

УДК 517.9

УСТАНОВЛЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ В СЕТИ ОСЦИЛЛЯТОРОВ РЕССЛЕРА

© 2016 г. А. А. Короновский^{1,2}, О. И. Москаленко^{1,2}, А. А. Пивоваров¹, А. Е. Храмов^{1,2}

E-mail: alexey.koronovskii@gmail.com

Проведено исследование процессов установления явления обобщенной хаотической синхронизации в сети взаимно связанных потоковых систем. Исследован характер поведения элементов сети при переходе от асинхронной динамики к синхронной при увеличении параметра связи. Для выяснения особенностей взаимодействия элементов сети и возникновения режима обобщенной хаотической синхронизации использованы метод ближайших соседей и расчет спектра показателей Ляпунова.

DOI: 10.7868/S0367676516020150

ВВЕДЕНИЕ

Изучение различных типов хаотической синхронизации, таких как фазовая синхронизация, синхронизация с запаздыванием (lag-синхронизация), полная синхронизация, в настоящее время привлекает большое внимание исследователей [1]. Среди различных типов синхронной динамики высокий интерес вызывает исследование такого явления, как обобщенная хаотическая синхронизация [2–4]. Явление обобщенной хаотической синхронизации может возникать между различными осцилляторами, в том числе между осцилляторами с разной размерностью фазового пространства. Индикатором установления режима обобщенной синхронизации является наличие функциональной зависимости между состояниями взаимодействующих осцилляторов. Ранее уже были исследованы системы как с дискретным временем, связанные односторонне и взаимно [5], так и потоковые системы с односторонней [6] и взаимной [7] связью (включая пространственно-распределенные системы [8–10]).

Следующим этапом в исследовании явления обобщенной синхронизации стало исследование сетей нелинейных элементов. Был изучен процесс установления режима обобщенной синхронизации при переходе от асинхронной динамики к синхронной в малой сети логистических отображений [7]. Следует отметить, что в силу сложности рассматриваемых систем [8] в данном на-

правлении исследований на текущий момент существует много вопросов. Вопросу, связанному с установлением режима обобщенной хаотической синхронизации в сети взаимно связанных потоковых систем, и посвящена настоящая работа.

МОДЕЛЬНАЯ СИСТЕМА И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В качестве модельной сети связанных между собой потоковых систем в данной работе выбрана сеть, состоящая из $N = 5$ взаимно связанных осцилляторов Ресслера. Эволюция i -го элемента сети ($i = 1, \dots, N$) описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= -\omega_i y_i - z_i + \varepsilon \sum_{j=1}^N C_{ij} x_j, \\ \dot{y}_i &= \omega_i x_i + a y_i, \\ \dot{z}_i &= p + z_i (x_i - c),\end{aligned}\tag{1}$$

где $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10$ – управляющие параметры, ε – коэффициент связи, C_{ij} – матрица связи ($C_{ij} = 0$ – отсутствие связи между элементами, $C_{ij} = 1$ – каждый элемент сети взаимодействует с остальными), $\omega_1 = 0.95$, $\omega_2 = 0.9525$, $\omega_3 = 0.955$, $\omega_4 = 0.9575$, $\omega_5 = 0.96$. Тип связи между элементами сети при рассмотрении был выбран в виде “каждый с каждым”, т.е. $C_{ij} = 1$.

Для детектирования режима обобщенной синхронизации в односторонне связанных системах классическим является метод вспомогательной системы [11], но этот метод не подходит для исследования взаимодействия систем, связанных взаимно, по причинам, изложенным в работах [8, 11–13]. Таким образом, необходимо приме-

¹ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования “Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского”.

² Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования “Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.”.

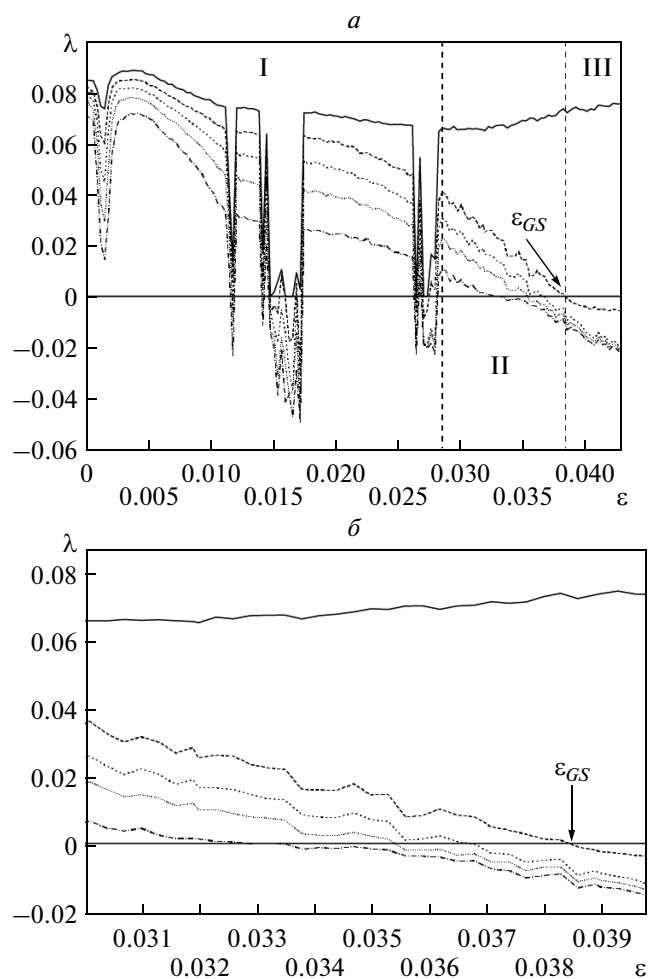


Рис. 1. *a* — зависимость пяти показателей Ляпунова от коэффициента связи ε , *б*) область значений II в более крупном масштабе.

нять иные методы, например, расчет спектра показателей Ляпунова [12, 14]. При рассмотрении двух связанных осцилляторов критерием наличия обобщенной синхронизации является переход через ноль в область отрицательных значений одного из двух старших положительных показателей Ляпунова, тогда как другой старший показатель Ляпунова остается положительным [6, 15] (ситуация с двумя положительными показателями Ляпунова автономных осцилляторов, т.е. режим гиперхаотических колебаний, в данной работе не рассматривается). В случае же сети, состоящей из N нелинейных элементов, при малых значениях параметра связи спектр показателей Ляпунова будет характеризоваться N положительными величинами, которые с увеличением параметра связи будут последовательно переходить в область отрицательных значений [8]. Для сети из пяти связанных осцилляторов Ресслера

критерием возникновения режима обобщенной синхронизации в системе будет служить переход в область отрицательных значений четырех из пяти показателей Ляпунова (первый показатель остается положительным).

На рис. 1*a* представлена зависимость пяти показателей Ляпунова для рассматриваемой системы взаимно связанных осцилляторов Ресслера (1) от величины параметра связи ε . Зависимость $\lambda_i(\varepsilon)$ ($i = 1, \dots, 5$) можно разделить на три области (рис. 1*a*): (I) $\varepsilon \in [0; 0.032]$ — область асинхронной динамики; (II) $\varepsilon \in (0.032; 0.0385]$ — область перехода к режиму обобщенной синхронизации, и (III) — область, соответствующая режиму обобщенной хаотической синхронизации. В области перехода к режиму обобщенной хаотической синхронизации четыре показателя Ляпунова последовательно меняют знак, пересекая ось абсцисс (рис. 1*б*). Момент смены знака вторым по старшинству показателем Ляпунова (т.е. окончательного перехода к режиму обобщенной синхронизации) при значении параметра связи $\varepsilon = 0.0385$ отмечен на рис. 1*б* стрелкой. Таким образом, на границах области II система демонстрирует соответственно асинхронную ($\varepsilon < 0.032$) и синхронную ($\varepsilon > 0.0385$) динамику. В то же самое время, в отличие от случая двух осцилляторов, граница между асинхронной и синхронной динамикой в данном случае размыта, и имеет место постепенная перестройка динамики элементов сети, основные механизмы и закономерности которой пока неизвестны.

Для того чтобы выявить детали процессов, происходящих в области II, где происходит последовательная постепенная смена знака показателей Ляпунова, был использован метод ближайших соседей [8]. Суть метода состоит в том, что при рассмотрении динамики связанных осцилляторов в одном из них необходимо выбрать опорную точку x_n^l и найти ближайших соседей выбранной опорной точки x_j^l . Затем необходимо зафиксировать образы ближайших соседей x_j^m в фазовых пространствах остальных осцилляторов [8], а в качестве численной характеристики синхронизма следует рассматривать величину дисперсии значения расстояний между образами ближайших соседей x_j^m .

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В ходе исследования два значения параметра связи $\varepsilon_1 = 0.0345$ и $\varepsilon_2 = 0.038$ были выбраны таким образом, что при значении ε_1 только один показатель Ляпунова отрицательный, тогда как при

значении параметра связи ε_2 уже три показателя отрицательные (рис. 1б). На рис. 2а и 2б приведены фазовые портреты пяти взаимодействующих осцилляторов Ресслера рассматриваемой сети для двух значений коэффициента связи ε_1 и ε_2 соответственно. На фазовых портретах трех осцилляторов $i = 2, \dots, 4$ были выбраны три опорные точки (одна для каждой системы). Затем в соответствии с методом, описанным выше, были найдены их ближайшие соседи и соответствующие им образы во всех остальных связанных системах. Нетрудно заметить, что при $\varepsilon_1 = 0.0345$ (рис. 2а) на фазовых портретах четырех из пяти осцилляторов точки сосредоточены в ограниченной области аттрактора и распределены вдоль радиуса, в то время как на фазовом портрете пятого осциллятора $i = 5$ образы ближайших соседей оказываются близкими и размытие состояний не наблюдается. В то же время при значении параметра связи $\varepsilon_2 = 0.038$ на фазовых портретах всех осцилляторов за исключением второго осциллятора $i = 2$ образы ближайших соседей имеют близкие значения. Данные наблюдения подтверждаются значениями величин дисперсии расстояний между ближайшими соседями для рассматриваемых узлов сети, которые приведены в табл. 1 и 2. Номера столбцов в таблицах соответствуют номерам узлов, в которых была фиксирована опорная точка x_n^i , номера строк соответствуют номерам тех узлов, в отношении которых выясняется характер взаимодействия.

При рассмотрении полученных значений нетрудно заметить, что величина дисперсии для некоторых пар узлов сети резко отличается от остальных. В соответствии с методом ближайших соседей можно сделать вывод о том, что при малой величине дисперсии (в рассматриваемом случае $\sim 10^{-4}$) рассматриваемые элементы синхронизованы с точки зрения обобщенной синхронизации, тогда как в случае большей дисперсии ($\sim 10^{-1}$) элементы еще не находятся в режиме синхронизма. В таком случае можно сделать вывод о том, что при значении параметра связи $\varepsilon_1 = 0.0345$ четыре осциллятора Ресслера из пяти демонстрируют

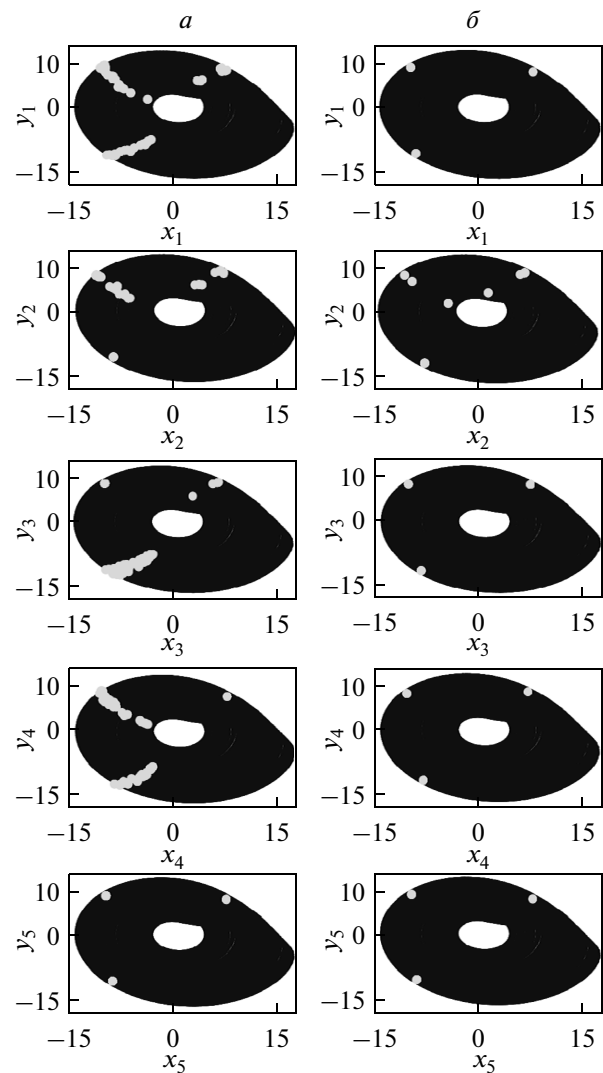


Рис. 2. Фазовые портреты пяти рассматриваемых осцилляторов для двух значений параметра связи: $\varepsilon_1 = 0.0345$ (а) и $\varepsilon_2 = 0.038$ (б).

синхронную (в смысле обобщенной хаотической синхронизации) динамику. Противоположная ситуация наблюдается на другом конце области Π при значении параметра связи $\varepsilon_2 = 0.038$, где только вторая система демонстрирует асинхронную ди-

Таблица 1. Значения величин дисперсии для параметра связи $\varepsilon_1 = 0.0345$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	—	5.57E-01	3.66E-02	4.82E+00	1.22E+00
x_2	4.94E+00	—	2.72E-01	3.54E+00	4.18E+00
x_3	6.62E-01	4.72E-02	—	8.11E-01	5.65E-02
x_4	2.06E+00	9.97E-01	9.50E-01	—	7.03E-01
x_5	4.19E-05	2.92E-05	6.95E-03	4.37E-04	—

Таблица 2. Значения величин дисперсии для параметра связи $\varepsilon_2 = 0.038$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	—	5.20E–05	3.21E–04	2.78E–04	1.83E–04
x_2	7.64E–02	—	6.23E–02	2.58E–01	2.91E–02
x_3	3.09E–05	3.10E–05	—	3.10E–05	3.13E–05
x_4	2.67E–05	3.40E–05	5.45E–05	—	2.01E–05
x_5	6.94E–05	9.14E–05	1.39E–04	9.14E–05	—

намику, тогда как остальные элементы сети синхронизованы друг с другом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе проведено исследование явления обобщенной синхронизации в сети связанных взаимно осцилляторов Ресслера. С использованием методов расчета спектра показателей Ляпунова и метода ближайших соседей выявлен характер взаимодействия нелинейных элементов сети в области перехода от асинхронной динамики к синхронной.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-12-00224). Научная деятельность А.Х. поддержана также грантом Министерства образования и науки РФ (№ 931).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Univ. Press, Cambridge, England, 2001.
2. *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. P. 980.
3. *Dmitriev B.S., Hramov A.E. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102. 074101.
4. *Filatov R.A., Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Phys. Lett. A. 2006. V. 358. P. 301.
5. *Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Shurygina S.A., Hramov A.E.* // Chaos, Solitons, Fractals. 2013. V. 46. P. 12.
6. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. P. 4528.
7. *Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Pivovarov A.A., Hramov A.E.* // Techn. Phys. Lett. 2015. V. 16. P. 1–7.
8. *Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E., Boccaletti S.* // Phys. Rev. E. 2012. V. 86. 036216.
9. *Коронровский А.А., Попов П.В., Храмов А.Е.* // ЖЭТФ. 2006. Т. 130. № 4(10). P. 748.
10. *Moskalenko O.I., Hramov A.E., Koronovskii A.A., Ovchinnikov A.A.* // Europhys. J. B. 2011. V. 82(1). P. 69.
11. *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Popov P.V.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 72(3). 037201.
12. *Moskalenko O.I., Koronovskii A.A., Hramov A.E.* // Phys. Rev. E. 2013. V. 87. 064901.
13. *Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Hramov A.E.* // Phys. Rev. E. 2011. V. 84(3). 037201.
14. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
15. *Pyragas K.* // Phys. Rev. E. 1997. V. 56. 5183.