



---

**ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ**

УДК: 53.043  
MSC 2010: 34F05

## **Химерные режимы в кольце элементов с локальным однонаправленным нелинейным взаимодействием**

**И. А. Шепелев, Т. Е. Вадивасова**

Сложные пространственные структуры, состоящие из стационарных областей с когерентным и некогерентным поведением соседних элементов, названные химерами, вызывают в последнее время большой интерес исследователей. С существованием подобных структур связан ряд еще не решенных проблем. Одна из таких проблем касается характера взаимодействия элементов ансамбля, при котором возможно наблюдать устойчивые химерные структуры. До последнего времени считалось, что важнейшим условием существования химеры является нелокальный характер взаимодействия. Однако возможно, что это предположение не вполне справедливо. При особом выборе локальных связей химеры могут быть реализованы (например, химера в ансамблях с инерционной локальной связью). Для описания связи вводится дополнительная переменная, задаваемая линейным дифференциальным уравнением. Существование виртуальных химер в осцилляторах с запаздывающей обратной связью также позволяет предположить возможность получения химер в кольце локально связанных осцилляторов с однонаправленным взаимодействием, которое является безынерционным, но носит нелинейный характер. Такое предположение основано на качественной аналогии, которая прослеживается в поведении системы с запаздывающей обратной связью и кольца соответствующих осцилляторов с локальной однонаправленной связью.

В данной работе за основу принимается система с запаздывающей обратной связью, в которой существует виртуальная химера, и построен распределенный аналог, представляющий собой кольцо осцилляторов с однонаправленной нелинейной локальной связью.

Ключевые слова: осциллятор с запаздывающей обратной связью, распределенная система, пространственная структура, химера, динамический хаос

---

Получено 03 марта 2016 года  
После доработки 21 апреля 2016 года

---

Шепелев И. А. благодарит за финансовую поддержку РФФ, грант 16-12-1075, в рамках технического задания которого выполнены разделы 1–3 настоящей статьи. Вадивасова Т. Е. благодарит за финансовую поддержку РФФИ, грант № 14-52-12002.

Шепелев Игорь Александрович  
[igor\\_sar@li.ru](mailto:igor_sar@li.ru)

Вадивасова Татьяна Евгеньевна  
[vadivasovate@yandex.ru](mailto:vadivasovate@yandex.ru)

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского  
410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83



## Введение

В последние годы большой интерес исследователей вызывают сложные пространственные структуры, получившие название химер [2, 13, 23]. Химеры возникают в осцилляторных ансамблях с различной динамикой элементов, как регулярной [3, 22, 29, 31], так и хаотической [19–21], и представляют собой чередующиеся в пространстве кластеры с когерентным и некогерентным поведением соседних осцилляторов. Одним из важнейших условий возникновения химер принято считать нелокальный характер взаимодействия элементов: каждый осциллятор непосредственно связан с целой группой соседей. В большинстве работ, посвященных химерам, исследуются модели ансамблей, учитывающие связь каждого элемента с несколькими соседями, то есть нелокальный характер связи. Имеются также результаты, свидетельствующие о существовании химер в ансамблях с глобальным взаимодействием [28].

Вопрос о возможности существования химерных структур в ансамблях с локальной связью остается открытым. В большинстве случаев при уменьшении радиуса взаимодействия химеры исчезают. Однако можно предположить, что при некоторых видах локального взаимодействия химероподобные структуры все-таки могут существовать. Так, в [14] приведены примеры химер в ансамблях с локальной инерционной связью. Связь задается специальной переменной, которая описывается линейным дифференциальным уравнением. Возможность метастабильных амплитудных химер в ансамбле осцилляторов Стюарта–Ландау с локальной связью отмечалась в [31]. Однако случай локальной связи не был специально исследован.

Особый случай химер имеет место в системах с запаздывающей обратной связью [15, 16]. Это так называемые виртуальные химеры. Они представляют собой режим перемежаемости во времени, когда на периоде запаздывания укладывается несколько интервалов с регулярным и нерегулярным поведением, причем чередование интервалов происходит упорядоченно, практически повторяясь через период запаздывания. Период запаздывания в таких системах может рассматриваться как условное пространство [1, 15, 16].

Системы с запаздыванием составляют особый класс распределенных динамических систем, для которых мгновенное состояние в момент времени  $t$  задается набором функций, определенных на интервале  $[t; t+T_d]$ , где  $T_d$  — период запаздывания. Модели с запаздыванием широко используются в механике [18], задачах управления [5, 24–26], экологии [7, 9, 17], нейродинамике [6, 8, 27] и ряде других областей. Осциллятор с запаздывающей обратной связью при некоторых условиях демонстрирует поведение, подобное поведению распределенной системы типа кольца осцилляторов с локальным однонаправленным взаимодействием и может в определенной степени рассматриваться как упрощенная модель такой распределенной системы [4, 10, 11].

Существование виртуальных химер в системах с запаздыванием и отмеченная аналогия позволяют предположить, что химеры могут возникать в кольце локально связанных осцилляторов, по крайней мере в случае однонаправленной связи. Если это утверждение верно, то по крайней мере определенный класс химерных структур может быть реализован в ансамблях с локальным взаимодействием элементов. В данной работе приводятся результаты численного моделирования, подтверждающие сделанное предположение. Рассматривается ансамбль осцилляторов типа системы Икеды без запаздывания, соединенных в кольцо посредством нелинейных однонаправленных локальных связей. Показано, что данная распределенная система ведет себя во многом аналогично модели с запаздыванием, исследованной в [15, 16], и демонстрирует химеры, имеющие большое сходство с описанными

в [15, 16] виртуальными химерами. В работе также рассматривается эволюция химер при вариации различных параметров исследуемой системы.

Статья организована следующим образом: в разделе 1 описывается исследуемая система и методы численного моделирования, в разделе 2 описывается эволюция системы, показывается существование режимов химер и производится их анализ, в разделе 3 рассматривается явление мультистабильности, в разделе 4 рассматриваются диаграммы режимов исследуемой системы на плоскостях различных управляющих параметров. В заключении на основании полученных данных делаются определенные выводы.

## 1. Исследуемая система и методы численных экспериментов

Виртуальная химера, численно исследованная в [15] и реализованная экспериментально в устройстве с оптоволоконной запаздывающей обратной связью [16], может быть исследована с помощью простой математической модели, представляющей собой уравнение линейного осциллятора с запаздывающей нелинейной обратной связью — модифицированный осциллятор Икеды:

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \frac{dx}{dt} = -\delta_0 y - x + kf[x(\tau - T_d)], \\ \frac{dy}{dt} = x, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $\tau$  — время в исходных единицах,  $T_d$  — время запаздывания,  $\varepsilon_0$  и  $\delta_0$  — параметры осциллятора,  $k$  — коэффициент обратной связи,  $f(x)$  — нелинейная функция, характеризующая преобразование в цепи с запаздывающей обратной связью. Если нормировать время на период запаздывания  $t = \frac{\tau}{T_d}$ , то можно переписать уравнения системы в виде

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \frac{dx}{dt} = -\delta_0 y - x + kf[x(t - 1)], \\ \frac{dy}{dt} = x, \end{cases} \quad (1.2)$$

где  $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{T_d}$ ,  $\delta = T_d \varepsilon_0$ ,  $y = \frac{U}{T_d}$ . Функция  $f(x)$  может быть задана в виде

$$f(x) = \frac{\beta}{1 + m \sin^2(x + \Phi_0)}, \quad (1.3)$$

$\beta$ ,  $m$ ,  $\Phi_0$  — параметры нелинейной обратной связи.

Модель, исследуемая в настоящей работе, получается заменой цепочки запаздывающей обратной связи на цепочку идентичных осцилляторов, замкнутую в кольцо. Связь элементов является локальной, однонаправленной и задается нелинейной функцией (1.3). Соответствующие уравнения имеют вид

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx_j}{dt} = -\delta y_j - x_j + k(f(x_{j-1})), \\ \frac{dy_j}{dt} = x_j, \end{cases} \quad (1.4)$$

$$f(x_{j-1}) = \frac{\beta}{1 + m \sin^2(x_{j-1} + \Phi_0)}.$$

Здесь  $j = 1, \dots, N$  — номер осциллятора (дискретная пространственная координата),  $N$  — число осцилляторов в кольце. В проведенных исследованиях рассматривалось кольцо из  $N = 300$  элементов. Параметры связи фиксировались постоянными:  $\beta = 4$ ,  $m = 4.7$ ,  $\Phi_0 = 0.4$ .

Модель (1.4) может быть физически реализована, например, в виде кольца из полупроводниковых лазеров с интерферометрами Фабри–Перо, характеризующиеся нелинейностью вида (1.3), связанных оптоволоконными линиями. Длина этих линий предполагается достаточно малой, чтобы запаздыванием сигнала в линии можно было пренебречь.

Система (1.4) численно интегрировалась методом Гюна [30]. Шаг интегрирования фиксировался равным  $h = 0.0004$ . По полученным массивам данных строились пространственно-временные графики режимов, на которых разные цвета соответствуют различным уровням значений переменной  $x$ . Кроме того, для диагностики режимов анализировались колебания во времени в фиксированной точке пространства и мгновенные пространственные профили. Начальные условия выбирались случайным образом или задавались периодическими с добавлением случайной компоненты. Реализация какого-либо режима со случайных начальных условий позволяет сделать вывод о его устойчивом характере. При построении диаграмм режимов на плоскости управляющих параметров отдельно отслеживался каждый устойчивый режим. Важно отметить, что для исследуемой системы характерен очень длительный процесс установления ( $>10\,000$ ), поэтому при построении пространственно-временных графиков использовались данные, полученные после интегрирования на достаточно больших интервалах времени.

## 2. Эволюция режимов с ростом параметра связи и возникновение химероподобной структуры

При вариации параметров  $\varepsilon$ ,  $\delta$  и  $k$  в кольце (1.4) наблюдаются различные пространственно-временные структуры. Зафиксируем значения  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\delta = 0.01$  и рассмотрим, как меняются динамические режимы в кольце (1.4) с ростом связи  $k$ .

При очень слабой связи в системе отсутствуют какие-либо колебания и она находится в устойчивом однородном равновесном состоянии  $x = 0$ ,  $y = 0$ . С ростом  $k$  появляется колебательный режим, представляющий собой перемежаемость во времени хаотического поведения и режима, близкого к однородному равновесию (рис. 1). При режиме, близком к равновесию, некоторые пространственные колебания имеют место, но их амплитуда очень мала (рис. 1b). В области хаотической динамики, напротив, в пространстве наблюдаются хаотические колебания с достаточно большой амплитудой (рис. 1c). Аналогичное поведение имело место в системе (1.2) и было названо бризером [15]. Колебания во времени в указанном режиме представляют собой периодические переключения между двумя метастабильными состояниями, в одном из которых наблюдается временной хаос (рис. 1d).

При достижении коэффициентом связи некоторого значения в системе (1.4) происходит резкий переход к режиму устойчивой бегущей волны (рис. 2d). Особенность режима бегущей волны, представленного на рисунке 2, состоит в том, что часть элементов кольца находится в одном и том же метастабильном состоянии покоя (темные области на пространственно-временном графике), а часть — в состоянии пространственно-временного хаоса (светлые полосы). Данный режим соответствует виртуальной химере, наблюдаемой в системе с запаздыванием (1.2) [15, 16]. Применительно к пространственно распределенной системе (1.4) данный режим может быть назван «вращающейся химерой».

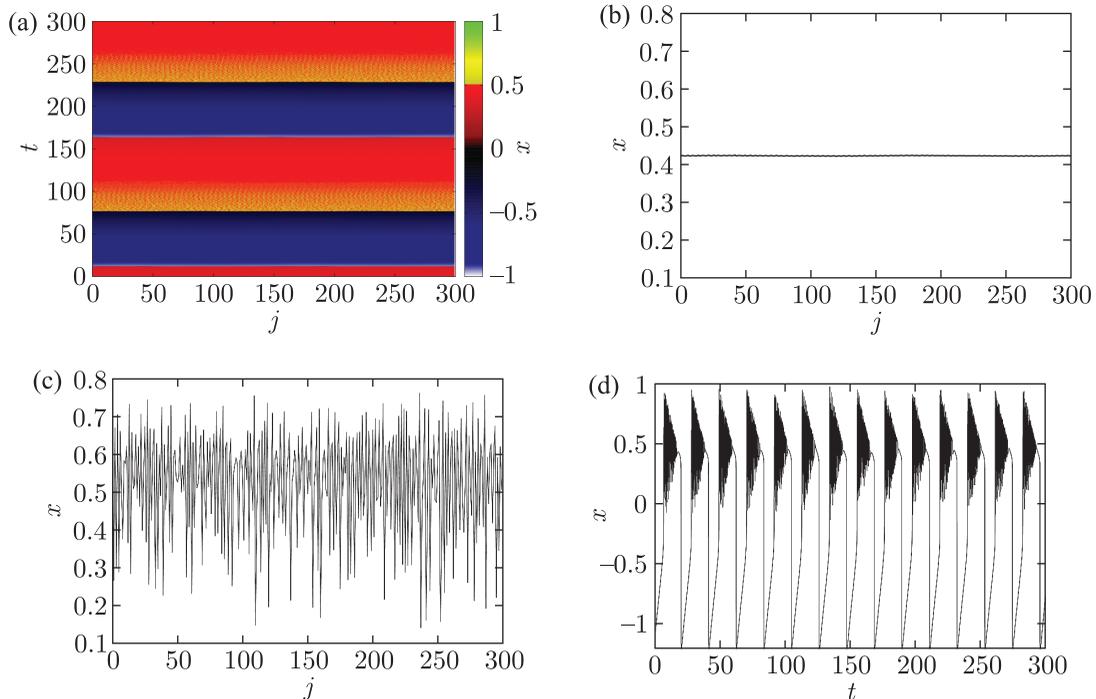


Рис. 1. Режим перемежаемости во времени: (а) пространственно-временной график колебаний; (б) пространственный профиль в режиме, близком к однородному равновесию; (с) пространственный профиль в хаотической фазе временной перемежаемости; (д) реализация колебаний во времени.<sup>а</sup>

Границы областей когерентного и некогерентного поведения вращаются по кольцу с некоторой постоянной скоростью. Стационарную картину областей можно получить, перейдя в движущуюся систему координат. На рисунках 2а, б приведены пространственно-временные графики в режиме вращающейся химеры для неподвижных и движущихся координат. Из-за конечного числа элементов кольца не удастся точно задать скорость вращения химеры и полностью избавиться от дрейфа границ областей: границы областей на рисунке 2 не являются строго вертикальными. Однако примененная процедура позволяет наблюдать химерную структуру на пространственно-временном графике для достаточно большого интервала времени. Как видно из рисунка 2б, пространственная структура почти не меняется во времени, то есть можно говорить о стабильном во времени химерном состоянии. Форма соответствующих колебаний в пространстве и во времени приведена на рисунках 2с, д.

Важной чертой отмеченного режима, указывающей на то, что этот режим действительно можно называть химерой, является независимость от начальных условий. На рисунке 3 приведены два различных начальных распределения переменных  $x_j$  и соответствующие им установившиеся пространственно-временные структуры. Можно видеть, что с разных начальных условий система выходит на один и тот же установившийся режим «вращающейся химеры». Можно отметить, что для разных начальных распределений время установления различается: так, при периодическом распределении оно составляет примерно 6 000–8 000 единиц, а для случайного начального профиля — уже порядка 30 000.

<sup>а</sup>Для читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/nd1602003/>

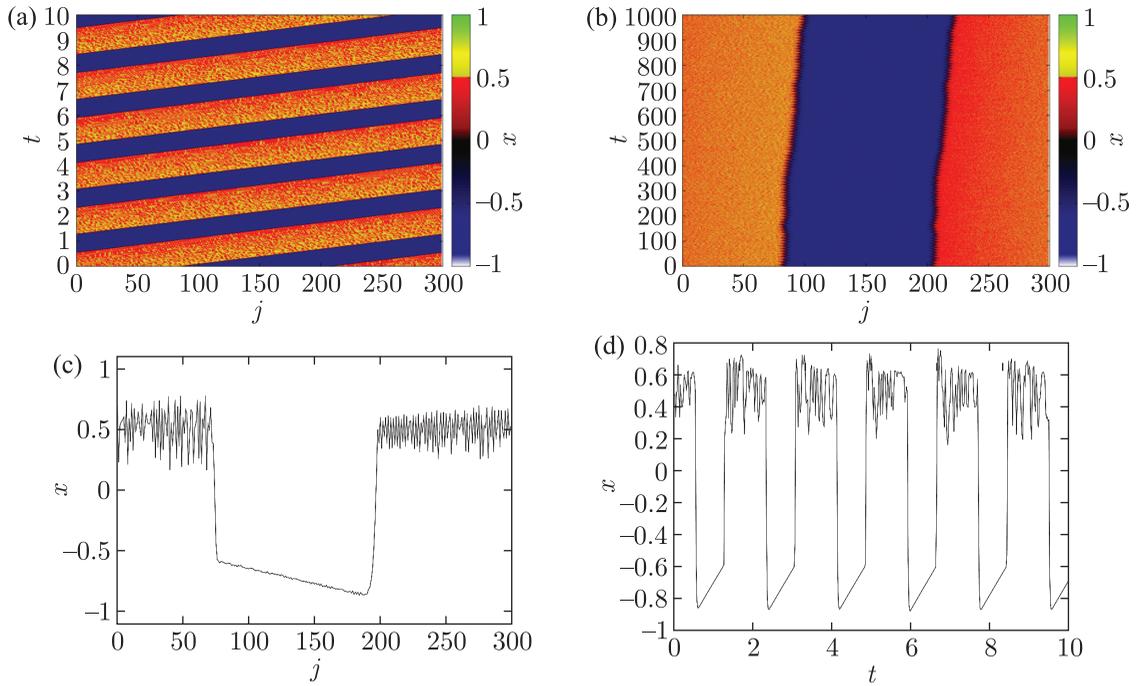


Рис. 2. Режим «вращающейся химеры» в исследуемой системе при  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\delta = 0.41$ ,  $k = 0.456$ : (a) пространственно-временной график в неподвижной системе координат; (b) пространственно-временной график в движущейся системе координат; (c) мгновенный пространственный профиль; (d) форма колебаний во времени в фиксированной точке пространства. Время установления  $t_{set} = 40\,000$ , начальные условия — случайные.

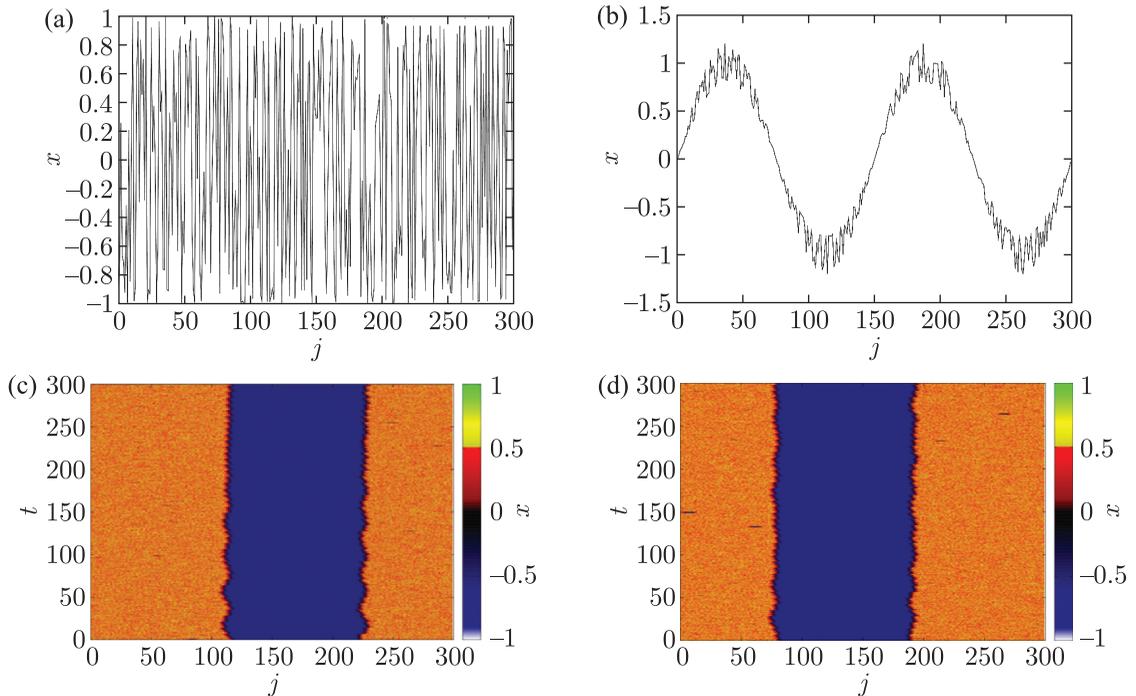


Рис. 3. Химерные состояния для разных начальных условий при  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\delta = 0.01$ ,  $k = 0.51$ : начальные распределения  $x_j$  (a, b) и соответствующие им пространственно-временные графики установившегося режима «вращающейся химеры» (c, d).

Химероподобные структуры существуют в некоторой конечной области значений параметра связи. При дальнейшем увеличении связи между элементами химеры разрушаются (рис. 4). Разрушение химер происходит постепенно.

В области некогерентности возникают кластеры с когерентным поведением, которые существуют на конечных интервалах времени (рис. 4а, б). С ростом  $k$  таких кластеров появляется все больше, а время их жизни уменьшается (рис. 4с). При некотором достаточно большом значении  $k$  в системе вновь устанавливается пространственно-временной хаос (рис. 4д).

Следует отметить, что механизм разрушения виртуальной химеры в осцилляторе с запаздывающей обратной связью при увеличении коэффициента обратной связи является совершенно аналогичным [15]. Он также наблюдается в экспериментах с лазером и электронной запаздывающей обратной связью [16].

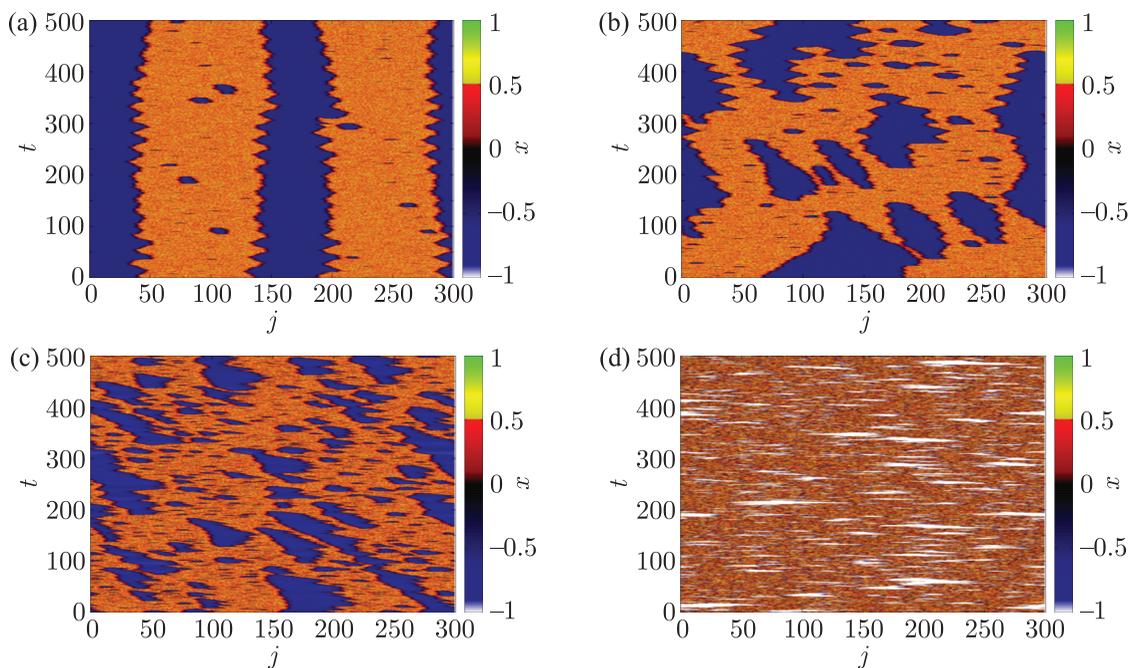


Рис. 4. Разрушение химеры при  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\delta = 0.01$  с ростом значений параметра связи: (а)  $k = 0.519$ ; (б)  $k = 0.5258$ ; (с)  $k = 0.56$ ; (д)  $k = 0.8$ .

### 3. Мультистабильность

Независимость режима вращающейся химеры от начальных условий, проиллюстрированная на рисунке 3, не является абсолютной. Во многих случаях один и тот же режим наблюдается при изменении начальных условий только в определенных пределах. В то же время существует множество начальных условий, которые приводят к установлению другого режима (например, химеры с другим числом голов (кластеров некогерентности) на длине системы), то есть имеет место явление мультистабильности.

Пример двух химерных структур, сосуществующих при одних и тех же значениях параметров, приведен на рисунке 5.

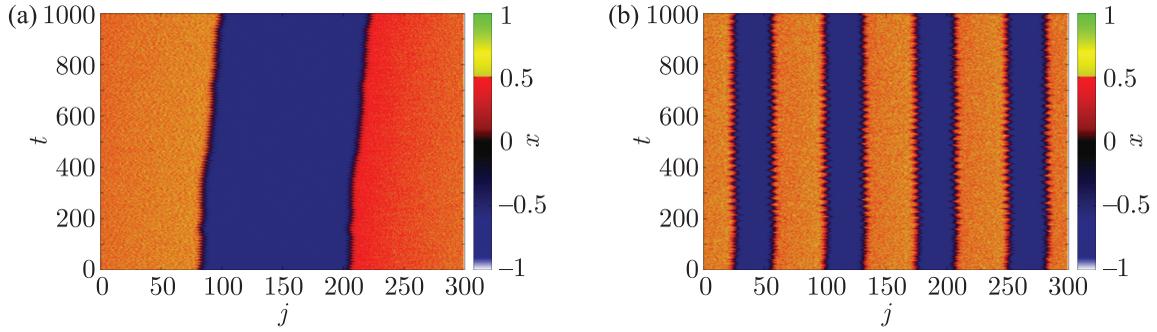


Рис. 5. Два режима химер, наблюдаемые при  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\delta = 0.41$ ,  $k = 0.456$  в зависимости от начальных условий.

#### 4. Диаграммы режимов на плоскостях управляющих параметров

Были исследованы области существования различных пространственно-временных структур при изменении параметров системы (1.4) и построены диаграммы режимов на плоскостях различных управляющих параметров. Они приведены на рисунках 6–8. Различным цветам на диаграммах соответствуют различные режимы. Там же приведены пространственно-временные графики, иллюстрирующие характер режима, наблюдаемого в той или иной области. Границы областей определены достаточно приближенно, так как их детальное построение в силу длительности процессов установления, мультистабильности и сложности режимов представляется затруднительным. Тем не менее, приведенные диаграммы дают адекватное представление об эволюции режимов при изменении того или иного параметра.

На рисунке 6 приведены области различных динамических режимов на плоскости параметров  $(k, \varepsilon)$  при  $\delta = 0.01$ . В светлой области (область 1) наблюдается колебательный режим, представляющий собой перемежаемость во времени между хаотическим режимом

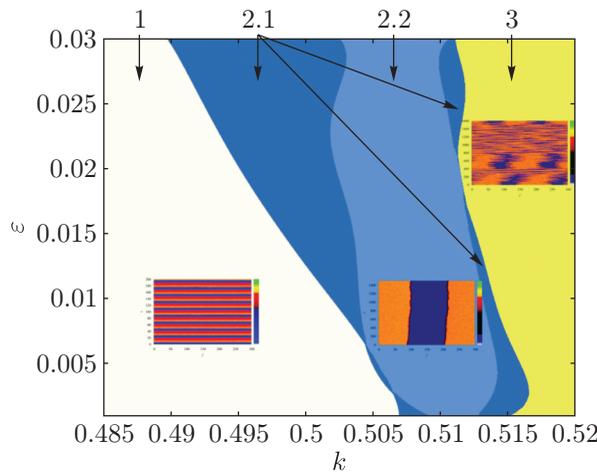


Рис. 6. Диаграмма режимов в системе (1.4) на плоскости управляющих параметров  $(k, \varepsilon)$  при  $\delta = 0.01$ . Цветами выделены области разных динамических режимов. Характер режимов проиллюстрирован вставками, представляющими пространственно-временные диаграммы для переменной  $x(t)$ .

и режимом, близким к однородному равновесию (см. рис. 1). Две области более темных тонов (2.1 и 2.2, синяя и голубая) соответствуют существованию химеры с одним кластером некогерентности. Меньшая по размеру и более светлая область 2.2 соответствует случаю максимально устойчивой химеры, когда она реализуется при случайных начальных условиях. В более широкой темной области 2.1 для получения того же режима химеры требуются особые начальные условия. При переходе в светлую область справа (область 3) химера разрушается. Граница между областями является достаточно условной, поскольку разрушение химеры с ростом параметра  $k$  происходит постепенно (см. рис. 4).

Для значения  $\delta = 0.01$  явление мультистабильности не наблюдается. Однако оно возникает с ростом  $\delta$ , что можно видеть на диаграмме режимов, приведенной на рисунке 7. Управляющими параметрами теперь являются  $k$  и  $\delta$ , а значение  $\varepsilon$  постоянно:  $\varepsilon = 0.01$ . Здесь в областях 2.1–2.4, обозначенных градиациями тона (от светло- до темно-синего) существуют режимы химер, причем с переходом в более темные области (слева направо 2.1  $\rightarrow$  2.4) возникают новые химеры с большим числом некогерентных кластеров и сохраняются уже существующие химеры.

Таким образом, в системе развивается мультистабильность: в самой темной из отмеченных областей 2.4 сосуществуют химеры с числом кластеров некогерентности от одного до четырех. Далее, с переходом в светлую область 3, происходит разрушение химер. Разрушение химерных структур сопровождается длительными переходными процессами, причем длительность этих процессов различна для химер с различным числом кластеров.

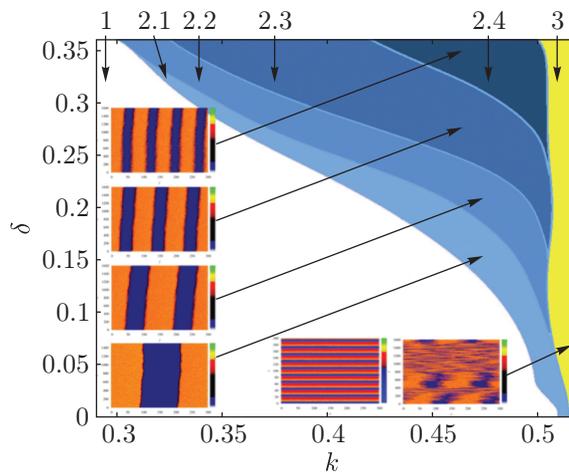


Рис. 7. Диаграмма режимов в системе (1.4) на плоскости управляющих параметров  $(k, \delta)$  при  $\varepsilon = 0.01$ .

Меняя параметры  $\varepsilon$  и  $\delta$  при постоянном коэффициенте связи (было выбрано значение  $k = 0.505$ ), также можно наблюдать возникновение вращающихся химер и развитие мультистабильности (рис. 8). Если при малых значениях  $\varepsilon$  и  $\delta$  (область 1) имеет место колебательный режим, представляющий собой перемежаемость во времени между хаотическим и близким к однородному режимами (см. рис. 1), то при увеличении сразу обоих параметров происходит возникновение всё новых химер (перекрывающиеся области 2.1–2.5).

Сравнивая диаграмму режимов на рисунке 8 с аналогичной диаграммой, полученной экспериментально для лазера с запаздывающей обратной связью [16], можно увидеть их несоответствие: имеет место как бы зеркальное отражение диаграмм. В модели (1.4) области мультистабильности химерных режимов наблюдаются при больших значениях  $\varepsilon$ , а на диа-

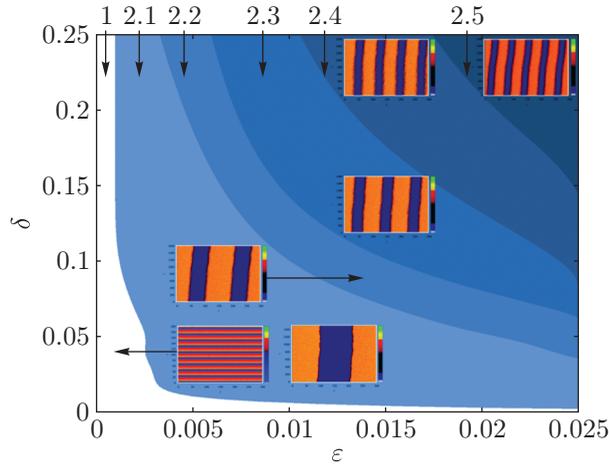


Рис. 8. Диаграмма режимов в системе (1.4) на плоскости управляющих параметров  $(k, \delta)$  при  $\varepsilon = 0.01$ .

грамме из [16], напротив, при малых значениях  $\varepsilon$ . Это несоответствие легко объяснить. Параметры рассматриваемых систем неидентичны и могут быть связаны с нелинейным преобразованием. Так, в модели (1.4) аналогом времени запаздывания  $T_d$  является период  $T_r$  вращения волны вокруг кольца осцилляторов. Он зависит от параметров системы.

Расчеты показали, что с ростом  $\varepsilon$  период  $T_d$  в системе (1.4) увеличивается, причем нелинейно. Таким образом, большим значениям  $\varepsilon$  в системе (1.4) соответствуют малые значения параметра  $\varepsilon$  в системе с запаздывающей обратной связью (1.2).

## Заключение

Проведенные исследования показали качественную аналогию поведения линейного осциллятора с нелинейной запаздывающей обратной связью и кольца из соответствующих осцилляторов с локальным однонаправленным нелинейным взаимодействием. В кольце были обнаружены химероподобные режимы, представляющие собой чередование пространственных кластеров, соответствующих почти равновесному состоянию элементов, с кластерами пространственной некогерентности, в которых элементы совершают несинхронные хаотические колебания. Данный тип поведения аналогичен виртуальной химере, обнаруженной в осцилляторе с запаздыванием [15, 16], где роль пространственной координаты играет интервал запаздывания. В отличие от «классических» химер в ансамблях с нелокальной связью, обнаруженная в (1.4) химера не является стационарной. Границы кластеров вращаются вдоль кольца так, что их ширина остается практически постоянной. Динамические (вращающиеся) химеры, возникающие на основе бегущих волн в кольце осцилляторов, наблюдались и при нелокальном взаимодействии (например, в [12]). В целом такие структуры еще мало изучены. Их исследование и сопоставление со «стационарными» химерами, на наш взгляд, само по себе важно и интересно. Однако главный результат проведенных исследований состоит в том, что была показана возможность возникновения химероподобных структур в распределенной системе с локальным характером взаимодействия.

С учетом результатов, полученных в [14], можно сделать вывод, что нелокальный характер взаимодействия элементов ансамбля не является необходимым условием для возникновения химерных структур. Такие структуры возникают при определенных типах ло-

кального взаимодействия (инерционного или нелинейного). Возникают вопросы: насколько типичны химеры для систем с локальными связями и возможны ли они в случае более простых типов локального взаимодействия (например при диффузионной связи)? Для ответа на эти вопросы необходимы дальнейшие исследования.

Авторы выражают благодарность Владимиру Викторовичу Семёнову за ценные советы в процессе проведения исследований и представления результатов.

## References

- [1] Kuznetsov S.P. Complex dynamics of oscillators with delayed feedback (review), *Radiophys. Quantum El.*, 1982, vol. 25, no. 12, pp. 996–1009; see also: *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Radiofizika*, 1982, vol. 25, no. 12, pp. 1410–1428.
- [2] Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera states for coupled oscillators, *Phys. Rev. Lett.*, 2003, vol. 93, no. 17, 174102, 4 pp.
- [3] Abrams M., Mirollo R., Strogatz S. H., Wiley D. A. Solvable model for chimera states of coupled oscillators, *Phys. Rev. Lett.*, 2008, vol. 101, no. 8, 084103, 4 pp.
- [4] Arecchi F. T., Giacomelli G., Lapucci A., Meucci R. Two-dimensional representation of a delayed dynamical system, *Phys. Rev. A*, 1992, vol. 45, no. 7, R4225–R4228.
- [5] Arecchi F. T., Meucci R., Allaria E., Di Garbo A., Tsimring L. S. Delayed self-synchronization in homoclinic chaos, *Phys. Rev. E*, 2002, vol. 65, no. 4, 046237, 4 pp.
- [6] Baldi P., Atiya A. F. How delays affect neural dynamics and learning, *IEEE Trans. Neural Netw.*, 1994, vol. 5, no. 4, pp. 612–621.
- [7] Bocharov G. A., Rihan F. A. Numerical modelling in biosciences using delay differential equations, *J. Comput. Appl. Math.*, 2000, vol. 125, no. 1, pp. 183–199.
- [8] Dahlem M. A., Hiller G., Panchuk A., Schöll E. Dynamics of delay-coupled excitable neural systems, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2009, vol. 19, no. 2, pp. 745–753.
- [9] Ford N. J., Baker C. T. H. Qualitative behaviour and stability of solutions of discretised nonlinear Volterra integral equations of convolution type, *J. Comput. Appl. Math.*, 1996, vol. 66, no. 1, pp. 213–225.
- [10] Giacomelli G., Politi A. Relationship between delayed and spatially extended dynamical systems, *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 76, no. 15, pp. 2686–2689.
- [11] Giacomelli G., Marino F., Zaks M. A., Yanchuk S. Coarsening in a bistable system with long-delayed feedback, *Europhys. Lett.*, 2012, vol. 99, no. 5, 58005, 5 pp.
- [12] Jaros P., Maistrenko Yu., Kapitaniak T. Chimera states on the route from coherence to rotating waves, *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 91, no. 2, 022907, 5 pp.
- [13] Kuramoto Y., Battogtokh D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators, *Nonlinear Phenom. Complex Syst.*, 2002, vol. 5, no. 4, pp. 380–385.
- [14] Laing C. R. Chimera in networks with purely local coupling, *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 92, no. 5, 050904, 5 pp.
- [15] Larger L., Penkovsky B., Maistrenko Yu. Virtual chimera states for delayed-feedback systems, *Phys. Rev. Lett.*, 2013, vol. 111, no. 5, 054103, 5 pp.
- [16] Larger L., Penkovsky B., Maistrenko Yu. Laser chimeras as a paradigm for multistable patterns in complex systems, *Nat. Commun.*, 2015, vol. 6, 7752.
- [17] Mao X., Yuan C., Zou J. Stochastic differential delay equations of population dynamics, *J. Comput. Appl. Math.*, 2005, vol. 304, no. 1, pp. 296–320.
- [18] Mounier H., Rudolph J. Time delay systems, in *Control systems, robotics, and automation: Vol. 14*, H. Unbehauen (Ed.), Oxford: EOLSS, 2014, 9 pp.

- [19] Omelchenko I., Maistrenko Yu., Hövel Ph., Schöll E. Loss of coherence in dynamical networks: Spatial chaos and chimera states, *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 106, no. 23, 234102, 4 pp.
- [20] Omelchenko I., Riemenschneider B., Hövel Ph., Schöll E. Transition from spatial coherence to incoherence in coupled chaotic systems, *Phys. Rev. E*, 2012, vol. 85, no. 2, 026212, 9 pp.
- [21] Omelchenko I., Omel'chenko O. E., Hövel Ph., Schöll E. When nonlocal coupling between oscillators becomes stronger: patched synchrony or multichimera states, *Phys. Rev. Lett.*, 2013, vol. 110, no. 22, 224101, 5 pp.
- [22] Omel'chenko O. E. Coherence–incoherence patterns in a ring of non-locally coupled phase oscillators, *Nonlinearity*, 2013, vol. 26, no. 9, pp. 2469–2498.
- [23] Panaggio M. J., Abrams D. M. Chimera states: Coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators, *Nonlinearity*, 2014, vol. 28, no. 3, R67–R87.
- [24] Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback, *Phys. Lett. A*, 1992, vol. 170, no. 6, pp. 421–428.
- [25] Pyragas K. Delayed feedback control of chaos, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 2006, vol. 364, no. 1846, pp. 2309–2334.
- [26] Schöll E., Hövel Ph., Flunkert V., Dahlem M. A. Time-delayed feedback control: From simple models to lasers and neural systems, in *Complex time-delay systems: Theory and applications*, F. M. Atay (Ed.), Berlin: Springer, 2010, pp. 85–150.
- [27] Schöll E., Hiller G., Hövel Ph., Dahlem M. A. Time-delayed feedback in neurosystems, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 2009, vol. 367, no. 1891, pp. 1079–1096.
- [28] Schmidt L. T., Schönleber K., Krischer K., García-Morales V. Coexistence of synchrony and incoherence in oscillatory media under nonlinear global coupling, *Chaos*, 2014, vol. 24, no. 1, 013102, 7 pp.
- [29] Sethia G. C., Senan A., Johnston G. L. Amplitude-mediated chimera states, *Phys. Rev. E*, 2013, vol. 88, no. 4, 042917, 5 pp.
- [30] Süli E., Mayers D. F. *An introduction to numerical analysis*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.
- [31] Zakharova A., Kapeller M., Schöll E. Chimera death: Symmetry breaking in dynamical networks, *Phys. Rev. Lett.*, 2014, vol. 112, no. 15, 154101, 5 pp.

## Chimera regimes in a ring of elements with local unidirectional interaction

Igor A. Shepelev<sup>1</sup>, Tatiana E. Vadivasova<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Saratov State University

Astrahanskaia 83, Saratov, 410012, Russia

<sup>1</sup>igor\_sar@li.ru, <sup>2</sup>vadivasovate@yandex.ru

Complex spatial structures, called chimeras, are the subject of considerable recent interest. They consist of stationary areas with coherent and incoherent behavior of neighboring elements. A number of problems related to similar structures have not been solved yet. One of these problems concerns the element interaction in ensembles, when stable chimera structures can be observed. Until quite recently it was assumed that one of the most important conditions for the existence of chimeras is the nonlocal character of interaction. However, this assumption is not exactly correct. Chimeras can be realized for special types of local coupling. So, the chimera examples were obtained in ensembles with inertial local coupling. The additional variable is introduced for a coupling specification. It is given by a linear differential equation. Also, the so-called virtual chimeras exist in oscillators with delayed feedback. This allows one to assume that chimera states can be obtained in a ring of local coupling oscillators with unidirectional interaction, which is inertialess, but has a nonlinear character. This assumption is based on

a qualitative similarity between the behaviors of an oscillator with delay feedback and a ring of the same oscillators with local unidirectional coupling.

The basis of this work is the system with delay feedback, which demonstrates the existence of a virtual chimera. The distributed analog is investigated. It is an oscillator ring with unidirectional nonlinear local coupling.

The existence of chimera structures in the ring were found in the special area of parameter changing via computing simulation. This chimera moves in a ring with constant velocity and is similar to the chimera in the system with delay feedback. The area of chimera existence of parameter variations was studied. Regime diagrams were plotted on the plane of control parameters. The scenario of chimera destruction for the coupling increase was shown.

MSC 2010: 34F05

Keywords: oscillator with delayed feedback, distributed system, spatial structure, chimera, dynamical chaos, local coupling

Received March 03, 2016, accepted April 21, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 2, pp. 197–209 (Russian)