриваемом случае для произвольных функций неоднородности применено численное решение задачи методом пристрелки.

Изучение дисперсионного множества для сред с диссипацией представляет большой интерес с точки зрения изучения их геометрической структуры. Используемая модель пороупругой среды имеет структурное сходство с моделями вязкоупругости, вследствие чего предложенный подход может быть применен для рассмотрения задач вязко- и термоупругости. Для рассматриваемой задачи возможно применение интегрального преобразования Фурье к исходным уравнениям. Полученная в результате преобразования система линейных дифференциальных уравнений имеет комплекснозначные коэффициенты и, как следствие, ее решения также будут комплекснозначными функциями. Разделение действительной и мнимой частей позволяет свести рассматриваемую задачу к решению системы дифференциальных уравнений удвоенной размерности с вещественными коэффициентами. Дисперсионное уравнение в данном случае будет являться функцией трех вещественных аргументов, нули такой функции отыскивались численно с заранее заданной точностью.

Анализ полученных дисперсионных множеств позволил сделать выводы об особенностях их структуры в случае неоднородного трансверсально-изотропного пороупругого слоя. Выявлены зависимости строения дисперсионного поля от вида неоднородности материальных характеристик слоя. Рассмотрены вспомогательные задачи для независимого давления и упругих смещений. Важно отметить что, при стремлении параметра связанности к нулю наблюдается предельный переход к решениям для вышеупомянутых независимых задач. Данный факт позволяет сделать вывод о корректности построения дисперсионного множества для связанной задачи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 16-01-00354) и проекта Министерства образования и науки РФ № 9.665.2014/К.

## Оценка напряженного состояния и ремонт поврежденного трубопровода в процессе эксплуатации

Гусаков Д. В., Моргунова А. В., Недин Р. Д., Чебаненко В. А.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В процессе эксплуатации и обслуживания газовых и нефтяных трубопроводов возникает множество инженерных задач. Одной из них является ремонт трубопровода при наличии различных дефектов, например, дефектов сварных швов, повреждений, вызванных некоторым внешним механическим воздействием, трещин, а также поверхностной и внутренней коррозии. Наиболее распространенные методы ремонта на сегодняшний день требуют остановки работы трубопровода, что приводит к значительным финансовым потерям; в этой связи весьма актуальным на текущий момент является вопрос разработки методов ремонта трубопровода без необходимости приостановки его работы.

В настоящей работе рассмотрено несколько задач для поврежденного трубопровода с одним и двумя поверхностными дефектами, находящегося под действием внутреннего давления. Во всех случаях считается, что дефекты вызваны поверхностной коррозией и далее подвержены механической обработке с целью предотвращения дальнейшего развития коррозии и устранения источников концентрации напряжений. Для исследования рассматриваемых задач использованы конечно-элементные пакеты ANSYS и Siemens NX. В задаче для двух дефектов исследована зависимость неоднородного распределения напряжений от взаимного расположения двух дефектов.

Отдельно рассмотрена задача для вышеописанной трубы с двумя обработанными поверхностными дефектами, которая дополнительно упрочнена за счет натягивания оболочки, выполненной из многослойного композиционного материала (в котором слои композита разделены слоями адгезива), на фрагмент поверхности трубы, содержащий дефекты. При этом полости «карманов», образовавшихся во время механической обработки дефектов, под слоем оболочки предварительно залиты специальным полимерным наполнителем. В рамках поставленной задачи проанализировано влияние параметров материала, структуры оболочки и наполнителя на НДС трубы с целью получения наиболее эффективных и оптимальных свойств композитной оболочки и наполнителя.

Все описанные задачи требуют проведения большого объема вычислительных экспериментов. В случае работы с пакетом ANSYS имеется возможность воспользоваться встроенными средствами автоматизации расчетов, в то время как в пакете Siemens NX такие вычисления требуют дополнительных манипуляций. Для оптимизации процесса работы в данном пакете разработан метод для автоматизации расчетов с использованием средств встроенного журнала. Сравнительный анализ решений, полученных в двух конечно-элементных пакетах, продемонстрировал их достаточную близость.

Работа выполнена при поддержке Проекта «INNOPIPES» # 318874 в рамках Европейской Программы FP7-PEOPLE-2012-IRSES, РФФИ (№ 16-01-00354, № 16-38-60157 мол\_а\_дк), Гранта Президента Российской Федерации МК-5440.2016.

## О возможности управления разгрузкой при ортезировании нижних конечностей

**Дашевский И. Н.**

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва*

Ранее была сформулирована идея о программированном управлении коэффициентом разгрузки (КР) конечности через изменение боковой компрессии ортеза при его подтяжке. Применительно к голени идея состояла в том, что за счет происходящего при подтяжке ортеза окружного сжатия голень будет «выталкиваться» из ортеза вверх, контакт ее с подошвой ослабляться, и нагрузка с голени перераспределяться на корпус ортеза. С помощью ПАК ДиаСлед для измерения подподошвенных полей давлений проведены *in vivo* систематические измерения КР ортезированной конечности с использованием под ортез как хлопковых, так и специальных скользких синтетических чулок. Для хлопковых чулок зависимости КР от компрессии обнаружено не было, для синтетических при ходьбе — также, в статике же был зафиксирован резкий рост КР с увеличением компрессии на левой половине кривой и стабилизация на правой ее части. Для моделирования разгрузки при ортезировании проведены измерения коэффициентов трения пар кожа–чулок и чулок–ортез как для хлопковых (соответственно 0,48 и 0,57), так и для синтетических чулок (0,42 и 0,16). Рассмотрена модель шероховатого жесткого конуса (голень), охватываемого конформной ему раздвижной жесткой обоймой (гильза ортеза) и нагруженного вертикальной силой (вес тела) и опоясывающей нагрузкой (боковая компрессия). Из требования реализации режима скольжения конечности относительно ортеза с учетом их геометрии получена оценка необходимого для этого значения коэффициента трения между ними  $k < 0,25$ . Для хлопковых чулок с учетом полученных коэффициентов трения направление действующей на голень силы обжатия оказывается внутри конуса трения. Поэтому реализуются условия сцепления конечности с ортезом, и боковое обжатие не может повлиять на разгрузку. Для скользких синтетических чулок реализуется режим проскальзывания, приводящий к изменению КР при варьировании окружной компрессии. Модели системы нога–ортез с учетом деформируемости мягких тканей исследовались численно: конические модели — на основе метода граничных интегральных уравнений, модели реальной формы — методом конечных элементов с использованием специально сделанных для этой цели компьютерных томограмм голени *in vivo*. Обнаружено, что на поверхности контакта голень–ортез возникают области скольжения. Для ХБ чулок с коэффициентом трения между голенью и ортезом  $k = 0,48$  их размеры сильно зависят от принятой геометрии, для синтетических чулок с  $k = 0,16$  они во всех случаях значительны. Полученные результаты дают надежду на возможность управления разгрузкой при ортезировании путем изменения боковой компрессии.

Работа выполнена при участии С. Е. Никитина, М. Н. Перельмутера и П. С. Шушпанникова и при частичной поддержке гранта РФФИ №№ 14-08-01266.

## Методы бесконтактного измерения пульса

**Демяненко Я. М.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В работе предложены два альтернативных метода для определения частоты пульса на основе видеоряда. В первом методе для извлечения информации о сердцебиении из видеоряда используется периодическое незаметное для человеческого глаза движение головы. Второй основан на анализе изменения цвета лица на последовательности цветных изображений. Каждый метод позволяет определить частоту пульса человека в реальном времени и непрерывно отслеживать её. Для их использования необходимо наличие компьютера и веб-камеры, что делает возможным его использование с целью вычисления частоты пульса человека бесконтактным методом. Данный подход может быть особенно полезным для новорожденных, пожилых людей и пациентов клиник.

В методе бесконтактного измерения пульса, получаемого при анализе микродвижений головы, на результаты существенное влияние оказывают даже незначительные шумы. Поэтому принято решение предварительно обрабатывать видео с помощью алгоритма усиления незаметных движений, чтобы отобразить скрытую информацию (метод усиления Эйлера). Для уточнения границ объектов и увеличения точности расчетов используется фильтр Габора пятого порядка.

Для поиска области интереса, содержащей лицо, используется датчик Виолы–Джонса. Для определения особых точек был использован детектор углов Харриса, для их отслеживания — оптический поток, который находится методом Лукаса–Канаде. В результате получается набор сигналов, соответствующих движениям особых точек. Основной сигнал, который нужно выделить — движение головы, вызванное работой сердца. Движение особых точек соответствует этому сигналу, а также другим движениям, вызванным такими источниками, как дыхание, вестибулярная деятельность и изменения в выражении лица. В работе выяснено, что движению головы, вызванному пульсом, соответствует вертикальная составляющая.

Во втором методе в процессе обработки видеоряда происходит извлечение цветового сигнала из заданных областей на лице посредством детектирования лица в каждом кадре и выделения на нём соответствующих областей. Далее, если используется Фурье–анализ, то пульс вычисляется на основе спектра Фурье цветового сигнала. Если используется медианный анализ или метод подбора фазы и частоты, то определяются точки на сигнале, которые соответствуют точкам пика пульса; по найденным точкам вычисляется пульс.

К недостаткам второго подхода относятся существенные ограничения на фон, позу человека и освещённость лица.

Деркун А. В.<sup>1</sup>, Хужаниезов М. О.<sup>2</sup>, Груздев Р. Ю.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

<sup>2</sup>Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону

В последние десятилетия многокомпонентные материалы активно используются в различных устройствах радиоэлектроники, медицине, вычислительной техники и др. Их дизайн может быть осуществлен на основе математического моделирования механических и электрических свойств. Анализ математических моделей пьезоактивных композиционных материалов и устройств с их использованием, осуществляется на основе численных методов, в частности, метода конечных элементов, методов молекулярной динамики и др. Реализация предложенных моделей и методов осуществляется программным обеспечением ACELAN, ANSYS и др.

В качестве математических моделей многокомпонентных материалов в данной работе рассматриваются стержневые магнитоэлектрические композиты (МЭ) типа пьезоэлектрик-феррит со связностью 1–3, 3–1 (стержни пьезоэлектрика в матрице магнитострикционной фазы и наоборот) и 1–1 (расположенные в шахматном порядке стержни пьезоэлектрического и магнитострикционного компонентов), которые были поляризованы. Такие гетерогенные мультиферроичные структуры, как и слоистые структуры, относятся к анизотропным двухфазным системам «пьезоэлектрик – магнитострикционный феррит» и имеют более высокие пьезоэлектрические и магнитоэлектрические параметры. Таким образом, упомянутые структуры кардинально отличаются от смесевых МЭ, для которых характер распределения фаз одинаков во всех трёх направлениях.

Существует ряд стержневых МЭ структур, обладающих большей эффективностью по сравнению с пьезокерамикой. Кроме того, результаты, упомянутые в литературных источниках, говорят о том, что МЭ композиты структуры «пьезоэлектрик-магнитострикционный феррит» практически не описаны, но перспективны для использования в удвоителях частоты, приборах контактного «определения силы тока в электрических кабелях», датчиках переменных и постоянных полей. Ввиду этого, очевиден выбор вышеуказанных материалов для дальнейшей работы.

Цель данной работы — это математическое и компьютерное моделирование стержневых магнитоэлектрических композитов и их анализ. Реализация цели предполагает решение, главной задачи, которая заключается в построении математических моделей стержневых магнитоэлектрических материалов различных составов (в процентном соотношении концентраций), расчёте размерных эффектов и параметров композитов, исследовании корреляции свойств между композитами, а также исследование механического поведения этих конструкций для идентификации эффективных констант. В численном примере в качестве компонент композиционного материала были использованы ЦТС–36 — пьезоэлектрик и  $NiCo_{0.02}Cu_{0.02}Mn_{0.1}Fe_{1.8}O_{4-6}$

Авторы выражают благодарность научному руководителю профессору А. Н. Соловьеву за помощь в работе.

## Математическое моделирование движения крови в системе сосудов с упругими стенками

Доль А. В.

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*

Сердечно-сосудистые заболевания на сегодняшний день являются одной из основных причин инвалидности и смерти жителей большинства современных развитых стран, причем на долю смертности от заболеваний сердечно-сосудистой системы в общем приходится до 60% от общего числа умерших.

Нередко для восстановления кровообращения в пораженных сосудах помимо медикаментозного лечения проводятся реконструктивные операции, и часто невозможно объективно оценить, какой тип оперативного вмешательства будет оптимальным для конкретного пациента, а также насколько близок будет кровоток в сосуде к нормальному после операции. Таким образом, необходимо построить математическую модель гемодинамики, которая бы достаточно полно описывала движение крови в кровеносных сосудах, учитывала взаимодействие жидкости со стенкой и являлась легко адаптируемой под конкретного пациента.

Рассмотрим осесимметричное движение крови, которая принимается вязкой несжимаемой жидкостью, в круглом сосуде постоянного радиуса  $R$ . Движение происходит в цилиндрической системе координат, причем ось  $X$  совпадает с осью симметрии потока. Материал стенки считаем идеально упругим, изотропным.

Основная система уравнений динамики кровотока в гибких цилиндрических сосудах в таком случае будет состоять из уравнений Навье–Стокса для осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости, уравнения неразрывности, уравнений движения тонкой цилиндрической оболочки, а также соотношений идеальной упругости стенок сосуда для обобщенного плоского напряженного состояния. На стенке будут задаваться контактные условия прилипания.

Такой подход к моделированию гемодинамики широко известен, однако основная система уравнений в этом случае не позволяет учесть конвективную составляющую ускорения частиц жидкости, а это, в свою очередь, для сосудистого русла с несколькими узлами бифуркации может оказать существенное влияние на результаты расчетов.

Основная система уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости в кровеносных сосудах с гибкими стенками в трехмерной постановке может быть записана в виде уравнений для направленных потоков.

Для направленных потоков жидкости в тонких трубках с упругими стенками на основе известного способа линеаризации возможен учет конвективного ускорения частиц жидкости в рамках линейной теории.

Условия «прилипания» частиц жидкости к стенкам сосуда заменим условием стесненного их скольжения по поверхности контакта.

Предложенный ряд уточнений позволяет более точно и адекватно моделировать движение крови в системе кровеносных сосудов человека.

## Численное моделирование функционирования стоматологических имплантатов

Доль А. В.<sup>1</sup>, Смирнов Д. А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*

<sup>2</sup>*ООО «Ваш доктор», Саратов*

По статистике 9 из 10 людей в возрасте от 40 лет нуждаются в дентальной имплантации, то есть имеют как минимум один утраченный зуб. Поэтому такой тип хирургических операций в области стоматологии является на сегодняшний день одним из наиболее распространенных и востребованных. При этом на срок функционирования имплантатов влияет как общее состояние тканей полости рта пациента, так и качество подготовки и проведения хирургической операции.

В ряде работ, посвященных исследованию имплантатов, проводилось изучение коротких конструкций, длина которых не превышает 9 мм, и их сравнение с длинными моделями. Кроме того, интерес и большое количество дискуссий вызывают и формы поперечных сечений абатментов (элементов, соединяющих зубную коронку и сам имплантат).

Анализ различных типов нагрузок также проводился многими исследователями, при этом на имплантат действовали как осевыми вертикальными, так и горизонтальными силами, а также скручивающими моментами и нагрузкой под углами к оси зуба. Нагрузки в большинстве работ брались в интервале от 100 до 300 Н, а углы наклона приложенной силы относительно оси зуба принимались равными 30 и 45 градусам в случае нормального прикуса.

Несмотря на многообразие подходов, до сих пор не было проведено комплексного исследования, позволяющего разработать методику подбора оптимальной формы устанавливаемого имплантата.

Во многих работах при изучении поведения различных типов имплантатов в качестве кости брались идеализированные модели. Такой подход не позволяет учесть все реальные условия функционирования имплантата, поэтому в данной работе для численного моделирования были подготовлены трехмерные твердотельные модели участков челюстей конкретных пациентов. Моделирование проводилось на основе данных компьютерной томографии.

В данной работе был проведен ряд численных расчетов, направленных на изучение взаимодействия с костью длинных и коротких имплантатов с абатментами четырех типовых поперечных сечений. В качестве нагружения бралась как чисто жевательная нагрузка, так и жевательная нагрузка в комбинации со скручивающими моментами. Угол наклона вектора силы к оси зуба принимался равным 30 градусам.

Сравнительный анализ напряженно-деформированных состояний костей челюсти и самих имплантатов позволил выявить наиболее оптимальные конструкции с биомеханической точки зрения.

## Использование моделей с активным контуром для реконструкции трехмерных образов пояснично-крестцового отдела позвоночника по результатам томограмм

**Донник А. М., Коссович Л. Ю.**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*

Большинство операционных вмешательств допускает выбор нескольких вариантов лечения. В настоящее время подобный выбор делается, как правило, на основании личного опыта хирурга. Для повышения объективности выбора типа оперативного вмешательства и снижения постоперационных рисков можно использовать метод виртуальной операционной, т. е. предварительное математическое моделирование операции с использованием персонифицированной биомеханической модели.

Построение биомеханической модели требует создания геометрической модели органов пациента. Для этой цели используются результаты томографического исследования: компьютерной томографии (КТ) или магнитно-резонансной томографии (МРТ).

Существует большое количество методов реконструкции трехмерных моделей по томограммам. К ним относятся: модели с активным контуром, пороговые значения, растущие объемы и т. д.

В настоящей работе рассмотрено применение метода моделей с активным контуром для построения трехмерных образов элементов позвоночно-тазового комплекса. На начальном этапе выбирается некоторый первоначальный вид модели, которая рассматривается как деформируемое твердое тело. Оно помещается в поле действия трех сил различной природы. Сила упругости учитывает изменение формы и объема тела. Благодаря наличию этого силового фактора, модель в каждый момент времени будет описываться непрерывными и гладкими функциями. Давление, приложенное на внутренней поверхности, заставляет тело растягиваться, занимая все доступное пространство. Третий силовой фактор определяется влиянием томограммы, заставляя модель притягиваться к точкам, расположенным на границе органа. Отметим, что все упомянутые силовые факторы должны иметь одинаковый порядок, иначе качество полученной геометрической модели будет неудовлетворительным. Геометрическая модель получается в результате моделирования динамики деформируемого твердого тела с учетом указанных сил.

Преимуществом данного метода является гарантированная непрерывность и гладкость полученной геометрической модели. Стоит также отметить, что на предварительных этапах используются эффективные алгоритмы компьютерного зрения (в частности, алгоритм выделения границ, графические фильтры), которые позволяют получить высококачественное изображение контуров объекта.

## Дифракция плоских упругих волн на интерфейсных отслоениях

**Дорошенко О. В., Голуб М. В.**

*Институт математики, механики и информатики,  
Кубанский государственный университет, Краснодар*

Одним из перспективных и активно развивающихся подходов к мониторингу конструкций из композитных материалов является применение упругих волн (сканирование объектов упругими волнами). При этом большие сложности возникают при идентификации интерфейсных дефектов, связанные с наличием отраженных волновых полей как от самих дефектов, так и от границы раздела сред. При моделировании таких задач, помимо прямых численных подходов, таких как методы конечных и граничных элементов, метод конечных разностей и пр., применяются полуаналитические подходы, позволяющие более эффективно анализировать волновые поля. В настоящей работе рассматривается задача дифракции волновых полей на интерфейсных отслоениях различных форм, расположенных в плоскости интерфейса. Поскольку отслоения отличаются от раскрытых трещин чередованием зон непрерывности и разным качеством адгезии в области дефекта, то вместо граничных условий равенства нулю напряжений используется более широкий класс граничных условий пружинного типа. Эти условия выражают заданные напряжения через произведение матрицы жесткости на скачок перемещений на отслоении. Матрица жесткости характеризует качество соединения материалов. Рассматриваются различные варианты изменения жесткости в виде функциональных соотношений, задающих неравномерность отслоения поверхности интерфейса. Сопоставляются различные функциональные соотношения со случаем, когда значения жесткости постоянны, что определяет одинаковую адгезию на всем дефекте или равномерность отслоения и включает случай раскрытой трещины (жесткость равна нулю). Применяется вариант метода граничных интегральных уравнений на основе схемы Галёркина и интегрального подхода; волновые поля строятся в виде свертки Фурье-символа матрицы Грина и скачка смещений на берегах отслоения. Если для отслоений произвольной формы используется вариационно-разностный подход, то в двух частных случаях прямоугольных и круговых дефектов выбор базисных функций производится с учётом геометрии как для уменьшения вычислительных затрат, так и для повышения точности расчётов. В случае круговых отслоений скачок перемещений раскладывается в ряд по присоединенным полиномам Лежандра, а в случае прямоугольных — по полиномам Чебышева второго рода. Для различных видов отслоений находятся коэффициенты интенсивности напряжений, строятся диаграммы рассеяния в зависимости от характеристик материалов и вида отслоения. Кроме того, вычисляются резонансные частоты для отслоений, анализируются закономерности изменения спектральных свойств в зависимости от степени и формы отслоения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-51-53043).

## Моделирование динамики формирования поколений видов с большой плодовитостью с учетом темпов развития особей

Дубровская В. А.<sup>1</sup>, Переварюха А. Ю.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский госуниверситет аэрокосмического приборостроения

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН

Обсуждается разработка альтернативной модели динамики формирования запасов смолтифицированной молодью от естественного нереста волжского осетра по ретроспективным данным на основе графовой концептуальной схемы направленной цепи связей. Сокращение вылова произошло достаточно стремительно и не согласовывалось с ожиданиями от восполнения запасов путем искусственного воспроизводства. Модель учитывает дополнительное влияние нарастающего отклонения в темпах размерного развития на выживаемость мигрирующей заводской молоди. Система дифференциальных уравнений исследована в итерационной гибридной форме с альтернативными положениями равновесиями траектории, одно из которых служит точкой отсчета для деградации репродуктивной активности. Предложенная дискретно-непрерывная модель воспроизводства при закритическом уровне изъятия показывает тонкий переход грани от затухающих флуктуаций к безвозвратному в перспективе истощению запасов.

Ряд исследователей полагали, что описание роста на протяжении всего жизненного цикла рыб одной зависимостью не всегда возможно. Модифицируем модель стадийного пополнения А. Ю. Переварюхи. Можно принять, что для мальковой стадии активного питания показатель  $\sigma$  отличается от единичного уровня до  $5/4$  при  $\zeta = 2\frac{1}{4}$ . Развитие в раннем онтогенезе осетровых носит стадийный характер и стадии сменяются быстро. Задержка в прохождении формирования организма влечет ухудшение его конкурентоспособности, что могло сказываться при массовом одномоментном выпуске. Положим, действие на жизнестойкость поколения оказывает отклонение, которое получается в результате включения масштабированного давления плотности в расширенное уравнение:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\eta}{\xi v(N(t))} \sqrt[3]{w(t)^\zeta} - kw(t)^\sigma, \quad w(0) = w_0 \quad (1)$$

и расчетом из традиционного уравнения фон Бергаланфи, не включающего внешние факторы. Опишем убыль численности поколения  $N(t)$  от исходной  $N(0)$  до итогового промыслового пополнения  $R = N(T)$  на интервале модельного времени  $t \in [0, T]$  уравнением:

$$\frac{dN}{dt} = -(\alpha \Delta N(t) + \Psi(S)\beta) N(t) \quad (2)$$

где  $\alpha$  — коэффициент компенсационной смертности;  $\beta$  — коэффициент не связанный с плотностью смертности; начальные условия:  $N(0) = \lambda S$ ,  $w(0) = W(0) = w_0$ ,  $\lambda$  — усредненная плодовитость запаса  $S$ ;  $t \in [0, T]$ ,  $R = N(T)$  интервал уязвимости действия квадратичного типа  $\alpha N^2(t)$  типа убыли. Модель предназначена для событийно-управляемого сценарного исследования.

Исследования в рамках проекта РФФИ №16-37-00028 для молодых ученых.

## К определению модуля Био пороупругого цилиндра

Дударев В. В., Мнухин Р. М.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Как известно, скелет выполняет важную роль в организации опорно-двигательной и защитной функции организма. Костная ткань является пористой, что позволяет с одной стороны обеспечивать малую массу объекта, а с другой достаточно большую прочность. Для описания основных свойств пороупругого тела обычно используется модель Био. При этом важной задачей является определение точных значений параметров этой модели. Особенности решения такой проблемы являются существенные трудности реализации необходимых экспериментов на костной ткани. Поскольку свойства живой и неживой материи существенно отличаются друг от друга, то в качестве единственного возможного подхода определения параметров модели является метод неразрушающей диагностики.

В качестве модельной задачи в работе рассматривается задача о радиальных колебаниях пороупругого цилиндра с позиции метода акустического зондирования. Колебания вызываются периодической нагрузкой приложенной на внешней поверхности. Для простоты исследования задачи принято, что единственными переменными параметрами модели являются модуль Био  $A$  и коэффициент проницаемости среды  $K$ , зависящие только от радиальной координаты. Уравнения колебаний и граничные условия получены на основе общей постановки задачи о движении пороупругого тела в рамках модели Био с учетом выполнения условий плоского напряженного состояния. Особенностью полученных двух связанных дифференциальных уравнений является наличие параметров, отличающихся друг от друга по значениям на несколько порядков. Для преодоления сложности выполнения вычислительных операций одновременно с большими и малыми значениями проведена процедура обезразмеривания. Решение рассматриваемой безразмерной задачи реализовано численно с помощью метода пристрелки. Проведен анализ изменения амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) цилиндра в зависимости от значений модуля Био.

Сформулирована обратная задача об определении функции распределения параметра  $A$  по данным АЧХ, измеренных в конечном наборе точек. Решение этой задачи получено численно на основе итерационного метода. Для вычисления функции поправки на каждой итерации с помощью метода линеаризации получено интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода, решение которого осуществлено методом регуляризации Тихонова. Проведена серия вычислительных экспериментов, даны рекомендации по выполнению наиболее точной процедуры реконструкции.

Авторы благодарят профессора А. О. Ватульяна за предложенную задачу и методы ее решения.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России № 9.665.2014/К.

## О радиальных колебаниях пьезокерамического диска

**Дударев В. В., Мнухин Р. М., Кондратьев В. С.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В настоящее время важную роль в области биомеханики играет диагностическое оборудование, позволяющее идентифицировать структуру объекта и определять качественные характеристики его составных частей. В основе работы большинства современных приборов диагностики лежит явление пьезоэффекта, которое обычно реализуется с помощью пьезоэлементов канонической формы. Как известно, процесс изготовления таких элементов является достаточно сложным и выполняется путем проведения нескольких технологических операций. Несовершенство выполнения этих операций приводит к различиям проектируемых свойств изделия от реально полученных, а также появлению предварительных (остаточных) напряжений (ПН). Реализация наиболее точной неразрушающей оценки уровня ПН и электроупругих характеристик готовых элементов позволяет делать заключение о возможности их дальнейшего использования. Одним из наиболее распространенных методов неразрушающей диагностики является метод акустического зондирования.

В качестве конкретного примера в работе рассматривается задача об установившихся радиальных колебаниях тонкого пьезокерамического диска. Верхняя и нижняя поверхности диска электродированы. Колебания вызываются путем подачи на электроды переменной разности электрического потенциала  $\varphi = V_0 e^{i\omega t}$ . Электроупругие характеристики диска считаются постоянными. Среди компонент тензора ПН отличными от нуля являются только радиальная и тангенциальная компоненты, зависящие только от радиальной координаты  $\sigma_{rr}^0(r) \neq 0$ ,  $\sigma_{\theta\theta}^0(r) \neq 0$ . На основе модели предварительного напряженного состояния Треффтца–Гузя сформулированы уравнение колебаний и граничные условия. В рамках условий плоского напряженного состояния для простоты рассмотрения задачи проведено осреднение по толщине диска. Решение прямой задачи об определении функции смещения в общем случае неоднородности поля ПН осуществлено численно с помощью метода пристрелки. Анализ точности полученного решения проведен для частного случая постоянных параметров задачи путем сравнения с соответствующим аналитическим решением. Для различных значений входных параметров задачи построены функции смещения и дана оценка влияния уровня и структуры ПН на амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) диска. Выявлен характер изменения значений первых резонансных частот колебаний при наличии и отсутствии ПН. Даны рекомендации о возможности реализации решения обратной коэффициентной задачи по восстановлению уровня и структуры ПН по различным входным данным (изменение АЧХ, значения резонансных частот или функции смещения).

Авторы благодарят профессора А. О. Ватульяна за предложенную задачу.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00354) и гранта Президента Российской Федерации (проект МК-5440.2016.1)

## К вопросу оценки рекуперативных свойств мышечно-сухожильных структур нижних конечностей человека

Дышко Б. А.

*ООО «Спорт Технолоджи», Москва*

Для оценки рекуперативных свойств мышечно-сухожильных структур нижних конечностей человека в различных движениях (прыжки, бег) может быть использована «эквивалентная биомеханическая добротность», полученная из анализа кривой вертикальной составляющей силы реакции опоры, с использованием метода затухающих колебаний и метода электромеханических аналогий. При этом значения полученной эквивалентной биомеханической добротности не зависят от морфофункциональных и/или антропометрических особенностей нижних конечностей испытуемого. Однако испытуемые одного веса могут иметь различия в линейных размерах, что может влиять на рекуперативные свойства мышечно-сухожильных структур нижних конечностей в целом. Для получения более значимых результатов при межиндивидуальном сопоставлении рекуперативных свойств мышечно-сухожильных структур нижних конечностей у спортсменов с различной антропометрией, необходимо использовать характеристику, учитывающую эти различия.

Известно, что наиболее объективной характеристикой демпфирующих свойств вязкоупругих материалов является «коэффициент поглощения материала», численно равный отношению энергии, рассеиваемый за один цикл «загрузка — разгрузка» в единице объема материала, к максимальной энергии, запасенной в этой же единице объема. Аналогичный подход был использован нами. Определение объема тела человека *in vivo* связано со значительными трудностями, однако в первом приближении можно использовать распределение массы единицу длины тела. Поэтому для более точной и значимой оценки рекуперативных свойств мышечно-сухожильных структур нижних конечностей предложено использовать «приведенную эквивалентную биомеханическую добротность», численно равную эквивалентной биомеханической добротности, умноженную на массу человека и деленную на рост.

Приведенная эквивалентная биомеханическая добротность позволяет учитывать морфофункциональные и/или антропометрические особенности испытуемых, что важно при меж индивидуальном сравнении способности к рекуперации энергии упругой деформации мышечно-сухожильных структур нижних конечностей.

## Разработка композиционного материала на основе объемной тканой структуры и исследование его физико-механических свойств

**Евграфова К. И., Пирогов Д. А., Маслов Л. Б.**

*Ивановский государственный энергетический университет им. В. И. Ленина*

Композиционные материалы (КМ) перестали быть материалами будущего — они настоящее. Они находят широкое применение в инженерной практике, так как позволяют создавать конструкции с уникальными массовыми, прочностными, диссипативными и др. характеристиками, которых практически невозможно достичь использованием традиционных конструкционных материалов. Нет ни одной области техники, и не только техники, (наравне с машиностроением композиты применяются также в строительстве, медицине, спортивной индустрии, и т. д.), где не нашлось бы применения для КМ. В настоящее время перспективным направлением при разработке композитных материалов является использование в качестве основы объемного тканого текстильного материала из различного вида технических нитей (металлических, кремнеземных, кварцевых, стеклянных, синтетических, углеродных, магнитных и др.). Трехмерный материал, полученный ткачеством обладает следующими преимуществами: стабильность структуры, естественная локализация места разрушения, необходимая плотность, использование различных нитей и др. Целью данной работы является исследование напряженно-деформированного состояния объемной тканой структуры, что является основой для исследования и проектирования композитов на основе таких материалов. В основе постановки задачи определения характеристик напряженно-деформированного состояния объемной тканой структуры лежит понимание того, что ее конечные упругие и прочностные свойства зависят от параметров процесса ткачества, существенно влияющих на структуру. Для достижения поставленной цели в работе спроектировано объемное тканое переплетение и определены прочностные свойства нитей, разработаны математические модели определения характеристик напряженно-деформированного состояния нитей утка и нитей основы. В работе решаются несколько частных задач — с одной стороны исследуется напряженное состояние деформированного элемента металлических монокитей утка и основы, связывающего между собой силовые характеристики в его поперечных сечениях, геометрические параметры оси утка и параметры вырабатываемой трехмерной тканой структуры, механические характеристики материала утка (основы), его натяжение в начальном, недеформированном состоянии — с другой. В результате определены модули упругости объемного тканого элемента на растяжение–сжатие, изгиб и кручение. Раскрытая методика решения задачи напряженно-деформированного состояния уточной нити учитывает, что нить изгибается за пределами упругости и размеры ее поперечного сечения не малы по сравнению с радиусом кривизны ее центральной оси, в связи с чем возникает необходимость принимать во внимание изменение длины волокон нити в зависимости от расстояния их до центра кривизны. Данная методика используется в теории изгиба балок за пределами упругости и в приближенной теории изгиба стержней большой кривизны.

## Изучение фитотоксичности водного раствора табачного дыма

Евтух Г. Е.<sup>1</sup>, Ляличева О. Ю.<sup>1</sup>, Чекин Г. В.<sup>2</sup><sup>1</sup>Школа №11, Брянск<sup>2</sup>Брянский государственный аграрный университет, с. Кокрино

Целью исследования являлось изучение воздействия веществ, содержащихся в табачном дыме сигарет на рост и развитие тестовых растений. В качестве объекта исследований были отобраны наиболее популярные марки: Winston, Winston XS, L&M, Bond синий, Bond красный, Marlboro.

Раствор табачного дыма получали, сжигая сигареты и поглощая дым дистиллированной водой в поглотительном приборе. Вытяжку объемом 10 мл переносили в чашку Петри, в которой помещали тестовые семена (рожь, пшеница, кресс-салат), и помещали в термостат при  $t = 28^\circ \text{C}$  на 3 суток. По окончании учитывали процент всхожести, длину проростка и корешка, а также их массу. Полученные результаты обрабатывали статистически (однофакторный дисперсионный анализ по Н. А. Плохинскому) с использованием программы MS Excel.

Было установлено (см. таблицу), что для всех тестовых растений существенно уменьшается всхожесть (на 10% и более), а в варианте с кресс-салатом — пророс только контроль (дистиллированная вода). Для пшеницы показано достоверное уменьшение изучаемых параметров при проращивании в растворе табачного дыма. Для ржи полученные результаты не столь однозначны, по-видимому, вследствие меньшей чувствительности данной культуры к токсикантам. Однако, отмечено достоверное уменьшение длины корневой системы и проростков.

Вариант	Проростки		Корни		Всхожесть, %
	Длина, мм	Масса, г	Длина, мм	Масса, г	
<b>РОЖЬ</b>					
Контроль	68	0,073	308	0,034	70
Winston	42	0,057	102	0,022	50
Winston XS	56	0,073	191	0,034	40
L&M	37	0,052	88	0,019	40
Bond синий	42	0,045	108	0,015	30
Bond красный	26	0,035	45	0,011	40
Marlboro	37	0,050	99	0,017	40
$F_{\text{факт}} > F_{095}$	+	—	+	—	
<b>ПШЕНИЦА</b>					
Контроль	60	0,067	226	0,033	60
Winston	41	0,049	99	0,019	30
Winston XS	53	0,067	212	0,031	50
L&M	—	—	—	—	0
Bond синий	42	0,052	121	0,021	20
Bond красный	5	0,007	21	0,005	10
Marlboro	—	—	—	—	0
$F_{\text{факт}} > F_{095}$	+	+	+	+	

Таким образом, показана токсичность табачного дыма для живых организмов на примере роста и развития тестовых растений.

## Моделирование наноструктурированных пьезокерамических композитных материалов для биомедицинских применений

Еремеев В. А.<sup>1</sup>, Наседкин А. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Жешувский политехнический университет им. И. Лукашевича*

<sup>2</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Пьезокерамические преобразователи широко используются в качестве активных элементов в современной терапевтической и диагностической медицинской аппаратуре. Такие пьезопреобразователи обычно работают на толщинных модах колебаний и генерируют акустические волны, используя явление пьезоэффекта. Для эффективного прохождения волн через границу контакта пьезопреобразователя с мягкой биологической тканью желательнее, чтобы импедансы пьезокерамического материала и акустической среды были как можно более близкими. Однако акустический импеданс толщиной моды колебаний обычной пьезокерамики более чем в 20 раз превосходит акустический импеданс мягких тканей человека. Для понижения акустического импеданса преобразователя в последнее время используются пористые и композитные пьезокерамические материалы с микро- и наноразмерной структурой неоднородностей.

В докладе для моделирования эффективных свойств наноструктурированных пьезокерамических композитных материалов предлагается подход, основанный на популярной в настоящее время теории поверхностных напряжений. Данная теория распространена на пьезоэлектрические двухфазные композиты, в которых первой фазой является пьезокерамический материал, а второй — другой пьезокерамический материал, полимер или пора. В рамках предлагаемого подхода рассматривается представительный объем композита, в котором на границе раздела фаз задаются интерфейсные граничные условия в рамках обобщений теории Гуртина–Мурдоха для пьезоэлектрических сред.

Для представительного объема пьезоэлектрического двухфазного композита рассматриваются статические задачи сравнения со специальными граничными условиями, обеспечивающими для однородных материалов постоянные значения механических напряжений, деформаций, электрического поля и электрической индукции. Для численного решения задач сравнения используется метод конечных элементов и специальный программный инструментарий, разработанный на макроязыке APDL конечно-элементного пакета ANSYS.

Предлагаемый подход иллюстрируется на примерах расчета эффективных модулей пористых наноструктурированных пьезокерамических материалов, в которых границы контакта пьезокерамики и пор покрывались поверхностными элементами или тонкими поверхностными слоями. Проведенные расчеты тестовых задач продемонстрировали влияние поверхностных эффектов на значения эффективных модулей пористых пьезоэлектрических нанокомпозитов.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ 16-01-00785, причем исследования второго автора поддерживались также проектом 213.01/ОПНИ 009 госзадания Минобрнауки.

## Устойчивость трехслойной плиты с предварительно напряженным слоем из материала Муни-Ривлина

**Еремеев В. В., Зубов Л. М.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В большинстве исследований по трехмерной теории упругой устойчивости рассматриваются либо однородные тела, либо учитывается неоднородность, обусловленная различием свойств материала в разных точках среды. Вместе с тем неоднородность деформируемых тел может обуславливаться также неоднородностью распределения начальных (остаточных) напряжений или наличием в теле предварительно напряженных включений. Подобные включения могут образовываться в результате различных искусственных или естественных процессов в отдельных частях тела, примерами которых могут служить фазовые превращения, процессы роста, химические реакции, пластические деформации и др. Особенностью нелинейно упругих тел с предварительно напряженными включениями является то, что они не имеют единой для всего тела естественной (ненапряженной) отсчетной конфигурации. В ряде случаев единую отсчетную конфигурацию можно выбрать такой, чтобы она была предварительно напряженной для одних частей тела и ненапряженной для остальных.

В исследовании проведен анализ устойчивости трехслойной прямоугольной плиты из несжимаемого материала Муни-Ривлина. Рассматривается трехслойная плита симметричного по толщине строения, во внутреннем слое которой действуют начальные напряжения. Изложены основы метода наложения малых деформаций на конечные, который лежит в основе анализа устойчивости равновесия. При консервативных внешних нагрузках статическую устойчивость произвольного заданного состояния нелинейно упругого тела можно исследовать на основе метода линеаризации, который также называется статическим методом Эйлера. Сформулирована линеаризованная задача для трехслойной плиты с предварительно напряженным внутренним слоем, которая использует линеаризованные уравнения состояния материала Муни, линеаризованные уравнения равновесия и граничные условия, дополненные соответствующими линеаризованным условием несжимаемости. Проведен анализ зависимости критических нагрузок от параметров начальной деформации среднего слоя. Показано, что предварительно растянутый средний слой увеличивает абсолютное значение критической нагрузки, а предварительно сжатый наоборот — уменьшает. В целом, результаты исследования показывают, что начальные напряжения (деформации) меняют не только значения критических нагрузок, но и характер потери устойчивости.

Работа выполнена в рамках проекта Министерства образования и науки РФ № 9.665.2014/К на выполнение научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания

## Исследование режимов протекания невязкой несжимаемой жидкости сквозь прямоугольный канал

**Жданов И. А.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Работа посвящена исследованию частных решений двумерной задачи протекания идеальной несжимаемой жидкости сквозь прямоугольный канал с условиями В. И. Юдовича на его границах. Изучаются стационарные режимы протекания, состоящие из проточной и застойных зон, их устойчивость, динамика и время протекания жидких частиц. Рассмотрено влияние различных факторов (скорость течения на границе, размеры канала и др.) на характеристики течений.

Рассматривается стационарное уравнение Эйлера, сформулированное в терминах функции тока и завихренности

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\Delta \psi = -\omega. \quad (2)$$

Здесь,  $\psi = \psi(x, y)$  — функция тока,  $\omega = \omega(x, y)$  — функция завихренности. На границах задаются условия непроницаемости и распределения скоростей жидкости по средствам функции тока:  $\psi(x, 0) = \psi(x, b) = const$ ;  $\psi(0, y) = g_1(y)$ ;  $\psi(a, y) = g_2(y)$  и условия сохранения расхода жидкости:  $\int_0^a g_1(y) dy = \int_0^a g_2(y) dy$

Частные решения строятся в предположении наличия функциональной зависимости  $\omega = F(\psi)$ . В рамках данной работы исследуются случаи  $\omega = K\psi$  и  $\omega = K\psi + K_1\psi^2 + K_2\psi^3$  при помощи метода Галеркина в виде

$$\psi(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} C_{i,j} \Phi_{i,j}(x, y),$$

где  $C_{i,j}$  — коэффициенты, а  $\Phi_{i,j}(x, y)$  — базисные функции.

Кроме этого, с помощью метода конечных разностей находятся решения для варианта задачи без явно заданной функциональной зависимости, но с дополнительными условиями:  $\omega(x, 0) = \omega(x, b) = const$ ;  $\omega(0, y) = f_1(y)$ ;  $\omega(a, y) = f_2(y)$ . Для решения полученных алгебраических систем используется метод Ньютона и градиентного спуска.

Для обоих вариантов решения предложены методы определения устойчивости, получены траектории движения и время протекания частиц жидкости.

Отдельно рассмотрен случай течения жидкости с периодически изменяемой зависимостью  $\omega = K(t)\psi$ , при  $K(t) = K(t+T)$ . Даны оценки времени протекания и характера изменения траекторий движения частиц.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, код проекта 14-01-00470.

## Применение оптимизационных методов при определении турбулентных характеристик течения

**Жиляев И. В.**

*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

На данный момент не существует универсальной модели турбулентности, пригодной для расчета широкого класса течений. Выбор модели турбулентности зависит от характера потока, требуемой точности, доступных вычислительных ресурсов и временных ограничений.

Большинство моделей турбулентности включают в себя эмпирически подобранные параметры, зависящие от скорости течения, свойств русла, состава почвы, и пр. Однако на практике имеющиеся натурные данные имеют малую точность. Нахождение значений турбулентных параметров при отсутствии экспериментальных данных повышенной точности представляет собой нетривиальную задачу.

Оптимизационные задачи могут быть использованы для определения неизвестных параметров модели, диапазон значений которых является широким. В качестве примера рассмотрена оптимизация редуцированной модели безнапорного руслового потока. Решение системы редуцированных уравнений со значениями турбулентных параметров, выбранными по умолчанию, демонстрирует расхождение с результатами, полученными при решении  $k$ - $\epsilon$  модели турбулентности для аналогичных условий течения. В частности, профили скорости, полученные при решении редуцированной модели, отличаются от полученных с помощью модели  $k$ - $\epsilon$  (расхождение составляет более 40%).

В качестве переменных дизайна для последующей оптимизации используются параметры функции турбулентной вязкости, которая считается известной и оказывает непосредственное влияние на вид профилей компонент скорости. Функционал оптимизации определяется как взвешенная сумма максимального по потоку значения производной расхода жидкости по сечению и максимальной разницы значений продольных компонент скорости для редуцированной и полной моделей в соответствующих координатах.

После оптимизационного процесса с тремя параметрами дизайна, входящими в функцию турбулентной вязкости, совпадение результатов решения редуцированной и  $k$ - $\epsilon$  моделей составило 96 процентов.

Введение параметрической функции турбулентной вязкости с последующей оптимизацией переменных дизайна дает возможность калибровки редуцированной модели, позволяя определить турбулентные константы и добиться большей точности при симуляции русловых процессов.

## Конвективная монотная неустойчивость границ зон при переносе массы электрическим полем

Жуков М. Ю., Цывенкова О. А.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассматривается модель, описывающая концентрационную гравитационную конвекцию при проведении изотахофореза многокомпонентной химически активной смеси. В процессе изотахофореза происходит разделение смеси на отдельные компоненты, которые движутся с постоянной скоростью под действием электрического поля. Действие силы тяжести может приводить к конвективной неустойчивости границы между зонами и перемешиванию смеси. Целью работы является определение параметров, при которых возможно возникновение конвективной неустойчивости границы между зонами.

Уравнения в безразмерных переменных, описывающая поведение многокомпонентной вязкой несжимаемой жидкости в электрическом поле, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{v} - \sum_m \beta^m u^m \mathbf{k}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \frac{du^k}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{i}^k &= 0, \quad \mathbf{i}^k = -\varepsilon\mu^k \nabla u^k + \mu^k u^k \mathbf{E}, \\ \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad \sigma = \sum_k u^k. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — скорость смеси в целом,  $p$  — давление,  $u^k$  — «эффективная» концентрация компоненты смеси,  $\mathbf{i}^k$  — плотность потока концентрации,  $\mu$  — коэффициент кинематической вязкости смеси,  $\beta^k$  — коэффициент концентрационного сжатия,  $\mu^k > 0$  — подвижность компоненты смеси в электрическом поле,  $\varepsilon\mu^k$  — коэффициент диффузии,  $\mathbf{E}$  и  $\varphi$  — напряженность и потенциал электрического поля,  $\mathbf{j}$  — плотность электрического тока,  $\sigma$  — проводимость смеси,  $\mathbf{k}$  — орт оси  $z$ .

Для задачи, рассматриваемой на бесконечной оси, изучается линейная гидродинамическая устойчивость границы между двумя зонами. Задача линеаризуется на решении, отвечающем механическому равновесию, которое строится численно. Полученная спектральная задача исследуется методом нормальных мод с целью определения критических значений параметров возникновения конвективной неустойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части технического задания 213.01-11/2014-1 Министерства образования и науки РФ, ЮФУ.

## Сферически симметричные деформации микрополярной упругой среды с распределенными дефектами

Зеленина А. А.<sup>1</sup>, Зубов Л. М.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ростовский государственный университет путей сообщения

<sup>2</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Система уравнений равновесия линейно упругого микрополярного изотропного тела с распределенными дислокациями и дисклинациями состоит из уравнений баланса сил и моментов (1), уравнений несовместности (2) и определяющих соотношений (3)

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \mathbf{h} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varkappa}^T + \mathbf{E} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varkappa} = \boldsymbol{\alpha}, \quad \nabla \times \boldsymbol{\varkappa} = \boldsymbol{\beta}, \quad (2)$$

$$\mathbf{T} = \lambda \mathbf{E} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + (\mu + \tau) \boldsymbol{\varepsilon} + (\mu - \tau) \boldsymbol{\varepsilon}^T, \quad \mathbf{M} = \nu \mathbf{E} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varkappa} + (\gamma + \eta) \boldsymbol{\varkappa} + (\gamma - \eta) \boldsymbol{\varkappa}^T. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{T}$  — несимметричный тензор напряжений,  $\mathbf{M}$  — тензор моментных напряжений,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  — несимметричный тензор деформаций,  $\boldsymbol{\varkappa}$  — тензор изгибных деформаций,  $\boldsymbol{\lambda}$  — тензор плотности дислокаций,  $\boldsymbol{\beta}$  — тензор плотности дисклинаций,  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{h}$  — объемные плотности массовых сил и моментов. Для тела, имеющего форму полого шара, введем сферические координаты  $r$ ,  $\varphi$  (долгота),  $\theta$  (широта) и единичные векторы  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$ ,  $\mathbf{e}_\theta$ , касательные к координатным линиям. Сферически симметричное распределение дислокаций и дисклинаций задается соотношениями

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1(r) \mathbf{g} + \alpha_2(r) \mathbf{d} + \alpha_3(r) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{g} = \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta, \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\beta} = \beta_1(r) \mathbf{g} + \beta_2(r) \mathbf{d} + \beta_3(r) \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{d} = \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\theta - \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\varphi.$$

В предположении, что  $\mathbf{f} = f(r) \mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{h} = h(r) \mathbf{e}_r$ , тензорные поля  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\varkappa}$ , удовлетворяющие уравнениям (1)–(3), разыскиваются в виде, аналогичном (4). В результате задача сводится к двум дифференциальным уравнениям

$$r^2 \varepsilon_1'' + 4r \varepsilon_1' = F(r), \quad r^2 \varkappa_1'' + 4r \varkappa_1' - \frac{4\tau}{\nu + 2\gamma} r^2 \varkappa_1 = G(r), \quad (5)$$

где правые части  $F(r)$  и  $G(r)$  выражаются через заданные функции, описывающие распределение дислокаций, дисклинаций и массовых нагрузок. На внутренней и внешней сферических границах шара заданы равномерно распределенные давления и сверлящие моменты. Для уравнений (5) с учетом указанных краевых условий найдены точные решения при любом сферически симметричном распределении дислокаций и дисклинаций. Проанализировано влияние распределенных дефектов на напряженное состояние шара. Описанная задача решена также в рамках классической теории упругости, не учитывающей моментных напряжений. Установлено, что в этом случае компоненты тензоров плотностей дислокаций и дисклинаций  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$  и  $\beta_2$  не влияют на напряженное состояние шара, т. е. действие этих дефектов не может быть выявлено в рамках обычной теории упругости.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-01492).

## Применение интегральных уравнений к решению нестационарных задач упругой диффузии

Земсков А. В.<sup>1</sup>, Вестяк А. В.<sup>1</sup>, Тарлаковский Д. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Московский авиационный институт*

*(национальный исследовательский университет)*

<sup>2</sup>*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

Предлагается алгоритм решения многомерных задач упругой диффузии, который основан на построении соотношений, связывающих между собой правые части граничных условий различных типов. Хорошо известно, что в отличие от одномерных несвязанных задач, возможность построения аналитических решений многомерных задач механики связанных полей существенно зависит от выбора граничных условий. Также, практически обязательным элементом решения любой нестационарной задачи является использование преобразования Лапласа по времени, обращение которого является сложной математической задачей. Анализ работ в этой области позволяет сделать вывод, что при определённом выборе граничных условий, аналитические решения указанных задач сравнительно легко находятся с помощью синус- и косинус- преобразования Фурье по пространственной переменной (для полупространства) или синус- и косинус- рядов Фурье (для слоя). Фактически, указанный алгоритм позволяет отделить координату времени от пространственных координат. При этом, трансформанты Лапласа являются рациональными функциями, что существенно упрощает задачу их обращения.

Тем не менее, можно задать граничные условия, имеющие вполне реальный физический смысл, так, что построение решения с помощью вышеописанной методики разделения переменных оказывается невозможным. В этом случае, для того чтобы построить решение начально-краевой задачи при произвольных граничных условиях предлагается использовать следующий алгоритм. Вначале выбирается вспомогательная задача такого же класса, решение которой известно. В качестве таковой задачи может выступать любая задача удовлетворяющая описанным в предыдущем абзаце условиям. Далее, строятся соотношения между правыми частями граничных условий исходной и вспомогательной задачи. В качестве таких соотношений выступает система интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода. Эта система решается численно с помощью квадратурных формул.

Предложенный алгоритм не ограничен геометрией рассматриваемой области. Здесь, в качестве расчетного примера рассматривается двумерная нестационарная задача упругой диффузии для ортотропного полупространства. Результаты вычислений представлены в аналитической и графической форме. В качестве системы, визуализирующей полученные результаты, использовался пакет символьной математики Maple 17.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-08-01161).

## Определение прочности плиты из пористого композитного материала связности 1-3 при действии внешнего и внутреннего давления

**Зиборов Е. Н.<sup>1</sup>, Ермаков Д. А.<sup>1</sup>, Напрасников В. В.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Белорусский национальный технический университет, Минск*

Работа посвящена моделированию напряженно деформированного состояния (НДС) трубной доски теплообменника, представляющей собой круглую плиту, центральная часть которой имеет регулярную структуру сквозных отверстий малого диаметра. Плита нагружена равномерным давлением на плоской поверхности и внутренним давлением в отверстиях. Для численного анализа использовался конечноэлементный пакет ANSYS. В качестве материала плиты рассматривалась сталь. Размеры плиты: диаметр — 2,96 м, диаметр центральной части — 2,49 м, толщина — 0,53 м. Диаметр отверстий составлял — 0,016 м, их количество — 7704. Рабочее давление на лицевой поверхности — 3 МПа, давления внутри цилиндрических отверстий 3,1 МПа. Прямое конечноэлементное моделирование такой конструкции, в силу малых размеров отверстий и их большого количества, приводит к большому количеству конечных элементов, что связано с большими вычислительными ресурсами. Поэтому в работе предложен метод моделирования, учитывающий, что центральная часть плиты может быть рассмотрена как пористый композиционный материал. Представительный объем трубной доски в рамках линейной теории упругости рассматривается в виде пористого материала связности 1-3, в силу регулярной структуры сети отверстий трубной доски и их ориентации строго вертикально.

Моделирование проводится по следующей схеме

1. Плита разбивается на две подобласти: центральная часть с отверстиями (круглый цилиндр) и остальная часть (полый цилиндр).

2. Моделирование центральной части с помощью трансверсально-изотропного материала и определение его эффективных свойств на основе метода предложенного ранее (эффективные коэффициенты упругих постоянных определяются из решения набора определенных статических краевых задач представительного объема).

3. Конечноэлементный расчет НДС составной плиты по поверхностной нагрузкой и определение зон с максимальными эквивалентными напряжениями в центральной части.

4. Детализированный конечноэлементный анализ составной конструкции с поверхностной нагрузкой с применением вставки из представительного объема с отверстиями под внутренним давлением в наиболее нагруженной области модели.

Прочность плиты оценивалась на тыловой части доски в центре, в зоне растягивающих напряжений от внешнего и внутреннего давлений. Расчеты показали, что конструкция выдерживает статические рабочие нагрузки.

Авторы выражают благодарность научному руководителю А. Н. Соловьеву за помощь в работе.

## Дисперсионный анализ в связанных системах

**Зимин Б. А.<sup>1</sup>, Судьенков Ю. В.<sup>2</sup>, Свентицкая В. Е.<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург*

<sup>2</sup>*Санкт-Петербургский государственный университет*

<sup>3</sup>*Балтийский государственный университет «ВОЕНМЕХ»  
им. Д. Ф. Устинова, Санкт-Петербург*

Работа посвящена изучению полей термонапряжений в металлах, вызванных действием короткого лазерного импульса. Рассматриваются кристаллические среды со свободными носителями заряда (электронами). В твёрдых телах «электронные облака — потоки» можно создавать с помощью внешних полей или градиентов температур (импульсное лазерное нагружение). Пусть в электронной плазме (свободные электроны) созданы одномерные возмущения электрического поля, скорости и плотности электронов, зависящие от времени  $t$  и пространственной координаты  $z$ . В линейном приближении для плотности тока  $j$ :

$$j = en_0v_p + en_pv_0, \quad (1)$$

где  $n_0$  — равновесное значение концентрации электронов,  $n_p$  — малое отклонение концентрации электронов от равновесного,  $e$  — заряд электрона,  $v_0$  — скорость электронов, обусловленная внешним полем  $E$ ,  $v_p$  — возмущенная скорость электронов. Уравнение неразрывности запишем в виде

$$e \frac{du_p}{dt} + \nabla \cdot j = 0. \quad (2)$$

Решение (1), (2) в Фурье-образах при  $\vec{k} \parallel \vec{v}_0$

$$n_p = n_0 \frac{kv_p}{\omega - kv_0}. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1) и учитывая, что  $v_p = \mu E_p$  ( $\mu$  — подвижность электронов), получим:

$$j(\omega, k) = \frac{en_0\mu E_p}{1 - \frac{v_0}{v_f}}, \quad (4)$$

где  $v_f = \omega/k$ . Правая часть в (4) меняет знак при  $v_0 > v_f$ , т. е. когда дрейфовая скорость электронов превысит фазовую скорость волны;  $v_0 \sim 10^6 \div 10^7$  см/с, поэтому усиливаться могут только акустические волны, скорость звука которых  $\sim 10^5 \div 10^6$  см/с. В работе рассматривается построение системы уравнений, включающих в себя уравнение движения решётки, уравнения Максвелла с учётом дополнительного тока, возникающего в решётке в результате деформации, а также учитывается наличие внешнего электрического поля, вызывающего дрейф носителей (электронов). Дисперсионный анализ такой системы показывает, что акустическая волна может стать нарастающей, если скорость дрейфа электронов больше скорости звука.

Работа выполнена в рамках Проекта РНФ № 15-19-00182

## Биомеханика расширяющегося стержня Fixion

**Иванов Д. В.**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*

Стержень Fixion впервые был внедрен в клиническую практику в 1999 году. Его производством занимается фирма CarboFix Orthopedics Ltd, Тель-Авив, Израиль. Сегодня стержень Fixion наряду с блокируемыми стержнями успешно применяется для остеосинтеза переломов длинных трубчатых костей. Первая статья (Lerone с соавторами) с клиническими данными по применению стержня Fixion была напечатана еще в 2000 году. Авторы отметили такие достоинства нового стержня, как способность закреплять костные отломки на протяженном участке длины стержня, отсутствие необходимости рассверливания канала (не повреждаются сосуды и нервы), поперечного блокирования в дистальном отделе, а также существенное уменьшение радиационной нагрузки на пациента и хирурга и существенно меньшее время операции. Новый стержень показал себя как эффективное, простое и малоинвазивное средство остеосинтеза переломов длинных трубчатых костей.

Fixion используется уже более 15 лет, но было найдено не более семи работ, посвященных его биомеханическим исследованиям. Напротив, клинических данных опубликовано довольно много. С механической точки зрения стержень Fixion оказался более привлекательным, чем блокируемые стержни. Блокирующие винты являются концентраторами напряжений, вследствие чего ломаются или ломается стержень в месте установки винтов. К тому же они препятствуют распределению нагрузки между отломками, что отрицательно сказывается на сращении перелома и может приводить к различным осложнениям. В случае применения блокируемых стержней часто требуется процедура динамизации.

Несмотря на то, что стержень Fixion показывает себя не хуже блокирующих стержней, работы некоторых авторов показали, что в случае его установки система кость – фиксатор не будет так же стабильна при скручивающих нагрузках, как система с блокируемым стержнем.

Цель данной работы — провести биомеханическое численное исследование стабильности фиксации переломов диафиза бедра с помощью расширяющегося стержня и сравнить полученные результаты с результатами расчетов для стандартного блокируемого стержня. Особое внимание было обращено на ротационную стабильность фиксации костных отломков стержнем Fixion. Исследованы геометрические характеристики расширяющегося интрамедуллярного фиксатора Fixion, применяющегося для остеосинтеза переломов бедренных костей. Численно исследованы системы кость – фиксатор под действием трех типов нагрузок. Изучено два вида перелома диафиза бедра. Выявлено, что расширяющийся фиксатор Fixion обеспечивает меньшую осевую жесткость по сравнению с блокируемым стержнем. Напротив, жесткость при скручивании для стержня Fixion оказалась выше, чем для стандартного фиксатора. Результаты расчетов показали неравномерность контактного давления между костными отломками. Численные данные хорошо согласуются с литературными. Интрамедуллярный фиксатор Fixion показал высокую устойчивость ко всем трем исследованным нагрузкам.

## Моделирование сегмента поясничного отдела позвоночника

**Иванов Д. В., Доль Е. С.**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*

Травмы позвоночника составляют до 17% всех травм опорно-двигательного аппарата. Более того, дегенеративные заболевания позвонков и межпозвоночных дисков наблюдаются у большинства взрослых людей. Сегодня в клинической практике распространено несколько различных методик хирургического лечения травм и заболеваний позвоночного столба. При лечении той или иной патологии хирурги выбирают тот или иной фиксатор в зависимости от собственного опыта и ряда других факторов. Проблема выбора подходящего имплантата для каждого конкретного пациента может быть решена с помощью численного биомеханического моделирования.

Численные расчёты позвоночного столба и его сегментов позволяют учесть механические воздействия, оказывающие влияние на объект исследования, и позволяют дать рекомендации по выбору оптимального метода лечения и виду фиксирующих конструкций и имплантатов. Использование правильно выбранного пациенто-ориентированного имплантата или аппарата фиксации играет определяющую роль при реабилитации больного. Поэтому разработка высокотехнологичных методов хирургического лечения на этапе предоперационного планирования является приоритетным направлением развития здравоохранения.

В данной работе проведено биомеханическое численное исследование позвоночно-двигательного сегмента поясничного отдела позвоночника человека (L4-L5) в норме, при дегенеративно-дистрофическом повреждении межпозвоночного диска, а также после хирургического лечения с установленным аппаратом фиксации и протезом межпозвоночного диска.

При достижении поставленной цели были решены следующие задачи:

- построение трехмерной компьютерной модели сегмента L4-L5 позвоночного столба без патологии и с дегенеративно-дистрофическим изменением межпозвоночного диска;
- численный расчет задачи биомеханики и воздействию осевой силы и скручивающих моментов на исследуемый сегмент в норме, при повреждении диска и после операции с установленными фиксаторами и протезом диска;
- анализ численных результатов и их верификация при сопоставлении с клиническими данными.

Численное моделирование проводилось в системе Ansys. Ставились и решались статические задачи о нагружении сегмента L4-L5 позвоночного столба осевой силой и скручивающими моментами с учетом контактного взаимодействия между позвонками, диском и системой фиксации. При численном моделировании проводился анализ сеточной сходимости. Материал позвонков предполагался линейно-упругим изотропным, рассматривалась губчатая и кортикальная костная ткани. Материал диска считался изотропным гиперупругим. Позвоночные связки моделировались одномерными балочными элементами.

Анализ численных результатов показал преимущество сетчатого заменителя межпозвоночного диска (типа mesh) по сравнению с имплантатом типа кейдж (бумеранг).

## Теория монотонных операторов в исследовании моделей конкуренции

Ильичев В. Г.<sup>1</sup>, Ильичева О. А.<sup>2</sup><sup>1</sup>*Институт аридных зон ЮНЦ РАН, Ростов-на-Дону*<sup>2</sup>*Ростовский государственный строительный университет*

1. Всякая динамическая система индуцирует свое локальное отображение  $P$ . Свойства монотонности  $P$  задаются знаковой структурой его дифференциала  $DP$ . Оказывается, некоторые такие свойства сохраняются и при любых итерациях  $P$ , порождающих, в частности, глобальное отображение Пуанкаре. Такая наследуемость возникает, когда матрицы данной знаковой структуры образуют мультипликативную полугруппу по умножению.

Во всех моделях конкуренции диагональ матрицы  $DP$  положительна, а остальные элементы являются отрицательными. В двумерной ситуации эти знаковые структуры наследуемы.

2. Обозначим через  $K$  конус в фазовом пространстве. Тогда положим  $X < Y$ , если вектор  $(Y - X)$  лежит в  $K$ . Отображение  $P$  называется монотонным, если сохраняется отношение порядка. Формально, из  $X < Y$  следует  $P(X) < P(Y)$ . В двумерном случае в качестве конуса следует выбрать четвертый квадрант плоскости, тогда  $P$  оказывается монотонным отображением.

Пусть  $A, B$  — некоторые фиксированные вектора и  $A < B$ . Тогда семейство «промежуточных» векторов  $X$  (т. е.  $A < X < B$ ) называется конусным отрезком  $I = I(A, B)$ . На плоскости конусный отрезок представляет собой прямоугольник. Он называется инвариантным, если под действием  $P$  переходит в себя.

3. Предположим, что модельное равновесие  $R$  удалось окружить семейством инвариантных конусных отрезков. Пусть дополнительно они заполняют все фазовое пространство, вложены друг в друга и стягиваются к  $R$ . Теперь очевидно, что под действием  $P$  «большие» отрезки переходят в «маленькие». Данный геометрический метод позволяет доказать единственность и глобальную устойчивость  $R$ .

Когда количество конкурентов больше двух, тогда знаковая структура  $DP$  не наследуема. Но после обращения времени у соответствующего сдвиг-отображения  $N$  знаковая структура  $DN$  состоит только из плюсов, и она уже наследуется. Анализ  $N$  доставляет много полезной информации и об исходном отображении  $P$ .

## Динамика поровязкоупругого тела на поровязкоупругом полупространстве от действия импульсной силы

**Ипатов А. А., Литвинчук С. Ю., Фокина Т. А.**

*НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского*

Рассматриваются краевые задачи линейной трехмерной динамической теории поровязкоупругости. Используется поровязкоупругая модель на основе пороупругой модели Био и принципа соответствия пороупругой и поровязкоупругой реакции. В модели вязкоупругими свойствами обладает скелет пористого материала. Для описания вязкоупругих свойств среды применяются классические вязкоупругие модели: Максвелла, Кельвина–Фойгта, стандартного вязкоупругого тела и модель со слабосингулярным ядром.

Применяется метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) и метод граничных элементов (МГЭ) для получения численных решений. Решение задачи строится в пространстве Лапласа. Численная схема основана на использовании формулы Грина–Бетти–Сомильяны. Чтобы ввести ГЭ-дискретизацию, рассматривается регуляризованное гранично-интегральное уравнение. В качестве функций формы при описании границы тела выбраны квадратичные полиномы интерполяции. Неизвестные граничные поля интегрируются через узловые значения в интерполяционных узлах. При поэлементном численном интегрировании используется метод Гаусса и иерархический алгоритм интегрирования. Гранично-элементные схемы созданы на основе согласованной аппроксимации граничных функций. Применяется метод коллокации. Решения в явном времени строятся с использованием модифицированного алгоритма Дурбина и методов Рунге–Кутты численного обращения преобразования Лапласа.

Получены гранично-элементные решения следующих задач: о действии вертикальной силы в виде функции Хэвисайда на полупространство, о действии импульсной силы на штамп, находящийся на полупространстве. Штамп и полупространство являются поровязкоупругими и моделируются методом граничных элементов, сетка строится с учетом симметрии. В качестве пористого материала рассматриваются скальная порода (песчанник Berea) и водонасыщенный песок. Исследуется сеточная сходимость метода в задаче моделирования поверхностной волны на поровязкоупругом полупространстве. Построены гранично-элементные решения для перемещений, порового давления и напряжений. Проведено сравнение решений при различных значениях параметров среды и продемонстрировано влияние вязкости на динамические отклики перемещений и порового давления.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 15-08-02817-а и № 16-31-00450-мол\_а).

## Монотонная и колебательная неустойчивость в пространственно-распределенной системе Рэлея

**Казарников А. В., Ревина С. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассматривается система Рэлея с диффузией:

$$\begin{cases} v_t = \nu_1 \Delta v + w, \\ w_t = \nu_2 \Delta w - v + w - w^3, \end{cases}$$

где  $v = v(x, t)$ ,  $w = w(x, t)$ ,  $x \in D$ ,  $t > 0$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  — ограниченная область,  $\mu \in \mathbb{R}$  — управляющий параметр,  $\nu_1, \nu_2 > 0$  — коэффициенты диффузии, при однородных краевых условиях различных типов: Дирихле, Неймана, а также смешанных краевых условиях. Данная система является частным случаем системы Фитцхью–Нагумо, которая является классической моделью распространения нервного импульса.

Целью данной работы является построение асимптотики решений системы Рэлея с диффузией, ответвляющихся от тривиального решения при изменении управляющего параметра  $\mu$ , когда коэффициенты диффузии фиксированы и различны  $\nu_1 \neq \nu_2$ . Случай равных коэффициентов диффузии рассматривался авторами ранее.

Получены условия, при которых в системе имеет место монотонная и колебательная потеря устойчивости, найдены критические значения параметра  $\mu$ . Проанализирован переход между различными типами неустойчивостей в зависимости от соотношения между коэффициентами диффузии. Для нахождения вторичных стационарных или периодических по времени решений применяется метод Ляпунова–Шмидта в форме, развитой в работах В. И. Юдовича.

Построена абстрактная схема применительно к данной системе для различных типов краевых условий в произвольной ограниченной области. Найдены в общем виде первые члены асимптотики для вторичных периодических по времени и стационарных решений, выведены формулы для  $k$ -го члена разложения. Установлено, что в системе происходит мягкая потеря устойчивости.

В одномерном случае получены утверждения о качественном поведении решений системы в зависимости от типа краевых условий. Приведены явные выражения первых членов асимптотики.

Приведены результаты численных экспериментов для исследования разрушения вторичных решений при  $\mu \gg \mu_{cr}$ , а также для случаев исчезающей вязкости, когда  $\nu_1 \rightarrow 0$  или  $\nu_2 \rightarrow 0$ . Эксперименты проводились для случаев одной и двух пространственных переменных. Для вычислений применялись пакеты Maple и MATLAB, а также собственный программный комплекс одного из авторов (Казарникова А. В.) на языке C++. При проведении вычислений применялась технология NVIDIA CUDA v.7.0, что позволило существенно ускорить процесс расчета. Система была исследована различными типами численных методов: методами сеток, прямых, а также методом Галеркина. Результаты всех экспериментов полностью согласуются друг с другом.

## Исследование морфологии и биомеханических параметров тканей интимы сосудов человека

**Калинин А. А.**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*

Согласно данным Федеральной службы государственной статистики РФ, в Российской Федерации смертность от заболеваний сердечно-сосудистой системы составляет около 48% от общего уровня смертности; 16% этого количества приходится на долю инсульта различного генеза, причем значительная часть обусловлена атеросклеротическими поражениями. Среди выживших после заболеваний этой группы высок процент инвалидизации и прочих серьезных последствий, поэтому изучение патологий сердечно-сосудистой системы и развития атеросклеротических отложений является особо важной задачей для повышения качества жизни граждан Российской Федерации.

Было проведено исследование гистологических препаратов венечных артерий человека, полученных от лиц мужского пола в возрасте от 30 до 70 лет, умерших по причинам, не связанным с сердечно-сосудистыми заболеваниями. Были выявлены области, наиболее подверженные образованию атеросклеротических поражений и общие закономерности их развития в зависимости от возраста. Получены снимки топологии атеросклеротических поражений на разных стадиях развития. Исследование проводилось с использованием сканирующего лазерного конфокального микроскопа Leica TCS SP8.

Была построена компьютерная модель интимы сосуда с использованием зондовой нанолаборатории атомно-силовой микроскопии NTEGRA Spectra. Топология строилась с разрешением 1 нм.

Проводилось исследование механических характеристик стенки венечных артерий человека при различных стадиях атеросклеротического поражения. Были получены значения жесткости стенки для разных возрастных групп.

Было проведено численное моделирование ранних стадий развития атеросклероза с помощью конечно элементного пакета COMSOL Multiphysics. Построена осесимметричная модель кровеносного сосуда состоящая из области потока эндотелиального слоя, интимы и меди. Проводилось моделирование накопления липидных отложений в стенке сосуда в норме и при локально поврежденном эндотелии. Моделирование велось с учетом механизмов поглощения липопротеинов макрофагами и образование пенистых клеток. Проведено моделирование изменения формы стенки сосуда в результате формирования пенистых клеток.

Работа выполнена при поддержке Государственного задания № 2014/203, код проекта 1617.

## Международная академическая мобильность на мехмате ЮФУ в рамках программ ЕС Tempus-IV и Erasmus+

**Карякин М. И., Надолин К. А.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Важной составляющей организации современного европейского вузовского образования является академическая мобильность студентов. Международные стандарты магистерских программ обычно включают семестровое обучение студента в партнерском университете. Следует отметить, что на мехмате ЮФУ накоплен большой опыт сотрудничества с зарубежными вузами, но возможности академической мобильности наших студентов до недавнего времени были весьма ограничены. Ситуация изменилась после выполнения в рамках программы ЕС Tempus-IV совместного международного проекта ICARUS, в котором большое внимание было уделено организации академической мобильности студентов. За период 2011–2014 гг. при финансовой поддержке этого проекта в европейских университетах-партнерах прошли обучение 10 студентов магистратуры мехмата ЮФУ.

Важным результатом проекта ICARUS стало углубление и развитие партнерских связей между российскими и европейскими университетами. Эти связи проявляются в приглашениях к участию в совместных грантах, адресованных мехмату ЮФУ со стороны европейских университетов. В 2015 году мехмат ЮФУ вошел в консорциумы университетов трех совместных международных проектов в рамках программы ЕС Erasmus+. Еще две грантовые заявки поданы в 2016 году. Финансирование этих проектов предусматривает академическую мобильность студентов и преподавателей между мехматом ЮФУ и европейскими университетами, среди которых и наши давние друзья Технологический университет Лапшеенранты (Финляндия) и Университет Твенте (Нидерланды), и новые партнеры — Вильнюсский университет (Литва) и Университет Салерно (Италия).

Настоящее время в активной фазе выполнения находятся совместные проекты с Технологическим университетом Лапшеенранты, Университетом Твенте и Вильнюсским университетом. Проведен отбор участников академической мобильности среди студентов, аспирантов и преподавателей, определены сроки визитов. В соответствии с планами академических обменов, в 2015 году европейские университеты посетят 3 студента магистратуры и 2 аспиранта. Четыре преподавателя мехмата ЮФУ поедут читать лекции студентам европейских университетов-партнеров.

Сегодня мы можем говорить также и о готовности мехмата ЮФУ к приему на обучение иностранных студентов, не владеющих русским языком. Доказательством этого является обучение в 2013–2014 гг. в период выполнения проекта ICARUS четырех иностранных студентов из Франции, Нидерландов и Швеции.

В докладе будет изложен накопленный опыт организации академического сотрудничества с зарубежными университетами, дана подробная информация о выполняемых проектах, стоящих задачах и ходе их реализации, проведено обсуждение особенностей подачи заявок на гранты программы ЕС Erasmus+.

## Алгоритм генерации моделей артериальных русел внутренних органов в виде самоподобных деревьев

**Кизилова Н. Н., Балабанов В. А.**

*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина*

Артериальные системы представляют собой разветвленные структуры, единицей устройства которых является 3 (4) трубки, образующие бифуркацию (трифуркацию). Измерения *in situ*, на препаратах и медицинских изображениях показали, что диаметры артерий в бифуркациях связаны между собой соотношением  $d_0^\lambda = d_1^\lambda + d_2^\lambda$  (закон Мюррея), где  $d_0$  и  $d_{1,2}$  — диаметры материнской и дочерних артерий,  $\lambda$  — постоянная, характерная для данного органа. Кроме этого, существует зависимость между углами ветвления  $\alpha_k$  и величинами  $d_{0,1,2}$  (соотношения Розена). При этом зависимости между длинами и диаметрами артерий не выявлены. В данной работе показано, что модель артериального русла органа заданной формы и объема  $V$  может быть сгенерирована как заполняющее объем дерево с последовательно уменьшающимися диаметрами вплоть до минимальных  $d_{min}$ , соответствующих прекапиллярным артериолам ( $d = 50 \div 100$  мкм). Алгоритм восстановления дерева основан только на соотношениях Мюррея и Розена, а длины сегментов определяются геометрией ветвлений.

На первом шаге задается диаметр питающей артерии, параметр  $\lambda$  и коэффициент асимметрии ветвлений  $\xi = \min \{d_1, d_2\} / \max \{d_1, d_2\}$  из диапазона  $\xi \in [0.1, 1]$ . Затем вычисляются диаметры дочерних артерий от генерации к генерации из соотношений  $\max \{d_1, d_2\} = d_0 (1 + \xi^\lambda)^{-1/\lambda}$ ,  $\min \{d_1, d_2\} = \xi \max \{d_1, d_2\}$ , которые следуют из закона Мюррея. При достижении величины  $\min \{d_1, d_2\} < d_{min} = 0.1$  мм генерация дочерних артерий прекращается. Считая, что артерии последних генераций заканчиваются капиллярами, которые равномерно заполняют некоторый объем ткани или органа, задаем характерную плотность капилляров (2–3 тыс./мм<sup>3</sup> в почках, миокарде, мозгу, 0.3–2 тыс./мм<sup>3</sup> в мышцах и т. д.). Генерация дерева начинается от артериол, координата точки ветвления которых определяется из соотношений Розена, записанных для связанной системы из трех плоских бифуркаций, расположенных в ортогональных плоскостях. Тогда соотношения Розена дадут 6 уравнений для определения координат точек ветвления  $j$ ,  $2j - 1$  и  $2j$ . Путем итераций проводится построение дерева вплоть до питающей артерии.

Проведены расчеты стационарной и волновой проводимостей сгенерированных систем, которые показали хорошее соответствие аналогичным расчетам, выполненным на точных схемах русел коронарных артерий, дерева почек и легких, построенные по результатам морфометрических измерений на слепках соответствующих артериальных систем.

## Исследование влияния термоупругих напряжений в сапфире

Кириллова Е. В.<sup>1</sup>, Малюков С. П.<sup>2</sup>, Клунникова Ю. В.<sup>2</sup>, Буй Т.<sup>2</sup>,  
Саенко А. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт прикладных наук Рейн-Майн, Висбаден*

<sup>2</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Выращивание кристаллов сапфира высокого качества для электроники и микроэлектроники стало первоочередной задачей современной науки и техники. При выращивании кристаллов сапфира из расплава температурные градиенты приводят к возникновению термоупругих напряжений, равных критическому напряжению образования дислокаций или превосходящих его. Они являются причиной действия одного из основных механизмов возникновения дислокаций — пластической деформации за фронтом кристаллизации, поэтому авторами проведен анализ влияния температурных градиентов в растущем кристалле на уровень термоупругих напряжений в сапфире.

Проведено моделирование распределения температуры, напряжений и деформации в процессе получения кристаллов сапфира.

Проведено экспериментальное исследование двух партий (безблочных и блочных) кристаллов сапфира. Отличие двух партий кристаллов состоит в том, что в кристаллах с блочной структурой идет более быстрое нарастание напряжений в направлении разращивания и по мере удаления от затравки. На расстоянии 116 мм от затравки скалывающие напряжения достигают 25 МПа, что, по видимому, является критическим напряжением пластической деформации, так как в этом месте начинают образовываться блоки. В безблочных кристаллах напряжения достигают 5–6 МПа, что полностью согласуется с результатами, полученными в процессе моделирования температурных и термоупругих полей на различных стадиях роста кристаллов сапфира.

Проведенные исследования показали, что для управления структурой кристалла важен не столько начальный градиент температуры, сколько степень сохранения постоянства заданного градиента при выращивании. Меняя градиент температуры, можно изменять значение термоупругих напряжений. Величина остаточных напряжений для метода горизонтальной направленной кристаллизации оценивается не градиентом, а различной степенью его стабильности, т. е. значением не первой, а второй производной от температуры по координате.

Температурные поля для выращивания кристаллов сапфира можно получать методом вычислительного эксперимента путем концептуального анализа изменений температурных и термоупругих полей.

Результаты получены с использованием оборудования Научно-образовательного центра «Лазерные технологии», Центра коллективного пользования и Научно-образовательного центра «Нанотехнологии», Института нанотехнологий, электроники и приборостроения Южного федерального университета (г. Таганрог).

Работа поддержана грантом РФФИ № 16-52-12010, грантом DFG (K1 1104/3-1).

## Моделирование высокоскоростного осциллирующего источника, движущегося по поверхности упругого слоя

Кириллова Е. В.<sup>1</sup>, Сыромятников П. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Университет прикладных наук, Висбаден*

<sup>2</sup> *Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

Исследованию волновых полей, вызванных источниками (штампами), движущимися по поверхности твердого тела, посвящено большое количество исследований. Как правило, к задачам подобного рода применимы те же методы, что и для динамических и статических задач теории упругости, но они имеют и свою определенную специфику, порождающую необходимость в модификациях имеющихся методов. Данная работа посвящена нахождению возмущений на поверхности изотропного слоя, вызванных равномерно распределенной в прямоугольной области вертикальной поверхностной нагрузкой, перемещающейся с постоянной скоростью в фиксированном направлении и совершающей гармонические колебания. Задача решается с помощью техники интегральных преобразований Фурье и численного интегрирования. Метод интегрирования, благодаря своей простоте, можно считать инженерным, хотя он с успехом может использоваться для исследовательских целей. Специфика задачи заключается в появлении т. н. наведенной анизотропии и, как следствие, нетипичном расположении вещественных полюсов символа матрицы Грина. В предлагаемой работе рассматриваются плоская и пространственная задача о движении с постоянной скоростью по поверхности упругого слоя подвижного источника нормальных напряжений, совершающего гармонические колебания. В системе координат, связанной с подвижным источником, исходная нестационарная краевая задача сводится к модифицированной гармонической краевой задаче с помощью метода интегральных преобразований Фурье. В зависимости от комбинации параметров задачи, и, в первую очередь, скорости, могут существенно изменяться свойства решения и тип определяющих уравнений. Данный метод дает возможность рассчитывать нестационарные (квазистационарные) волновые процессы движения во многом подобно расчетам стационарных гармонических процессов для неподвижных источников, описываемых аналогичными контурными интегралами Фурье. Приведены численные примеры расчета поверхностных пространственных возмущений упругого изотропного слоя, вызываемых подвижным поверхностным гармоническим источником в диапазоне скоростей от нуля до скорости продольной волны при различных частотах осцилляций (диапазон безразмерных частот — от нуля до десяти), получена зависимость амплитуды пространственных поверхностных возмущений от скорости (при нулевой частоте осцилляций) в том же диапазоне скоростей. Метод может быть без дополнительных модификаций применен к многослойным изотропным и анизотропным материалам в качестве упругой подложки, однако, значительно возрастающее число операций при расчете подинтегральных функций неизбежно приводит к необходимости оптимизации вычислений.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ и администрации Краснодарского края 16-48-230336.

## Повышение устойчивости декоративных растений биотическим и абиотическим факторам среды с помощью нанотехнологий

**Кириллова И. М.**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*

На сегодняшний день наноматериалы и нанотехнологии находят применение практически в любой отрасли: в медицине, биологии, сельском хозяйстве, экологии, растениеводстве и т. д. Однако бионанотехнологии, являются наиболее передовой и многообещающей областью современной науки. Существует несколько направлений перспективных для их использования в растениеводстве. Это, прежде всего, повышение адаптивности декоративных растений к неблагоприятным факторам внешней среды, создание растений, устойчивых к вредителям и болезням, а также сорной растительности. С помощью бионанотехнологий модифицируя метаболизмы растений, можно менять их реакцию на почвенные и климатические условия, регулировать рост, развитие и продуктивность, получая тем самым декоративные формы с заданными параметрами качества.

Преимущество применения бионанотехнологий для растениеводства заключается в комплексном характере их биологической активности: с одной стороны, прямом подавлении фитопатогенных микроорганизмов — возбудителей болезней, с другой — положительном воздействии на растение, активации болезнестойчивости и стрессоустойчивости растений, что существенно повышает эффективность защиты.

Разрабатывая нанотехнологии, также надо учитывать естественные системы адаптации растений, которые позволят иметь растению дополнительную устойчивость и надежность от воздействия биотических и абиотических факторов среды.

Технологии получения новых бионанопрепаратов должны предусматривать возможность их модификаций для применения в конкретных экологических условиях, таких как тип почв, фитопатогенов. Бионанопрепараты должны обладать полифункциональностью действия: повышать иммунитет растений, защищать от вредителей, снижать поражаемость наиболее вредоносными грибными и бактериальными заболеваниями и т. д.

Немаловажным аспектом в повышении устойчивости растений к неблагоприятным факторам среды является создание ДНК-технологий, которые позволят выявить гены, ассоциированные с хозяйственно-ценными признаками, устойчивости к стрессам, инфекционным болезням и их клонирование. Следовательно, с помощью этих технологий можно конструировать макромолекулы (биологические наночастицы) в целях изучения или управления биологическими системами.

В общем и целом необходим поиск бионанотехнологий, основанных на достоверном знании функционирования гомеостатических механизмов в биологических системах различного уровня, так как их изучение позволит выявить ключевые места их функционирования, в которых желательная ответная реакция растительной системы может быть использована для интенсивного развития растениеводства. Поэтому приоритетной задачей в ближайшее время должно стать внедрение новейших агронанотехнологий, которые позволят повысить устойчивость декоративных растений к биотическим и абиотическим факторам среды.

## Численное моделирование термоупругих напряжений при лазерной резке сапфира

Клунникова Ю. В., Малюков С. П., Саенко А. В., Буй Т.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В настоящее время лазерное управляемое термораскалывание является наиболее эффективным методом для разделения хрупких неметаллических материалов: любых типов керамики, кварца, различных полупроводниковых материалов и сапфира. Монокристаллы сапфира, полученные по методу горизонтальной направленной кристаллизации, обладают комплексом определенных физических свойств (высокая температура плавления, химическая и радиационная стойкость, высокая твердость и прозрачность), благодаря чему они находят широкое применение в микроэлектронике, квантовой электронике, оптике высокого разрешения и нанотехнологиях.

В данной работе предлагается подход к моделированию процесса лазерного управляемого термораскалывания пластин сапфира, позволяющий анализировать распределение температуры и термические напряжения по объему образца. Соответствующий алгоритм моделирования процесса лазерного управляемого термораскалывания пластин сапфира реализуется на базе универсального программного пакета конечно-элементного анализа ANSYS.

Проведено моделирование в системе ANSYS распределения температуры, напряжений и деформации в пластине сапфира в процессе лазерного термоуправляемого раскалывания.

Экспериментальные исследования лазерного управляемого термораскалывания пластины сапфира выполнялись на лазерной установке (модель LIMO 100-532/1064-U), которая включает в себя инфракрасный Nd:YAG лазер с фиксированной длиной волны 1,064 мкм, длительностью импульса 84 нс и максимальной мощностью лазерного излучения 100 Вт со скоростью лазерного луча 1–5 мм/с. Максимальная температура на поверхности пластины сапфира составляет порядка 750–1100 К.

Результаты исследований показали перспективность процесса лазерного управляемого термораскалывания пластин сапфира с использованием лазерного излучения длиной волны 1,064 мкм. Установлено, что на качество резки сапфира влияют скорость перемещения лазерного луча, плотность мощности излучения, а также толщина сапфировой пластины.

Результаты получены с использованием оборудования Научно-образовательного центра «Лазерные технологии», Центра коллективного пользования и Научно-образовательного центра «Нанотехнологии», Института нанотехнологий, электроники и приборостроения Южного федерального университета (г. Таганрог).

Тезис написан в рамках выполнения проекта ФЦП Россия № 14.587.21.0025. Уникальный идентификатор проекта RFMEFI58716X0025.

## Равновесие цилиндрической мембраны, одетой на жёсткий цилиндр

**Колесников А. М.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В данной работе исследуется контактное взаимодействие тонкостенной длинной высокоэластичной трубки и жёсткого шероховатого неподвижного цилиндра. Один конец трубки одет на цилиндр, так что охватывает его край на некоторую глубину. К другому концу трубки приложена продольная растягивающая сила. Из опыта следует, что трубка будет стремиться соскользнуть с цилиндра. Равновесие возможно только за счёт трения, возникающего в области контакта и при достаточной площади контактного взаимодействия. Целью исследования является получение зависимости глубины одевания трубки на цилиндр, необходимой для равновесия, от геометрических параметров задачи и коэффициента трения.

Будем рассматривать осесимметричную постановку задачи. Трубку моделируем полубесконечной цилиндрической упругой мембраной кругового сечения с радиусом  $r_0$  и постоянной толщины  $h$  в недеформированном состоянии. Материал трубки считаем однородным, изотропным, гиперупругим и несжимаемым. Радиус жёсткого цилиндра положим равным  $R_0 > r_0$ .

Полагаем, что в области контакта трубка плотно прилегает к боковой поверхности жёсткого цилиндра. Примем, что напряжения трения в области контакта подчиняются закону Кулона с коэффициентом трения  $f$ . Вне области контакта мембрана свободна от поверхностной нагрузки. Считаем, что взаимодействия трубки и жёсткого цилиндра не будет оказывать влияния на достаточном удалении. Тогда, начиная с некоторого удаления от области контакта, трубка будет находиться в состоянии одноосного растяжения. Обозначим растягивающую силу  $Q$ .

Для функции потенциальной энергии деформации Бартенева–Хазановича с параметром материала  $\mu$  задача решена в явном виде. Минимальная глубина одевания  $L$  выражается как функция переменных  $r_0$ ,  $R_0$ ,  $f$  и  $Q$  следующим образом

$$L = \frac{2r_0\rho_0}{f} \ln \left( \frac{3\rho_0 \left( \rho_0 - \left( 1 - \frac{Q}{4\pi\mu hr_0} \right)^{\frac{1}{3}} \right)}{2(\rho_0^2 - \sqrt{\rho_0})} \right), \quad Q < \frac{4\pi\mu hr_0}{27} (27 - \rho_0^3), \quad \rho_0 = \frac{R_0}{r_0}.$$

Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации (государственный контракт № 9.665.2014/К) и РФФИ (грант 16-08-00802).

## Исследование корреляционной зависимости данных магнитно-резонансной и компьютерной томографии

**Колесникова А. С., Сафонов Р. А.**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*

В настоящее время основой принятия решений по выбору метода и параметров операции является опыт хирурга. Однако зачастую выбор рациональной операции является нетривиальной задачей, в ходе решения которой необходимо учитывать индивидуальные особенности строения органов пациента и множество других параметров. Универсальным методом, который поможет найти решение поставленной задачи, является виртуальная операция. Данный метод предполагает построение трехмерной биомеханической персонифицированной модели. Для ее построения необходима информация о геометрическом строении органов пациента, которую можно получить путем томографического обследования.

Для дальнейшего построения биомеханической модели на основе полученной геометрии необходимо задать параметры материалов, начальные и краевые условия, форму и динамику нагрузки и прочие параметры. Рассмотрим более подробно проблему задания параметров материала. Полученные в результате томографического обследования результаты не содержат напрямую информации о жесткости, прочности и других характеристиках механического поведения тканей.

Для вычисления модуля Юнга по шкале серого на компьютерной томограмме существует эмпирическая методика, используемая в ряде программ для работы с томограммами. Однако поскольку установлено, что механические свойства тканей зависят от половозрастной характеристики пациента, такая методика не может иметь высокую точность.

Предлагается методика, основанная на статистическом сравнении томограммы пациента с предварительно созданной базой данных. Эта база содержит сопоставление шкал серого на компьютерной (КТ) и магнитно-резонансной (МРТ) томограммах и механических характеристик тканей, полученных в ходе натуральных экспериментов для тех же образцов. Статистическая обработка данных проводится в рамках половозрастной группы, соответствующей пациенту. Использование двух неинвазивных технологий (МРТ и КТ), получающих данные разной физической природы, позволяет уточнить результирующие значения механических характеристик.

## Влияние параметров ядер релаксации на распространение волн в вязкоупругом слое

**Коровайцева Е. А.**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

Рассматривается одномерная задача распространения нестационарных волн в полубесконечном вязкоупругом слое для разных типов ядер релаксации. Безразмерное уравнение движения слоя имеет вид

$$\ddot{u} = u'' - m * u'' \quad (1)$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$\begin{aligned} \bar{u}|_{\tau=0} = \dot{u}|_{\tau=0} = 0; \\ \bar{u}|_{x=0} = u_0(\tau) \quad u|_{x \rightarrow \infty} = 0. \end{aligned}$$

Здесь  $u(x, \tau)$  — перемещение,  $m(\tau)$  — ядро релаксации, звездочка обозначает свертку по времени.

В работе рассмотрены экспоненциальное ядро и сингулярное ядро Ржаницына. Решение уравнения (1) записывается в интегральном виде

$$u(x, \tau) = G(x, \tau) * u_0(\tau). \quad (2)$$

Для определения функция влияния  $G(x, \tau)$  используется преобразование Лапласа. Оригинал функции влияния находится применением прямого и обратного интегрального преобразования Фурье и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{G}(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x, \tau), \quad \bar{G}_0(x, \tau) = \delta(\tau - x), \quad \bar{G}_n(x, \tau) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} H(\tau - x) \times \\ \times \left[ \sum_{k=0}^n A_{nk} x^{n-k} \frac{d^{n-k}}{d\tau^{n-k}} m_n(\tau - x) - \sum_{k=0}^{n-1} (2n-1) A_{n-1,k} x^{n-k-1} \frac{d^{n-k-1}}{d\tau^{n-k-1}} m_n(\tau - x) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$m_1(\tau) = m(\tau), \quad m_n(\tau) = \int_0^{\tau} m_1(\xi) m_{n-1}(\tau - \xi) d\xi.$$

По соотношениям (2) и (3) построено аналитическое выражение для расчета перемещения  $u(x, \tau)$ . Результаты расчета показали, что для экспоненциального ядра разница величин перемещений слоев из упругого и вязкоупругого материала составляет порядка  $10^{-3} \%$ , причем она не зависит от показателя степени экспоненты.

Для сингулярного ядра Ржаницына проведен параметрический анализ результатов расчета перемещения слоя при варьировании трех параметров ядра. Отмечена аналогичная указанной выше независимость величины перемещения от показателя степени экспоненты. С ростом значений остальных параметров ядра влияние вязкости на картину перемещений слоя возрастает.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №№ 16-38-60074 мол\_а\_дк и 16-38-00349 мол\_а.

## Внедрение охлаждаемого сферического штампа в функционально-градиентное покрытие

**Кренив Л. И., Айзикович С. М.**

*Донской государственнй технический университет, Ростов-на-Дону*

В работе рассмотрена осесимметричная статическая задача о тепловом и механическом воздействии гладкого сферического штампа на неоднородный слой на упругом основании. Предполагается, что температура штампа постоянна и ниже температуры покрытия. Коэффициент теплопроводности, коэффициент линейного расширения, модуль Юнга и коэффициент Пуассона слоя изменяются по его глубине по произвольным заданным законам.

Для решения граничной задачи используется аппарат интегральных преобразований Ханкеля. С помощью асимптотического метода строится численно-аналитическое приближенное решение задачи о действии постоянной температуры в пределах круга заданного радиуса, определяется величина соответствующего теплового потока и смещения поверхности полупространства. Затем из условия равенства нулю контактных напряжений на границе зоны контакта и заданной формы штампа находится распределение значений контактных напряжений, величина смещения штампа и действующая сила. Приведены численные результаты, отражающие напряженно-деформированное состояние покрытия и подложки для различных случаев изменения свойств в приповерхностном слое. Рассматриваются случаи изменения термоупругих свойств, когда значение характеристики покрытия не отличается от значения соответствующей характеристики подложки, либо отличается в 2 раза (в большую или в меньшую сторону) на поверхности и линейно убывает (растет) по глубине до значения в подложке.

При индентировании материалов с покрытием, а также при неизотермическом контакте можно определить модуль упругости, актуальный для некоторой зоны контакта. Эту характеристику будем называть эффективным модулем или функцией жесткости неоднородного основания. При внедрении сферического штампа вид функции жесткости следующий:

$$S(a) = \frac{3P}{4a\chi} \frac{1}{1 - \nu^2}, \quad (1)$$

где  $a$  — радиус зоны контакта,  $\chi$  — перемещение индентора. Для неоднородного материала функция жесткости или эффективный модуль является функцией безразмерного геометрического параметра  $a/H = \lambda^{-1}$ .

В работе проанализирована зависимость функции жесткости от разности температуры штампа и основания и проведено сравнение с результатами экспериментов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 15-07-05208, 16-07-00929 А, 15-38-20790, 15-07-05820, 14-08-92003, 14-07-00705, 14-07-00343).

Исследование психофизиологических  
и профориентационных характеристик учащихся  
современной средней общеобразовательной школы

Кренева С. Д.<sup>1</sup>, Кульпина Т. И.<sup>1</sup>, Батищева Н. А.<sup>1</sup>, Белуженко О. В.<sup>1</sup>,  
Крнев Л. И.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Школа №99, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

На протяжении ряда лет МБОУ «Школа №99» является пилотной площадкой в реализации инновационного образовательного проекта «Здоровьесберегающая школа», организованного МОиПО РО и участником творческой лаборатории «Педагогическая ИКТ — компетентность учителя — необходимое условие современного образования» в рамках «Школы цифровых технологий». При проведении профориентационной работы с учащимися старших классов мы предприняли исследование интересов и склонностей учащихся 9 классов к различным сферам деятельности при помощи опросника «Карта интересов» А. Е. Голомштока. Всего было обследовано 101 человек (50 юношей и 51 девушка). По результатам факторного анализа, проведенного с помощью программы SPSS, из 29 профессиональных сфер деятельности, предложенных А. Е. Голомштоком, были выделены 5 групп, одна из них содержит математику и физику. Группы профессиональных областей, вызвавшие наименьший интерес у испытуемых (перечислены в порядке нарастания негативного отношения):

- у девушек — техника, транспорт, математика, физика, деревообработка, строительство, электрорадиотехника, металлообработка;
- у юношей — деревообработка, литература, иностранные языки, физика, химия, педагогика, сценическое искусство, математика.

Из приведенных данных видно, что математика не вызывает массового интереса у учащихся, однако семь человек проявили выраженный интерес к предмету, а у троих был зафиксирован ярко выраженный интерес. Далее мы исследовали влияние психофизиологического состояния школьников на профориентационные предпочтения, в частности к математике. Для этого использовали опросник Т. Ахенбаха, методику диагностики уровня невротизации Л.И. Вассермана и другие. Был проведен дисперсионный анализ по факторам: замкнутость, агрессия, соматические проблемы, тревожность, нарушение социализации и другие. Предпочтение к математике выявлено у учащихся, характеризующихся замкнутостью, высоким уровнем агрессии (активности), отсутствием соматических проблем и проблем мышления. При анализе экологии семьи (по составу, санитарно-жилищным условиям, доходу, педагогическому стилю, уровню социального здоровья, ценности детей в семье, отношения семьи и школы) выявлено благотворное влияние на увлечение математикой полноты семьи (мать, отец, бабушка, дедушка), среднего уровня доходов, ориентации родителей на собственную жизнь (самостоятельность ребенка). Таким образом, мы получили ориентировочный портрет будущего абитуриента механико-математического факультета, которого готовит средняя общеобразовательная школа.

## Творческие конкурсы в системе профориентации школьников и студентов

**Кузьменко С. М.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В докладе рассматривается видоизменение подходов, применяемых при профориентации и популяризации науки. Обнаружено, что широко применявшаяся в XIX–XX веках подача информации в форме научно-популярной лекции, на сегодняшний день, как правило, приводит к положительным результатам только при взаимодействии с «подготовленной» аудиторией, имеющей уже набор базовых знаний по обсуждаемому вопросу.

Возникшая в последнее десятилетие традиция проведения в России фестивалей науки (начало подобных фестивалей в России было положено Московским государственным университетом в 2006 году) стала продолжением общемировой тенденции. Формат подобных мероприятий позволил привлечь внимание широких слоёв общественности к вопросам возникновения и распространения научного знания. Особенностью фестивалей науки является изложение научных результатов в форме, не требующей от слушателя специальной подготовки, либо привлечение участника к непосредственной, желательной творческой, работе в той или иной сфере прикладного научного знания.

В этих условиях перспективным видится вовлечение участников научно-просветительских мероприятий в проектные формы деятельности, позволяющие изучить и применить на практике те или иные теоретические принципы, освоить научные методы и подходы и осознать их целесообразность в широкой сфере вопросов.

Обширный практический опыт, накопленный при организации и проведении ежегодных Фестивалей науки Юга России начиная с 2010 года был использован в процессе учреждения конкурса для школьников и студентов «Весёлые конструкции-2016». Заключительный этап конкурса состоялся в марте 2016 года, в рамках проведения дня открытых дверей Института математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича (ИММиКН) Южного федерального университета.

Участники конкурса должны были разработать и изготовить несущую конструкцию, способную выдержать наибольшую нагрузку при заданных начальных условиях. В качестве строительных материалов использовались макаронные изделия и клей (произвольных видов, по выбору участников). На конкурс было представлено 11 конструкций, изготовленных студентами ИММиКН ЮФУ, Академии архитектуры и искусств ЮФУ и школьниками. Общая численность участников составила 28 человек. Обнаружилось, что наиболее успешным оказался проект, выполненный с применением методов теории упругости.

Широкий круг участников конкурса, разнообразие подходов и применённых материалов позволяют утверждать, что конкурс состоялся и достиг своей цели — привлечения внимания студентов и школьников к задачам теоретической механики, методам теории упругости и вопросам оптимального конструирования.

Применение формализма Ходжкина—Хаксли  
при определении параметров ионных токов  
в мембранах волосковых клеток вестибулярного аппарата животных

Куликовская Н. В., Курганов А.

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*

А. Л. Ходжкин и Э. Хаксли в 1952 году решили задачу разделения ионных токов и определения их параметров при помощи предложенного ими экспериментального протокола Volt–Clamp. Они проводили исследования на гигантском аксоне кальмара и выразили надежду, что их метод применим и к другим клеткам. Результаты были представлены в виде аналитических функций  $\alpha(v)$ ,  $\beta(v)$ , выражающих зависимость от потенциала мембраны интенсивностей переходов воротных частиц ионных каналов из открытого состояния в закрытое и обратно. Физиологи-исследователи вестибулярного и слухового аппарата животных определили характеристики калиевых, натриевых и кальциевых токов в волосковых клетках и в первичных нейронах. Однако, в основном приводятся не функции  $\alpha(v)$ ,  $\beta(v)$ , а стационарные проводимости каналов и постоянные времени для токов. Это приводит иногда к необъяснимым эффектам в случаях описания каналов со многими воротными частицами. Так, например, постоянные времени переходных процессов при одном и том же потенциале мембраны, но при разных начальных условиях (в режимах активации и деактивации мембраны) оказываются различными. Это связано с трудностями определения постоянных времени на тестовых потенциалах близких к потенциалу покоя клетки.

Мы предлагаем определять интенсивности переходов в два этапа.

**1-ый этап:** из экспериментов по протоколам Volt–Clamp получить параметры для зависимости стационарных значений вероятностей открытия ворот от потенциала, что возможно выполнить с хорошей точностью. Из статистической теории известна аналитическая зависимость  $m(v) = (1 + \exp(-(v - V_{1/2})/s))^{-1}$ . Выполним приближение экспериментальных данных  $m(v)$  и найдём параметры  $V_{1/2}$  и  $s$ . После этого во всех дальнейших вычислениях будем вместо  $m(v)$  использовать это приближение  $\hat{m}(v)$ .

**2-ой этап** использует следующую априорную информацию  $\alpha(v)/\beta(v) = \exp((V_{1/2} - v)/s)$ ,  $m(v) = \alpha(v)/(\alpha(v) + \beta(v))$ ,  $\tau(v) = 1/(\alpha(v) + \beta(v))$ . Зададим вид аналитического представления  $\alpha(v)$  и  $\beta(v)$ :

$$\hat{\beta}(v) = C_{\beta} \exp(-(A_{\beta} + v)/B_{\beta}), \quad \hat{\alpha}(v) = \begin{cases} \hat{\beta}(v) \exp((V_{1/2} - v)/s) & \text{при } v \leq v^*, \\ \hat{\alpha}(v^*) + \left. \frac{d\hat{\alpha}(v)}{dv} \right|_{v=v^*} \cdot (v - v^*) & \text{при } v \geq v^*, \end{cases}$$

Параметры  $V_{1/2}$  и  $s$  известны из первого этапа (на котором экспериментальные значения  $\tau(v_{test}^k)$  не использовались). Нужно определить 4 параметра:  $A_{\beta}$ ,  $B_{\beta}$ ,  $C_{\beta}$  и  $v^*$ , минимизируя невязку  $J = \sum_{k=1}^n \left| \tau(v_{test}^k) - \frac{1}{\hat{\beta}(v_{test}^k) + \hat{\alpha}(v_{test}^k)} \right|$ .

Эта сумма вычисляется для всех экспериментальных значений  $v_{test}^k$ ,  $\tau(v_{test}^k)$ .

Для аппроксимации нелинейных соотношений мы использовали модифицированный метод наименьших квадратов.

## Монотонные свойства осреднения топологически неотделимых приближений в условиях бифуркации решения

**Ларченко В. В.**

*Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

Изложена формализация феноменологических переменных при исследовании бифуркации конвективного течения для слабо локально неоднородного континуума. Движение моделируется частично осредненными искомыми. Их количество не совпадает с неизвестными в инерционных членах систем Эйлера и Навье–Стокса. В отличие от указанных постановок, автор отказался от вывода единственной системы уравнений и заменил ее последовательностью краевых задач, замкнутых при каждом значении некоторого параметра  $n$ . Значение его определяется количеством топологически неотделимых точек, которые используются при формализации свойств среды в каждой текущей точке области изменения независимых переменных.

Вывод краевых задач математической физики обычно основан на том, что определяющие величины есть соответствующие функции. Предлагается отождествить искомые величины с последовательностями длины  $n$  со специальными ограничениями. Другая особенность формулировки краевых задач обусловлена статистическим осреднением нелинейных членов уравнений движения с помощью матрицы вероятностей  $\mathcal{P}$ .

Расчет проведен для течения между двумя вертикальными изотермическими плоскостями в однородном гравитационном поле. Температуры стенок равны  $\theta$  и  $-\theta$ . Пусть  $\lambda$  — параметр Прандтля,  $\lambda = 7,03$ ,  $n = 2$ ,  $\beta = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$  — коэффициент объемного расширения,  $c = (c_1, c_2)$  — теплоемкость дифференциального элемента континуума ( $\beta, c$  — нормированы значениями при  $n = 1$ ).

$p$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
$10^3 \cdot \Delta$	-43,8992	-5,5931	-1,9966	-1,0768	-0,0502	0	0,51736	1,0891

$p$	0,2	0,1	0
$10^3 \cdot \Delta$	1,7375	2,4808	3,3401

Таблица содержит относительное отклонение  $\Delta(p) = (\theta^*(p) - \tilde{\theta}^*)(\tilde{\theta}^*)^{-1}$  критической температуры  $\theta^*$  при  $n = 2$  от ее значения  $\tilde{\theta}^*$  в однородном приближении, отвечающем  $n = 1$ . Осреднение реализовано симметричной матрицей вероятностей  $\mathcal{P}$  с ее элементами  $p_{ii} = p$ ,  $i = 1, 2$ ,  $p_{12} = p_{21} = 1 - p$ , для  $c_1 = c_2 = 0,5$ ,  $\varepsilon = 0,05$ . Оказалось,  $\Delta(p)$  — монотонная функция,  $\Delta(p) = 0$ , когда дискретный аналог функции Гиббса достигает минимума. Заметим,  $\Delta_{max} < |\Delta_{min}| \ll 1$ , к тому же  $mes p > 0,9$ , когда  $|\Delta(p)| < 0,01$ . Статистическое осреднение может как увеличить, так и уменьшить критическое число в зависимости от вероятности  $p$ .

## Нечеткие модели временных рядов

**Лобова Т. В., Ткачев Т. Н.**

*Южно-российский государственный политехнический университет (НПИ)  
им. М. И. Платова, Новочеркасск*

Задача прогнозирования значений технико-технологических, экологических, социально-экономических и других показателей объектов различной природы сводится к нахождению значений таких показателей в определенный момент времени в будущем по известным их значениям в предыдущие моменты времени. Различные методы решения такой задачи отличаются используемыми моделями описания временного изменения рассматриваемого показателя. Учитывая существующую неопределенность предсказания значений временных рядов, естественно при построении их моделей использовать для прогноза всю доступную, даже не выраженную в явной форме информацию, отражающую закономерности, проявляющиеся в наблюдаемых значениях временного ряда.

Для прогноза предлагается использовать следующую двухэтапную нечеткую модель, описывающую процесс формирования временного ряда. На первом этапе для прогноза используется та из известных моделей прогнозирования (АРПСС, экспоненциального сглаживания, Брауна, Хольта, Тейла–Вейджа и др., см. Айвазян С. А. Основы эконометрики. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. 432 с.), которая обеспечивает наименьшую погрешность прогнозирования. На втором этапе оценивается ошибка прогноза. С учетом того, что полученное прогнозируемое значение является неточным, оно рассматривается как нечеткое значение наблюдаемого показателя. Далее выполняется оценка точности прогноза с использованием сформированной на предыдущих шагах базы правил системы нечетких выводов. Для этого вводится набор нечетких переменных, характеризующих динамику временного ряда, которая оказывает значимое влияние на точность прогноза. Эти переменные принимаются равными разности соседних значений элементов временного ряда, причем в качестве последней переменной принимается разность между прогнозируемым и последним наблюдаемым значением показателя. В качестве терм-множеств введенных, таким образом, переменных используется множество: «небольшое», «среднее», «большое». Выходной переменной служит лингвистическая переменная «погрешность прогноза» с таким же терм-множеством. Функции принадлежности для каждой переменной определяются по наблюдаемым значениям показателя. После настройки параметров модели выполняется оценка погрешности прогноза с использованием правил вывода и прогнозируемого значения показателя, полученного на первом этапе алгоритма. Алгоритм дефазификации (Коньшева Л. К., Назаров Д. М. Основы теории нечетких множеств: Учебное пособие. СПб.: Питер, 2011. 192 с.) выбирается в результате численных экспериментов.

Результаты работы получены при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на проведение НИОКР, шифр заявки № 2819.

## Изменение положения границы зон полного контакта и проскальзывания при сжатии образцов в зависимости от контактного трения

**Локшина Л. Я., Костандов Ю. А.**

*Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь*

При экспериментальном исследовании характера разрушения образцов из песчано-цементного материала (ПЦМ) от величины внешнего (контактного) трения, возникающего на поверхности приложения нагрузки при одноосном сжатии между плитами пресса, установлено, что разрушение образца может начинаться не из его угла, как полагается во многих существующих моделях разрушения материалов, не учитывающих в полной мере влияния контактного трения на формирование в материале напряженно-деформированного состояния, следовательно, и на развитие в нем разрушения, а на некотором расстоянии от него. Аналогичный вывод следует и в результате аналитического рассмотрения сжатия образца между жесткими штампами.

При экспериментальном исследовании параметров предельного состояния образцов из ПЦМ, габбро и гранита установлено, что изменение контактных условий между плитами пресса и нагружаемыми гранями образцов от практически проскальзывания до их приклеивания приводит к повышению значений предельных напряжений сжатия и модулей упругости испытуемых образцов. Это может быть объяснено только тем, что в случае приклеивания нагружаемых граней образца к стальным плитам пресса на контактных поверхностях существует только одна зона полного контакта, находящаяся в их срединной части, а при непосредственном контакте нагружаемых граней образца со стальными плитами пресса без приклеивания на контактных поверхностях возникают две зоны: полного контакта и проскальзывания.

В работе проведен анализ влияния коэффициента контактного трения на положение границы зон полного контакта и проскальзывания при сжатии образцов из хрупких материалов прямоугольной формы с различным соотношением ширины и высоты и различными значениями коэффициента Пуассона при условии, что на поверхности приложения нагрузки применим закон трения Амонтона–Кулона.

Для расчетов положения границы зон полного контакта и проскальзывания были рассмотрены образцы четырех видов: квадрат, «столбик» (ширина образца в два раза меньше его высоты), «полоса» и «широкая полоса» (ширина образца в два раза и в четыре раза больше его высоты, соответственно). Коэффициент Пуассона изменялся от 0,09 до 0,3. Коэффициент контактного трения изменялся от 0 (полное проскальзывание) до 0,5 для «широкой полосы». Получено, что зона полного контакта уменьшается с ростом коэффициента Пуассона и увеличивается с ростом коэффициента контактного трения. Установлено хорошее соответствие полученных результатов экспериментальным данным.

## Исследование стационарных решений системы Шнакенберга

**Лысенко С. А.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В работе исследуется система Шнакенберга, которая играет важную роль в моделировании биохимических процессов и первоначально была предложена для описания процессов химической кинетики. Рассматривается система

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} + a - u + u^2v, \\v_t &= dv_{xx} + b - u^2v,\end{aligned}$$

когда  $x \in [0, \pi]$ . Предполагается, что на концах отрезка выполняются условия Неймана:

$$u_x(0, t) = 0; v_x(0, t) = 0 \quad u_x(\pi, t) = 0; v_x(\pi, t) = 0$$

Параметр  $d > 0$  — коэффициент диффузии,  $a$  и  $b$  — параметры реакции, удовлетворяющие следующим условиям  $a + b > 0$ ,  $b > 0$ .

Известно, что существует пространственно-однородное решение данной системы  $(u_0, v_0)$ , где  $u_0 > 0$ ,  $v_0 > 0$ . Стационарное состояние  $(u_0, v_0)$  называется неустойчивым по Тьюрингу, если оно устойчиво по отношению к пространственно-однородным возмущениям (в отсутствие диффузии) и неустойчиво по отношению к некоторым пространственно-неоднородным возмущениям (при наличии диффузии). Целью настоящей работы является нахождение достаточных условий неустойчивости Тьюринга. В работе выполнена визуализация области неустойчивости Тьюринга и проведены численные эксперименты для нахождения критических волновых чисел. При исследовании значения  $a$  и  $b$  считаются фиксированными, а параметр  $d$  изменяется.

Критическим значением параметра  $d$  называется такое значение, при котором спектр задачи устойчивости лежит в замкнутой левой полуплоскости, причем пересечение с мнимой осью непусто. Если при этом появляется пара комплексно сопряженных собственных значений, то такая потеря устойчивости называется колебательной; если ведущее собственное значение обращается в ноль, то такая потеря устойчивости называется монотонной.

Известно, что, если при критическом значении параметра  $d$  имеет место неустойчивость Тьюринга, то потеря устойчивости в этом случае — монотонная. При этом от исходного положения равновесия ответвляются вторичные стационарные режимы. В работе получены первые члены разложения по малому параметру надкритичности вторичных стационарных решений системы для любых параметров  $a$  и  $b$ . Представлены результаты применения общих формул для значений параметров, принадлежащих области неустойчивости Тьюринга, которые были найдены в компьютерных экспериментах. Для отыскания вторичных стационарных решений применяется метод Ляпунова–Шмидта в форме, развитой В. И. Юдовичем.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю С. В. Ревиной за постановку задачи и внимание к работе.

## Энергетический анализ волновых процессов в цилиндрической оболочке с гофрированной вставкой

**Макаров С. С., Устинов Ю. А.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В качестве объекта исследования выбрана бесконечная цилиндрическая оболочка с гофрированной вставкой

$$P_1 : R(z) = r_0, \quad -\infty < z \leq 0,$$

$$P_2 : R(z) = r(z), \quad 0 \leq z \leq L,$$

$$P_3 : R(z) = r_0, \quad L \leq z < \infty,$$

где  $R(z)$  — радиус срединной поверхности,  $r(z)$  — периодическая функция. Наличие вставки  $P_2$  позволяет отнести рассматриваемую оболочку к классу нерегулярных волноводов. Рассмотрено несколько различных периодических законов изменения  $r(z)$ .

Исследования проводились в классе крутильных колебаний на основе уравнений, вытекающих из гипотез Кирхгоффа–Лява.

Проведен анализ влияние параметров гофрированного участка (количества гофров, их формы и амплитуды) на энергетические коэффициенты отражения (ЭКО) и прохождения (ЭКП). Для определения этих коэффициентов был выбран вектор Умова–Пойтинга

$$\mathbf{P} = \mathbf{J}\mathbf{V}, \quad \mathbf{J} = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и потоки энергии гармонической (падающей) и прошедшей волн на участках  $P_1$  и  $P_3$

$$W_1 = \mathbf{J}\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1, \quad W_3 = \mathbf{J}\mathbf{V}_3 \cdot \mathbf{V}_3,$$

где  $\mathbf{V}_1$  — расширенный вектор падающей волны на участке  $P_1$ ,  $\mathbf{V}_3$  — расширенный вектор прошедшей волны на участке  $P_3$ .

Задача решалась методом пристрелки и методом Флоке–Ляпунова, суть которого заключалась в решении задачи на одном периоде (гофре) и дальнейшем продолжении решения на всю длину вставки с помощью степеней матрицы монодромии.

На основе проведенных исследований была установлена закономерность, суть которой заключается в том, что максимальное значение энергетический коэффициент прохождения достигает на резонансных частотах, отвечающих граничным условиям жесткой заделки торцов гофрированного участка, номера которых отличны от значения параметра, отвечающего за количество периодов.

Работа выполнена в рамках проектной части госзадания № 9.665.2014.К в сфере научной деятельности.

## Морфофизиология роста биологических тканей

Манжиров А. В.<sup>1</sup>, Стадник Н. Э.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого РАН, Москва*

<sup>2</sup>*Московский технологический университет*

Дается обзор определений биологической ткани, рассматриваются ее типология и компоненты. Особое внимание уделяется межклеточному матриксу, его особенностям в различных соединительных типах тканей. Обсуждаются современные представления о процессе роста тканей в различных его аспектах, а также основные механизмы роста тканей человека, необходимые для построения математической модели. В частности, рассматриваются процессы гисто- и органогенеза, ремоделирования и регенерации различных тканей человека. С точки зрения морфофизиологии формулируются особенности роста и морфогенеза различных типов тканей человека (нервной, соединительной, мышечной и эпителиальной) как отдельно, так и в структуре органа. В частности, описываются механизмы развития хрящевой ткани, оппозиционный и интерстициальный рост, прямой и непрямой остеогенез, процессы ремоделирования и регенерации. Так, репаративная регенерация костной ткани может протекать по двум механизмам: с образованием фрагментов хрящевой ткани, замещающихся костной мозолью, или в случае оптимальной репозиции с образованием щели между репанированными концами кости. Дается информация о росте различных структур нервной системы (рост межнейронных связей, рост нерва и его восстановление при повреждениях). Обсуждаются различные аспекты роста мышечной ткани в норме и патологии, в частности, патологический избыточный рост сердечной мышечной ткани. Рассматриваются регенеративные особенности последней, ассоциированные с ишемической болезнью сердца. Раскрываются основные особенности роста жировой соединительной ткани. Обсуждаются проблемы математического моделирования процессов роста различных тканей, а также верификации параметров их моделей. Основной целью данной работы является формулировка основных особенностей процесса роста на языке, пригодном для построения его математических моделей для различных тканевых структур человеческого организма. В естественных науках известны два типа процессов роста. Это объемный рост, характеризующийся появлением множества зародышей с последующими их разрастанием и консолидацией, и поверхностный рост, характеризующийся притоком новых элементов к поверхности растущего деформируемого тела. Обсуждается адекватность применения того или иного подхода для описания роста конкретных биологических тканей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №14-01-00741 и №15-31-21111 мол\_а\_вед).

## Численное и экспериментальное моделирование динамики анизотропного тела

**Марков И. П., Брагов А. М., Игумнов Л. А., Ипатов А. А.,  
Константинов А. Ю.**

*НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского*

Для исследования закономерностей процессов высокоскоростного деформирования композиционных материалов и элементов конструкций представлен современный экспериментально-теоретический подход. Использована модель линейной анизотропной теории упругости, так как рассматриваемые материалы, в общем случае, имеют ярко выраженную анизотропию свойств. В основу методики динамического эксперимента положен метод Кольского и его модификации.

В качестве эффективного и высокоточного численного метода расчета напряженно-деформированного состояния трехмерного анизотропного тела используется метод граничных элементов в сочетании с применением интегрального преобразования Лапласа по переменной времени. Граничные интегральные уравнения (ГИУ), соответствующие исходным дифференциальным уравнениям трехмерной анизотропной линейной теории упругости, получены в рамках прямого подхода на основе обобщенной формулы Грина–Бетти–Сомильяны. Использовано интегральное представление анизотропных функций Грина: динамическая часть записана в виде интеграла по единичной полусфере, статическая в виде интеграла по единичной окружности.

Гранично-элементная техника решения ГИУ опирается на восьмиузловые биквадратичные элементы, применяемые для аппроксимации геометрии границы рассматриваемого тела. Пространственная дискретизация полученных ГИУ основана на методе коллокаций для смешанных граничных элементов с линейной и постоянной аппроксимацией перемещений и поверхностных усилий, соответственно. В отличие от традиционно применяемого изопараметрического подхода, подобное разделение узлов коллокаций позволяет сохранить непрерывность перемещений и одновременно корректно моделировать поверхностные усилия, которые в общем случае могут терпеть разрыв при переходе с элемента на элемент. Получение решения во временной области опирается на схемы численного обращения интегрального преобразования Лапласа.

Приводятся результаты гранично-элементного исследования нестационарной динамики трехмерного анизотропного упругого тела.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 16-38-60097 мол\_а\_дк, № 15-08-02814 А, № 15-48-02333 р\_поволжье\_а, № 16-31-00450 мол\_а и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-5395.2016.1.

## Напряженно-деформированное состояние в эллиптических конструкциях из трансверсально-изотропных материалов

**Мирошниченко И. П.**

*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

Обобщенный метод скаляризации динамических упругих полей в трансверсально-изотропных средах, предложенный профессором Сизовым В. П., успешно применяется при исследовании упругих полей перемещений, напряжений и деформаций в слоистых конструкциях из различных материалов, включая трансверсально-изотропные композиты. Данный метод позволяет выразить поля перемещений, напряжений и деформаций через скалярные потенциалы, соответствующие квазипродольным, квазипоперечным и чисто поперечным волнам. Отмеченная скаляризация возможна, если рассматриваемые объекты являются тензорами относительно подгруппы общих преобразований координат, когда локальный аффинный базис имеет один инвариантный вектор, совпадающий с осью материальной симметрии материала.

На основе тензорных соотношений метода скаляризации разработан научно-методический аппарат для определения напряженно-деформированного состояния в слоистых эллиптических конструкциях, выполненных из изотропных и трансверсально-изотропных композиционных материалов, учитывающий особенности всех типов волн, распространяющихся в данных материалах, волновых процессов в слоистых структурах и влияние кривизны поверхности рассматриваемых конструкций при заданном пространственно-временном распределении источников импульсного воздействия. Предложены методики определения напряженно-деформированного состояния в эллиптическом стержне, пространстве с эллиптической полостью и толстой эллиптической трубе для частных случаев двумерных задач. Рассмотрен общий случай возбуждения упругих волн в слоистых эллиптических конструкциях.

Предлагаемый научно-методический аппарат позволяет провести анализ возникающего в конструкции сложного напряженно-деформированного состояния, формируемого не только первичным возмущением, но и возмущениями, вызванными многократными переотражениями волн от границ слоев, интерференционными явлениями и дифракцией, в произвольно заданных областях конструкции в любой момент времени как в процессе воздействия, так и по его завершении.

Разработано оригинальное программное обеспечение, реализующее предлагаемый научно-методический аппарат, предложены оригинальные программные продукты для вычисления высших трансцендентных функций — функций Матье, модифицированных функций Матье в виде рядов произведений функций Бесселя и рядов функций Ганкеля, входящих в решения задач для эллиптических конструкций.

Полученные результаты наиболее целесообразно использовать при создании перспективных конструкций из новых анизотропных композиционных материалов, контроле качества их изготовления и диагностике состояния в процессе эксплуатации в машиностроении, судостроении, авиастроении и т. п.

## Особенности волновых процессов в слоистых цилиндрических конструкциях из трансверсально-изотропных материалов

**Мирошниченко И. П.**

*Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

Интенсивное создание и повсеместное использование новых видов конструкционных материалов (композиционных, полимерных, слоистых и т. п.) и изделий приводит к необходимости разработки новых методов и программного обеспечения для проведения анализа их напряженно-деформированного состояния для различных расчетных случаев на всех этапах их жизненного цикла.

При исследовании упругих полей перемещений, напряжений и деформаций в слоистых конструкциях из различных материалов, включая трансверсально-изотропные композиты, успешно применяется обобщенный метод скаляризации динамических упругих полей в трансверсально-изотропных средах, предложенный профессором Сизовым В. П., при помощи которого отмеченные поля могут быть выражены через скалярные потенциалы, соответствующие квазипродольным, квазипоперечным и чисто поперечным волнам, при этом, такая скаляризация возможна, если рассматриваемые объекты являются тензорами относительно подгруппы общих преобразований координат, когда локальный аффинный базис имеет один инвариантный вектор, совпадающий с осью материальной симметрии материала.

Предложен научно-методический аппарат для определения полей перемещений, напряжений и деформаций в слоистых цилиндрических конструкциях при однократном или многократном импульсном воздействии по внешней и (или) внутренней поверхности рассматриваемых конструкций, при этом, слои могут быть произвольной толщины и выполнены из изотропных и трансверсально-изотропных материалов со своими индивидуальными физико-механическими характеристиками, а также обладать свойствами жидких и газообразных сред.

Предлагаемый научно-методический аппарат позволяет провести анализ возникающего в конструкции сложного напряженно-деформированного состояния, формируемого не только первичным возмущением, но и возмущениями, вызванными многократными переотражениями волн от границ слоев, интерференционными явлениями и дифракцией, в произвольно заданных областях конструкции в любой момент времени как в процессе воздействия, так и по его завершении.

Предложены методики определения напряженно-деформированного состояния в слоистых цилиндрических конструкциях с трансверсально-изотропными слоями для частных случаев двумерных задач, приведены примеры, наглядно демонстрирующие возможности предлагаемого научно-методического аппарата.

Разработано оригинальное программное обеспечение, реализующее описанные методики, проведено численное моделирование, рассмотрены особенности волновых процессов при различных видах внешнего импульсного воздействия, для различных физико-механических характеристик материалов слоев, показаны возможности данного научно-методического аппарата и раскрыты его возможности для решения актуальных прикладных задач.

Влияние упругих характеристик подложки  
на устойчивость скользящего контакта тел с покрытиями

**Митрин Б. И., Зеленцов В. Б.**

*Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

Покрытия широко применяются в трибосопряжениях для улучшения их эксплуатационных характеристик. При моделировании скользящего термофрикционного контакта с участием покрытий деформируемостью подложки часто пренебрегают, что не всегда правомерно. В целях исследования влияния упругой подложки на устойчивость скользящего термофрикционного контакта рассматривается динамическая задача термоупругости в рамках плоской деформации о скольжении с постоянной скоростью жесткого тела (недеформируемой полуплоскости) по поверхности упругого покрытия, нижняя поверхность которого сцеплена с упругой подложкой в виде упругой полуплоскости из другого материала. Скольжение недеформируемой полуплоскости по поверхности упругого покрытия происходит с учетом кулоновского трения, но без учета износа покрытия. С начального момента времени полуплоскость деформирует упругое покрытие, внедряясь в покрытие вдоль вертикальной оси на глубину  $\Delta(t)$ . Предполагается, что в начальный момент температура покрытия нулевая. Движущаяся полуплоскость теплоизолирована, а поток тепла, образующийся за счет трения, направлен в упругое покрытие. Так как нижняя поверхность покрытия сцеплена с упругой подложкой, то смещения и напряжения на верхней грани подложки и на нижней грани покрытия совпадают. Выполняются условия идеального теплового контакта между покрытием и подложкой. Начальные условия на смещения и их скорости нулевые. На бесконечности в подложке (упругой полуплоскости) смещения и напряжения исчезают.

Решение задачи представлено в виде контурных интегралов, вычисление которых осуществляется с помощью методов интегрирования теории функций комплексного переменного. Получены формулы для нахождения напряжений, смещений, температуры в покрытии и подложке. На основании исследования собственных чисел начально-краевой задачи устанавливается устойчивость ее решения в зависимости от соотношения упругих модулей, коэффициентов теплопроводности покрытия и подложки.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований (14-07-00343-а, 15-07-05208-а, 14-08-92003-ННС\_а). Митрин Б.И. поддержан стипендией Президента РФ № СП-137.2015.1.

## Анализ нелинейных вторых гармоник для волн кручения вдоль трансверсально-изотропного цилиндра

**Моисеенко И. А., Сидаш О. Ю.**

*Донецкий национальный университет*

Проблема анализа эффектов нелинейных ангармонических возмущений при распространении упругих волн в деформируемых телах цилиндрической геометрии на данный момент исследована лишь по достаточно узкому кругу аспектов, охватывающему вопросы генерирования нелинейных вторых гармоник для осесимметричных монохроматических нормальных волн крутильного и продольно-сдвигового типа в изотропных цилиндрах, а также комбинационных вторых гармоник для пар взаимодействующих нормальных волн указанных типов. Также исследованы вопросы описания ангармонических возмущений в случае распространения осесимметричных монохроматических нормальных волн крутильного типа в трансверсально-изотропных цилиндрах в рамках модели учета фактора геометрической нелинейности.

В представляемой работе рассматриваемая проблема исследуется в рамках модели физически и геометрически нелинейного динамического деформирования трансверсально-изотропного упругого тела. Модель базируется на представлении упругого потенциала деформируемой трансверсально-изотропной среды с квадратичными и кубическими членами по конечным деформациям, коэффициенты которого выражаются через пять независимых упругих постоянных второго порядка и десять независимых упругих постоянных третьего порядка. Использована концепция представления характеристик динамического напряженно-деформированного состояния двумя низшими членами разложения по малому параметру в виде отношения максимальной амплитуды исследуемых волн к радиусу волновода и сведения задачи описания ангармонических возмущений к рекуррентной последовательности краевых задач первого (линейного) и второго приближения. Показано, что для цилиндров с данным типом физико-механической симметрии нелинейные вторые гармоники уединенных монохроматических нормальных крутильных волн представляют собой упругие волны продольно-сдвигового типа с удвоенной частотой и удвоенным волновым числом линейной нормальной волны кручения. На основе применения специального алгоритма аналитических преобразований в среде компьютерной алгебры получены представления для волновых перемещений во вторых гармониках в свободных и закрепленных по боковой поверхности цилиндрах в форме абсолютно сходящихся степенных рядов по радиальной координате. Реализован анализ зависимостей кинематических и энергетических характеристик нелинейных ангармонических возмущений от факторов относительной длины и выбора порядкового номера моды линейной нормальной волны кручения. Представлены результаты сопоставления оценок для кинематических характеристик вторых гармоник, полученных в рамках парциальных моделей геометрически- и физически-нелинейного динамического деформирования.

## Об особенностях строения дисперсионного множества для неоднородных цилиндрических волноводов

**Моргунова А. В.**

*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

В связи с обширным использованием в различных областях протяженных структур, таких как трубопроводы и различные конструкции на основе цилиндрических тел, возникает необходимость в анализе некоторых характеристик тел подобной структуры, например, напряженного состояния и волновых полей.

В данной работе рассмотрена задача о распространении волн в упругом трансверсально-изотропном волноводе кольцевого поперечного сечения, упругие характеристики которого являются функциями радиальной координаты. Рассматриваются различные геометрические параметры волновода и свойства трансверсально-изотропного материала.

Для анализа волнового поля внутри цилиндра и на его поверхности строится дисперсионное множество, которое позволяет выявить некоторые свойства и особенности мод колебаний. Следует отметить, что для однородного изотропного цилиндра дисперсионное уравнение выражается через функции Бесселя, в данном же случае возможно исследовать дисперсионное множество лишь численно методом пристрелки, однако, некоторые закономерности его строения и характеристики волн в низкочастотной области исследованы аналитически.

Задача о построении дисперсионной картины для трансверсально-изотропного цилиндра со свободными границами рассмотрена в цилиндрической системе координат. Решение строится путем отыскания нетривиального решения канонической системы дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами. Точки дисперсионного множества представляют собой гладкие кривые, причем одна из ветвей выходит из начала координат. Установлено существование двух семейств кривых, порождаемых двумя задачами для стоячих волн. Проведено аналитическое исследование, позволившее описать некоторые особенности первых мод обоих семейств, а именно получена точная формула тангенса угла наклона линейного участка моды, для частного случая задачи частот запираения получено аналитическое решение. Описаны особенности строения дисперсионного множества для слоистого цилиндра (структура, близкая к слоистой структуре сосуда). Исследованы участки аномальной дисперсии, зависимости от геометрических параметров и свойств материала.

Отдельно рассмотрена задача о крутильных колебаниях цилиндра. Задача сведена к рассмотрению канонической системы двух дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами. Численным методом получена картина дисперсионного множества для данной задачи. Аналитически исследованы некоторые особенности его строения. Проведено сравнение результатов, полученных аналитически, и численного метода, которое показало практическое совпадение результатов.

## Математические модели континуума с легкоуправляемым микроструктурным директором

**Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н.**

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва*

В представляемой работе рассматривается теоретико-полевой метод построения математических моделей континуумов с микроструктурой. Микроструктура континуума задается одним микрополярым (легкоуправляемым) директором. Для таких континуумов исследуется возможность обобщения канонических тензоров связанного термоупругого поля. С этой целью используется вариационный принцип наименьшего действия и теория вариационных симметрий. Специальные модели определяются соответствующей плотностью термоупругого действия (лагранжианом). Действие в вариационной формулировке принципа представляет собой интегральный функционал, варьирование которого осуществляется по физическим полевым переменным при фиксированных пространственно-временных координатах. Микрополярый континуум характеризуется не только трансляционными перемещениями, но также дополнительными, в данном случае, вращательными степенями свободы. В отличие от обычной теории упругости деформация микрополярного континуума представляется векторами экстрадеформации и асимметричными тензорами экстрадеформации. В такого рода теориях тензор напряжений также асимметричен. Микрополярная термоупругость характеризуется сравнительно большим числом определяющих упругих постоянных, идентифицируемых экспериментально со значительными трудностями. Подобное усложнение определяющих соотношений объясняется невозможностью в рамках классической теории упругости объяснить, например, поведение нематических жидких кристаллов, аномальный пьезоэффект в кварце, дисперсию упругих волн и другие физически-нелинейные эффекты. В работе дана схема построения тензора энергии-импульса микрополярного термоупругого тела, исходя из трансляционной инвариантности действия. На этой основе могут быть получены компоненты тензора напряжений Эшелби, характеризующего, в частности, напряженное состояние вблизи сингулярностей поля, вектора Умова–Пойнтинга, вектора псевдоимпульса и гамильтониана (полной энергии). Тензор напряжений Эшелби традиционно находит широкое применение в механике разрушения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-31-21111 мол\_а\_вед, № 15-41-02453 р\_поволжье\_а, № 13-01-00139 а) и Министерства образования и науки РФ в рамках проектного задания Самарского государственного технического университета (№ 16.2518.2014/К).

## Модель управления гетерогенными данными в медицинской информационной системе на основе XML-технологий

**Мутин Д. И.**

*Институт машиноведения им. А. А. Благодирова РАН, Москва*

В общем виде современные медицинские информационные системы можно охарактеризовать как набор слабосвязанных между собой программных приложений, которые работают с одной или несколькими базами данных, содержащими информацию, существенную для деятельности учреждения, и позволяющими автоматизировать все или отдельно взятые бизнес-процессы этой организации. Информационное пространство медицинского учреждения организовано из различных секторов, что усложняет доступ к информации в связи с различиями в способах ее хранения, вплоть до того, что каждая база данных, электронная таблица или Web-сайт требуют специальных программ для извлечения данных. «Границы» между источниками данных не только сдерживают использование информации для анализа, но и увеличивают расходы, связанные с процессом создания запросов и транзакций, пересекающих «границы» данных. Объединение данных становится высшим приоритетом, так как их большинство поступает в неудобной и слабоструктурированной форме: начиная с огромного количества страниц Excel, кончая отчетами в файлах формата PDF и Web страницах. Дальнейшее совершенствование методологий автоматизированной обработки и управления данными в распределенных медицинских информационных системах (МИС) связано, в частности, в том, что данные, хранимые и используемые в таких системах, являются не жестко структурированными; запросы к содержимому документов достаточно сложны; схемы непрерывно и неконтролируемо развиваются, что должно сопровождаться обеспечением возможностей гибкого хранения данных; во многих случаях процессы управления информационными потоками и типология документов должны характеризоваться минимальной абстрактной формализацией и максимально соответствовать реальным рабочим процессам в медицинской сфере. В качестве одной из мер снижения количества информационных потоков до количества функциональных подсистем предлагается модель интеграции гетерогенных информационных потоков путем приведения их к единому универсальному формату представления информации. В роли универсального носителя выступает XML-документ, способный хранить сведения любой, ранее определенной структуры. В качестве инструмента хранения выступает XML-база данных. Хранилище данных промежуточного уровня на основе XML предоставляет собой систему, способную быстро индексировать, запрашивать и обрабатывать разделенные данные, используя XML как промежуточный формат. Хранилище данных на основе XML формируется как схемо-независимое, в котором может быть описана связь между данными различных типов. Естественная XML-база данных определяет логическую модель XML-документа (в отличие от данных, содержащихся в этом самом документе), сохраняет и извлекает документы в соответствии с этой моделью; документ XML в NXD-базах выступает в качестве основной единицы хранения; NXD-базы построены на основе любой физической модели хранения информации.

## Моделирование массопереноса в мелком протяженном и слабо искривленном водотоке малой мутности

Надолин К. А.<sup>1</sup>, Жиляев И. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

Математическое описание процессов массопереноса является важной частью моделей водной экологии. В связи с большой сложностью многопараметрической оценки качества вод особое значение имеют редуцированные модели распространения вещества, позволяющие приближенно, но адекватно описать процесс перемешивания и разбавления примесей. При этом распределенные модели, использующие уравнения в частных производных, являются наиболее точными.

Особенностью речных экосистем является значительная протяженность и малая глубина руслового потока относительно его ширины: отношение между характерной глубиной и характерной шириной речного русла колеблется в пределах от 0,1 до 0,005. Это позволяет применить методы малого параметра для получения модельных уравнений. Ключевым моментом используемого подхода является то, что размеры поперечного сечения русла в вертикальном и горизонтальном направлениях существенно различаются и их отношение может служить малым параметром. Заметим, что исследование процесса диффузии вещества в протяженном потоке представляет самостоятельный интерес и является предметом многочисленных экспериментальных и теоретических исследований начиная с работ Тейлора середины прошлого века.

В докладе представлены результаты численного исследования пассивного переноса вещества с учетом процессов его диффузии и распада в рамках одной из предложенных ранее математических моделей массопереноса безнапорным потоком в недеформируемом русле, а именно редуцированной трехмерной модели мелкого протяженного потока. Особое внимание уделено учету влияния на массоперенос турбулентности потока. В силу предположения о пассивности примеси неизвестные поля скорости и давления определяются из независимой подсистемы, которую в некоторых случаях удается проинтегрировать аналитически. Уравнение для концентрации приходится решать численно. Заметим, что в используемой модели учитывается пространственная структура течения, что позволяет изучить влияние таких внешних факторов, как например, воздействие ветра, а также изменение формы русла и береговой линии на особенности распределения вещества в потоке.

Для верификации редуцированной модели было проведено прямое численное моделирование как течения, так и распространения примеси в потоке на основе полных моделей, реализованных в конечно-элементном программном комплексе COMSOL. Были рассмотрены как ламинарные, так и турбулентные течения. Полученные результаты позволяют утверждать, что предложенная редуцированная 3D модель массопереноса адекватно описывает гидродинамику и перенос вещества в мелком протяженном и слабо искривленном водотоке малой мутности.

## Комбинированные нейросетевые и статистические бессеточные методы моделирования потенциальных физических полей

**Назаров А. С., Ткачев А. Н.**

*Южно-российский государственный политехнический университет (НПИ)  
им. М. И. Платова, Новочеркасск*

Рассматривается задача расчета трехмерного потенциального физического поля в ограниченной области, заполненной средой с линейными характеристиками, при заданных условиях типа Дирихле на границе. Задачи такого типа возникают при анализе работы технических систем различного назначения и определении их интегральных характеристик. Расчет поля сводится к решению краевой задачи для уравнения Лапласа. Решение (потенциал поля) находится комбинированным методом с использованием нейросетевого решателя (Горбань А. Н., Росшев Д. А. Нейронные сети на персональном компьютере. Новосибирск: Наука, Сиб. отделение, 1996. 276 с.) и метода статистических испытаний Монте–Карло.

Метод Монте–Карло применяется для нахождения решения в конечном (небольшом) числе точек, размещенных в расчетной области. Для этих целей использовалась модификация алгоритма блуждания по сферам. Нахождение решения в точках расчетной области в процессе блуждания достигается за счет специального выбора радиуса сфер и направления движения (направляющих косинусов). Величина радиуса, а также направления перемещений точки генерируются методом Монте–Карло с учетом принятого закона распределения радиуса и равномерно по отношению к углам, задающим перемещения.

Для снижения погрешности нейросетевой аппроксимации решения с использованием значений потенциала, заданных на границе и найденных в результате статистических испытаний, разработана итерационная процедура. Потенциал аппроксимируется линейной комбинацией фундаментальных решений уравнения Лапласа и гармонических полиномов невысоких степеней. Коэффициенты линейной комбинации определяются методом коллокаций в точках, размещенных на границе расчетной области. После этого обучение нейронной сети выполняется на функции, приближающей решение (линейной комбинации) с учетом того, что ее значения во внутренних точках области известны. В результате подбирается число внутренних и граничных узлов, а также размещение внутренних узлов в расчетной области так, чтобы обеспечить допустимую нейросетевую аппроксимацию решения в расчетной области. Принятое число внутренних узлов и порядок их размещения используется для нахождения решения методом Монте–Карло. Значения потенциала в любой внутренней точке расчетной области находятся с помощью обученного нейросетевого решателя.

Уточнение структуры нейронной сети (число скрытых слоев, число нейронов в каждом слое, тип активационных функций) и оценка точности были выполнены путем численных экспериментов.

Результаты работы получены при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на проведение НИОКР, шифр заявки № 2819.

## Конечно-элементный анализ восстановления большеберцовой кости с помощью аппарата наружной фиксации

**Найдёнова Л. С., Маслов Л. Б., Сабанеев Н. А.**

*Ивановский государственный энергетический университет им. В. И. Ленина*

В основе жизнедеятельности любого организма и его регенерации лежат процессы обмена веществ во всех структурных элементах, которые характеризуются высвобождением необходимой для жизни энергии, выделением конечных продуктов обмена и специфическим самовоспроизведением живой материи с использованием химических неорганических и органических веществ. Известно, что живые ткани в процессе своего роста и развития существенным образом реагируют на внешнее силовое поле, в котором они функционируют. Остеобласты формирования костной ткани являются одними из ярких представителей живых клеток, на которые положительно влияют внешние механические стимулы. Например, при восстановлении костной ткани после перелома запускается механизм репаративной регенерации клеток между костными отломками. Возмущения, вносимые внешней механической нагрузкой в установившееся движение жидкости в транспортной системе кости, могут обеспечивать управление скоростью и самим процессом структурной перестройки.

Цель работы состоит в исследовании влияния аппарата наружной фиксации на процесс регенерации кости в зоне перелома методами математического моделирования. Задача состоит в том, чтобы разработать и проанализировать трёхмерную модель регенерации костной ткани с аппаратом наружной фиксации, который является многофункциональной системой для использования при переломах и повреждениях верхних и нижних конечностей, а также таза. Преимуществами системы являются быстрая, простая и надёжная фиксация, многофункциональность и взаимозаменяемость всех компонентов системы, самоудерживающиеся подпружиненные зажимы, карбоновая штанга не ограничивает визуализацию перелома, безопасна при проведении МРТ-исследований.

Для реализации алгоритма перестройки костной ткани была использована трёхмерная конечно-элементная модель кости человека. С её помощью был проведён ряд численных экспериментов, заключающихся в исследовании влияния механического воздействия гармонического характера на процесс регенерации кости в зоне перелома.

С помощью программы FE3DRPEV (Маслов Л. Б., ИГЭУ) трёхмерного конечно-элементного моделирования физико-механических характеристик костной ткани в процессе регенерации и программного комплекса ANSYS были получены пространственные картины изменения плотности костной ткани в зоне перелома с течением времени. После проведения всех вычислительных экспериментов можно сделать вывод о том, как влияет аппарат наружной фиксации на процесс восстановления большеберцовой кости.

## Особенности построения маршрута головки 3D-принтера средствами APDL

**Напрасников В. В.<sup>1</sup>, Соловьев А. Н.<sup>2</sup>, Мартинович В. В.<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Белорусский национальный технический университет, Минск*

<sup>2</sup>*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

3D-принтер — это периферийное устройство, использующее метод послойного создания физического объекта по цифровой 3D-модели. 3D-печать может осуществляться разными способами и с использованием различных материалов, но в основе любого из них лежит принцип послойного создания (выращивания) твёрдого объекта. При 3D-печати создание модели упрощается, ускоряется и часто удешевляется. С помощью аддитивного прототипирования (так называется 3D-печать на научном языке) можно создать практически любую деталь.

Одна из основных целей — прототипирование, построение моделей для конструкторских бюро. Модель можно быстро создать, повертеть ее в руках, оценить, заметить ошибки. Второе — изготовление оснастки, то есть отдельных компонентов или «запчастей», когда речь идет о мелкосерийном или единичном производстве. Архитектурные бюро могут использовать 3D-принтер для создания моделей зданий, сооружений, малых архитектурных форм.

Для послойного создания твердого объекта используется язык параметрического проектирования программы ANSYS (APDL), который дает возможность автоматизировать процесс за счет «интеллектуального» анализа, т. е. за счет такой организации программы, когда решение принимается на основе установленных соотношений, значений переменных и критериев. Использование языка APDL расширяет возможности программы за пределы традиционного конечно-элементного анализа и предоставляет более развитые процедуры, относящиеся к проверке чувствительности решения к изменениям исходных данных, параметрическому моделированию на основе базовых геометрических примитивов, внесению изменений в проект и его оптимизации.

На основе языка APDL предварительно необходимо построить сечения модели плоскостями, которые перпендикулярны оси Z. Расстояние между сечениями является параметром, который определяет высоту следа. В каждом сечении формируется массив линий соответствующих однократному проходу раздаточной головки по прямой. Расстояние между линиями является параметром, связанным с особенностью конструкции 3D-принтера, который определяет ширину следа. После построения массива линий в каждом сечении можно осуществить однократный проход раздаточной головки.

Все многообразие средств языка APDL дает возможность настроить программному таким образом, чтобы удовлетворить разнообразные запросы, возникающие при моделировании и выполнении анализа. При умелом подходе и известной изобретательности пользователь может создавать весьма совершенные средства для достижения максимума эффективности программы в сфере конкретных приложений.

Конечно-элементный анализ  
и оптимизация трубчатого пьезопреобразователя  
со спиральными электродами с учетом акустической среды

**Наседкин А. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Пьезопреобразователи, генерирующие преимущественно крутильные колебания, имеют важные применения, например, в микромоторах, в линиях задержки на крутильных колебаниях, в пьезоэлектрических вибрационных вискозиметрах и в других устройствах. При этом во многих случаях для исследования характеристик таких пьезопреобразователей необходимо учитывать влияние окружающих их акустических сред. Известны различные конструкции преобразователей крутильных колебаний: преобразователи спиральной формы; преобразователи с многоэлектродным покрытием и с неоднородными полями поляризации и возбуждения колебаний; преобразователи с окружной поляризацией, полученной при разрезании, технологической поляризации и склейки их элементов; и т. п. Однако эти преобразователи дороги и сложны в изготовлении, особенно при их миниатюрном исполнении. Альтернативным подходом являются монолитные преобразователи простой геометрической формы, но со сложными видами электродов, позволяющими генерировать крутильные колебания.

В работе представлены результаты моделирования и оптимизации пьезоэлектрического преобразователя в форме полого цилиндра с двумя спиральными (винтовыми) проволочными электродами, расположенными на его внешней поверхности. Цилиндр считался жестко закрепленным на одном из торцов, а все остальные его границы принимались свободными от напряжений. В таком преобразователе при подаче разности потенциалов между спиральными электродами за счет пьезоэффекта генерируются связанные осевые и крутильные перемещения, причем существуют преимущественно крутильные моды колебаний. В развитие проведенных ранее исследований здесь с использованием конечно-элементного пакета ANSYS исследуется преобразователь с учетом внешней акустической среды. При этом поляризация материала преобразователя считалась кусочно-однородной на выбранной конечно-элементной сетке и вычислялась в процессе решения отдельной задачи электростатики, моделирующей процесс поляризации пьезокерамического цилиндра заданными спиральными электродами.

С использованием разработанных программ на языке APDL ANSYS были проведены расчеты низших частот электрических резонансов и антирезонансов крутильных колебаний и построены амплитудно-частотные характеристики электрического импеданса пьезопреобразователя в режиме установившихся колебаний вблизи рабочих резонансных частот при различной пористости пьезокерамического материала и при различной вязкости акустической среды. В результате проведенных вычислительных экспериментов был сделан вывод об эффективности трубчатого преобразователя со спиральными электродами из пористой пьезокерамики для генерирования крутильных движений и измерения вязкости внешней акустической среды.

Работа выполнена в рамках проекта РФФ № 15-19-10008.

## Моделирование обнаружения дефектов в трубах при помощи торсионных и продольных волн

Наседкина А. А.<sup>1</sup>, Татаринов А. М.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Рижский технический университет*

Контроль состояния труб необходим в нефтехимической промышленности, где используются для транспортировки нефти и нефтепродуктов трубы подвержены коррозии. Коррозию внутренней и даже внешней поверхности трубы особенно трудно обнаружить, если трубопровод проходит под землёй. Традиционные методы проверки состояния труб состоят из серии точечных испытаний, которые проводятся с наружной поверхности трубы. Главный недостаток этих методов заключается в их высокой стоимости и большой трудоемкости, в особенности если трубопровод залегает глубоко под землей.

Современные методы неразрушающего контроля позволяют обнаруживать дефекты в трубах с помощью направленных ультразвуковых волн. Использование свойств ультразвуковых направленных волн, которые могут распространяться вдоль трубы на расстояние более 100 м, значительно сокращает время проверки и снижает затраты по сравнению с точечными методами проверки. Установленное в определенном месте оборудование для длинноволнового ультразвукового контроля регистрирует отраженные волны, которые указывают на существование коррозии или других дефектов в отдаленных участках трубы. Существует три вида направленных волн, которые могут распространяться вдоль трубы: продольные, торсионные (крутильные) и изгибные.

В данной работе моделируется распространение продольных и торсионных ультразвуковых направленных волн в стальной трубе с различными видами дефектов. Для решения нестационарной начально-краевой задачи теории упругости используется техника метода конечных элементов. В конечно-элементном пакете ANSYS были построены твердотельные и конечно-элементные модели трубы с дефектами и трубы без дефекта. Чтобы смоделировать распространение ультразвуковых направленных волн в изотропной среде, к одному из концов трубы была приложена сила, описывающая подаваемый сигнал. При этом для моделирования продольных волн подаваемая нагрузка была направлена вдоль длины трубы, а для моделирования торсионных волн нагрузка была направлена по касательной к окружности трубы.

Результаты расчетов позволили получить картины распределения перемещений и эквивалентных напряжений в трубе для различных моментов времени, а также графики изменения рассматриваемых величин от времени для различных узлов в интересующих областях наблюдения. Результаты моделирования позволили оценить амплитуду и время прохождения импульса, отраженного от дефекта, а также оценить влияние дефектов различного вида на напряженно-деформированное состояние трубы.

Работа выполнена в рамках проекта INNOPIPES, No. PIRSES-GA-2012-318874.

## Конечно-элементный расчет эффективных свойств пористого пьезокерамического материала с локальным легированием наночастицами поверхностей пор

**Наседкина А. А., Рыбьянец А. Н.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В последние годы активно разрабатываются пьезокерамические композиционные материалы и, в частности, пористые пьезокерамические материалы с улучшенными эксплуатационными характеристиками. Недавно вторым автором настоящего доклада был предложен оригинальный метод локального легирования нанопористых пьезокерамических материалов наночастицами различных веществ. Предлагаемая технология основана на методе транспортировки наночастиц веществ в керамические матрицы. В результате применения данного метода можно получать пористые пьезокерамические материалы, внутри которых на границах керамической матрицы с порами осаждены наночастицы из металла или полимера.

В настоящем докладе представлены первые численные результаты по расчету эффективных свойств таких пористых пьезокерамических материалов. Исследование проведено на основе комплексного подхода, включающего метод эффективных модулей механики композитов, моделирование представительных объемов, конечно-элементное решение набора статических задач теории пьезоэлектричества со специальными граничными условиями и постпроцессорную обработку результатов вычислений.

Представительный объем строился следующим образом. На первом этапе задавалась кубическая решетка из одинаковых пьезоэлектрических кубических конечных элементов. Далее датчиком случайных чисел выбирались конечные элементы, материальные свойства которых модифицировались на свойства пор. Наиболее нетривиальным этапом являлось нахождение граней контакта пьезоэлектрических элементов с пористыми элементами. После выполнения этого этапа также датчиком случайных элементов часть граней контакта пьезоэлектрических и пористых элементов покрывалась оболочечными упругими элементами. В результате генерировался представительный объем, включающий кубические пьезоэлектрические конечные элементы, элементы — поры и оболочечные упругие элементы.

Для численного решения статических задач теории пьезоэлектричества в неоднородном представительном объеме применялся конечно-элементный комплекс ANSYS, для которого были разработаны соответствующие программы на макроязыке APDL.

Результаты вычислительных экспериментов по решению тестовых задач позволили оценить влияние легирования поверхностей пор оболочечными элементами на значения эффективных модулей пористых пьезоэлектрических материалов, полученных на основе метода транспортировки наночастиц веществ в керамические матрицы.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ 16-01-00785.

## Интерактивное приложение для обучения алгоритмам в робототехнике

**Невский Ю. К., Чердынцева М. И.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

На сегодняшний момент существует потребность в квалифицированных программистах и работниках в сфере робототехники. В связи с этим возникает необходимость в обучающих технологиях, позволяющих осуществлять подготовку персонала в данных областях. Реализованный проект представляет собой специальное программное обеспечение, которое может применяться для обучения любых категорий обучающихся (даже школьников) в таких областях как программирование, робототехника и искусственный интеллект.

В текущей версии реализована виртуальная модель робота, поведение которого задается специальным языком программирования, разработанным в рамках данного проекта. Существующие аналоги, использующие виртуального робота для визуализации алгоритмических процессов, позволяют только дискретно управлять роботом на клеточном поле. Реализованное приложение позволяет перемещать и осуществлять повороты, учитывая показания сенсора (расстояние до препятствия).

Разработан интерфейс для написания программного кода и компилятор, переводящий код программы в байтовую последовательность команд, а также модуль, ответственный за исполнение полученной байтовой последовательности команд. Полученная последовательность может использоваться в реальных устройствах (роботах) с предварительно настроенным интерпретатором этих команд. На данный момент для удобства наблюдения за моделью робота, поведение которого задается программным кодом, реализован графический модуль. Также разработаны следующие функции управления роботом: перемещение робота на заданное расстояние, поворот робота на определенный угол, определение расстояния от робота до препятствия. Такой набор функций для управления роботом уже позволяет реализовывать сложные алгоритмы принятия решений (например, таких как, поиск пути в лабиринте).

Помимо функций управления роботом, в язык программирования включены стандартные операторы императивных языков программирования условный оператор (if (condition) statements [else statements]), оператор цикла (while (condition) statements), объявление переменных (целых, вещественных, строковых и массивов соответствующих типов). Имеется возможность использовать арифметические выражения, состоящие из объявленных переменных, констант и операций над ними.

Таким образом, разработанное программное средство обеспечит более легкое обучение основам алгоритмизации, робототехнике и теории искусственного интеллекта. Созданный язык программирования прост в изучении и может использоваться при самообучении.

Программа оценки факторов и степени риска развития  
сопутствующих осложнений на модели пациентов  
с дегенеративными заболеваниями позвоночника

Негреева М. Б.<sup>1</sup>, Ульянов В. С.<sup>2</sup>, Манцивода А. В.<sup>2</sup>, Ларионов С. Н.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Иркутский научный центр хирургии и травматологии*

<sup>2</sup>*Иркутский государственный университет*

В лечении пациентов с дегенеративными заболеваниями позвоночника имеются определённые трудности, обусловленные имеющимися у них соматическими заболеваниями, конституциональными и метаболическими особенностями, так как последние определяют повышенные риски развития сопутствующих заболеваний и осложнений.

В рамках исследования разрабатывается информационная система оценки факторов и степени риска развития сопутствующих заболеваний, прежде всего сердечно-сосудистых. Данная информационная система апробируется на пациентах с дегенеративными заболеваниями позвоночника, но на самом деле представляет собой облачный сервис применимый для широкого круга задач. В систему вносятся биологические, поведенческие, антропометрические, физиологические и другие показатели, на основе которых рассчитываются соответствующие индексы и коэффициенты, отражающие риски, определяется их степень.

Качественная оценка по критериям/индексам проводится в соответствии с классификациями ожирения по ИМТ и риска сопутствующих заболеваний, вероятности возникновения сердечно-сосудистых заболеваний по ИТБ (ВОЗ, 2004 г.), Рекомендациями экспертов Всероссийского научного общества кардиологов по диагностике и лечению метаболического синдрома (2010 г.). В рамках работы предложена количественная интерпретация качественных показателей рисков, а также метод расчета средневзвешенной интегральной оценки. Используются статистические методы анализа: расчёт относительных рисков, корреляция факторов и эффектов, регрессионный анализ. С целью повышения точности прогнозирования рисков применяются методы Data Mind и машинного обучения.

Облачный сервис позволит выделить и проанализировать основные факторы риска сопутствующих заболеваний, распределить больных по степени выраженности риска. Его универсальность заключается в возможности адаптации и использования при многих заболеваниях, массовых скрининговых исследованиях. Оценка степени риска развития сопутствующих заболеваний необходима для определения тактики лечения и в целом — разработке медико-профилактической программы реабилитации пациентов.

## Идентификация упругих и диссипативных характеристик подрельсового основания

Неклюдова Г. А., Евтух Е. С.

*Брянский государственный технический университет*

При перекатывании колеса вагона через рельсовый стык железнодорожного пути наблюдается удар, сопровождаемый колебательными процессами, в которые вовлечены как элементы экипажа, так и элементы пути. Процесс колебаний описывается дифференциальными уравнениями, в которые входят величины, представляющие экипаж и путь.

Одна из наиболее сложных задач — определение упруго-диссипативных свойств балластного слоя. Эта сложность связана с тем, что он представляет собой сыпучую среду, для которой может быть применена модель с сухим трением. Однако, использование такой модели в расчетах неудобно, поэтому ее заменяют моделью среды с вязким трением, и тогда возникает необходимость определения коэффициента вязкого трения таким образом, чтобы эта модель обеспечивала эквивалентное рассеяние энергии в балластном слое.

Вторая сложность учета балластного слоя заключается в том, что эта характеристика сильно зависит от времени года, погодных условий и степени загрязнения балласта. Этим объясняется довольно большой разброс количественной оценки, полученной различными авторами.

Для экспериментального определения упруго-диссипативных характеристик балластного слоя была разработана лабораторная установка.

При разработке схемы установки преследовалась цель обеспечить определение жесткости балластного слоя, а также балластного слоя вместе с комплектом прокладок, и коэффициента демпфирования балластного слоя. Эта цель достигается путем записи свободных колебаний массы грузов на пружине. За счет применения рычага создается необходимое усилие на комплект прокладок.

Для определения жесткости балласта замерены перемещения точки подвеса массы в зависимости от веса груза. Получена практически линейная зависимость осадки балласта от приложенной силы.

С помощью разработанной лабораторной установки исследованы свободные колебания массы, подвешенной к рычагу через пружину.

Параметр гашения колебаний в балластном слое определен путем подбора. Дифференциальные уравнения решались методом Рунге–Кутты с использованием стандартных программ MathCAD. Наилучшее приближение достигнуто при значении коэффициента диссипации балластного слоя 140 кНс на метр.

С использованием разработанной установки, получено значение коэффициента жесткости балластного слоя 65,6 МН на метр, что не противоречит значениям, полученным при натуральных испытаниях.

## Об особенностях идентификации термомеханических характеристик биологических тканей

**Нестеров С. А.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В настоящее время неинвазивные методы идентификации свойств биологических тканей на основе решения обратных задач, привлекают все большее внимание ученых. Обычно исследователи уделяют внимание определению модуля сдвига, имеющего большое значение для медицинской диагностики различных патологий. Однако при патологических состояниях изменяются и термомеханические характеристики тканей, в частности коэффициент теплопроводности. Известно, что большинство биологических тканей имеет слоистое строение. Так, кожа состоит из трех слоев: нижнего слоя — подкожного жира, среднего слоя — дермы и верхнего слоя — эпидермиса. В работе предложен подход к идентификации одномерных термомеханических характеристик кожи, моделируемой слоем, состоящем из трех термоупругих слоев. Неустановившиеся колебания неоднородного термоупругого слоя возбуждаются тепловым ударом. Сначала к начально-краевой задаче термоупругости для слоя после обезразмеривания было применено преобразование Фурье. Положив параметр преобразования Фурье равным нулю, рассматриваемая задача распадается на две более простые задачи относительно усредненных полей, которые решаются на основе аппарата интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Для решения обратной задачи на основе итерационного процесса применяются ранее полученные операторные уравнения для упругого и термоупругого стержня. Проведены две серии вычислительных экспериментов по восстановлению коэффициента теплопроводности кожи. В первой серии восстанавливался коэффициент теплопроводности нормальной кожи, а во второй серии — патологически измененной кожи.

Коэффициент теплопроводности восстанавливался в два этапа. На первом этапе определялось начальное приближение среди кусочно-однородных функций методом минимизации функционала невязки. На втором этапе определялись поправки реконструируемых функций путем решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода. После нахождения поправок строилось новое приближение, и осуществлялся итерационный процесс уточнения восстанавливаемых характеристик. Критерий выхода из итерационного процесса — достижение некоторого порогового значения функционала невязки. Исследовалось влияние относительной толщины слоев, величины модулей на результат реконструкции. Выяснено, что наибольшая погрешность реконструкции коэффициента теплопроводности 10% возникает в окрестностях точек разрыва, а в остальных точках не превышает 4%. Результаты реконструкции сильно зависят от толщины слоев: чем толще слой, тем результат реконструкции лучше.

Работа выполнена в рамках проекта Министерства образования и науки РФ № 9.665.2014/К.

## Устойчивость полого цилиндра из материала Блейтца и Ко при раздувании и растяжении

**Обрезков Л. П.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассмотрим две задачи о деформации и устойчивости полого упругого цилиндра, поведение которого описывается трёхконстантной моделью удельной потенциальной энергии деформации Блейтца и Ко. Первая задача — деформация цилиндра при одноосном растяжении или сжатии вдоль образующей цилиндра и раздувании или сжатии вдоль радиальной координаты. Вторая — задача о раздувании полого цилиндра при отсутствии осевой нагрузки. Численный анализ поставленных задач выполняется в программной среде Maple. Для описания деформации использовался полуобратный метод. Анализ устойчивости проводился методом линеаризации. В качестве метода линеаризации нелинейных задач использовался метод наложения малой деформации на конечную. Используя уравнения нейтрального равновесия, находится положение тела, которое отличается от первоначального на некоторую малую деформацию и существует без приложения дополнительных поверхностных сил. Такое равновесное состояние называется нейтральным. Сколь угодно малой добавкой к параметру, характеризующему деформацию, тело может быть переведено из данного состояния в неустойчивое положение равновесия. Точку потери устойчивости будем отождествлять с точкой существования нетривиального решения линейной однородной краевой задачи.

В результате исследования получены значения деформаций и усилий, при которых происходит потеря устойчивости цилиндров в указанных постановках. В первой постановке рассмотрены задачи осесимметричной и неосесимметричной потери устойчивости, получены графики бифуркационных кривых, показывающие наличие точек потери устойчивости от коэффициента осевого удлинения цилиндра и соотношения внешних радиусов в отчетной и текущей конфигурациях, из них были построены области устойчивости. Рассмотрено влияние геометрических параметров цилиндра и физических параметров материала, а также параметра дисклинации на вид области устойчивости. Во второй постановке найдены значения точек бифуркации от приложенных нагрузок в зависимости от параметра дисклинации в случае упрощенного материала Блейтца и Ко.

Работа выполнена при поддержке проекта Министерства образования и науки РФ № 9.665.2014/К на выполнение научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания.

## Функционально градиентные пьезоэлектрические элементы, технология поляризации и применение в устройствах накопления энергии

Оганесян П. А.<sup>1</sup>, Скалиух А. С.<sup>1</sup>, Ле З. В.<sup>2</sup>, Лесняк О. В.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Технический университет им. Ле Куй Дона, Ханой*

<sup>3</sup>*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

В работе рассматривается комплексный подход к моделированию функционально градиентных пьезоэлектрических элементов. Рассматривается прикладная теория цилиндрического изгиба, на основе известных положений для электроупругих пластин, позволяющая получить решение задачи электроупругости для устройств, состоящих из нескольких частей с разнонаправленной поляризацией. Для расчета более сложных конструкций использовались конечно-элементные пакеты ACELAN и ANSYS. Были проведены численные эксперименты, позволяющие определить варианты нанесения предварительной неоднородной поляризации с целью улучшения электро-механических свойств пьезоэлементов. Рассмотрены различные подходы к моделированию неоднородной поляризации, включая кусочно-линейные функции, описывающие изменение направления поляризации для наиболее простых случаев, и полный учет неоднородного векторного поля, описывающего поляризацию. Изучались применимости каждого из предложенных методов, что позволяет применять в расчетах наименее затратные с вычислительной точки зрения подходы. Было исследовано влияние геометрических размеров устройства и схемы электродирования на эффект прироста коэффициента электро-механической связи при нанесении предварительной поляризации.

В частности, был исследован трехслойный биморф, состоящий из двух активных слоев пьезокерамики PZT-4 и металлического стержня между ними. Для улучшения электромеханических свойств преобразователя предлагается создать поле предварительной поляризации, в два этапа прилагая напряжение к некоторым конфигурациям электродов. Рассматривалось два подхода к описанию неоднородной поляризации. Первый подход заключается в разбиении модели на блоки, в каждом из которых задается угол поворота вектора поляризации. Во втором случае с помощью модуля комплекса ACELAN была определена поляризация, возникающая при последовательном выполнении заранее определенных шагов нанесения поляризации. Рассматривались первые три электросвязные моды собственных колебаний, для каждой из которых строилась отдельная схема электродирования. Были проведены численные эксперименты с различными размерами электродов. В упрощенном виде «блочной» модели расчеты были проведены в пакете ANSYS. Результаты с высокой точностью совпали с аналогичными, полученными в комплексе ACELAN. Также были проведены эксперименты с подключением пьезоустройства к электрической цепи.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 16-01-00354-а.

## Моделирование электроактивных полимеров и устройств с их применением

**Панфилов И. А., Романенко П. В.**

*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

К электроактивным диэлектрическим полимерам (ЭАП) относят полимеры, способные изменять форму при приложении к ним электрического напряжения, а также преобразовывать механические воздействия в электрическую энергию. Условно этот эффект можно описать как сжатие под действием электростатических сил, или представить ЭАП в качестве конденсатора, который изменяет свою емкость при приложении электрического поля.

По аналогии с пьезокерамикой, можно сказать, что ЭАП обладают обратным и прямым эффектом преобразования энергии. Однако, по сравнению с пьезокерамикой, ЭАП обладают специфичными свойствами, возможностью испытывать большие деформации (100 и более процентов), возможностью изготовления форм сложной геометрии, имеют относительно небольшой вес и др. Благодаря этому ЭАП находят большое применение в моделировании приводов, в том числе моделировании биологических материалов, в частности мышц (Bar-Cohen Y. EAP history, current status, and infrastructure. In: Bar-Cohen Y, editors. *Electroactive Polymer (EAP) Actuators as Artificial Muscles*. Bellingham, WA: SPIE press; 2001, pp. 3–44). Кроме того, ЭАП имеют меньшее «время отклика», чем материалы с памятью форм.

Не менее интересным является прямой эффект преобразования механической энергии в электрическую, что позволяет проектировать различные «гибкие» сенсоры и датчики, а также генераторы электромеханической энергии. Если пьезоэлектрогенераторы, получившие в настоящее время большое распространение, наибольшую эффективность имеют в преобразовании энергии высокочастотных колебаний, то особенностью генераторов из ЭАП является их возможность с высокой степенью эффективности «собирать» энергию от стационарных процессов (Costachea F.-A. et al. Polymer energy harvester for powering wireless communication systems. In: *Procedia Engineering*, Vol. 120, 2015, pp. 333–336).

Важным приложением ЭАП является изготовление на их основе наноструктурированных материалов, полимерных нанокомпозитов и различных биосенсоров (A. Ramanavicius et al. Conducting and Electrochemically Generated Polymers in Sensor Design (Mini Review). In.: *Procedia Engineering*, Vol. 47, 2012, pp. 825–828).

Целью данной работы является вывод основных соотношений на основе нелинейной теории электроупругости для моделирования ЭАП и постановка некоторых краевых задач.

## О локализованных клиновых волнах

**Паринова Л. И.***Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

Изучение проблем, связанных с распространением клиновых волн вдоль ребер упругих тел, актуальны для дефектоскопии, акустики и сейсмологии. Решение задач о нахождении скоростей упругих волн, бегущих вдоль ребер топографических волноводов, используются при создании акустоэлектронных устройств, предназначенных для обработки сигналов в радиоэлектронных системах. Известно, что волновое поле локализуется вблизи ребра пространственного клина, а волновод представляет собой дисперсионную структуру, а скорость распространения волны зависит от частоты колебаний. Ранее изучены волны в бесконечном клине, показано отсутствие дисперсии.

В настоящей работе изучается распространение упругих волн вдоль ребра жестко зацементированного клина конечной высоты из ортотропного материала с малым углом раствора. Считается, что оси упругой симметрии клина совпадают с осями координат. Решение ищется в виде плоской волны, распространяющейся вдоль ребра клина, требуется найти значение волнового числа в зависимости от безразмерной частоты колебаний и соответствующую форму колебаний.

В изучаемом случае способ исследования искомой зависимости, связанный с переходом в уравнения движения к полярной системе координат, оказывается неприменимым, т.к. в анизотропном случае отсутствует разделение переменных. Поэтому для решения задачи и отыскания волнового числа использован приближенный способ, основанный на вариационном подходе. При вариационной трактовке задачи использован вариационный принцип Гамильтона–Остроградского, на основе ряда гипотез произведено упрощение функционала.

При этом колебания клиновидной области разделены на две задачи — о симметричных и антисимметричных колебаниях. Для симметричного случая обычно отсутствуют изучаемые типы движений, поэтому в работе рассматривается антисимметричный случай.

При решении задачи учитываются свойства локализации поля, принимаются классические гипотезы теории анизотропных пластин переменной жесткости, применяется метод Ритца с использованием специальных координатных функций. Исследована сходимость метода в зависимости от числа координатных функций, показано, что для обеспечения точности порядка 1% при нахождении скорости достаточно 3–4 координатных функций. Построены дисперсионные соотношения, отвечающие антисимметричным модам пластины переменной жесткости с острым краем, получены численные значения для двух ортотропных материалов: для барита и для аустенитной стали при разных углах раскрытия.

Автор выражает благодарность проф. Ватульяну А. О. за внимание к работе.

## Численное моделирование динамики поровязкоупругого полупространства с полостью от действия импульсной силы

Петров А. Н.<sup>1</sup>, Белов А. А.<sup>2</sup>, Игумнов Л. А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

<sup>2</sup>НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского

Современный мониторинг поверхностных волн, анализ сейсмического отклика пород-коллекторов являются областью активных исследований разведочной геофизики и разработки месторождений. В связи с этим применение теории Био пороупругой среды определено острой потребностью практики в использовании более сложных моделей материала по сравнению с широко практикуемыми физическими соотношениями упругости или вязкоупругости.

В работе представлены результаты численного моделирования динамики пороупругих и поровязкоупругих тел и сред. Методика исследований основана на граничных интегральных уравнениях (ГИУ) прямого подхода трехмерной изотропной линейной теории пороупругости Био, математическая модель которой записывается в терминах четырех базовых функций — перемещений упругого скелета и порового давления. Поровязкоупругое решение рассчитывается из пороупругого решения на основе принципа соответствия. Для описания вязкоупругих свойств материала использованы классические вязкоупругие модели Максвелла, Кельвина–Фойгта, стандартного вязкоупругого тела и модель со слабосингулярным ядром. Для нахождения решения граничных интегральных уравнений, записанных в параметрах преобразования Лапласа по переменной времени, используется гранично-элементный (ГЭ) подход. Базовый процесс ГЭ дискретизации состоит в разбиении поверхности на граничные элементы. В качестве функций формы выбраны квадратичные полиномы интерполяции. Неизвестные граничные поля интегрируются через узловые значения в интерполяционных узлах. Для аппроксимации граничных перемещений применяются билинейные элементы, а для аппроксимации поверхностных сил — постоянные элементы. Для получения дискретного аналога ГИУ применяется метод коллокации. В качестве узлов коллокации выбираются узлы аппроксимации граничных функций. Для получения решения во временной области используется шаговый метод численного обращения преобразования Лапласа, опирающийся на теорему об интегрировании оригинала.

На основании описанной методики и с помощью разработанного оригинального программного обеспечения решены в трехмерной постановке задачи о действии импульсной силы на поверхность пороупругого и поровязкоупругого полупространств, ослабленных под площадкой приложения нагрузки полостью. Рассмотрены случаи сферической и кубической полостей. Представлены результаты расчета волновых полей перемещений и давления. Даны численные оценки результатов по дренированной и недренированной моделям материала.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФ (грант № 15-19-10056).

## Исследование вторичных периодических течений в вертикальном слое бинарной смеси при наличии термодиффузии

**Петрова Е. И., Моршнева И. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассматривается вертикальный слой бинарной смеси, ограниченный двумя бесконечными изотермическими пластинами. Под действием температуры возникают конвективные течения. При этом неоднородность концентрации смеси становится второй причиной появления конвекции. В задаче также имеется два диссипативных механизма — теплопроводность и диффузия, конкуренция которых приводит к изменению характера устойчивости. Возникающие в слое смеси движения описываются уравнениями конвекции в приближении Обербека–Буссинеска. Уравнения движения имеют стационарное плоскопараллельное решение с кубическим профилем скорости, линейным распределением температуры, концентрации и постоянным давлением.

Исследуется задача ветвления плоских периодических по времени режимов конвекции при колебательной потере устойчивости основного стационарного режима. Уравнения возмущений обладают круговой симметрией  $O(2)$ , следовательно, применима теория бифуркации рождения циклов в системах с данной симметрией, развитая в работах В. И. Юдовича и И. В. Моршневой.

Установлено, что в случае плоских возмущений при переходе параметра через критическое значение от основного решения ответвляется три семейства периодических решений: нелинейная смесь пары бегущих волн и две, бегущие навстречу друг другу, простые волны. Для исследования устойчивости и характера ветвления этих режимов составлена система уравнений разветвления с использованием метода Ляпунова–Шмидта. В случае плоских возмущений эта система содержит три коэффициента, которые вычисляются для различных критических значений параметров. Установлено, что в зависимости от соотношений между этими коэффициентами возможны пять типов ветвления, отличающихся устойчивостью и характером ветвления каждого из режимов.

Проведенные вычисления показали, что и бегущие волны, и их нелинейная смесь могут быть устойчивы в зависимости от значений параметров. В задаче присутствует три параметра, которые фиксируются: число Прандтля  $Pr$ , диффузионное число Прандтля (Шмидта)  $Pr_d$  и параметр термодиффузии  $\varepsilon$ ; а также три параметра, для которых строятся графики: волновое число  $\beta$ , циклическая частота  $\omega$  и число Грасгофа  $Gr$ . Были построены нейтральные кривые как для положительных значений  $\varepsilon$  (нормальная термодиффузия), так и для отрицательных (аномальный эффект термодиффузии — лёгкая компонента диффундирует в сторону холодной границы). Например, при значении числа Прандтля  $Pr = 15.6$  и числа Шмидта  $Pr_d = 2$  для положительных значений параметра термодиффузии  $\varepsilon = 0.3, 0.5, 1.214$  устойчивость бегущих волн наблюдается при циклической частоте  $\omega$  выше среднего значения, а для отрицательных  $\varepsilon = -0.5, -0.3, -0.1$  диапазон устойчивости бегущих волн смещается в среднюю область значений  $\omega$ . Для остальных значений циклической частоты все режимы неустойчивы и отличаются лишь типом ветвления.

## Биомеханическое моделирование остеотомии первой плюсневой кости

Полиенко А. В.<sup>1</sup>, Киреев С. И.<sup>2</sup><sup>1</sup>Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского<sup>2</sup>Саратовский государственный медицинский университет им. В. И. Разумовского

Вальгусное отклонение первой плюсневой кости стопы является одной из самых распространенных деформаций стопы, которая встречается у 18% населения. У женщин отмечена более высокая частота заболеваемости по сравнению с мужчинами. Данная патология представляет собой не только косметическую проблему, но и сопровождается болями, препятствует нормальному ношению обуви, а в запущенных случаях приводит к артрозу плюснефалангового сустава, развитию молоткообразной деформации маленьких пальцев, появлению различного рода мозолей, натоптышей и др. Различают три степени вальгусной деформации, характеризующиеся углом отклонения плюсневой кости: I степень — меньше 25 градусов, II степень — от 25 до 35 градусов, III степень — больше 35 градусов.

Хирургическое вмешательство проводится в случае выраженного вальгусного смещения первой плюсневой кости (II и III степени). Наиболее частым и эффективным вмешательством является остеотомия, предполагающая искусственный перелом кости с последующей ее фиксацией в правильном положении. Чтобы закрепить фрагменты кости, прибегают к помощи разнообразных фиксаторов, чаще всего используются винты Барука.

С целью проведения сравнительной биомеханической оценки остеотомии первой плюсневой кости было выполнено компьютерное моделирование. Построение трехмерных моделей кости и фиксатора осуществлялось в программном комплексе SolidWorks на основе данных компьютерной томографии. С помощью программного пакета ANSYS Workbench осуществлен численный эксперимент. Проведено моделирование восьми вариантов хирургического лечения: две модификации остеотомии (Scarf и Chevron) при различных вариантах смещения костных отломков (на 2/3 и 1/3) и при различных расположениях фиксаторов. В результате была проведена оценка напряженно-деформированного состояния тканей первой плюсневой кости после проведения рассматриваемых вариантов остеотомии.

Выявлено, что остеотомия методом Chevron при смещении костных фрагментов на 1/3 или 2/3 относительно друг друга является самой стабильной. Наблюдается равномерное распределение эквивалентных напряжений в тканях кости при малых (менее 0,1 мм) смещениях отломков. При остеотомии методом Scarf относительная стабильность наблюдается только при смещении костных фрагментов на 1/3 относительно друг друга, с наличием парных винтов Барука.

Построение биомеханических моделей остеотомий первой плюсневой кости с использованием предложенной технологии позволяет реализовать индивидуальный подход к выбору способа хирургической коррекции деформации стоп и определению двигательного режима в период восстановительного послеоперационного лечения. Использование компьютерного моделирования дает возможность оценивать существующие и разрабатывать новые фиксаторы, применяющиеся в хирургии стопы.

## О деформировании неоднородной упругой пластины с упругим закреплением на границе

**Потетюнко О. А.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Оценка влияния упругости закрепления неоднородной пластины важна в различных приложениях в технике, а также в биомеханике для моделирования заднего отдела склеры, представляющего собой пластину переменной жесткости. На деформативность такого объекта существенное влияние оказывают коэффициенты жесткости, характеризующие упругость склеры. Определение этих коэффициентов позволяет уточнить как модель деформирования решетчатой пластины, так и проводить более точно оценку величины внутриглазного давления.

В рамках этой проблемы рассмотрены два типа задач. Первый тип состоит в определении прогиба и резонансных частот круглой упругой пластинки переменной жесткости с различными граничными условиями, которые моделируются двумя упругими связями (пружинами). В зависимости от значений жесткостей пружин могут быть смоделированы все виды граничных условий. При этом изгибная жесткость пластины является функцией радиальной координаты. Задача в рамках принципа Гамильтона–Остроградского решена численно методом Рунге: определены собственные частоты и формы колебаний, а также прогиб пластинки на заданной частоте при действии равномерно распределенной нагрузки. Проведено сравнение результатов, полученных с помощью метода Рунге, с известным аналитическим решением для однородной круглой пластинки при различных граничных условиях. Исследована зависимость точности решений от числа координатных функций. Изучена зависимость резонансных частот от значений параметров жесткости.

Второй тип задач состоит в определении двух коэффициентов жесткости на основе различных схем измерения. Первый основан на измерении прогиба в некоторых точках, второй основан на измерении резонансных частот. Для определения искомым коэффициентов решен ряд вспомогательных краевых задач, не содержащих искомым коэффициентов, а далее построена система нелинейных алгебраических уравнений для их определения. Выполнен ряд вычислительных экспериментов по определению прогиба упруго опертой пластины переменной жесткости и коэффициентов жесткости. Результаты вычислительных экспериментов показали работоспособность предложенного подхода, причем единственность решения обратной задачи обеспечивается условием положительности искомым коэффициентов.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю проф. Ватульяну А. О.

## Современный факультатив для студентов младших курсов мехмата

**Пустовалова О. Г.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Студентам первого и второго курсов Института математики, механики и компьютерных наук имени академика И. И. Воровича в 2015–2016 учебном году предложен факультатив «Современный компьютерный инструментарий интеллектуальной деятельности». Программа курса включает отдельные независимые модули. Предполагается, что в проведении факультативных занятий задействованы преподаватели и аспиранты кафедры математического моделирования. Занятия по каждому из модулей может вести преподаватель — лучший специалист в вопросах конкретного модуля. Кроме того, в рамках курса предусмотрено проведение научно-популярных лекций с целью ознакомления студентов с тематикой научных исследований и введением в специальность. Для привлечения слушателей на факультатив были проведены мини-собрания в каждой из студенческих групп, были даны объявления на сайте [mmscs.sfedu.ru](http://mmscs.sfedu.ru) и при входе в задание мехмата. Запись на факультатив осуществлялась в электронном виде с использованием google-форм. На факультатив записались около 40 человек, из которых решили посещать занятия 24 человека. Из этих студентов были сформированы две группы. В весеннем семестре 2015–2016 учебного года была сформирована лишь одна группа. Занятия проводятся в компьютерных классах и носят практическую направленность.

В настоящее время программа факультатива включает вопросы, предполагающие освоение следующими навыками: продвинутая работа в Microsoft Office, основные навыки работы Maple, знакомство с языком программирования Python, основы верстки в системе LaTeX. Активная работа на занятиях и выполнение домашней работы гарантирует получение зачета по данному факультативу.

Проводилась оценка качества преподавания каждого из преподавателей факультатива посредством анкетирования. Опрос слушателей факультатива осуществлялся добровольно и анонимно, в удобное для студентов время. В анкету кроме вопросов, касающихся оценки качества преподавания, были включены вопросы, затрагивающие мнения студентов относительно актуальности преподаваемой информации, и пожелания относительно вопросов, включаемых в программу факультатива. Такое анкетирование проводилось несколько раз за время факультатива, и тем самым осуществлялась обратная связь с преподавателями, и корректировалось наполнение модулей программы с учетом мнения слушателей.

Данный факультатив преследует следующие цели: ознакомление студентов с рядом программных продуктов, задействованных в исследовательской деятельности; развитие навыков познавательной деятельности; развитие связи студенты — факультет; знакомство с рядом научных направлений, повышение уровня компьютерного образования; знакомство с кафедрой математического моделирования; повышение уровня изучения отдельных предметов; повышение активности и самостоятельности студентов.

## Монотонная и колебательная потеря устойчивости сдвиговых течений

Ревина С. В.

*Южный математический институт ВЦ РАН и PCO-A, Владикавказ*

Рассматривается двумерное  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  движение вязкой несжимаемой жидкости под действием поля внешних сил  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ , описываемое системой уравнений Навье–Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где  $\nu$  — безразмерная вязкость.

Поле внешних сил предполагается периодическим по пространственным переменным  $x_1, x_2$  с периодами  $\ell_1$  и  $\ell_2$  соответственно. Аналогичные условия ставятся для поля скорости  $\mathbf{v}$ . Предполагается, что период  $\ell_1$  фиксирован, а период  $\ell_2$  неограниченно возрастает:  $\ell_2 = 2\pi/\alpha$ , волновое число  $\alpha \rightarrow 0$ . Средняя по пространственному прямоугольнику периодов скорость считается заданной

$$\langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle = \mathbf{q}.$$

Будем интересоваться потерей устойчивости основного стационарного течения вида

$$\mathbf{V} = (0, V(x_1)), \quad (1)$$

в двух случаях: когда среднее скорости основного течения вдоль длинного периода отлично от нуля  $\langle V_2 \rangle \neq 0$  и когда оно равно нулю  $\langle V_2 \rangle = 0$ .

Критическим называется значение параметра  $\nu = \nu_c$ , при котором одно или несколько собственных значений линейной спектральной задачи выходят на мнимую ось. В отсутствие дополнительных вырождений при критическом значении параметра появляется либо пара чисто мнимых комплексно-сопряженных собственных значений, либо собственное значение проходит через ноль. В первом случае говорят о колебательной потере устойчивости, во втором — о монотонной.

В работе получены рекуррентные формулы  $k$ -го члена длинноволновой асимптотики задачи устойчивости двумерных сдвиговых течений вязкой несжимаемой жидкости общего вида. Показано, что собственные значения линейной спектральной задачи являются нечетными функциями волнового числа, а критические значения вязкости — четными функциями.

Если среднее скорости вдоль длинного периода отлично от нуля, то происходит колебательная потеря устойчивости; если среднее равно нулю, то возможна как монотонная, так и колебательная потеря устойчивости.

Если отклонение скорости от ее среднего по периоду значения является нечетной функцией пространственной переменной относительно некоторого  $x_0$ , то коэффициенты разложения скорости являются четными относительно  $x_0$  функциями при четных степенях волнового числа и нечетными относительно  $x_0$  при нечетных степенях, а коэффициенты разложения давления обладают противоположным свойством. В этом случае собственные значения находятся точно, что позволяет обосновать монотонную потерю устойчивости течения Колмогорова способом, отличным от имеющихся в литературе.

## Влияние глубины внедрения индентора на эффективный модуль Юнга при индентировании покрытия

Садырин Е. В.<sup>1</sup>, Волков С. С.<sup>1</sup>, Ширяева Т. И.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси, Минск*

Для выполнения задач исследования, аттестации и диагностики современных покрытий все большее распространение приобретает нано- и микроиндентирование. Однако, однозначное определение механических характеристик даже однородных покрытий с помощью индентирования требует соотнесения параметров эксперимента с имеющимися сведениями о структуре образца. В данной работе было проведено исследование влияния глубины внедрения на эффективный модуль Юнга биологически совместимого покрытия TiN, нанесённого методом ионно-плазменного напыления, определяемый по результатам индентирования поверхности покрытия с различной величиной приложенной нагрузки.

Все эксперименты были проведены на оборудовании РЦКП и лаборатории ПЛиВТ НОЦ «Материалы» (<http://nano.donstu.ru>) ДГТУ. Покрытие TiN наносилось на установке Булат 6. Атомно-силовая микроскопия (АСМ) использовалась для определения шероховатости образца до и после нанесения покрытия, изучения артефактов напыления и определения толщины нанесённого покрытия.

Механические свойства покрытия и подложки определялись посредством наноиндентирования на установке Nanotest Platform 3. Использовался алмазный индентор Берковича, функция площади проекции отпечатка (DAF) которого была откалибрована непосредственно перед проведением экспериментов с использованием калибровочного образца плавленого кварца. Было обнаружено, что и модуль Юнга, и твёрдость, полученные по методу Оливера–Фарра, в значительной степени зависят от приложенной нагрузки и глубины внедрения индентора. Результаты отчётливо демонстрируют усиление вклада упругих свойств подложки в величину эффективного модуля Юнга при увеличении глубины внедрения. Полученные микрогеометрические характеристики покрытия позволили рассчитать модуль Юнга покрытия в соответствии с ISO 14577, который составил  $307,81 \pm 19,37$  ГПа, что согласуется с результатами других экспериментальных исследований плёнок и массивных образцов TiN. Вычисленные значения твёрдости индентирования имеют широкий доверительный интервал и сильную зависимость от глубины внедрения. Результаты позволяют сделать вывод о том, что корректное определение микрогеометрических характеристик покрытия и выверенный выбор глубины внедрения играют исключительно важную роль для исследования покрытий с использованием наноиндентирования.

Авторы благодарят Кренёва Л. И. за помощь в методической постановке задачи и обсуждение результатов. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 15-57-04084-Бел\_мол\_а, 14-07-00343-а, 15-07-05208-а).

## Методика построения молекулярной модели гликокаликса на базе ленгмюровского монослоя

**Сафонов Р. А., Колесникова А. С.**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*

Исследование процессов развития атеросклеротических отложений играет важную роль в борьбе с болезнями сердечно-сосудистой системы. Рост атеросклеротической бляшки связан с проникновением в стенку сосуда липопротеинов низкой плотности (ЛНП), их фильтрацией через сосудистую стенку, распадом, взаимодействием с макрофагами и дальнейшим отложением в виде пенистых клеток. Ключевую роль в этом процессе играет механизм проникновения ЛНП через внутренний слой сосудистой стенки — эндотелий. Взаимодействие эндотелиальных клеток с движущимися в потоке крови липопротеиновыми комплексами определяет результирующее количество ЛНП, попадающее в область сосудистой стенки. Взаимодействие эндотелия с ЛНП происходит на уровне гликокаликса.

Гликокаликс представляет собой относительно крупные молекулы олигосахаридов, полисахаридов, гликопротеинов и гликолипидов, пронизывающие собой плазмолемму. Плазмолемма в первом приближении является бислоем липидных молекул, т. е. совокупностью двух липидных монослоев противоположной ориентации.

Одним из широко используемых методов получения монослоев является метод Ленгмюр–Блоджетт. В соответствии с этим методом, по водной основе распределяется слой амфифильных молекул базового вещества. Слой помещается между двух барьеров, один или оба из которых могут двигаться, создавая давление. В ходе сжатия слоя вещества, амфифильные молекулы притягиваются гидрофильными частями к водной основе. По мере сокращения межмолекулярного расстояния, соседние молекулы начинают «чувствовать» друг на друга, создавая упорядоченную решетку. По завершению процесса сжатия, из неструктурированного пятна вещества получается упорядоченная структура молекул односторонней ориентации, представляющая собой молекулярный монослой. Полученный монослой можно перенести с водной основы на твердую подложку, причем этот процесс можно повторять, получая многослойные структуры.

Предлагаемая методика представляет собой численное моделирование сжатия пятна произвольно ориентированных липидных молекул, пронизанных молекулами, составляющими гликокаликс. Для приложения давления к пятну применяется молекулярная модель барьера, составленная из атомов инертного газа (чтобы исключить химические взаимодействия), размещенных в узлах гексагональных ячеек. Модель помещена в «коробку», составленную из аналогичных атомарных структур.

Отладка методики построения молекулярных моделей монослоев проводилась в программном комплексе OpenMM с использованием молекулярного потенциала Amber.

Работа выполнена при поддержке Государственного задания № 2014/203, код проекта 1617.

## Компьютерное моделирование разрушения графена с дефектами кристаллической решетки

Семенов Б. Н.<sup>1</sup>, Кочнев А. С.<sup>1</sup>, Овидько И. А.<sup>2</sup>, Морозов Н. Ф.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Санкт-Петербургский государственный университет*

<sup>2</sup>*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого*

Бездефектный графен характеризуется уникальными механическими свойствами: чрезвычайно высокая прочность, огромный модуль Юнга, высокая степень упругой деформации, которые представляют огромный интерес для широкого круга современных и будущих технологий. В то же время, реальные графеновые листы, как правило, содержат дефекты кристаллической решетки, существенно влияющие на их механические и другие свойства. В рамках этого доклада будет дан краткий обзор результатов моделирования (на основе потенциала AIREBO) процессов деформации и разрушения графенов с дефектами, а также графеновых нанолент с линейными квадрупольными дисклинациями.

Моделирование показывает многоступенчатый характер процессов деформации и разрушения, протекающих в графенах с дефектами при растяжении. В частности, после упругой стадии деформации наблюдаются начальные стадии пластической деформации и разрушения вследствие разрывов или перестройки межатомных связей. Разрывы межатомных связей приводят к образованию и росту наноразмерных пустот, вызывающих разрушение графена. Заключительный этап деформации графеновых листов реализуется через формирование одноатомных углеродных цепочек, соединяющих отдельные части этих листов. На заключительной стадии разрушения — разделении листа графена на две изолированные части — происходит разрыв межатомных связей в этих цепочках.

Следует отметить, что процессы деформации и разрушения графеновых листов, содержащих 5–8–5 дефекты и их ансамбли высокой плотности, весьма чувствительны к температуре. При возрастании температуры разрушение, как правило, за счет одновременной генерации и роста наноразмерных пустот происходит намного быстрее.

При моделировании процессов деформации и разрушения в графеновых листах, содержащих 555–777 дефекты, было установлено, что присутствие этих дефектов в графене приводит к резкому снижению его прочности по сравнению с прочностью бездефектного графена и графена с дефектами типа 5–8–5.

Процессы деформации и разрушения в графеновых нанолентах, содержащих линейные квадрупольные дисклинации демонстрируют специфические особенности из-за комбинированных эффектов графеновых краев и вызванной дисклинациями кривизны. В частности, рассматриваемые графеновые наноленты демонстрируют как высокую нелинейную упругость, так и повышенную пластичность (около 13,4%). Кроме того, прочность этих нанолент значительно меньше (в 2 раза) по сравнению с прочностью бездефектного графена.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант №14-29-00199).

## Асимптотический анализ дисперсии гармонических волн в наследственно-упругом сплошном цилиндре

**Сергеева Н. В., Вильде М. В.**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*

Рассматривается распространение гармонических волн в бесконечном сплошном круговом наследственно-упругом цилиндре. Динамическое напряженно-деформированное состояние цилиндра описывается уравнениями движения в напряжениях и перемещениях, записанными в цилиндрической системе координат и уравнениями состояния для наследственно-упругого материала, взятыми в интегральной операторной форме.

Интегральные операторы определены формулами

$$\tilde{E} = E(1 - \Gamma^*), \quad \tilde{\nu} = \nu + \frac{1 - 2\nu}{2}\Gamma^*, \quad \Gamma^* f(t) = k \int_{-\infty}^t \Theta_{-\frac{1}{2}}(-\beta, t - \tau) f(\tau) d\tau,$$

где  $E, \nu$  — мгновенные значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона,  $k, \beta$  — параметры материала.

В качестве ядра интегрального оператора используется дробно-экспоненциальная функция Работнова

$$\Theta_{-\frac{1}{2}}(-\beta, t) = (t)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

где  $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} y^{n-1} \exp(-y) dy$  — гамма-функция.

На поверхности цилиндра ставятся условия отсутствия напряжений.

Для осесимметричной задачи выведены дисперсионные уравнения для задач растяжения-сжатия и кручения. Формально дисперсионные уравнения имеют тот же вид, что и соответствующие дисперсионные уравнения для упругого сплошного цилиндра, но, в отличие от последних, левая часть каждого из уравнений в наследственно-упругом случае является комплекснозначной функцией. Полученные дисперсионные уравнения решены численно. Анализ дисперсионных уравнений и их численных решений показывает, что дисперсионные кривые наследственно-упругого спектра, соответствующие действительным ветвям упругого спектра являются комплексными с положительной мнимой частью волновой постоянной  $\tilde{\chi}$ , что определяет затухание решения по координате; для наследственно-упругого спектра теряет смысл понятие частоты записания; при увеличении значения  $k$  и (или) уменьшении значения  $\beta$  увеличивается степень расхождения дисперсионных кривых с положительной и отрицательной мнимой частью  $\tilde{\chi}$ , соответствующих неоднородным модам в упругом волноводе. При  $\omega \rightarrow \infty$  дисперсионные кривые стремятся к соответствующим упругим.

Получены асимптотики корней дисперсионных уравнений для малых и больших значений частот. Проведен сравнительный анализ численных и асимптотических решений. Наличие интервалов совпадения решений, полученных с помощью численных и асимптотических методов подтверждает достоверность полученных результатов.

## Аналитическое решение нестационарной задачи о плоских колебаниях балки Тимошенко

Серпичева Е. В., Земсков А. В., Федотенков Г. В.

*Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)*

В работе рассматривается нестационарная задача о плоских колебаниях балки, основанная на модели балки Тимошенко. Эта модель является уточнением классической модели балки Бернулли–Эйлера, за счет учета влияния в уравнениях равновесия и соотношениях упругости инерционных нагрузок при повороте элемента поперечного сечения и деформации сдвига.

Известно, что классическая модель балки Бернулли–Эйлера довольно проста и обеспечивает достаточную точность решения многих инженерных задач, и поэтому она используется наиболее часто. Однако, учет деформаций сдвига может оказаться существенным, например, для стержней, изготовленных из анизотропного материала, у которых модуль сдвига много меньше модуля Юнга (такими свойствами обладают некоторые волокнистые и композиционные материалы, в частности человеческие кости). Так же важное значение имеет учет деформаций сдвига в задачах устойчивости трехслойных стержней, где два несущих слоя выполнены из тонкого высокопрочного жесткого материала, между ними легкий и менее прочный наполнитель. С другой стороны, когда жесткостные характеристики слоя-наполнителя существенно ниже жесткостных характеристик несущих слоев, упрощенный расчет по классической модели Эйлера–Бернулли может привести к существенно завышенным значениям критических нагрузок. Это в свою очередь ведет к снижению экономической эффективности стержневой системы если речь идет о технических системах или к недооценки потенциальных ресурсов биологических систем.

Решение задачи ищется в интегральной форме и представляется в виде сверток функций Грина рассматриваемой задачи и правых частей граничных условий. Для этого к исходной системе уравнений последовательно применяется преобразование Лапласа по времени и разложения в ряды Фурье (для балки конечной длины) или преобразование Фурье (для балки бесконечной длины). Из полученной таким образом системы линейных алгебраических уравнений находятся трансформанты Лапласа искомых поперечных смещений и углов поворота сечений относительно оси балки. Эти трансформанты являются рациональными функциями параметра преобразования Лапласа и переход в пространство оригиналов осуществляется с помощью теоремы о вычетах. Обратное преобразование Фурье (для балок бесконечной длины) находится численно с помощью квадратурных формул.

Все численные расчеты выполнены в среде Maple 17.

## Моделирование поляризации керамики с использованием функции плотности распределения доменов

Скалиух А. С.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Математическое моделирование нелинейных и необратимых процессов поляризации поликристаллических сегнетоэлектрических материалов проводится в том случае, когда используются керамические элементы с неоднородной остаточной поляризацией, для которых необходимо знать упругие, пьезоэлектрические и диэлектрические свойства как функции координат рассматриваемого образца. Такие процессы во многом схожи с процессами намагничивания ферромагнетиков или деформирования пластических материалов, но имеют свою специфику. Сложность заключается в том, что на процесс поляризации оказывают влияние не только электрическое поле, но и механические напряжения, и температура. Кроме этого, керамика — это поликристаллический материал. Поэтому поляризованное состояние представительного объема является интегральной характеристикой всех входящих в этот объем доменов. И чем точнее будет учитываться положение каждого домена, его условия переключения, влияние на процесс его переключения электрического поля, механических напряжений, а также наличие соседних доменов на процесс переключения друг друга, тем точнее будет определено поле остаточной поляризации. Необходимо отметить, что среди существующих математических моделей наблюдаются и такие, где принимаются в расчет и большое количество доменов и критерии переключения доменов, но с вычислительной точки зрения такие подходы требуют хранения огромного количества дополнительной информации, что значительно снижает эффективность этих моделей. Чтобы избежать этих трудностей, было предложено ввести в рассмотрение функцию плотности распределения доменов в представительном объеме с таким расчетом, чтобы существенно уменьшить объем хранимой информации. С этой целью был использован энергетический критерий переключения доменов, который, с одной стороны, позволяет рассматривать одновременное воздействие как электрического поля, так и механических напряжений, и, с другой стороны, позволяет строить функцию распределения в виде произведения двух функций, одна из которых определяет области нулевых значений, а другая описывает интенсивность в ненулевых областях. В частном случае воздействия одноосного электрического и механического поля такая функция строится аналитически с применением эволюционного закона. Показано, что предложенный подход встраивается в общую схему модели запертой стенки, и позволяет полностью определить интересующие нас физические характеристики керамического материала, который был подвержен процессу поляризации.

## Применение метода конечных элементов к моделированию искусственных клапанов сердца

**Скрипаченко К. К., Голядкина А. А.**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*

В современное время для замены патологически измененных клапанов сердца используются всевозможные конструкции механических протезов клапанов сердца (ПКС). Самой востребованной остается корпусная конструкция с поворотными створками. Важным параметром при выборе протеза остается его надежность. Одним из современных методов испытаний ПКС, является компьютерное моделирование, в частности метод конечных элементов (МКЭ). Данный метод является надежным средством исследования поведения конструкций в условиях разнообразных воздействий, взаимодействия твердых тел и потока жидкости. Существует ряд исследований где МКЭ имеет практическое применение при моделировании взаимодействия биологических тканей с искусственными имплантатами.

В данной статье представлены выводы на основе результатов компьютерного моделирования трехстворчатого клапана сердца «КорБит». Трехмерная модель клапана была создана с помощью системы автоматизированного проектирования SolidWorks. Численный эксперимент был реализован в программном комплексе конечно-элементного моделирования Ansys. Граничные условия соответствовали физиологическим показателям сердечно-сосудистой системы человека, динамическая вязкость жидкости  $0,0037 \text{ Па}\cdot\text{с}$ , плотность жидкости  $1050 \text{ кг/м}^3$ , входное давление  $130 \text{ мм. рт. ст.}$ , выходное давление  $60 \text{ мм. рт. ст.}$  (состояние покоя) и входное давление  $140 \text{ мм. рт. ст.}$ , выходное давление  $90 \text{ мм. рт. ст.}$  (при физических нагрузках) (Коробков А. В. и др., 1980). Расчеты заключались в визуализации полей давления и скорости, определение максимального и минимального значений их показателей в области просвета протеза клапана при прямом (фаза открытия) и обратном (фаза закрытия) тока крови. В качестве варьируемого параметра был взят угол открытия створок.

Анализ результатов позволил сделать следующие выводы:

- режим движения крови в стадии открытия клапана — ламинарный;
- крепление створок на периферии корпуса не создают дополнительного препятствия для потока крови, тем самым препятствует созданию условий для закрученного и турбулентного протоков;
- компьютерное моделирование позволяет визуализировать распределение давления и скорости потока на створки протеза, что практически невозможно выполнить при натурном эксперименте.

## Метод разрывных решений в задачах о трещинах в телах сложной структуры

Соболь Б. В., Рашидова Е. В., Васильев П. В.

*Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

**Обобщенный метод тригонометрических рядов.** Технология метода разрывных решений, развитого в работах Попова Г. Я., реализована при построении решений в рядах Фурье. Рассматривается плоская задача теории упругости для ограниченной области в произвольной ортогональной системе координат. Предполагается, что компоненты вектора перемещений и (или) их нормальные производные терпят разрыв на некотором отрезке вдоль одной из координатных линий. При определении коэффициентов разложений искомым функций учитываются упомянутые разрывы, в результате чего задача для каждой из гармоник сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Равновесное состояние сечения трубы с покрытием, ослабленной радиальной трещиной.** Рассмотрена задача о плоской деформации упругого кольца, содержащего внутренний радиальный разрез. На внутренней границе кольца действует гидростатическое давление. Внешняя граница усилена тонким гибким покрытием, внешняя граница которого свободна от воздействий. Рассматриваемая задача без учета покрытия исследована ранее в работе Ватульяна А. О., Соболя Б. В. (Изв. РАН, МТТ, 1995 г., № 6). В качестве модели покрытия использованы специальные граничные условия, сформулированные в монографии Александрова В. М., Мхитаряна С. М. (1983 г.).

**Адекватность модели покрытия.** Поскольку аналитически установить диапазон геометрических и физических параметров задачи, в котором использование принятой модели покрытия представляется целесообразным, затруднительно, авторами проведен цикл вычислительных экспериментов в конечноэлементном пакете FlexPDE. В частности, установлено, что погрешность принятой модели растёт с увеличением жёсткости и толщины покрытия.

**Интегральное уравнение.** Удовлетворяя граничным условиям на берегах трещины, в результате суммирования рядов, сводим задачу к решению сингулярного интегрального уравнения относительно производной функции раскрытия трещины. Сингулярную часть удается выделить аналитически. Она представляет собой ядро Коши и соответствует предельному классическому случаю. Регулярная часть ядра суммируется численно. Она зависит от геометрических и физических параметров задачи. Исследована сходимость получаемых рядов.

**Обсуждение результатов.** Решение интегрального уравнения построено методом коллокации в виде линейной комбинации базисных функций, явно учитывающих особенность в окрестности вершин трещины. Используются полиномы Чебышева I рода. Результаты получены для фактора влияния — приведенного коэффициента интенсивности напряжений. Установлены качественные и количественные особенности влияния толщины и материала покрытия на интенсивность напряжений в окрестности вершин трещины.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект № 14-08-00142\_a).

## Моделирование устройств и процессов неразрушающего контроля на основе магнитных измерений

**Соловьев А. Н., Соболев Б. В., Васильев П. В.**

*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

Неразрушающий контроль является неотъемлемой частью технического диагностирования и используется для оценки технического состояния узлов промышленного оборудования без применения разрушающих операций. Среди методов неразрушающего контроля одно из ведущих положений занимает метод магнитной дефектоскопии. Магнитная дефектоскопия является весьма эффективным методом обнаружения поверхностных и подповерхностных дефектов. Он основан на получении информации о магнитном поле рассеяния вокруг ферромагнитных объектов контроля. В областях расположения дефектов наблюдается перераспределение магнитных потоков и формирование магнитных полей рассеяния. Информацию о магнитной индукции возможно получить с помощью приборов, основанных на эффекте Холла, так называемых гауссметрах.

Рассматриваются методы идентификации как внутренних, так и выходящих на поверхность трещиноподобных дефектов различных геометрических конфигураций с применением магнитного контроля. Идентификация дефекта основана на намагничивании исследуемого объекта и последующем получении информации о магнитном поле рассеяния с его поверхности. Проводится дальнейший анализ полученных данных с целью определения наличия дефекта, его типа, а также размера, положения, и других геометрических параметров, присущих определенному типу дефекта.

Построена конечноэлементная модель фрагмента трубы с покрытием с внутренним трещиноподобным дефектом с применением комплекса COMSOL. В области контроля установлены постоянные магниты, прилегающие разными полюсами к поверхности трубы. Для реализации метода магнитной дефектоскопии применяется интерфейс magnetic fields, no currents, который используется для вычисления магнитостатических полей постоянных магнитов и других безтоковых источников магнитного поля. В задачах магнитостатики отсутствуют токи, таким образом возможно сформулировать и решить задачу, используя скалярный магнитный потенциал. При моделировании уделено внимание размерам окружающей среды объекта контроля, а также детализации сетки конечных элементов в области трещиноподобного дефекта и его вершин.

В результате проведения ряда численных решений поставленной задачи получены данные о величине магнитной индукции с внешней поверхности трубы. Информация была получена как с продольной скан-линии, проходящей через центр дефекта, так и с поперечной. Установлено влияние относительного размера дефекта, положения, глубины залегания и его формы на величину магнитной индукции и форму полученных данных.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-08-00142\_a и 7-й европейской рамочной программой № 318874 «INNOPIES» (Marie Curie Actions. People)

## К задаче акустического зондирования состояния костей опорно-двигательного аппарата человека

Соловьёв А.Н.<sup>1</sup>, Татаринов А.М.<sup>2</sup>, Курбатова Н.В.<sup>3</sup>, Германовская Д.В.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Рижский технический университет*

<sup>3</sup>*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Настоящая работа посвящена моделированию ультразвуковой денситометрии, которая проводится путем измерения скорости прохождения ультразвуковой волны по костной ткани. Известно, что снижение плотности костной ткани делает её более рыхлой и снижает скорость распространения звуковых волн. Чем ниже плотность костной ткани, тем меньше скорость распространения поверхностных звуковых волн. Ультразвуковой денситометр имеет специальные датчики для измерения скорости прохождения ультразвука вдоль поверхности костей и программное обеспечение аппарата, которое позволяет рассчитывать плотность кости с определением Т- и Z-индексов. У одного из авторов с коллегами имеется определенный опыт разработки таких приборов.

Более детальный метод обработки сигнала в виде амплитудно-временной характеристики электрического потенциала, принятого на сенсоре, мог бы не только позволить рассчитать плотность, но и провести анализ внутренней микроархитектоники кости. В качестве такого инструмента может быть использована технология искусственных нейронных сетей, которая успешно применялась одним из авторов с коллегами в задачах моделирования неразрушающего контроля различного рода дефектов в инженерных конструкциях. Одной из проблем создания эффективных приборов ультразвуковой денситометрии является то, что возбуждение и приём сигнала производится не непосредственно на кости, а через определенную прослойку мягкой ткани.

В работе проведено моделирование возбуждения и приёма ультразвуковых волн на участке кости с мягкими тканями.

Составные части модели: компактная костная ткань (главный объект диагностического интереса; остальное — сопутствующие факторы) представляет собой коническую усеченную оболочку с переменной толщиной стенки или кортикального слоя по длине; губчатая костная ткань — пористая трабекулярная структура, заполненная костным мозгом, в широком концевом отделе кости (эпифизе); костный мозг — жироподобная вязкая жидкость, заполняющая внутренность (канал) кости; мягкие ткани — кожа, мышцы, сухожилия, внеклеточная жидкость, надкостница, окружающие кость.

Моделируемые состояния: 1) норма, толстый кортекс, пор нет; 2) остеопороз, тонкий кортекс, пористый внутренний слой кортекса. Для каждого состояния (1 и 2) рассматриваются три случая толщины мягких тканей, покрывающих кость. Рассматривается также распространение ультразвукового сигнала на трёх частотах (0,1 МГц, 0,5 МГц и 1 МГц). В качестве актуатора и сенсора использовались пьезоэлементы. Решение ряда прямых модельных задач показало информативность принятого сигнала и возможность его использования в решении обратных задач идентификации свойств костей.

## Параметрическая идентификация NPZD-модели Азовского моря с помощью генетического алгоритма

Соловьева А. А.<sup>1</sup>, Бердников С. В.<sup>1</sup>, Кулыгин В. В.<sup>1</sup>, Шевцов М. Ю.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону*

Математическая NPZD-модель Азовского моря представляет собой систему редуцированных моделей, определяемых различными характерными скоростями описываемых процессов. Базовая структура NPZD-модели была разработана ранее. В качестве гидрологической модели используется компартментальная модель Азовского моря, в которой водоём представляется в виде системы районов и балансовых уравнений водного, солевого и теплового обмена.

Цикл углерода в Азовском море моделируется с использованием двух экологических групп фитопланктона и агрегированной группы зоопланктона, а также компонент растворенного и взвешенного органического вещества. Для учета влияния устьевых зон растворенное и взвешенное органическое вещество подразделяется на автохтонную и аллохтонную компоненты. В приходной части учитываются первичная продукция биотрансформация, поступление растворенных и взвешенных веществ со стоком рек, атмосферными осадками, а также в результате переноса и диффузии из соседних водоёмов. В расходной части учитывались потери органического углерода в результате деструкции гетеротрофных организмов, седиментации взвешенного вещества, вынос водным потоком растворенных и взвешенных компонентов в соседние акватории. Для учёта зависимости первичной продукции от концентрации питательных веществ модель включает уравнения, описывающие динамику потенциально лимитирующих биогенных элементов (азота и фосфора).

Математически модель представляет собой систему дифференциальных уравнений, многие коэффициенты которой находятся экспериментально, поэтому для калибровки модели используются данные по суммарному (весна+осень) фитопланктону (по месяцам — 4, 7, 8, 10) по 30 регионам Азовского моря и Таганрогского залива. Модель должна давать прогноз (возможную вероятностную оценку) и вероятности возникновения опасного или неблагоприятного природного явления, связанного с цветением воды. По спутниковым снимкам определяют количество хлорофилла по цветности воды. Существуют формулы пересчета из концентраций хлорофилла в величины фитопланктона и наоборот.

В работе на основе сравнения данных измерений суммарного фитопланктона за 1972–1998 и результатов расчета в сочетании с генетическим алгоритмом проводится идентификация модели. Вначале решается ряд прямых задач, в которых исследуются границы изменения параметров и их влияние на целевую функцию. Далее осуществляется ее минимизация в заданном диапазоне изменения параметров.

Авторы выражают благодарность проф. А. Н. Соловьеву за внимание к работе.

## Управление параметрами предварительного нагружения для конструкции плоского анизотропного гидроакустического экрана

Сторожев В. И.<sup>1</sup>, Болнокин В. Е.<sup>2</sup>, Силенко Е. М.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Донецкий национальный университет*

<sup>2</sup>*Институт машиноведения им. А. А. Благодравова РАН, Москва*

Специфика функционирования плоских однородных, структурированных и многосвязных вязкоупругих элементов технических систем гидроакустических покрытий и гидроакустического экранирования для конструкций и приборов подводных агрегатов заключается в высокой степени влияния на их рабочие параметры фактора интенсивного гидростатического давления в периоды нахождения агрегатов на больших глубинах погружения. Примером этого является существенное изменение механических свойств перфорированных гидроакустических покрытий с герметизированными поперечными полостями из резиноподобных вязкоупругих материалов, которые в условиях интенсивного гидростатического давления приобретают повышенную жесткость и в значительной мере изменяют свои звукозащитные свойства.

В представляемой работе рассматривается один из возможных вариантов использования интенсивного гидростатического давления, а также вспомогательных конструктивных механизмов формирования предварительного напряженного состояния как факторов управляющих воздействий на параметры плоского однородного гидроакустического экрана, инициирующих наведение эффектов деформационной анизотропии. С этой целью исследуется задача описания характеристик волновых полей в составной структуре в виде вязкоупругого анизотропного экранирующего слоя, контактирующего с полубесконечными объемами разнотипных идеальных слабосжимаемых жидкостей. Из глубины одного из жидкостных полупространств на вязкоупругий анизотропный экранирующий слой триклинной системы нормально падает стационарная плоская волна гидроакустического давления, и анализу подлежат характеристики отраженной составляющей гидроакустической волны и волны, генерируемой в полупространстве за экранирующим слоем. Исследование базируется на общей модели распространения волн деформаций по толщине экранирующего анизотропного упругого слоя в рамках линейаризованной теории волновых процессов в предварительно напряженных телах при равномерном трехосном сжатии. Охарактеризованы варианты использования в рассматриваемой модели нескольких типов потенциалов упругого деформирования с квадратичными и кубическими составляющими по степеням деформаций. С использованием получаемого для данной задачи численно-аналитического решения в задаваемом частотном диапазоне сформулирована соответствующая многокритериальная задача параметрической оптимизации относительно геометрических и физико-механических характеристик слоя в исходном недеформированном состоянии и параметров предварительного нагружения, а также предложена методика ее численного анализа. Представлены частные примеры реализации исследований рассматриваемой модели для модельных и реальных конструктивных материалов.

## Распространение волн сдвига по ортотропному волноводу меандровой геометрической структуры

Сторожев В. И., Пачева М. Н., Прийменко С. А.

*Донецкий национальный университет*

Исследование закономерностей распространения упругих волн сдвигового типа по однородному либо составному кусочно-однородному ортотропному волноводу меандровой (змеевидной) геометрической структуры наряду с фундаментальными аспектами имеет прикладное значение, связанное с совершенствованием методологий расчета линий задержки акустоэлектронных устройств. Построение численно-аналитических решений краевых задач этого типа в области змеевидноступенчатого продольного сечения упругого слоя с сопрягающимися под прямым углом участками в точной постановке представляет собой открытую проблему и является предметом рассмотрения в данной работе.

Решение граничной задачи о движении стационарных волн сдвига по геометрически неоднородному слою с конечным рядом регулярно чередующихся прямоугольных изломов строится на базе концепции численно-аналитического метода частичных областей и предполагает выделение в продольном сечении двух полуслоев, ограничивающих участок с меандровой геометрической структурой, а также конечного числа прямоугольных составных частей — элементов самого участка меандровой геометрии, стыкующихся по отдельным участкам своих границ.

Для волновых полей в полубесконечных составляющих продольного сечения вводятся представления рядами с неопределенными коэффициентами по базисным множествам симметричных и антисимметричных нормальных волн сдвига для ортотропного слоя со свободными либо жестко закрепленными гранями в зависимости от задаваемого типа краевых условий на границах рассматриваемого волновода усложненной геометрии. Для различных выделяемых подобластей — составляющих с сечениями прямоугольной формы — вводятся представления для удовлетворяющих волновым уравнениям амплитудных характеристик полей сдвиговых упругих волн в виде двойных тригонометрических рядов с разделенными декартовыми координатными переменными, имеющих неопределенные коэффициенты. Структура данных представлений в прямоугольных подобластях отвечает концепции метода суперпозиции и их последующее использование в функциональных краевых условиях на свободных либо закрепленных участках границ подобластей и на участках идеального механического контакта стыкующихся подобластей после алгебраизации приводит к блочно-ленточной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов введенных разложений, имеющей обобщенный парный тип. Описана методика получения асимптотических представлений решений полученной системы с большими номерами. Получены результаты численной реализации предложенной методики для случаев волноводных структур рассматриваемого типа с одним и двумя звеньями меандрового очертания.

## Нечеткие оценки скоростей локализованных упругих волн в полубесконечных средах

**Сторожев С. В.**

*Донецкий национальный университет*

Проблема учета факторов неопределенности в виде разброса экспериментальных значений физико-механических характеристик деформируемых сред имеет весьма высокую степень актуальности применительно к исследованиям комплекса свойств поверхностных упругих волн обобщенного релеевского типа, локализующихся у граничной поверхности упругого полупространства. Так, оценки значений фазовых скоростей поверхностных волн релеевского типа в условиях неопределенности характеристик материалов полупространств представляют интерес для практических приложений в сейсмологии, горной сейсмодиагностике, ультразвуковой дефектоскопии и акустоэлектронике, а одним из подходов к решению задач этого типа является использование аппарата теории нечетких множеств. Исходя из указанных соображений, в рамках представляемого исследования разработаны подходы к получению нечетко-множественных оценок фазовых скоростей поверхностных волн релеевского типа вдоль границы изотропного полупространства и граничных поверхностей полупространств из анизотропных материалов гексагональной и кубической системы. Исследование базируется на представлении экзогенных параметров рассматриваемых моделей нечеткими трапецеидальными интервалами в комплексе с применением эвристического принципа обобщения к аналитическим выражениям для фазовых скоростей классических и обобщенных поверхностных волн релеевского типа, получаемым в каждом из рассматриваемых случаев из полиномиальных представлений соответствующих дисперсионных уравнений. При этом используемые представления для фазовых скоростей волн Релея в изотропном полупространстве в виде корней полиномиального дисперсионного соотношения являются классическими, а полиномиальная форма дисперсионных соотношений для анизотропных полупространств кубической системы получена с использованием теории симметричных многочленов. Искомые нечеткие оценки для скоростей локализованных волн получены в форме разложений представляющих эти оценки нормальных нечетких множеств по множествам альфа-уровня с описанием функциональных параметрических зависимостей для верхних и нижних граней соответствующих множеств альфа-уровня от значений показателя степени принадлежности на основе аналогичной формы представлений для нечетких трапецеидальных интервалов, описывающих области изменения экзогенных параметров с виде упругих постоянных и плотности материала полупространства. Представлены примеры использования разработанной методики для получения нечетких оценок фазовых скоростей поверхностных волн в полубесконечных геомассивах из реальных осадочных пород с характерными разбросами экспериментальных значений физико-механических параметров.

## Исследование тепловыделения при деформировании и разрушении конструкционных материалов

Судьенков Ю. В.<sup>1</sup>, Зимин Б. А.<sup>2</sup>, Свентицкая В. Е.<sup>3</sup>, Смирнов И. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет

<sup>2</sup>Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

<sup>3</sup>Балтийский государственный университет «ВОЕНМЕХ»

им. Д. Ф. Устинова, Санкт-Петербург

В работе представлены результаты исследования тепловыделения при квазистатическом деформировании образцов металлов и полимеров.

Механические испытания на одноосное растяжение образцов в виде «лопаток» проводились на машине SHIMADZU AG-X. Экспериментальное исследование поля температур на поверхности образцов синхронно с нагружением осуществлялось тепловизионной камерой ThermoCAM SC 300. Исследовались образцы в виде лопаток из технически чистой Cu, Ti, алюминиевый сплав D16AM, сталь, PMMA и стеклопластик с тремя скоростями деформации при трех скоростях деформирования  $v_\varepsilon$ : 5, 10 и 20 мм/мин.

Результаты экспериментов позволили определить интегральные энергетические параметры: удельную работу  $A$ , затраченную на деформирование образцов, и количество тепла, выделившееся при растяжении  $Q$ .

Как известно, при пластической деформации часть затрачиваемой на неупругую деформацию работы превращается в тепло. Другая её часть, называемая латентной энергией  $L$  («скрытая энергия»), превращается в энергию несущую структурные изменения в металлах (искажения решётки, возникновение вакансий и т. д.). Проведённые эксперименты показали зависимость  $L$  не только от величины деформации, но и от скорости, что ранее не отмечалось.

Для более пластичных материалов Cu и D16 AM (алюминиевый сплав) доля  $L$  меньше, чем для более жёстких материалов (сталь, титан). Понижение температуры во всех металлических образцах в упругой зоне может быть объяснено проявлением ангармонического эффекта, который оказывает влияние на частоту колебаний решётки при действии механической нагрузки.

Для теоретического описания деформирования предлагается записать потенциал свободной энергии в виде  $f = f(\varepsilon, \xi, \dots, T)$ , где неравновесный параметр  $\xi$  описывает структурные изменения в материалах. Используя законы термодинамики, можно записать производство энтропии структурных изменений  $S_* > 0$  неравновесного процесса деформирования в виде

$$S_* = \sigma \frac{d\varepsilon}{dt} - \rho \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \dots \right),$$

где  $\sigma$  — напряжения,  $\varepsilon$  — деформации,  $\rho$  — плотность материала,  $t$  — время, неуказанные члены в скобке зависят от конструкции свободной энергии  $f$ .

Величина латентной энергии определяется из первого закона термодинамики, а конкретные структурные изменения в материале определяются производством энтропии и видом функционала свободной энергии.

Действие на упругое полупространство со сферической полостью  
нестационарных осесимметричных объемных сил

Тарлаковский Д. В.<sup>1</sup>, Вестяк В. А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

<sup>2</sup>Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)

Рассматривается однородное изотропное упругое пространство со сферической полостью радиуса  $r_0$ , на которое действуют нестационарные объемные силы. Его осесимметричное движение описывается уравнениями Ламе в сферической системе координат  $r, \theta, \vartheta$ . Перемещения ограничены, а граница полости неподвижна. В начальный момент времени возмущения отсутствуют.

Для решения используется преобразование Лапласа по времени  $\tau$ . Радиальные перемещения  $u(r, \theta, \tau)$ , тангенциальные перемещения  $v(r, \theta, \tau)$  и компоненты  $F_r(r, \theta, \tau)$ ,  $F_\theta(r, \theta, \tau)$  объемной силы представляются в виде рядов по полиномам Лежандра  $P_n(x)$  и Гегенбауэра  $C_{n-1}^{3/2}(x)$ :

$$\begin{pmatrix} u \\ F_r \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} u_n \\ F_{rn} \end{pmatrix} P_n(\cos \theta), \quad \begin{pmatrix} v \\ F_\theta \end{pmatrix} = -\sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} v_n \\ F_{\theta n} \end{pmatrix} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta)$$

Изображения коэффициентов рядов записываются в интегральном виде с ядрами в виде функций Грина. Доказаны утверждения об их структуре:

$$G_{uun}^L(r, \xi, s) = \xi^2 \left[ \tilde{G}_{uun}^L(r, \xi, s) H(\xi - r) + \tilde{G}_{uun}^L(\xi, r, s) H(r - \xi) \right],$$

$$G_{vun}^L(r, \xi, s) = \xi^2 \left[ \tilde{G}_{vun}^L(r, \xi, s) H(\xi - r) + \tilde{G}_{vun}^L(\xi, r, s) H(r - \xi) \right],$$

$$G_{uvn}^L(r, \xi, s) = \xi^2 \left[ \tilde{G}_{uvn}^L(r, \xi, s) H(\xi - r) + \tilde{G}_{uvn}^L(\xi, r, s) H(r - \xi) \right],$$

$$G_{vvn}^L(r, \xi, s) = \xi^2 \left[ \tilde{G}_{vvn}^L(r, \xi, s) H(\xi - r) + \tilde{G}_{vvn}^L(\xi, r, s) H(r - \xi) \right],$$

где  $H(\tau)$  — функция Хевисайда;  $s$  — параметр преобразования; индекс « $L$ » соответствует изображению.

С помощью этих теорем найдены формы решений краевых задач для функций Грина. Далее используются свойства фундаментальных систем решений изображений уравнений Ламе, в которые входят модифицированные функции Бесселя полуцелого индекса. Показано, что функции Грина есть суммы произведений рациональных функций аргумента преобразования на экспоненты. Установлено, что эти дроби являются правильными. Поэтому, оригиналы функций Грина могут быть найдены точно с помощью соответствующих теорем операционного исчисления. Приведены графики этих функций.

Рассмотрен также пример движения пространства со сферической полостью под действием объемной силы с носителем  $r = r_*$  ( $r_* > r_1$ ):

$$F_r(r, \theta, \tau) = H(\tau) \delta(r - r_*) \cos \theta, \quad F_\theta(r, \theta, \tau) = -H(\tau) \delta(r - r_*) \sin \theta,$$

где  $\delta(r)$  — дельта-функция Дирака.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-08-00788).

## Задача о колебаниях функционально-градиентного полого цилиндра

Углич П. С.

*Южный математический институт ВНЦ РАН и PCO-A, Владикавказ*

Рассмотрена задача о вынужденных колебаниях упругого цилиндра, упругие характеристики которого (плотность и модуль сдвига) являются функциями радиальной координаты.

После применения преобразования Фурье и разложения компонент перемещения и напряжений в ряд Фурье по окружной координате задача в трансформантах сведена к краевой задаче для канонической системы дифференциальных уравнений. Приведены краевые задачи для осесимметричных, крутильных и изгибных колебаний полого цилиндра. В полученной краевой задаче неизвестными являются амплитуды перемещения и напряжений и она не содержит производных механических параметров и, следовательно, может использоваться для любых законов неоднородности. Приведены дисперсионные кривые для крутильных, осесимметричных и изгибных колебаний и произведено их сравнение с известными результатами. Также приводятся расчёты волновых полей при различных частотах колебаний, для различных геометрических параметров и законов неоднородности.

При этом для отыскания обратного преобразования Фурье использованы два метода. Первый из них основан на решении краевой задачи методом пристрелки и непосредственном численном отыскании интеграла при помощи квадратурных формул. Второй основан на теории вычетов. При использовании теории вычетов используется тот факт, что особенности подынтегральной функции являются полюсами первого порядка. Само подынтегральное выражение представляет из себя соотношение двух функций, значение которых известно лишь численно и выражения для которых следуют из формул метода пристрелки. Знаменатель подынтегрального выражения совпадает с дисперсионным уравнением. Для отыскания вычетов использована обычная формула для вычетов в полюсе первого порядка, построена вспомогательная краевая задача для отыскания производной знаменателя по параметру преобразования Фурье. Приведён ряд расчётов волновых полей и указаны границы применимости обоих подходов.

Далее рассмотрена обратная задача: найти законы изменения механических параметров по данным о волновом поле на внешней поверхности полого цилиндра. Построены итерационные последовательности интегральных уравнений и приведены результаты их численного решения в случае крутильных колебаний. Построенные интегральные уравнения являются интегральными уравнениями Фредгольма первого рода и их решение требует использования специальных численных методов. Приведён ряд численных результатов.

Плоские нестационарные задачи для упругого полупространства  
при наличии подвижной точки смены граничных условий

**Федотенков Г. В., Бугаев Н. М., Афанасьева О. А., Пряжевский Р. Д.**

*Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)*

Предлагается методика решения плоских нестационарных задач для упругого полупространства при наличии подвижной границы смены заданных на поверхности граничных условий смешанного типа.

Полагается, что на части границы полупространства заданы нормальные перемещения, а на другой части — нормальные напряжения. При этом точка перехода одного условия в другое является нестационарно подвижной. Касательные напряжения отсутствуют на всей границе полупространства. Требуется определить нормальные перемещения на части поверхности, где заданы напряжения, и нормальные напряжения на другой ее части. Отдельного анализа требует поведение напряжений в окрестности подвижной точки смены граничных условий.

Движение полупространства описывают волновые уравнения относительно скалярного и ненулевой компоненты векторного упругих потенциалов перемещений. Начальные условия предполагаются нулевыми.

Как следует из принципа суперпозиции, на всей границе полупространства нормальные перемещения и напряжения связаны между собой интегральным соотношением типа свертки по координате и времени. Ядром этого соотношения является поверхностная функция влияния для упругого полупространства. В пространстве интегральных преобразований Лапласа по времени и Фурье по переменной интегральный оператор свертки переходит в произведение изображений.

С использованием указанного соотношения, свойств операции свертки по двум переменным и аппарата теории обобщенных функций удалось получить явное решение поставленной задачи в интегральной форме. Для получения окончательных результатов требуется провести факторизацию изображения функции влияния.

Анализ изображения по Фурье и Лапласу функции влияния выявляет наличие шести особых точек: два простых полюса и 4 точки ветвления.

Получение требуемой факторизации функции влияния в любом диапазоне скоростей движения точки раздела граничных условий, основано на представлении ее изображения в виде произведения сомножителей, каждый из которых содержит лишь одну особую точку.

Получены разрешающие задачу явные интегральные формулы, позволяющие определить неизвестные перемещения и напряжения в любом скоростном диапазоне движения точки раздела граничных условий.

Построены асимптотические представления напряжений и перемещений в окрестности точки смены граничных условий.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-08-00260).

## Численный анализ динамики и взаимодействия вихревых конфигураций на $\gamma$ -плоскости

**Филимонова А. М., Говорухин В. Н.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Математические модели динамики невязкой несжимаемой жидкости в геофизических приближениях широко используются в исследованиях, в частности, для изучения вихревых конфигураций в атмосфере. В настоящей работе представлен численный метод анализа динамики вихревых конфигураций на  $\gamma$ -плоскости, и приведены результаты вычислительных экспериментов.

Математически задача формулируется в виде системы уравнений в частных производных:

$$\frac{D\omega}{Dt} \equiv \omega_t + \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y = 0, \quad \omega = -\Delta\psi + \Lambda^2\psi - \frac{1}{2}\gamma r^2, \quad (1)$$

где  $t$  — время,  $x, y$  — координаты на плоскости,  $\gamma, \Lambda$  — некоторые параметры,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  — полярный радиус. Из первого уравнения системы (1) следует, что завихренность  $\omega$  переносится пассивно жидкими частицами. Второе уравнение связывает завихренность  $\omega$  и функцию тока  $\psi$ . В качестве граничных условий в этой работе рассматриваются периодические условия для  $\psi$ .

Для расчета динамики жидких частиц разработан вариант метода вихрей-ячейках, основу которого составляют следующие положения:

- Функция тока приближается отрезком ряда Фурье в каждый момент времени  $t$ :  $\psi \approx \sum_{i=1}^{k_x} \sum_{j=1}^{k_y} \psi_{ij}(t) g_{ij}(x, y)$ , где  $g_{ij}(x, y)$  — базисные тригонометрические функции, а  $\psi_{ij}(t)$  — неизвестные коэффициенты функции тока, которые находятся методом Бубнова–Галеркина из второго уравнения (1).
- Завихренность  $\omega$  определена своими значениями в  $\omega_i$  в  $N$  частицах, которые переносятся пассивно вектором скорости  $\mathbf{v} = (-\psi_y, \psi_x)$ .
- Поле  $\omega(x, y)$  в каждый момент времени  $t$  приближается с помощью кусочно-кубической полиномиальной аппроксимацией, коэффициенты которой находятся методом наименьших квадратов по значениям  $\omega_i$ .
- Динамика жидких частиц описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:  $\dot{x} = -\psi_y, \dot{y} = \psi_x$ .
- Система обыкновенных дифференциальных уравнений динамики частиц решается при помощи псевдо-симплектического метода Рунге–Кутты.

В докладе приведены результаты численных экспериментов по анализу динамики вихревых конфигураций на  $\gamma$ -плоскости. Рассмотрены тестовые расчеты известных конфигураций, таких как, например, диполь Ламба, а также сценарии взаимодействия различно распределенных вихревых конфигураций.

Работа поддержана грантом РФФИ, код проекта 14-01-00470.

## Определение коэффициента сдвиговой вязкости склеральной оболочки глаза

**Фролова К. П.<sup>1</sup>, Вильчевская Е. Н.<sup>2</sup>, Бауэр С. М.<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого*

<sup>2</sup>*Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург*

<sup>3</sup>*Санкт-Петербургский государственный университет*

Модификация существующих математических моделей склеральной оболочки глаза и построение новых, учитывающих большее число параметров склеры и точнее описывающих ее поведение при нагрузках, позволяет проводить более качественную диагностику ряда заболеваний глаза. Непосредственное измерение вязкости склеры вызывает затруднения и, в связи с этим, коэффициент вязкости игнорируется в большинстве моделей. Тем не менее, склере присуща вязкоупругая реакция на приложенную нагрузку.

В данной работе обсуждается способ определения коэффициента сдвиговой вязкости склеры, основанный на сравнении результатов математического моделирования и экспериментальных данных, приведенных К. Е. Котляром, С. М. Бауэр, Н. Планге (РООФ, Москва, 2013) и основанных на дискретном измерении внутриглазного давления в течение нескольких минут после интравитреальной инъекции. Задача моделируется вязкоупругим сферическим слоем при центральносимметричной нагрузке (на внешнем радиусе задано нулевое давление, на внутреннем радиусе заданы перемещения, учитывающие величину объема жидкости, введенного при инъекции). Материал склеры предполагается линейным трансверсально-изотропным. Задача решается с помощью метода преобразования Лапласа, позволяющего свести решение дифференциального уравнения в частных производных к решению дифференциального уравнения с обыкновенными производными. Рассматриваются разные варианты постановки граничного условия на внутреннем радиусе сферического слоя. В первом случае предполагается, что введенный объем жидкости сохраняется в стекловидном теле на протяжении эксперимента, во втором учитывается отток внутриглазной жидкости. Зависимость объема внутриглазной жидкости от времени определяется несколькими способами на основании данных по тонографии, приведенных Г. А. Любимовым, И. Н. Моисеевой, А. А. Штейн, Е. Н. Иомдиной (Российский журнал биомеханики, 2012). Определяется значение коэффициента сдвиговой вязкости, при котором отклонение теоретических данных от экспериментальных минимально. Выяснено, от каких параметров зависит данная величина. Показано, что при учете обоих факторов: наличия вязкости и оттока внутриглазной жидкости, — теория лучше согласуется с экспериментом, чем при учете одного из них.

Работа выполнена частично при финансовой поддержке РФФИ, грант 15-01-06311-а.

## Биомеханическое обоснование применения различных костнопластических материалов для вертебро- и кифопластики

Хрыков С. С.<sup>1</sup>, Голубева А. С.<sup>2</sup>, Макиров С. К.<sup>2</sup>, Гаврюшин С. С.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

<sup>2</sup>Российская медицинская академия последипломного образования, Москва

Существует множество данных разной степени достоверности, касающихся такого осложнения как компрессионные переломы позвонков в смежных сегментах после выполнения вертебропластики. Некоторые клинические наблюдения и исследования показывают, что это напрямую связано с нарушением угруго-демпферных свойств цементируемого позвонка, в результате чего нарушается функционирование всего позвоночника как биомеханической системы. Продолжительные циклические нагрузки на позвоночник приводят к росту упруго-демпферной нагрузки на смежные уровни цементируемого позвонка, вследствие чего происходит начальное повреждение (дефект) материала, которое в дальнейшем превращается в трещину кортикального слоя, вблизи которой развивается пластическая деформация губчатой кости и как результат формируется компрессионный перелом.

В ходе данного исследования нами проводился сопоставительный анализ данных численного моделирования по методу конечных элементов и эксперимента *in vitro*.

Для сравнительного анатомо-биомеханического исследования были взяты 24 секционных блока позвоночного столба, состоящие из трёх ТНХII-LI-LII позвоночно-двигательных сегментов. В срединном позвонке каждого блока формировалась полость размером 2 см. В 1-й группе полость оставляли свободной, т.е. ничем не заполняли. Во 2-й производилось заполнение сформированной полости по традиционной методике костным цементом. В 3-й группе было произведено механическое заполнение полости костно-замещающим материалом.

Было отмечено, что степень опороспособности тела позвонка связана с разрушением его опорных колонн. Восстановление опороспособности тела человека и поврежденного позвонка зависит от восстановления их высоты, области распределения и объема вводимого костнопластического материала.

По ряду биомеханических критериев (прочность тела позвонка, упругость и демпферность сегмента позвоночника) наиболее оптимальным к замещающей в позвонке массе является перестраиваемый костно-пластический материал. Использование перестраиваемого костно-пластического материала позволило не только возместить утраченную форму позвонка, но и максимально сохранить прилежащие костно-хрящевые компоненты, как в собственном позвонке, так и в смежных с ним позвонках, восстановить биомеханические функции позвоночника в целом, и тем самым предупредить развитие переломов.

Данная работа поддержана Минобрнауки РФ (проект 01201461544) и грантом РФФИ 16-07-01224 А.

## Динамика косимметричных систем хищников и жертв

**Цибулин В. Г., Елифанов А. В.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Доклад посвящен развитию метода исследования нелинейных пространственных моделей экологии на основе конструирования возможных косимметрий (Юдович В. И. Мат. заметки. 1991) рассматриваемых систем и последующего анализа решений при помощи селективных функций (Юдович В. И. Докл. РАН. 2004). В ряде работ (см. Будянский А. В., Цибулин В. Г. Биофизика. 2015) этот подход позволил проанализировать сценарии сосуществования конкурирующих за общий ресурс близкородственных популяций.

Рассматривается следующая система для  $n - m$  хищников и  $m$  жертв:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i &= \left[ k_i u_i' - u_i \left( \alpha_i p + \sum_{j=1}^n \beta_{ij} u_j \right) \right]' + u_i f_i, \quad i = 1, \dots, n, \\ f_i &= \mu_i \bar{u} (1 - \bar{u}/p) - \sum_{j=m+1}^n l_{ij} u_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad \bar{u} = \sum_{j=1}^m u_j, \\ f_i &= \sum_{j=1}^m \mu_{ij} u_j - l_i, \quad i = m + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Здесь точка и штрих соответствуют дифференцированию по времени  $t$  и пространственной переменной  $x$ ,  $u_i(x, t)$  — плотность  $i$ -й популяции в момент времени  $t$  в точке  $x$ ,  $k_i$  — коэффициенты диффузии,  $\alpha_i$  — коэффициенты направленной миграции жертв, вызванной неоднородностью распределения ресурса  $p(x)$  на ареале,  $\alpha_i = 0$ ,  $i = m + 1, \dots, n$ ,  $\beta_{ij}$  — коэффициенты направленной миграции, вызванной неоднородностью распределения видов по ареалу,  $\mu_i$ ,  $\mu_{ij}$  — коэффициенты роста,  $l_{ij}$ ,  $l_i$  — коэффициенты смертности.

При  $m = 1$ ,  $n = 3$ ,  $p(x) = 1 + \varkappa \sin(2\pi x)$  (система жертвы и двух хищников на неоднородном кольцевом ареале) было найдено семейство предельных циклов с переменным периодом вдоль семейства («венчиков» по терминологии В. И. Юдовича). При  $m = 2$ ,  $n = 3$  и  $p(x) \equiv p_0$  (две жертвы и хищник на однородном ареале) получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающая аналитическое исследование. Если выполнено условие  $\mu_1 l_{23} = \mu_2 l_{13}$ , то наблюдается сосуществование двух семейств равновесий:  $u_1 + u_2 = p_0$ ,  $u_3 = 0$  и  $\mu_{31} u_1 + \mu_{32} u_2 = l_3$ ,  $u_3 = \mu_1 \bar{u} (1 - \bar{u}/p_0) / l_{13}$ . В зависимости от начальных распределений популяций возможны сценарии стационарного сосуществования жертв с хищником и без, а также периодические колебания всех видов.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (14-01-00470).

## Некоторые контактные задачи с учетом трения и тепловыделения от трения

**Чебаков М. И., Колосова Е. М., Ляпин А. А.**  
*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Рассматриваются нестационарные динамические контактные задачи связанной термоупругости. В качестве примера исследуется задача о взаимодействии упругого однородного цилиндра (вала) с внутренней поверхностью двойного цилиндрического слоя конечной длины в пространственной постановке.

Такая задача может являться математической моделью самосмазывающегося подшипника скольжения с полимерным антифрикционным слоем. Работоспособность таких полимерных подшипников скольжения зависит от многих параметров, включающих в себя скорость вращения вала, коэффициента трения, термомеханические свойства элементов подшипниковой системы и, как следствие, величины результирующих контактных температур. Целью исследования является разработка расчётной модели работы металлополимерного подшипника скольжения, определения на ее основе распределения температур, напряжений и подбору оптимальных параметров подшипниковой системы, при которых достигается тепловой баланс.

Рассмотрен металлофторопластовый подшипник скольжения при нестационарном взаимодействии деталей подшипника с учетом трения, тепловыделения от трения и конвективного теплообмена на основе пространственной модели. В качестве антифрикционного материала используется фторопласт-4 без наполнителей. Внешняя поверхность подшипника жёстко закреплена. Во внутреннюю поверхность вдавливается вращающийся вал. Между валом и подшипником действуют силы Кулоновского трения. Предполагается, что на поверхностях вала и подшипника, которые граничат с окружающей средой, определены условия конвективного теплообмена.

Для решения поставленной задачи применяется метод конечного элемента с использованием специально разработанного программного модуля для конечно-элементного пакета Abaqus.

Исследования показали, что большое значение в достижении теплового баланса в рассмотренной модели подшипниковой системы играет теплоотвод с поверхностей вала и подшипника, а при увеличении таких параметров, как скорость вращения вала, значение нагрузки, коэффициент трения, достижение теплового баланса в подшипниковой системе замедляется. Отметим, что конечно-элементный метод с использованием пакета Abaqus для данной задачи оказался достаточно эффективным и позволяет исследовать подобные задачи при различных значениях входных геометрических и механических параметров.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект № 213.01-11/2014-28) и при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-08-00852).

## Изгиб балки из неполяризованной керамики ЦТС-19, эксперимент и компьютерное моделирование

**Чебаненко В. А., Захаров Ю. Н., Рожков Е. В., Паринов И. А.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

В последние годы было проведено немало исследований, посвященных оценке влияния различных электрофизических и геометрических факторов на характеристики и энергоэффективность пьезоэлектрических генераторов (ПЭГ). В основном эти работы касались ПЭГ кантилеверного типа (работающего на изгиб), но также были и работы, посвященные ПЭГ осевого типа (работающего на сжатие). С целью повышения энергоэффективности обоих типов генераторов был исследован метод внесения стационарных градиентов деформации в объем сегнетокерамического материала.

Объектом исследования была тонкая неполяризованная сегнетокерамическая пластина, изготовленная из материала ЦТС-19. В процессе изготовления одна из сторон пластины, на которой будет располагаться электрод, была отшлифована более грубым шлифпорошком, чем противоположная. После этого были нанесены электроды. Этим приемом достигалась различная глубина диффузии Ag при вжигании в поверхность керамики и, соответственно, создание у противоположных сторон такой пластины металлокерамических слоев различной толщины. На границах этих слоев с массивом керамики в пластине, формировались неэквивалентные градиенты механических деформаций, а также тангенциальные сжимающие напряжения в приэлектродных слоях. Сжимающие напряжения обусловлены разницей температурных коэффициентов линейного расширения для Ag и сегнетокерамики при охлаждении от  $730^{\circ}\text{C}$  после вжигания.

На этапе испытаний образец защемлялся с обеих сторон в испытательной установке, а посередине крепилась присоединенная масса. Воздействие присоединенной массы по центру пластины приводит ее к упругому прогибу, который приводит к сжатию верхнего и растяжению нижнего приэлектродных слоев, а также созданию в них (либо изменению уже существующих стационарных) встречно-направленных градиентов деформации. Установлено, что при воздействии гармонического механического нагружения, создаваемого вибростендом на резонансной частоте пластины на нагрузочном сопротивлении  $360\text{ кОм}$  возникает потенциал  $0,5\text{ В}$ .

Моделирование данной задачи выполнялось в два этапа. На первом этапе для подтверждения результатов моделирования была численно решена несвязанная задача для металлической балки подобных размеров. АЧХ металлического образца, полученные во время эксперимента, показали хорошее совпадение с расчётами. На втором этапе решалась уже связанная задача для электроупругого тела, учитывающая влияние градиента деформации. Результаты показали, что использованных предположений недостаточно для корректного описания процессов, происходящих в теле. В дальнейшем планируется использование других подходов к решению данной задачи.

Авторы благодарят проф. А. Н. Соловьева за внимание к работе.

## Эффект Фареуса–Линдквиста для суспензий микро- и наночастиц

Черевко В. А., Кизилова Н. Н.

*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина*

Суспензии наночастиц с размерами 10–100 нм (наножидкости) и микрочастиц (размером 10–100 мкм) используются в миниатюрных устройствах для биохимического анализа биологических жидкостей, разделения их на компоненты, охлаждения микропрепаратов, нагрева микрообъемов реагентов, лабораториях на чипе и в других микроэлектромеханических системах. Наночастицы обладают аномально низкой теплоемкостью, высокой прочностью, тепло- и электропроводностью, поэтому концентрированные суспензии ( $C = 10 \div 40\%$ ) таких частиц могут эффективно использоваться в микротеплообменниках.

При расчете параметров течения микро- и наножидкостей используются уравнения Навье–Стокса с условиями проскальзывания на стенках. Размер частиц сопоставим с размером шероховатостей, поэтому при столкновении частиц со стенкой имеет место их тангенциальный перенос, так что скорость частиц отличается от скорости движения стенки. В современной нанофлюидике используются граничные условия проскальзывания второго порядка в виде

$$\left( u - u_w - C_1 Kn \frac{\partial u}{\partial n} - C_2 Kn^2 \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (1)$$

где  $u$  и  $u_w$  — скорости движения наножидкости и стенки,  $\sigma$  — безразмерный импульс, приобретенный частицей при столкновении со стенкой,  $Kn = \lambda/h$  — число Кнудсена,  $0.1 < Kn \leq 1$ ,  $\lambda$  — длина свободного пробега частиц,  $n$  — нормаль к поверхности;  $\sigma = 2$  для классической жидкости и  $\sigma = 1$  при диффузионном отражении. Значения констант  $C_1, C_2$  в (1) были оценены в ряде экспериментов по течению микро- и наножидкостей в трубках. Для микрожидкостей  $0.01 < Kn \leq 0.1$  и  $C_2 = 0$  (проскальзывание первого порядка).

При измерении вязкости биологических микро- и наножидкостей на результат измерений будет сильно влиять эффект Фареуса образование пристенного слоя, свободного от частиц, и соответствующего изменения кажущейся вязкости (эффект Линдквиста). В данной работе получено решение уравнений Навье–Стокса для слоистого течения жидкостей с разными концентрациями частиц в ядре течения и у стенки с учетом условия (1). На поверхности раздела жидкостей выполняются условия непрерывности скорости и вязкого трения. Для кажущейся вязкости  $\mu_{app}$  получено выражение

$$\mu_{app} = \mu_1 \left[ (1 - \delta R^{-1})^4 + \mu_1 \mu_2^{-1} \left( 1 - (1 - \delta R^{-1})^4 - 4C_1 R^{-1} + 4C_2 R^{-2} \right) \right]^{-1}, \quad (2)$$

где  $\delta$  — толщина пристенного слоя,  $R$  — радиус трубки,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — вязкости суспензий с разными концентрациями частиц в ядре течения и у стенки.

Анализ соотношения (2) при разных значениях параметров, соответствующих техническим наножидкостям и биологическим микрожидкостям, показал, что за счет проскальзывания может наблюдаться как случай  $\partial \mu_{app} / \partial R > 0$ , свойственный бингамовским жидкостям, так и уменьшение вязкости с ростом  $R$ , если  $C_1 - 2C_2 R^{-1} > \delta (1 - \mu_2 \mu_1^{-1}) (1 - \delta R^{-1})^3$ .

Влияние систем вторичного поддрессирования транспортных комплексов на организм человека-оператора, с учётом его биомеханических свойств

**Черненко А. Б., Нефедов В. В., Азаренков А. А.**

*Южно-российский государственный политехнический университет (НПИ)  
им. М. И. Платова, Новочеркасск*

Для оценки эффективности различных вариантов систем вторичного поддрессирования транспортно-технологических комплексов, а также для оценки степени соответствия вибраций в месте расположения человека-оператора допустимым с точки зрения безопасности уровням вибрации, был проведён анализ процессов вертикальных и поперечных ускорений полученных в результате математического моделирования путём сравнения расчётных показателей вибронагруженности.

Использовалась математическая модель случайных пространственных колебаний систем вторичного поддрессирования транспортно-технологических комплексов, отражающая взаимосвязь различных движений, внешние воздействия, биодинамические модели тела человека, учитывающие дифференцированное влияние различных колебаний на ощущения человека-оператора, а также инерционные и упруго-диссипативные свойства системы.

Сопоставление спектральных характеристик дало возможность оценить фильтрующую способность различных подвесок кабин транспортно-технологических комплексов при имеющемся процессе на входе системы для различных условий работы, а так же при движении его с максимальными эксплуатационными скоростями.

Основным критерием, определяющим качество виброзащитных систем является соответствие уровней вибрации в месте расположения человека-оператора транспортно-технологического комплекса предельно допустимым нормам, регламентированным стандартами.

Степень вредного воздействия колебаний на организм человека зависит от частоты, продолжительности и направления действия вибрации, а также индивидуальных особенностей человека. Использование в системе поддрессирования кабин транспортно-технологических комплексов пневматических упругих элементов с РКО тороидного типа даёт существенное снижение дисперсии процессов поперечных ускорений, которые являются одним из основных факторов, нагружающих человека. На различных транспортных комплексах они составляют 70–110% вертикальных ускорений. При этом происходит качественное изменение спектров, проявляющееся в перераспределении их частотного состава.

Результаты моделирования колебаний показали, что пневматические системы поддрессирования с РКО тороидного типа, установленные в системах вторичного поддрессирования транспортно-технологических комплексов, дают существенное снижение среднеквадратичных поперечных ускорений по сравнению, как с серийными системами подвешивания (резино-металлические виброизоляторы), так и с пневматической подвеской с РКО балонного типа, что позволит значительно снизить уровень вибронагруженности человека-оператора.

## Моделирование процесса проникновения липидных отложений в интиму артерий и развития атеросклеротической бляшки

Шевцова М. С.<sup>1</sup>, Коссович Е. Л.<sup>2</sup>, Челнокова Н. О.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

<sup>2</sup>*Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»*

<sup>3</sup>*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*

Процесс появления жировых бляшек на стенках сосудов называется атеросклерозом. Согласно статистическим данным ВОЗ, атеросклероз может поражать сосуды, несмотря на возраст и род занятий человека. Среди основных условий образования атеросклеротических отложений можно выделить следующие: наличие в организме наряду с липопротеинами высокой плотности, липопротеинов низкой плотности (ЛНП); шероховатость стенок сосуда, облегчающую липопротеину низкой плотности возможность прикрепиться к стенке; активность свертывающей системы крови, которая в ответ на появление трещин, выделяет большое количество тромбоцитов. Целью представленной работы являлось изучение степени влияния механических факторов на начальную стадию развития атеросклеротического поражения элементов артериальной системы человека, а также изучение и визуализация эволюции атеросклеротических бляшек от начала локального нарушения защитного слоя эндотелия до ее состояния, частично тромбирующего кровеносный сосуд. В ходе выполнения исследования были изучены гистоморфометрические данные об интимальном слое коронарных артерий человека в норме, и на начальных стадиях атеросклероза, что позволило получить данные о типичном характере и влиянии локального повреждения эндотелиального слоя на развитие атеросклероза. Была сформулирована связанная нестационарная задача процесса инфильтрации ЛНП в стенки здорового сосуда и сосуда с локальным повреждением эндотелия, включая задачу течения вязкой жидкости (уравнение Навье–Стокса для тока крови в артерии), транспортирующей ЛНП заданной концентрации, конвективного переноса их кровью, движущейся в пористых слоях интимы и меди (уравнение Бринкмана), и независимо развивающейся диффузии ЛНП в интиму. Задача в осесимметричной постановке была реализована в конечно-элементном комплексе Comsol Multiphysics при совместно работающих вычислительных модулях, выполняющих решение связанных уравнений Навье–Стокса, Бринкмана и диффузии. Предложенная модель была дополнена уравнением, учитывающим реакцию поглощения накапливающихся ЛНП макрофагами, преобразование их в пенистые клетки и «липидные бассейны», и соответствующее уменьшение концентрации ЛНП. Визуализирован процесс развития атеросклеротической бляшки на временном диапазоне в 3 года вплоть до состояния тромбоза. Деформация стенки сосуда смоделирована с помощью режима деформируемой сетки, движение которой управлялось концентрацией образующихся в результате макрофаг-липидного обмена пенистых клеток и «липидных бассейнов».

## Влияние поверхностных напряжений на устойчивость нелинейно-упругой квадратной плиты

**Шейдаков Д. Н., Михайлова И. Б.**

*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону*

В связи с развитием современных технологий и появлением новых материалов достаточно большую актуальность приобретает вопрос анализа устойчивости равновесия деформируемых тел с учетом различных поверхностных явлений. Например, характер деформирования тел при микро- и наноразмерах часто существенно отличается от поведения тел макроразмеров, что может быть объяснено поверхностными эффектами. Кроме того, эти эффекты могут играть значительную роль в механике тел, на поверхности которых нанесено покрытие, например, нанопленка, или произведена некоторая обработка поверхности, изменяющая ее свойства. В последнее время для моделирования поверхностных явлений, особенно в наномеханике, получила развитие теория упругости с поверхностными напряжениями. В рамках этой теории помимо обычных напряжений, распределенных в объеме, учитываются еще и независимые поверхностные напряжения на границе тела или ее части, которые обобщают известное в гидромеханике скалярное поверхностное натяжение на случай твердых тел. Введение поверхностных напряжений позволяет, в частности, описать характерный для наноматериалов размерный эффект.

Целью настоящего исследования является изучение бифуркации равновесия нелинейно упругих плит с поверхностными напряжениями. В рамках общей теории устойчивости трехмерных тел проведен анализ выпучивания квадратной плиты при двухосном сжатии-растяжении. Для описания поведения плиты использовалась модель Гертина–Мердока. Данная модель тела с поверхностными напряжениями с механической точки зрения эквивалентна деформируемому телу, на поверхности которого приклеена упругая мембрана. Тензор поверхностных напряжений в рамках модели Гертина–Мердока может рассматриваться как тензор усилий, действующий в этой мембране.

Для определения докритического напряженно-деформируемого состояния квадратной плиты в условиях больших деформаций применялся полуобратный метод. При выводе линеаризованных уравнений равновесия и граничных условий использовался метод линеаризации, адаптированный к задачам нелинейной теории упругости. Путем численного решения полученной линеаризованной краевой задачи для ряда материалов найдены критические кривые и соответствующие им моды выпучивания, построены области устойчивости в плоскости параметров нагружения, которыми являются коэффициенты осевого сжатия-растяжения. Используя полученные результаты, подробно проанализирован размерный эффект и изучено влияние упругих свойств лицевых поверхностей плиты на потерю устойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 16-08-00802-а, 16-01-00647-а, 15-01-01492-а).

## Моделирование взаимодействия отслоившегося полосового пьезоэлектрического актуатора с упругим волноводом

**Шпак А. Н., Голуб М. В.**

*Институт математики, механики и информатики,  
Кубанский государственный университет, Краснодар*

В настоящее время получили широкое распространение системы оценки целостности объектов в режиме online, значительная часть которых связана с использованием упругих волн для неразрушающего контроля. В этом случае часто используется набор встроенных в систему на этапе производства или эксплуатации пьезоэлектрических преобразователей, способных под действием электрического поля возбуждать и принимать сигналы. Таким образом изучение динамического поведения пьезоактуаторов, а также зависимости генерируемых актуатором в упругом слое волн от области контакта представляется актуальной задачей, которая, несомненно, требует математического и компьютерного моделирования. Задача определения упругих колебаний в протяженной структуре, вызываемых некоторой поверхностной нагрузкой, может быть эффективно решена с помощью полуаналитического интегрального подхода. Воздействие пьезоактуатора может описываться с помощью упрощенной модели точечных сил, в которых действие актуатора заменяется сосредоточенными силами, действующими по касательной к области контакта актуатора с волноводом. Однако такая модель хорошо работает только на невысоких частотах и при использовании тонких пьезоэлементов и жесткого клеевого соединения между актуатором и волноводом. Более того, для моделирования отслоения между актуатором и слоем модель точечных сил не подходит. В то же время, метод конечных элементов высокого порядка точности позволяет качественно моделировать динамическое поведение актуатора, в том числе на высоких частотах. Для целей настоящего исследования был разработан гибридный подход, при котором динамика пьезоактуатора описывается на основе метода конечных элементов, а упругие колебания в слое — на основе полуаналитического интегрального подхода. Гибридный подход позволяет описывать динамическое поведение системы «отклеенный актуатор — слой» на различных частотах с учетом возможности отслоения пьезоактивного элемента. На основе этой модели рассчитываются скорости перемещений поверхности пластины, возбуждаемых пьезоактуатором при подаче на него электрического сигнала. Кроме того, изучаются распределения перемещений и напряжений в самом актуаторе при его отклейке, в том числе и на границе со слоем. Результаты моделирования сравниваются с экспериментальными данными. Рассчитываются резонансные частоты как отдельно для актуатора, так и системы «приклеенный/отклеенный актуатор — слой», что может быть использовано при идентификации повреждённых актуаторов путём «прозванивания» актуатора на различных частотах и обнаружения характера повреждения по изменению резонансных частот.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-51-53043).

## Анализ пьезокерамического вибрационного гироскопа с многоэлектродным покрытием при различных условиях закрепления

**Шпрайзер Е. И.**

*Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону*

Твердотельные пьезоэлектрические вибрационные гироскопы являются одним из наиболее распространенных типов гироскопических устройств, получившим широкое применение в системах навигации и управления. Эти гироскопы работают на резонансных частотах и регистрируют частоту вращения за счет сил Кориолиса. Популярность таких устройств связана с высокой точностью, надежностью и устойчивостью к механическим повреждениям, низким энергопотреблением и довольно малыми габаритами.

В продолжение предыдущих исследований в настоящем докладе проведен анализ пьезоэлектрического трубчатого вибрационного гироскопа, который рассматривался ранее в работах J. S. Yang, Н. Y. Fang, А. А. Левицкого и П. С. Маринушкина.

Полый цилиндр выполнен из пьезокерамики, поляризованной в радиальном направлении, один сплошной электрод покрывает всю внутреннюю боковую поверхность цилиндра, а на внешней боковой поверхности крестообразно в перпендикулярных направлениях располагаются четыре электрода, причем одна пара используется для возбуждения исходных изгибных колебаний, а вторая пара предназначена для регистрации колебаний, наведенных за счет появляющихся при вращении гироскопа сил Кориолиса. В настоящей работе рассмотрено три варианта граничных условий на торцах цилиндра. В варианте 1 грань считалась жестко закрепленной, а вторая грань — свободной от напряжений. В варианте 2 на каждый торец жестко прикреплены упругие стержни, направленные от границ электродов до оси цилиндра. Наконец, в варианте 3 на каждый торец прикреплены упругие стержни, направленные от центральных точек электродов до точки на оси цилиндра. Все стержни в вариантах 2 и 3 моделировались как упругие брусы и учитывали задачи растяжения, кручения и пространственного изгиба.

Твердотельные и конечно-элементные пространственные модели были разработаны в пакете ANSYS на командном языке APDL ANSYS. При этом в объеме полого цилиндра гироскопа генерировались канонические гексаэдральные сетки с пьезоэлектрическими конечными элементами, имеющими элементные системы координат вдоль осей радиальной поляризации пьезокерамики.

Разработанные программы позволили определить собственные частоты и формы колебаний, построить амплитудно-частотные характеристики и вычислить выходные значения наведенных потенциалов на регистрирующих электродах при вращении гироскопа. Проведенные расчеты показали предпочтительность гироскопа с одним жестким торцом.

## Напряженно-деформированное состояние изгиба неоднородной панели

Шубчинская Н. Ю., Пустовалова О. Г.

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Развитие современных технологий требует совершенно новых конструкционных материалов, превосходящих по своим упругим свойствам широко применяемые. К такому числу относятся, например, материалы с неоднородным химическим составом или механическими свойствами по глубине. Несмотря на достаточно сложные процессы их создания, преимущества, связанные с увеличением срока эксплуатации изделий из таких материалов, требуют точных теорий определения механического отклика. Исследование НДС трехмерных тел, базирующееся на нелинейной теории упругости, является достаточно непростым процессом даже для тел с простой геометрией, таких как панель, цилиндр или сфера. Интерес к подобным проблемам связан прежде всего с тем, что деформации чистого изгиба, кручения и растяжения/сжатия являются базовыми в экспериментальном определении и верификации параметров упругого потенциала.

В данной работе в качестве примера приводится задача о чистом изгибе прямоугольной панели размерами  $l \times a$  в сектор кругового цилиндра. Для описания нелинейно-упругих свойств панели в работе использованы: модель полулинейного материала и модель материала Блейтца и Ко, удельная потенциальная энергия которого имеет вид (А. И. Лурье, 1980)

$$W = \frac{1}{2}\mu(1 - \beta) \left[ I_2 I_3^{-1} + \frac{1}{\alpha} (I_3^\alpha - 1) - 3 \right] + \frac{1}{2}\mu\beta \left[ I_1 + \frac{1}{\alpha} (I_3^{-\alpha} - 1) - 3 \right].$$

При малых деформациях параметр  $\mu$  имеет смысл модуля сдвига,  $\alpha$  связан с коэффициентом Пуассона соотношением  $\alpha = \nu(1 - 2\nu)^{-1}$ ,  $\beta$  — параметр, характеризующий чисто нелинейные свойства среды,  $I_k$  — главные инварианты меры деформации Коши.

Неоднородность моделировалась как линейная функция  $\mu(x) = bx + c$  и экспоненциальная  $\mu(x) = D e^{\rho x}$ ,  $x \in [-a/2; a/2]$ .

Установлено, что независимо от модели материала диаграмма изгиба (график зависимости изгибающего момента от угла раствора сектора деформированной панели) имеет точку максимума, за которой следует падающий участок. Это может свидетельствовать о неустойчивости панели при больших углах изгиба. Рассмотрено влияние неоднородности на положение точки максимума диаграммы изгиба.

Авторы выражают искреннюю благодарность доктору физ.-мат. наук, доценту М. И. Карякину за помощь в работе. Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России № 9.665.2014/К.

## Интеллектуализация систем управления на железнодорожном транспорте

**Юренко К. И.**

*Южно-российский государственный политехнический университет (НПИ)  
им. М. И. Платова, Новочеркасск*

Действующие в нашей стране директивные документы определяют приоритет развития железнодорожного транспорта в настоящее время и на перспективу. Они предполагают создание единой интеллектуальной управляющей системы для железнодорожного транспорта (ИСУЖТ). Целями построения такой системы являются повышение безопасности, надежности и устойчивости функционирования железнодорожного транспорта, создание современных транспортно-логистических систем, включая высокоскоростное и скоростное пассажирское, а также длинносоставное и тяжеловесное грузовое движение, повышение энергоэффективности перевозочного процесса.

Одной из основных подсистем ИСУЖТ является система управления и обеспечения безопасности движения, которая включает ситуационные центры управления и мониторинга, а также интеллектуальные центры диспетчерского управления, взаимодействующие в режиме реального времени с интеллектуальными бортовыми аппаратно-программными управляющими комплексами подвижного состава. Такие системы должны обладать свойствами обучаемости (способностью генерировать новые знания), способности к классификации (умение дифференцировать воздействия внешней среды, автоматически структурировать данные и др.) и адаптации (способность приспосабливаться к меняющимся условиям среды функционирования) используя при этом помимо традиционных методов теории управления (кибернетики, системного анализа, математического моделирования) современные математические методы обработки информации (нечеткая логика, нейронные сети и генетические алгоритмы, мультиагентные модели, экспертные системы и базы знаний, аппарат многофакторного и ситуационного анализа, эвристические и др. методы).

Полученные к настоящему моменту практические результаты позволяют говорить, в частности, об эффективности использования мультиагентных моделей и технологий в управлении перевозочным процессом (построение графика движения поездов, диспетчерское управление, планирования и распределения ресурсов). В тоже время, в бортовых системах управления перспективные результаты получены с использованием математического аппарата нечеткой логики: при управлении пригородными электропоездами и поездами метрополитена, прицельным торможением скоростных поездов. В результате работ по совершенствованию бортовых систем автоведения пассажирских и грузовых поездов были разработаны нечетко-логические контроллеры, осуществляющие автоматическое торможение поездов на основе математического моделирования управляющей деятельности машиниста, что позволяет повысить качество управления (улучшить точность регулирования скорости при торможении, уменьшить потери времени хода и износ тормозного оборудования за счет устранения избыточного применения тормозов). Перспективным представляется также использование для интеллектуализации компонентов ИСУЖТ гибридных методов и моделей.

## Волны в вязкоупругом предварительно напряженном цилиндрическом волноводе

**Юров В. О.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*

Распространение волн в волноводах из многих современных материалов сопровождается затуханием различной природы. Так, при описании волновых процессов в волноводах, содержащих полимерные компоненты, требуется использовать вязкоупругие определяющие соотношения в рамках концепции комплексных модулей. Кроме того, учет предварительных напряжений (ПН) важен для достоверного определения напряженного состояния, ресурса волновода, скоростей волн и затухания.

В работе исследованы волны в полом неоднородном вязкоупругом цилиндре со свободными границами при наличии поля ПН различной структуры. Задача сведена к матричному дифференциальному уравнению первого порядка с комплексными переменными коэффициентами, и двумя спектральными параметрами — частотой и волновым числом. Коэффициенты матрицы в общем случае имеют переменные коэффициенты, но не содержат производных от материальных характеристик.

В силу переменности коэффициентов системы решение задачи находилось численно методом пристрелки путем сведения к решению набора задач Коши, где предварительно проведено разделение действительной и мнимой частей. Предложенная схема позволяет анализировать также любые законы изменения компонент тензора ПН, рассмотрены раздувание, растяжение и кручение.

Аналитически и численно изучено дисперсионное множество задачи. Получена асимптотика в длинноволновом приближении, которая определяет угол наклона дисперсионных кривых выходящих из начала координат. Проведен анализ области применения этих формул.

Проведено исследование, позволившее установить степень влияния ПН на структуру компонент дисперсионного множества и изменение скоростей и затухания распространяющихся мод.

При учете затухания и ПН дисперсионное множество меняет свою структуру. В упругом случае существует конечный набор распространяющихся мод. При наличии затухания, обусловленного вязкоупругими свойствами, таких мод уже нет. Учет ПН вносит малые возмущения в широком диапазоне изменения спектральных параметров. Выявлены области изменения частоты, в которых влияние ПН на динамические характеристики весьма существенно.

Работа выполнена в рамках проекта Министерства образования РФ — госзадание № 9.665.2014/К. Автор выражает благодарность научному руководителю Ватульяну А. О. за внимание к работе.

## An improvement of the accuracy and effectiveness of the inverse technique based on vibration tests

**Barkanov E.<sup>1</sup>, Wesolowski M.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Riga Technical University*

<sup>2</sup>*Koszalin University of Technology*

Due to the great importance of defining performance, reliability and safety requirements for advanced composite products and services a considerable effort has been devoted to the study of their mechanical material properties and many inverse methods based on vibration tests have been developed in the last three decades. In each inverse technique based on vibration tests, an identification of material properties is performed minimising the error functional between the experimental and numerical parameters of structural responses using direct or indirect, based on the planning of experiments, optimisation methodologies.

Unfortunately the dynamic parameters of test specimens are very sensitive to experimental errors and numerical models used in the identification procedure due to an approximated nature of the numerical solution or measurement inaccuracies. So, the experimental modal parameters of a structure and correspondingly the identified material properties are mostly disturbed by the errors due to poorly simulated boundary conditions, additional mass and damping effects from exciting or sensing devices and measurement noise influence. These are systematic errors arising from effects that interrupt the measurement results in a systematic way. They originate from the known defects of instrumentation, the wrong measurement procedure or imperfections of the test samples. The effect of random errors is not examined here because influence of these errors on the experimental results can be easily reduced by increasing the number of repetitions and by averaging the measurement values.

The numerical model errors associate with a sample preparation process, which suffers from many difficulties and obtaining an «ideal» sample, which meets all the model requirements, is practically impossible. This is especially relevant to the manufacturing process of laminated composites, where the most common sample imperfections are plate curvature, varying thickness along plate edges and deviations of fibre alignment from the assumed lamination angle. According to the above, the model errors can be defined as deviations of a test sample from the assumptions made in the numerical model, namely, assumptions about lamination angle, plate flatness and uniform thickness as well as hypotheses used for material description.

A new procedure has been developed to minimise the influence of the sample imperfections on the identified material parameters by eliminating from the objective function those modes that are mostly affected by the model errors so that eventually no modifications of the numerical model are required. The proposed practical solution makes the results of inverse problems more accurate and reliable and the identification process more effective. This new methodology has been successfully applied for the non-destructive material properties characterisation of carbon/epoxy prepreg (SEAL® Texipreg HS 160 RM) panels.

## Optimal Design of Composite Repair of Pipeline with Volumetric Surface Defect

**Lvov I.<sup>1</sup>, Barkanov E.<sup>2</sup>, Akishin P.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*National Technical University «Kharkiv Polytechnical Institute»*

<sup>2</sup>*Riga Technical University*

Pipelines are structures of significant importance, so the demands for strength of the repair supplements is high. Methods of analysis of such pipeline-bandage systems are receiving considerable attention. The most common approach to the analysis of the pipeline with the installation of composite bandages is the use of the finite element method. Using commercial software packages enables the possibility to analyse the stress state, taking into account the geometry features of real defects and mechanical properties of composite materials and pipes.

The current work focuses on the development of methods for the optimal parameters selection of composite bands, which are installed on the damaged sections of pipelines. The inner diameter of the bandage has been taken equal to the outer diameter of the pipeline and varying parameters are the thickness and length of the bandage. Two optimization problems have been formulated in this investigation. The aim of the first is to provide equiresistant structure, so that repaired area's maximum stress intensity would not be different from the intensity of the stresses on the undamaged sections of the pipeline. The aim of the second optimisation problem is to minimize the volume of the bandage with restriction that stress intensity on repaired area is smaller than on undamaged region.

To perform analysis of the stress state of the pipeline-bandage system the finite element method implemented in software ANSYS has been used. A set of stress intensity values in 2 feature points of pipeline under bandage from each of varied thickness and length of bandage has been determined. Solving the first optimisation problem objective function values have been obtained for every sample number and the objective function has been approximated with the second order polynomial. Obtained results showed that bandage length parameter did not has significant effect on the stress intensity values. To overcome the one-parameter gradient descent situation, a new set of sample numbers has been selected in the vicinity of minimum value of objective function. For the new set the approximation of the objective function has been performed by a second order polynomial and the minimum value for two parametric function has been found.

For solving the second optimisation problem an approximation of stress intensity by the second order polynomial has been performed. These approximation has been used as the restriction during minimisation of the bandage volume. Solution of the second optimisation problem gave the bandage with smaller volume than solving the first optimisation problem and stress intensity in repaired zone less than in undamaged pipe.

## Содержание

Бауэр С. М., Воронкова Е. Б., Котляр К. Изменение напряженно-деформированного состояния склеры и внутриглазного давления после интравитреальных инъекций . . . . .	4
Кириллова И. В., Коссович Л. Ю. Асимптотическая теория волновых процессов в тонких оболочках при ударных торцевых и поверхностных воздействиях . . . . .	5
Агаян К. Л., Хуршудян А. Ж., Мкоян А. А. Механическая модель сердечной аорты, учитывающая разномодульность слоев . . . . .	6
Бакоев С. Ю., Курбатова Н. В., Воронов М. Б. О моделировании устойчивости почв к загрязнению тяжелыми металлами . . . . .	7
Батищев В. А. Бифуркации в термогравитационных пограничных слоях вблизи свободной границы . . . . .	8
Благин А. В., Нефедов В. В., Мамедова А. А. Исследование структурной устойчивости процессов кристаллизации в сложных системах . . . . .	9
Благина Л. В., Нефедова Н. А., Ануфриева В. В. Математическое моделирование и исследование процессов формирования материалов для мехатронных модулей . . . . .	10
Богачев И. В., Кондратьев В. С. О радиальных колебаниях неоднородного пьезокерамического цилиндра . . . . .	11
Богачев И. В., Лапина П. А. Реконструкция неоднородных механических характеристик вязкоупругой пластины . . . . .	12
Богачева М. О. Анализ кардиосигнала с помощью преобразования Гильберта–Хуанга . . . . .	13
Боев Н. В. Прохождение плоской акустической волны через тройкопериодическую систему твердых шаровых препятствий . . . . .	14
Бочарова О. В., Анджикович И. Е., Калинин В. В., Седов А. В. О методе диагностики внутренних структурных дефектов, основанном на анализе особенностей поверхностных волновых полей . . . . .	15
Васильев А. С., Айзикович С. М., Волков С. С. Приближенные аналитические решения для плоских и осесимметричных контактных задач для трансверсально-изотропных полубесконечных тел с неоднородными по глубине покрытиями . . . . .	16
Васильев Л. В. О реконструкции параметров закрепления вязкоупругой балки . . . . .	17
Ватульян А. О. Об оценке свойств биологических тканей . . . . .	18
Ватульян А. О., Юров В. О. Исследование дисперсионных свойств неоднородного пьезоэлектрического волновода при наличии затухания . . . . .	19
Ватульян К. А., Явруян О. В. Об одном подходе к идентификации механических свойств неоднородных цилиндрических областей . . . . .	20
Вильде М. В., Ардазишвили Р. В. Применение уточненных теорий оболочек и трехмерной теории упругости к описанию явления краевого резонанса в цилиндрической оболочке . . . . .	21
Волокитин Г. И. Термоупругое выпучивание круглой пластинки из нелинейно-упругого материала . . . . .	22

Воронкова Е. Б., Журавлева Д. И. Оценка чувствительности биомеханических моделей . . . . .	23
Гармони́на А. Н. Точное решение задачи гидродинамического расчета радиального подшипника с электропроводящим смазочным материалом . . . . .	24
Герасименко Т. Е. Математическое моделирование диэлектрического и деформационного гистерезиса в двумерном случае . . . . .	25
Гетман В. А., Батищев В. А. Развитие модели спирального течения крови в восходящей аорте . . . . .	26
Гетманский М. С., Снопов А. И. Кинематика и термодинамика облака сильного взрыва . . . . .	27
Глухов И. А. Трансформации в топологии дисперсионных спектров локализованных волн с варьируемыми направлениями распространения вдоль ортотропного слоя между ортотропными полупространствами	28
Глушкова В. Н. Сигма-спецификация реагирующих систем реального времени . . . . .	29
Говорухин В. Н. Бифуркации в задачах фильтрационной конвекции при разрушении косимметрии: численный анализ . . . . .	30
Голядкина А. А., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Мурылев В. В., Полиенко А. В. Биомеханический анализ грудного отдела аорты . .	31
Григоренко К. С., Хартиев С. М., Лемешко Е. М., Соловьева А. А. Влияние вертикальной структуры плотности на параметры внутренних волн в северо-восточной части Черного моря . . . . .	32
Груздев Р. Ю., Lahderanta E., Деркун А. В. Идентификацией свойств графена на основе моделирования методом молекулярной динамики	33
Гусаков Д. В. Исследование дисперсионных свойств пороупругих материалов . . . . .	34
Гусаков Д. В., Моргунова А. В., Недин Р. Д., Чебаненко В. А. Оценка напряженного состояния и ремонт поврежденного трубопровода в процессе эксплуатации . . . . .	35
Дашевский И. Н. О возможности управления разгрузкой при ортезировании нижних конечностей . . . . .	36
Демяненко Я. М. Методы бесконтактного измерения пульса . . . . .	37
Деркун А. В., Хужаниезов М. О., Груздев Р. Ю. Моделирование магнитоэлектроупругих композиционных материалов 1-3 связности . . . .	38
Доль А. В. Математическое моделирование движения крови в системе сосудов с упругими стенками . . . . .	39
Доль А. В., Смирнов Д. А. Численное моделирование функционирования стоматологических имплантатов . . . . .	40
Донник А. М., Коссович Л. Ю. Использование моделей с активным контуром для реконструкции трехмерных образов пояснично-крестцового отдела позвоночника по результатам томограмм . . . . .	41
Дорошенко О. В., Голуб М. В. Дифракция плоских упругих волн на интерфейсных отслоениях . . . . .	42

Дубровская В. А., Переварюха А. Ю. Моделирование динамики формирования поколений видов с большой плодовитостью с учетом темпов развития особей . . . . .	43
Дударев В. В., Мнухин Р. М. К определению модуля Био пороупругого цилиндра . . . . .	44
Дударев В. В., Мнухин Р. М., Кондратьев В. С. О радиальных колебаниях пьезокерамического диска . . . . .	45
Дышко Б. А. К вопросу оценки рекуперативных свойств мышечно-сухожильных структур нижних конечностей человека . . . . .	46
Евграфова К. И., Пирогов Д. А., Маслов Л. Б. Разработка композиционного материала на основе объемной тканой структуры и исследование его физико-механических свойств . . . . .	47
Евтух Г. Е., Ляличева О. Ю., Чекин Г. В. Изучение фитотоксичности водного раствора табачного дыма . . . . .	48
Еремеев В. А., Наседкин А. В. Моделирование наноструктурированных пьезокерамических композитных материалов для биомедицинских применений . . . . .	49
Еремеев В. В., Зубов Л. М. Устойчивость трехслойной плиты с предварительно напряженным слоем из материала Муни–Ривлина . . . . .	50
Жданов И. А. Исследование режимов протекания невязкой несжимаемой жидкости сквозь прямоугольный канал . . . . .	51
Жиляев И. В. Применение оптимизационных методов при определении турбулентных характеристик течения . . . . .	52
Жуков М. Ю., Цыбенкова О. А. Конвективная монотонная неустойчивость границ зон при переносе массы электрическим полем . . . . .	53
Зеленина А. А., Зубов Л. М. Сферически симметричные деформации микрополярной упругой среды с распределенными дефектами . . . . .	54
Земсков А. В., Вестяк А. В., Тарлаковский Д. В. Применение интегральных уравнений к решению нестационарных задач упругой диффузии . . . . .	55
Зиборов Е. Н., Ермаков Д. А., Напрасников В. В. Определение прочности плиты из пористого композитного материала связности 1-3 при действии внешнего и внутреннего давления . . . . .	56
Зимин Б. А., Судьенков Ю. В., Свентицкая В. Е. Дисперсионный анализ в связанных системах . . . . .	57
Иванов Д. В. Биомеханика расширяющегося стержня Fixion . . . . .	58
Иванов Д. В., Доль Е. С. Моделирование сегмента поясничного отдела позвоночника . . . . .	59
Ильичев В. Г., Ильичева О. А. Теория монотонных операторов в исследовании моделей конкуренции . . . . .	60
Ипатов А. А., Литвинчук С. Ю., Фокина Т. А. Динамика поровязкоупругого тела на поровязкоупругом полупространстве от действия импульсной силы . . . . .	61
Казарников А. В., Ревина С. В. Монотонная и колебательная неустойчивость в пространственно-распределенной системе Рэлея . . . . .	62

Калинин А. А. Исследование морфологии и биомеханических параметров тканей интимы сосудов человека . . . . .	63
Карякин М. И., Надолин К. А. Международная академическая мобильность на мехмате ЮФУ в рамках программ ЕС Tempus-IV и Erasmus+	64
Кизилова Н. Н., Балабанов В. А. Алгоритм генерации моделей артериальных русел внутренних органов в виде самоподобных деревьев . . .	65
Кириллова Е. В., Малюков С. П., Клунникова Ю. В., Буй Т., Саенко А. В. Исследование влияния термоупругих напряжений в сапфире . . . . .	66
Кириллова Е. В., Сыромятников П. В. Моделирование высокоскоростного осциллирующего источника, движущегося по поверхности упругого слоя . . . . .	67
Кириллова И. М. Повышение устойчивости декоративных растений биотическим и абиотическим факторам среды с помощью нанотехнологий . . . . .	68
Клунникова Ю. В., Малюков С. П., Саенко А. В., Буй Т. Численное моделирование термоупругих напряжений при лазерной резке сапфира .	69
Колесников А. М. Равновесие цилиндрической мембраны, одетой на жёсткий цилиндр . . . . .	70
Колесникова А. С., Сафонов Р. А. Исследование корреляционной зависимости данных магнитно-резонансной и компьютерной томографии	71
Коровайцева Е. А. Влияние параметров ядер релаксации на распространение волн в вязкоупругом слое . . . . .	72
Кренев Л. И., Айзикович С. М. Внедрение охлаждаемого сферического штампа в функционально-градиентное покрытие . . . . .	73
Кренева С. Д., Кульпина Т. И., Батищева Н. А., Белуженко О. В., Кренев Л. И. Исследование психофизиологических и профориентационных характеристик учащихся современной средней общеобразовательной школы . . . . .	74
Кузьменко С. М. Творческие конкурсы в системе профориентации школьников и студентов . . . . .	75
Куликовская Н. В., Курганов А. Применение формализма Ходжкина—Хаксли при определении параметров ионных токов в мембранах волосковых клеток вестибулярного аппарата животных . . . . .	76
Ларченко В. В. Монотонные свойства осреднения топологически неотделимых приближений в условиях бифуркации решения . . . . .	77
Лобова Т. В., Ткачев Т. Н. Нечеткие модели временных рядов . . . . .	78
Локшина Л. Я., Костандов Ю. А. Изменение положения границы зон полного контакта и проскальзывания при сжатии образцов в зависимости от контактного трения . . . . .	79
Лысенко С. А. Исследование стационарных решений системы Шнакенберга	80
Макаров С. С., Устинов Ю. А. Энергетический анализ волновых процессов в цилиндрической оболочке с гофрированной вставкой . . . . .	81
Манжиров А. В., Стадник Н. Э. Морфофизиология роста биологических тканей . . . . .	82

Марков И. П., Брагов А. М., Игумнов Л. А., Ипатов А. А., Константинов А. Ю. Численное и экспериментальное моделирование динамики анизотропного тела . . . . .	83
Мирошниченко И. П. Напряженно-деформированное состояние в эллиптических конструкциях из трансверсально-изотропных материалов	84
Мирошниченко И. П. Особенности волновых процессов в слоистых цилиндрических конструкциях из трансверсально-изотропных материалов . . . . .	85
Митрин Б. И., Зеленцов В. Б. Влияние упругих характеристик подложки на устойчивость скользящего контакта тел с покрытиями . . . . .	86
Моисеенко И. А., Сидаш О. Ю. Анализ нелинейных вторых гармоник для волн кручения вдоль трансверсально-изотропного цилиндра . .	87
Моргунова А. В. Об особенностях строения дисперсионного множества для неоднородных цилиндрических волноводов . . . . .	88
Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Математические модели континуума с легкоуправляемым микроструктурным директором . . . . .	89
Мутин Д. И. Модель управления гетерогенными данными в медицинской информационной системе на основе XML-технологий . . . . .	90
Надолин К. А., Жилияев И. В. Моделирование массопереноса в мелком протяженном и слабо искривленном водотоке малой мутности . . .	91
Назаров А. С., Ткачев А. Н. Комбинированные нейросетевые и статистические бессеточные методы моделирования потенциальных физических полей . . . . .	92
Найдёнова Л. С., Маслов Л. Б., Сабанеев Н. А. Конечно-элементный анализ восстановления большеберцовой кости с помощью аппарата наружной фиксации . . . . .	93
Напрасников В. В., Соловьев А. Н., Мартинович В. В. Особенности построения маршрута головки 3D-принтера средствами APDL . . . . .	94
Наседкин А. В. Конечно-элементный анализ и оптимизация трубчатого пьезопреобразователя со спиральными электродами с учетом акустической среды . . . . .	95
Наседкина А. А., Татаринов А. М. Моделирование обнаружения дефектов в трубах при помощи торсионных и продольных волн . . . . .	96
Наседкина А. А., Рыбьянец А. Н. Конечно-элементный расчет эффективных свойств пористого пьезокерамического материала с локальным легированием наночастицами поверхностей пор . . . . .	97
Невский Ю. К., Чердынцева М. И. Интерактивное приложение для обучения алгоритмам в робототехнике . . . . .	98
Негреева М. Б., Ульянов В. С., Манцивода А. В., Ларионов С. Н. Программа оценки факторов и степени риска развития сопутствующих осложнений на модели пациентов с дегенеративными заболеваниями позвоночника . . . . .	99
Неклюдова Г. А., Евтух Е. С. Идентификация упругих и диссипативных характеристик подрельсового основания . . . . .	100

Нестеров С. А. Об особенностях идентификации термомеханических характеристик биологических тканей . . . . .	101
Обрезков Л. П. Устойчивость полого цилиндра из материала Блейтца и Ко при раздувании и растяжении . . . . .	102
Оганесян П. А., Скалиух А. С., Ле З. В., Лесняк О. В. Функционально градиентные пьезоэлектрические элементы, технология поляризации и применение в устройствах накопления энергии . . . . .	103
Панфилов И. А., Романенко П. В. Моделирование электроактивных полимеров и устройств с их применением . . . . .	104
Паринова Л. И. О локализованных клиновых волнах . . . . .	105
Петров А. Н., Белов А. А., Игумнов Л. А. Численное моделирование динамики поровязкоупругого полупространства с полостью от действия импульсной силы . . . . .	106
Петрова Е. И., Моршнева И. В. Исследование вторичных периодических течений в вертикальном слое бинарной смеси при наличии термодиффузии . . . . .	107
Полиенко А. В., Киреев С. И. Биомеханическое моделирование остеотомии первой плюсневой кости . . . . .	108
Потетюнко О. А. О деформировании неоднородной упругой пластины с упругим закреплением на границе . . . . .	109
Пустовалова О. Г. Современный факультатив для студентов младших курсов мехмата . . . . .	110
Ревина С. В. Монотонная и колебательная потеря устойчивости сдвиговых течений . . . . .	111
Садырин Е. В., Волков С. С., Ширяева Т. И. Влияние глубины внедрения индентора на эффективный модуль Юнга при индентировании покрытия . . . . .	112
Сафонов Р. А., Колесникова А. С. Методика построения молекулярной модели гликокаликса на базе лентгмюровского монослоя . . . . .	113
Семенов Б. Н., Кочнев А. С., Овидько И. А., Морозов Н. Ф. Компьютерное моделирование разрушения графена с дефектами кристаллической решетки . . . . .	114
Сергеева Н. В., Вильде М. В. Асимптотический анализ дисперсии гармонических волн в наследственно-упругом сплошном цилиндре . . . . .	115
Серпичева Е. В., Земсков А. В., Федотенков Г. В. Аналитическое решение нестационарной задачи о плоских колебаниях балки Тимошенко . . . . .	116
Скалиух А. С. Моделирование поляризации керамики с использованием функции плотности распределения доменов . . . . .	117
Скрипаченко К. К., Голядкина А. А. Применение метода конечных элементов к моделированию искусственных клапанов сердца . . . . .	118
Соболь Б. В., Рашидова Е. В., Васильев П. В. Метод разрывных решений в задачах о трещинах в телах сложной структуры . . . . .	119
Соловьев А. Н., Соболь Б. В., Васильев П. В. Моделирование устройств и процессов неразрушающего контроля на основе магнитных измерений . . . . .	120

Соловьёв А. Н., Татаринев А. М., Курбатова Н. В., Германовская Д. В. К задаче акустического зондирования состояния костей опорно-двигательного аппарата человека . . . . .	121
Соловьева А. А., Бердников С. В., Кулыгин В. В., Шевцов М. Ю. Параметрическая идентификация NPZD-модели Азовского моря с помощью генетического алгоритма . . . . .	122
Сторожев В. И., Болнокин В. Е., Силенко Е. М. Управление параметрами предварительного нагружения для конструкции плоского анизотропного гидроакустического экрана . . . . .	123
Сторожев В. И., Пачева М. Н., Прийменко С. А. Распространение волн сдвига по ортотропному волноводу меандровой геометрической структуры . . . . .	124
Сторожев С. В. Нечеткие оценки скоростей локализованных упругих волн в полубесконечных средах . . . . .	125
Судьенков Ю. В., Зимин Б. А., Свентицкая В. Е., Смирнов И. В. Исследование тепловыделения при деформировании и разрушении конструкционных материалов . . . . .	126
Тарлаковский Д. В., Вестяк В. А. Действие на упругое полупространство со сферической полостью нестационарных осесимметричных объемных сил . . . . .	127
Углич П. С. Задача о колебаниях функционально-градиентного полого цилиндра . . . . .	128
Федотенков Г. В., Бугаев Н. М., Афанасьева О. А., Пряжевский Р. Д. Плоские нестационарные задачи для упругого полупространства при наличии подвижной точки смены граничных условий . . . . .	129
Филимонова А. М., Говорухин В. Н. Численный анализ динамики и взаимодействия вихревых конфигураций на $\gamma$ -плоскости . . . . .	130
Фролова К. П., Вильчевская Е. Н., Бауэр С. М. Определение коэффициента сдвиговой вязкости склеральной оболочки глаза . . . . .	131
Хрыков С. С., Голубева А. С., Макиров С. К., Гаврюшин С. С. Биомеханическое обоснование применения различных костнопластических материалов для вертебро- и кифопластики . . . . .	132
Цибулин В. Г., Епифанов А. В. Динамика косимметричных систем хищников и жертв . . . . .	133
Чебаков М. И., Колосова Е. М., Ляпин А. А. Некоторые контактные задачи с учетом трения и тепловыделения от трения . . . . .	134
Чебаненко В. А., Захаров Ю. Н., Рожков Е. В., Паринов И. А. Изгиб балки из неполяризованной керамики ЦТС-19, эксперимент и компьютерное моделирование . . . . .	135
Черевко В. А., Кизилова Н. Н. Эффект Фареуса–Линдквиста для суспензий микро- и наночастиц . . . . .	136
Черненко А. Б., Нефедов В. В., Азаренков А. А. Влияние систем вторичного подрессоривания транспортных комплексов на организм человека-оператора, с учётом его биомеханических свойств . . . . .	137

Шевцова М. С., Коссович Е. Л., Челнокова Н. О. Моделирование процесса проникновения липидных отложений в интиму артерий и развития атеросклеротической бляшки . . . . .	138
Шейдаков Д. Н., Михайлова И. Б. Влияние поверхностных напряжений на устойчивость нелинейно-упругой квадратной плиты . . . . .	139
Шпак А. Н., Голуб М. В. Моделирование взаимодействия отслоившегося полосового пьезоэлектрического актуатора с упругим волноводом .	140
Шпрайзер Е. И. Анализ пьезокерамического вибрационного гироскопа с многоэлектродным покрытием при различных условиях закрепления . . . . .	141
Шубчинская Н. Ю., Пустовалова О. Г. Напряженно-деформированное состояние изгиба неоднородной панели . . . . .	142
Юренко К. И. Интеллектуализация систем управления на железнодорожном транспорте . . . . .	143
Юров В. О. Волны в вязкоупругом предварительно напряженном цилиндрическом волноводе . . . . .	144
Barkanov E., Wesolowski M. An improvement of the accuracy and effectiveness of the inverse technique based on vibration tests . . . . .	145
Lvov I., Barkanov E., Akishin P. Optimal Design of Composite Repair of Pipeline with Volumetric Surface Defect . . . . .	146

Подписано в печать 17.05.2016.  
Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,95. Уч.-изд. л. 10,1.  
Тираж 200 экз. Заказ № 5158.

Отпечатано в отделе полиграфической, корпоративной и сувенирной продукции  
Издательско-полиграфического комплекса КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ  
344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, тел. (863) 247-80-51.