СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ АНАЛИЗА И ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

**материалы Международной научной конференции,
посвященной 105-летию академика
Сергея Михайловича Никольского.**

17—19 мая 2010 года
Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова

«Современные проблемы анализа и преподавания математики» — материалы международной научной конференции, посвященной 105-летию академика Сергея Михайловича Никольского.

Тридцатого апреля 2010 года выдающийся российский ученый и педагог академик РАН С.М. Никольский отмечал свой 105-летний юбилей. В Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова на Воробьевых горах 17—19 мая 2010 года состоялась конференция, в которой приняли участие около 150 ученых и учителей из России и других стран.

Организационный комитет конференции:

С.М. Никольский (почетный председатель), В.А. Садовничий (сопредседатель), В.В. Козлов (сопредседатель), В.Н. Чубариков (зам. председателя), А.В. Михалёв (зам. председателя), В.А. Ильин, Л.Д. Кудрявцев, Б.С. Кашин, А.Л. Семенов, В.М. Монахов, А.М. Кондаков, Н.В. Семин, Я.А. Ваграменко, И.И. Мельников, М.С. Никольский, М.К. Потапов, В.М. Тихомиров, А.А. Шкаликов, М.И. Дьяченко, Т.П. Лукашенко, В.И. Богачев, А.И. Аптекарев, В.Н. Сорокин, И.Н. Сергеев, С.А. Розанова, А.М. Савчук, Н.Б. Малышева, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин, Т.А. Бурмистрова, В.М. Федоров, Н.Л. Кудрявцев, Г.В. Федоров, Ю.В. Андрианова.

Работа конференции проходила по следующим секциям:

Сергей Михайлович Никольский

Выдающемуся российскому математику и педагогу академику РАН Сергею Михайловичу Никольскому 30 апреля 2010 года исполнилось 105 лет.

Сергею Михайловичу принадлежат фундаментальные результаты в функциональном анализе, в теории приближения функций, в теории вложения функциональных пространств, в теории квадратурных формул и в вариационных методах решения уравнений с частными производными. Он является автором более 200 научных публикаций, в том числе трех монографий, трех учебников для ВУЗов, семи учебников для школ.

С. М. Никольский является признанным главой созданной им школы по теории функций и ее приложениям, имеет многочисленных учеников и последователей. Более 40 его учеников защитили кандидатские диссертации, а 11 его учеников стали докторами физико-математических наук. Руководимый им на протяжении полувека семинар по теории функций имеет широкое признание в нашей стране и за рубежом.

Неоценимый вклад внес С.М. Никольский в совершенствование системы образования в нашей стране. Лекции, прочитанные им за более чем шестидесятилетний период преподавательской деятельности, серия учебников для высшей и средней школы, написанные им самим и в соавторстве, вошли в золотой фонд отечественной и мировой литературы по математике, благодаря их высокому научному уровню и доступности изложения. Многие учителя российских школ работают по учебникам серии "МГУ-школе", написанных под его руководством.

С. М. Никольский — академик АН СССР, Венгерской АН, Польской АН, лауреат Сталинской премии, двух Государственных премий СССР, Государственной премии Украины, Премии правительства РФ, премии имени П. Л. Чебышева АН СССР, премии имени А. Н. Колмогорова РАН, премии имени М. В. Островского НАН Украины, премии МГУ имени М. В. Ломоносова за выдающийся вклад в развитие образования, золотой медали имени Больцано Чешской АН, золотой медали имени И. М. Виноградова АН СССР, медали имени Коперника Польской АН, награжден орденами Трудового Красного Знамени, Ленина, Октябрьской революции, За заслуги перед отечеством II степени.

С. М. Никольский — заслуженный профессор Московского университета, почетный профессор Днепропетровского университета и Московского физико-технического института. В настоящее время Сергей Михайлович — советник президента РАН, профессор механико-математического факультета МГУ, профессор МФТИ, член Президиума Научно-методического Совета по математике при Министерстве науки и образования РФ.

1. Теория функций и теория приближений

Об одном свойстве обобщенных потенциалов Рисса-Бесселя, выражаемых в терминах средней осцилляции

С.К. Абдуллаев, М.К. Керимов
(Бакинский Гос. Ун-т; Бакинский Государственный Университет)
E-mail: *sadig.abdullaev@mail.ru*

Пусть $m \geq 1$, R_m — евклидово пространство, $R_m^+ = \{(x', x_m) \in R_m : x_m > 0\}$,

$$T^s u(x) = c_\nu \int\limits_0^\pi u\left(x' - s', \sqrt{x_m^2 - 2x_m s_m \cos\alpha + s_m^2}\right) \sin_\alpha^{\nu-1} d\alpha$$

— оператор обобщенного сдвига ([1]), порожденный оператором Лапласа-Бесселя

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i^2} + \frac{\nu}{x_m}\frac{\partial}{\partial x_m},$$

$\nu > 0$, $\omega(t)$ — положительная функция.

Рассматривается обобщенный потенциал Рисса-Бесселя $(I_B^\omega)(x) = \int\limits_{R_m^+} f(y)\, T^y \left(\omega(|x|)\,|x|^{-m-\gamma}\right) y_m^\nu dy$ и интегральный оператор типа потенциала $\left(\tilde{I}_B^\omega f\right)(x) = \int\limits_{R_m^+} f(y) \left(T^y\left(\omega(|x|)\,|x|^{-m-\gamma}\right) - \omega(|y|)\,|y|^{-m-\gamma}\,\chi_{R_m \setminus B_+(0,1)}^{(y)}\right) y_m^\nu dy$. $\chi_E(y) = \begin{cases} 1, & y \in E, \\ 0, & y \notin E. \end{cases}$ $B_+(x,r) = \{y \in R_m^+ : |y - x| < r\}$, $|B_+(x,r)| = \int\limits_{B_+(x,r)} x_m^\nu dx$, $f_{B_+(x,r)} = |B_+(0,r)|^{-1} \int\limits_{B_+(x,r)} T^y f(x)\, y_m^\nu dy$. Пусть $\omega_1(t) = \omega(t)\, t^{-\frac{(m+\gamma)}{p}}$. Доказано ([2]), что если ω возрастает, $t^\varepsilon \omega_1(t)$ убывает для некоторого $\varepsilon > 0$ и $\omega(t)\, t^{-1}$ интегрируема в некоторой окрестности нуля, то оператор I_β^ω ограничено действует из $L_{p,\nu} = \left\{u - \text{изм.} : \|u\|_{p,\nu}^p = \int_{R_m^+} |u(x)|^p\, x_m^\nu dx < \infty\right\}$ в некоторое пространство Орлича. Также доказано, что если $\omega_1(t)$ ограничена на $(0,\infty)$, то существует функция $f \in L_{p,\nu}$, для которой $I_\beta^\omega f$ расходится в любой точке из R_m^+. Пусть $BMO_\gamma-$пространство функций, локально интегрируемых в R_m^+ с весом x_m^ν,

$$\|f\|_{BMO_\nu} = \sup_{x,r} |B_+(0,r)|^{-1} \int_{R_m^+} \left|T^y f(x) - f_{B_+(x,r)}\right| y_m^\nu dy,$$

Теорема. *Пусть ω и $p > 1$ такие, что $|\omega(b) - \omega(a)| \leq C\omega(a)\left|1 - ba^{-1}\right|$ при $|b - a| < \frac{a}{2}$, $\omega_1(t)\, t^\varepsilon$ возрастает для любого $\varepsilon > 0$ и $\omega_1(t) \leq const$. Тогда:*

a) существует $C > 0$ такое, что $\left\|\tilde{I}^\omega f\right\|_{BMO_\nu} \leq C\|f\|_{p,\nu}$ для любой $f \in L_{p,\nu}$; b) если $I_\beta^\omega(f)$ существует для почти всех $x \in R_m^+$, то a) остается в силе и для $I_\beta^\omega(f)$.

1. Левитан Б.М. // УМН, 1951, т.6, №2, с. 102-143.
2. Абдуллаев С.К.,Керимов М.К. Вестник БГУ,серия физ.-мат.наук,2008,№1,с.5-12.

Наилучшая квадратурная формула на классе $W_0^r L_p$

Р.М. Алиев, С.Г. Гасымова
(кафедра «Высшая математика» Азербайджанского Архитектурно-Строительного Университета; кафедра «Математика» Азербайджанского Технического Университета)
E-mail: *alievrafig@mail.ru*

В работе рассматривается квадратурная формула

$$\int_0^1 f\left(x\right)dx = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=0}^{\rho} A_k^{(l)} f^{(l)}\left(x_k\right) + R_N\left(f\right) \tag{1}$$

с произвольными узлами $0 \le x_1 < x_2 < ... < x_{N-1} < x_N \le 1$ и коэффициентами $A_k^{(l)}$.

Через $W^r L_p$ обозначен класс функций $f\left(x\right)$, заданных на отрезке $[0;1]$, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$ и производную порядка r, удовлетворяющую условию

$$\left\|f^{(r)}\left(x\right)\right\|_{L_p} = \left(\int_0^1 \left|f^{(r)}\left(x\right)\right|^p dx\right)^{1/p} \le C \;\; (1 \le p \le \infty).$$

Классом же $W_0^r L_p$ обозначено множество функций $f\left(x\right) \in W^r L_p$, удовлетворяющих дополнительному условию

$$f\left(0\right) = f'\left(0\right) = ... = f^{(r-1)}\left(0\right) = 0.$$

Впервые С.М.Никольским в 50-ые годы прошлого века среди квадратурных формул вида (1) при $\rho = r-2$, $r = 2, 4, ...,$ и $\rho = 0$, $r = 1, 2$, получены наилучшие квадратурные формулы для класса $W_0^r L_\infty$. Далее, методом, разработанным С.М.Никольским, при $\rho = r-2$ наилучшие квадратурные формулы найдены для классов $W^r L_p$ и $W_0^r L_p$ при любом четном r многими авторами. Эти результаты изложены Н.П.Корнейчуком в монографии С.М.Никольского "Квадратурные формулы"1988 года издания [см. Дополнение]. В работе же Н.П.Корнейчука и П.Е.Лушпая получены наилучшие квадратурные формулы вида (1) при $\rho = r-3$ и $\rho = r-2$, $r \ge 3$ (r - нечетное число) для классов $W_0^r L$, $W^r L$ и для некоторых других классов функций.

В настоящей работе среди квадратурных формул вида (1), точных для алгебраических многочленов степени не выше $r-\rho-3$ при $\rho < r$ (r и ρ - нечетные числа), найдены наилучшие квадратурные формулы для класса $W_0^r L_p$, при этом также получена оценка остатка наилучшей квадратурной формулы в этом классе.

О некоторых теоремах вложения в класс $\varphi(L)$

В.А. Андриенко
(Одесский национальный ун-т)
E-mail: *andrienko.v@gmail.com*

Пусть $\Phi-$ совокупность четных, неотрицательных, конечных и неубывающих на полупрямой $[0, \infty)$ функций φ с $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = \infty$. Через $\varphi(L)$ $(\varphi \in \Phi)$ обозначим класс всех измеримых на $[0,1]$ функций f, для которых $\int_0^1 \varphi(f(x))dx < \infty$. Пусть $\omega(\delta)$-модуль непрерывности, а $\omega_p(f,\delta)$- интегральный модуль непрерывности функции $f \in L^p(0,1)$ Через H_p^ω обозначают класс всех функций f из $L^p(0,1)$, $1 \le p < \infty$, у которых $\omega_p(f,x) \le \omega(x)$. В конце 60-х и начале 70-х годов прошлого века П. Л. Ульянов получил необходимые и достаточные условия для вложения

$$H_p^\omega \subset \varphi(L) \tag{1}$$

в некоторых важных частных случаях, когда φ растет не быстрее некоторой степенной функции, а также достаточные условия для ряда вложений (1). В дальнейшем эти исследования развивались в работах других авторов в случае функций φ, растущих не быстрее степенных. П. Л. Ульянов получил (1970) первый результат для быстро растущих функций ($\varphi = \exp|x|, p = 1$, достаточные условия). Э. А. Стороженко в этом же случае (1976) указала необходимые и достаточные условия для вложения (1) для выпуклого модуля непрерывности ω, а затем перенесла этот результат (1978) на случай функций φ, удовлетворяющих так называемому $\omega-$условию

$\varphi(x+1) = O\{\varphi(x)\}, x \to \infty$.

Мы доказываем следующую теорему[1]

Теорема. *Пусть* $\omega(x), 0 \le x \le 1-$ *выпуклый модуль непрерывности, а функция* φ *удовлетворяет* $\omega-$ *условию и либо* φ- *целая,растущая быстрее любой степенной, либо* $\varphi^{\frac{1}{s}}(x^{\frac{1}{p}})$ *выпукла некоторого* $s > 1$,*а* φ*непрерывна и строго возрастает на* $[0, +\infty)$. *Тогда каждое из двух условий*

$$x^{-\frac{1}{p}}\omega(x) \in \varphi(L) \text{ или } x^{-\frac{2}{p}}\left\{\int_0^x \omega^p(2u)du\right\}^{\frac{1}{p}} \in \varphi(L)$$

необходимо,а при $p = 1$*необходимо и достаточно для вложения (1).*

ЛИТЕРАТУРА

[1]Андриенко В.А.Необходимые условия вложения в класс $\varphi(L)$.//Сб. трудов ин-та математики НАН Украины.-2008.-Т.5.- С. 1-13 (на укр.языке).

О коэффициентах Фурье класса Липшица

А.П. Антонов

(МГУ им. М.В.Ломоносова, мех-мат ф-т)

E-mail: *alt@land.ru*

Обозначим через $\Delta_1(f,\ \mathbf{x},\ \mathbf{h})$ смешанную разность функции f в точке $(x_1,\ \ldots,\ x_m)$ с шагом $(h_1,\ \ldots,\ h_m)$. Далее, если не оговорено противного, считаем $T = [-\pi,\ \pi],\ m \ge 2,\ 1 \le p \le \infty,\ 0 < \alpha_i < 1,\ i = \overline{1,\ m},\ 0 < \alpha < 1$, $C(p,\ m)$ — постоянная, зависящая только от p и m.

Определение 1. Смешанным модулем непрерывности функции $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$ назовем $\omega_p(f,\ \delta_1,\ \ldots,\ \delta_m) = \sup\limits_{|h_1|\le\delta_1,\ \ldots,\ |h_m|\le\delta_m} ||\Delta_1(f,\ \mathbf{x},\ \mathbf{h})||_p$. Полным модулем непрерывности функции $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$ назовем $\omega_p(f,\ \delta) = \sup\limits_{|\mathbf{h}|\le\delta} ||f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})||_p$.

Определение 2. Определим классы $Lip(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_m,\ p) =$ $= \left\{f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m) \mid \omega_p(f,\ \delta_1,\ \ldots,\ \delta_m) = O\left(\prod\limits_{i=1}^n \delta_i^{\alpha_i}\right),\ \delta_j \to 0+,\ j = \overline{1,\ m}\right\}$ и $Lip(\alpha,\ p) = \{f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m) \mid \omega_p(f,\ \delta) = O\left(\delta^\alpha\right),\ \delta \to 0+\}$.

Определение 3. Последовательность $a_{\mathbf{n}} = a_{n_1,\ \ldots,\ n_m}$ монотонно убывает по каждому направлению, если для любых $n_1,\ \ldots,\ n_m \ge 1$ и для любых $j_1,\ \ldots,\ j_m \ge 0$ верно неравенство $a_{n_1,\ \ldots,\ n_m} \ge a_{n_1+j_1,\ \ldots,\ n_m+j_m}$.

Пусть теперь $\frac{2m}{m+1} < p < \infty$, $f(\mathbf{x}) \in L(T^m)$ и $\sum\limits_{\mathbf{n}=\mathbf{1}}^{\infty} a_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{nx}}$ — её ряд Фурье, $a_{\mathbf{n}}$ монотонно убывают по каждому направлению.

Теорема 1. $f(\mathbf{x}) \in Lip(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_m,\ p) \Leftrightarrow a_{n_1,\ \ldots,\ n_m} = O\left(\prod\limits_{i=1}^m n_i^{\frac{1}{p}-1-\alpha_i}\right)$.

Теорема 2. $f(\mathbf{x}) \in Lip\,(\alpha,\ p) \Leftrightarrow \exists\, C(p,\ m)$, такая что $\forall\, n_i,\ i = \overline{1,\ m}$: $\sum\limits_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum\limits_{k_{i-1}=1}^{\infty} \sum\limits_{k_{i+1}=1}^{\infty} \cdots \sum\limits_{k_m=1}^{\infty} a^p_{k_1,\ \ldots,\ k_{i-1},\ n_i,\ k_{i+1},\ \ldots,\ k_m} \cdot \prod\limits_{j=1,\ j\ne i}^{m} k_j^{p-2} \le \frac{C(p,\ m)}{n_i^{\alpha p+p-1}}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08—01—00302а).

Полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля на компактах заданной меры и родственные задачи

В.В. Арестов

(Уральский гос. ун-т им. А.М.Горького)

E-mail: *Vitalii.Arestov@usu.ru*

При $0 < \alpha < \pi$ обозначим через $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(2\alpha)$ множество компактных подмножеств Q тора $\mathbb{T}$, мера $|Q|$ которых равна числу 2α: $|Q| = 2\alpha$. При $n \ge 1$ для множества $Q \in \mathcal{Q}$ определим величину $U_n(Q) = \inf\{\|\cos nt - f_{n-1}\|_{C(Q)} :\ f_{n-1} \in \mathcal{F}_{n-1}\}$ наилучшего равномерного приближения функции $\cos nt$

семейством $\mathcal{F}_{n-1}$ тригонометрических полиномов порядка $n-1$ на множестве Q. Нас интересует наименьшее значение

$$U_n(2\alpha) = U_n(\mathcal{Q}(2\alpha)) = \inf\{U_n(Q): \ |Q| = 2\alpha\} \tag{1}$$

величины $U_n(Q)$ по всем компактам $Q \in \mathcal{Q}(2\alpha)$.

Теорема *При $0 < \alpha < \pi$ для любого компактного подмножества Q тора $\mathbb{T}$ с мерой $|Q| = 2\alpha$ выполняется неравенство $U_n(Q) \geq \sin^{2n}(\alpha/2)$ и равенство достигается лишь на отрезках (длины 2α), с центрами в точках $k\pi/n$, $k \in \mathbb{Z}$. Как следствие, имеет место равенство*

$$U_n(2\alpha) = \sin^{2n}(\alpha/2).$$

Подобную задачу для алгебраических многочленов на оси ранее исследовал Г. Пойа (см. [1]).

Наряду с (1) будут обсуждаться еще две задачи о полиномах, наименее уклоняющихся от нуля: по мере, а точнее, относительно функционала $\mu(f) = \mathrm{mes}\{t \in [0, 2\pi]: \ |f(t)| \geq 1\}$ и относительно интегральных функционалов вида $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(|f_n(t)|)\, dt$ по классу Φ всех неубывающих, неотрицательных на полуоси $[0, +\infty)$ функций φ.

Основные результаты доклада получены совместно с А. С. Менделевым и опубликованы в [2].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 08-01-00213.

Литература

[1] Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов. М.: ОНТИ, 1937.

[2] Arestov V. V., Mendelev A. S. Trigonometric polynomials deviating the least from zero in measure and related problems // Электронная публикация. 2009. http://arxiv.org/abs/0912.3670

Неравенства типа Колмогорова для производных Рисса функций многих переменных

В.Ф. Бабенко, Н.В. Парфинович, С.А. Пичугов

(Днепропетровский национальный университет)

E-mail: *babenko.vladislav@gmail.com, nparfinovich@yandex.ru*

Пусть $C(R^m)$, $m \in N$, – пространство ограниченных непрерывных функций $f: R^m \to R$ со стандартной sup-нормой.

$L_s(R^m)$, $1 \leq s \leq \infty$, – пространства измеримых функций $f: R^m \to R$ функций с конечными нормами $\|f\|_{L_s(R^m)}$.

Обозначим через $L_s^{\Delta}(R^m)$ класс функций $f \in C$, для которых значения оператора Лапласа

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}$$

принадлежат пространству $L_s(R^m)$. При этом Δf понимается в смысле Соболева.

Дробная производная Рисса порядка α $(0 < \alpha < 2)$ функции f определяется равенством

$$(D^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{d_{n,2}(\alpha)} \int\limits_{R^m} \frac{2f(x) - f(x-t) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}}\, dt,$$

где $d_{n,2}(\alpha)$ – нормирующий множитель. Известно, что производная Рисса реализует дробную степень $\alpha/2$ оператора $(-\Delta)f$.

Нами для функций $f \in L_s^{\Delta}(R^m)$ изучаются неравенства вида

$$\|D^{\alpha} f\|_{C(R^m)} \leq K \|f\|_{C(R^m)}^{1-\gamma} \|\Delta f\|_{L_s(R^m)}^{\gamma}$$

с неулучшаемыми константами К. В частности, при $s = \infty$ доказано следующее.

Пусть функция $\psi(\rho)$, $\rho \geq 0$, определяется следующим образом

$$\psi(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2m}[\rho^2 - 1/\delta^2 - G(1/\delta) + 1/2], & 0 \leq \rho < 1/\delta, \\ \frac{1}{2m}[-\rho^2 - 2G(\rho) + 1/\delta^2 + G(1/\delta) + 1/2], & 1/\delta < \rho \leq 1, \\ \psi(1), & \rho > 1, \end{cases}$$

где $G(|y|) = \frac{1}{m-2}\left(\frac{1}{|y|^{m-1}} - 1\right)$, $\delta = \sqrt[m]{2}$.

Теорема 1.

Для $f \in L^{\Delta}_{\infty}(R^m)$ при $0 < \alpha < 2$ имеет место точное неравенство

$$\|D^\alpha f\|_{C(R^m)} \leq \frac{1}{d_{n,2}} \cdot \frac{\|D^\alpha \varphi\|_{C(R^m)}}{2^{1-\frac{\alpha}{2}} \|\varphi\|^{1-\frac{\alpha}{2}}_{C(R^m)}} \cdot \|f\|^{1-\frac{\alpha}{2}}_{C(R^m)} \|\Delta f\|^{\frac{\alpha}{2}}_{L_\infty(R^m)},$$

где $\varphi(x) = \psi(|x|)$.

Аналогичные точные неравенства получены также для потенциалов Рисса. Даны приложения этих неравенств в теории аппроксимации.

Приближение всплесками и поперечники классов периодических функций многих переменных

Д.Б. Базарханов

(Институт математики, Казахстан, г.Алматы)

E-mail: *dauren@math.kz*

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{z}_k = \{1, \ldots, k\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Для $x = (x_1, \ldots, x_k), y = (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ положим $xy = x_1y_1 + ... + x_ky_k$, $|x|_\infty = \max\{\,|x_\kappa| \,:\, \kappa = 1, \ldots, k\,\}$.

Пусть $1 \leq p, q \leq \infty$; $L_p = L_p(\mathbb{T}^k)$ — пространство функций $f : \mathbb{T}^k \to \mathbb{C}$, суммируемых в степени p (при $p = \infty$ существенно ограниченных) на $\mathbb{T}^k = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^k$ — k-мерном торе, с нормой $\|f \,|\, L_p\|$; $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{T}^k} f(x) e^{-2\pi i\, \xi x} dx$, $\xi \in \mathbb{Z}^k$, — тригонометрические коэффициенты Фурье функции $f \in L_1$; ℓ_q — пространство числовых последовательнос-тей $(c_\alpha) = (c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ с конечной нормой $\|(c_\alpha) \,|\, \ell_q\,\|$. Пусть $n \in \mathbb{N}$: $n \leq k$. Фиксируем мультииндекс $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbb{N}^n$ с $m_1 + \cdots + m_n = k$ (если $n = 1$, то $m = k$, если $n = k$, то $m = \mathbf{1} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^k$). Представим $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ в виде $x = (x^1, \ldots, x^n)$, где $x^\nu = (x_{\kappa_{\nu-1}+1}, ..., x_{\kappa_\nu}) \in \mathbb{R}^{m_\nu}$; здесь $\kappa_0 = 0, \kappa_\nu = m_1 + ... + m_\nu, \nu \in \mathrm{z}_n$. Выберем функции $\eta_0^\nu \in C^\infty(\mathbb{R}^{m_\nu})$ такие, что $0 \leq \eta_0^\nu(\xi^\nu) \leq 1, \xi^\nu \in \mathbb{R}^{m_\nu}$; $\eta_0^\nu(\xi^\nu) = 1$, если $|\xi^\nu|_\infty \leq 1$; $\eta_0^\nu(\xi^\nu) = 0$, если $|\xi^\nu|_\infty \geq 3/2\,(\nu \in \mathrm{z}_n)$. Положим $\eta^\nu(\xi^\nu) = \eta_0^\nu(2^{-1}\xi^\nu) - \eta_0^\nu(\xi^\nu)$, $\eta_j^\nu(\xi^\nu) = \eta^\nu(2^{-j+1}\xi^\nu), j \in \mathbb{N}$; $\eta_\alpha(\xi) = \prod_{\nu=1}^n \eta_{\alpha_\nu}^\nu(\xi^\nu)$, $\xi \in \mathbb{R}^k$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$.

Определение. *Пусть* $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $1 \leq p, q \leq \infty$. *Пространство типа Никольского–Бесова* $\mathbf{B}^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ *состоит из всех функций* $f \in L_p(\mathbb{T}^k)$, *для которых конечна норма*

$$\|\, f \,|\, \mathbf{B}\,\| \;=\; \|\big(2^{\alpha s}\| \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^k} \eta_\alpha(\xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} \,|\, L_p\,\|\big) \,|\, \ell_q\,\|.$$

Пространство типа Лизоркина–Трибеля $\mathbf{L}^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ $(p < \infty)$ *состоит из всех функций* $f \in L_p(\mathbb{T}^k)$, *для которых конечна норма*

$$\|\, f \,|\, \mathbf{L}\,\| \;=\; \|\|\big(2^{\alpha s} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^k} \eta_\alpha(\xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x}\big) \,|\, \ell_q\,\| \,|\, L_p\,\|.$$

Единичные шары $B^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ *и* $L^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ *этих пространств будем называть классами типа Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля соответственно.*

В докладе будут даны характеризации (с соответствующими эквивалентными норми-ровками) пространств $\mathbf{B}^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ и $\mathbf{L}^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ с помощью всплесков, а также точные в смысле порядка оценки колмогоровских и линейных поперечников классов $B^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ и $L^{s\,m}_{p\,q}(\mathbb{T}^k)$ в пространстве L_r для ряда соотношений между параметрами.

Оценки восстановления оператора свертки на классах Никольского-Бесова периодических функций

Ш.А. Балгимбиева

(Институт математики, Казахстан, г.Алматы)

E-mail: *im@math.kz*

Рассматривается задача оптимального восстановления оператора свертки

$$A(f; x) = f * g(x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{T}} f(x - t) g(t) dt$$

на единичном шаре периодического пространства Никольского-Бесова $B^s_{p\theta}(\mathbb{T})$ с фиксированной функцией $g \in B^{s_1}_{p_1\theta}(\mathbb{T})$; $\mathbb{T} = [0, 2\pi]$.

В качестве информации о функциях $f \in B^s_{p\theta}(\mathbb{T})$ используется набор коэффициентов Фурье $I_\sigma \hat{f} := \{\hat{f}(k) : |k| \le \sigma\}$, $\sigma > 0$; здесь $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{T}} f(x) e^{-ikx} dx$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Для построения метода приближенного восстановления оператора A используется система (типа всплесков) тригонометрических полиномов $\Phi = \{\phi_{00}, \phi^\varepsilon_{mr}, (m, r, \varepsilon) \in \mathrm{M}\}$, $\mathrm{M} = \{(m, r, \varepsilon) : m \ge 1, r = 0, ..., 2^{m-1} - 1; \varepsilon = \pm 1\}$:

$$\phi_{00} = 1, \ \phi^\varepsilon_{mr} = 2^{-m} \sum_{\varepsilon k = 2^{m-1}}^{2^m - 1} e^{ik(x - t_{rm})}, \quad t_{rm} = \frac{2r+1}{2^{m-1}}\pi, \ (m, r, \varepsilon) \in \mathrm{M},$$

которая является безусловным базисом для пространства $B^s_{p\theta}(\mathbb{T})$ при $1 < p, \theta < \infty$ [1]; при этом функция $f \in B^s_{p\theta}(\mathbb{T})$ представима в виде ряда

$$f(x) = \phi_{00} + \sum_{(m,r,\varepsilon)\in \mathrm{M}} \hat{f}^\varepsilon_\varphi(m, r) \phi^\varepsilon_{mr}(x),$$

где

$$\hat{f}^\varepsilon_\varphi(m, r) = \sum_{\varepsilon k = 2^{m-1}}^{2^m - 1} e^{ikt_{rm}}.$$

Найден точный порядок погрешности оптимального восстановления, при этом линейным оптимальным по порядку методом восстановления является действие оператора A на соответствующую частную сумму ее разложения в ряд по системе Φ.

Литература

1. П.И. Лизоркин О базисах и мультипликаторах в пространствах $B^r_{p,\theta}(\Pi)$ // Труды МИ АН СССР, 1977, Т. 143, С. 88 - 104.

О некоторых приложениях неравенств типа Либа-Тирринга в спектральной теории

Д.С. Барсегян
(Москва, Ленинские Горы)
E-mail: *dianabar@bk.ru*

В данной работе установлены следующие результаты:

Теорема1. Существует абсолютная постоянная C_p, такая, что для произвольной ортонормированной системы действительнозначных функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$ в $L^2(R^2)$ и любого натурального числа p имеет место неравенство

$$\int_{R^2} \rho_\Phi^{p+1}\, dx\, dy \le C_p(\ln^p N + 1) \sum_{j=1}^N \int_{R^2} |xy|^p |\hat{\varphi}_j|^2(x, y)\, dx\, dy. \tag{1}$$

Теорема2. Для произвольной ортонормированной системы действительнозначных функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$ в $L^2(R^2)$ и любого $p \ge 1$ имеет место неравенство

$$\int_{R^2} \rho_\Phi^{p+1}\, dx\, dy \le C'_p N^{\{p\}} (\ln^{[p]} N + 1) \sum_{j=1}^N \int_{R^2} |xy|^p |\hat{\varphi}_j|^2(x, y)\, dx\, dy, \tag{2}$$

где постоянная C'_p зависит только от указанного индекса p.

Теорема3. Для произвольных натуральных чисел $p \ge q$ существует абсолютная постоянная $C_{p,q}$, такая, что для произвольной ортонормированной системы действительнозначных функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$ в $L^2(R^2)$ имеет место неравенство

$$\int_{R^2} \rho_\Phi^{p+1}\, dx\, dy \le C_{p,q}(\ln^q N + 1) \sum_{j=1}^N \int_{R^2} |xy|^q (x^2 + y^2)^{p-q} |\hat{\varphi}_j|^2(x, y)\, dx\, dy. \tag{3}$$

Рассмотрим в $L^2(R^2)$ операторы $L_1\psi = -\triangle\psi + |xy|^p\psi$ с натуральным числом p, $L_2\psi = -\triangle\psi + |xy|^p\psi$ с любым числом $p \geq 1$ и $L_3\psi = -\triangle\psi + |xy|^q(x^2+y^2)^{p-q}\psi$ с натуральными числами $p \geq q$. Дискретность спектров проверяется с помощью классического критерия Молчанова. Пусть $0 \leq \lambda_1^{(1)} < \lambda_2^{(1)} < \cdots$, $\lambda_j^{(1)} \to \infty$, при $j \to \infty$, $0 \leq \lambda_1^{(2)} < \lambda_2^{(2)} < \cdots$, $\lambda_j^{(2)} \to \infty$, при $j \to \infty$, $0 \leq \lambda_1^{(3)} < \lambda_2^{(3)} < \cdots$ и $\lambda_j^{(3)} \to \infty$ при $j \to \infty$, соответственно спектры операторов L_1, L_2 и L_3. Тогда в силу теорем 1-3 имеют место следующие результаты:

Теорема4. Существуют такие абсолютные положительные постоянные $C''_p, C'''_p, C'_{p,q}$, что для любого натурального числа N верны оценки

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^{(1)} \geq C''_p\frac{N^{\frac{2p+1}{p+1}}}{(\ln^p N+1)^{\frac{1}{p+1}}}. \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^{(2)} \geq C'''_p\frac{N^{\frac{2p+1-\{p\}}{p+1}}}{(\ln^{[p]} N+1)^{\frac{1}{p+1}}}. \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^{(3)} \geq C''_{p,q}\frac{N^{\frac{2p+1}{p+1}}}{(1+\ln^q N)^{\frac{1}{p+1}}}. \tag{6}$$

Теорема5. Для любого натурального числа $d \geq 2$ существует постоянная C_d, такая, что для произвольной ортонормированной системы действительнозначных функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$ в $L^2(R^d)$ имеет место неравенство

$$\int_{R^d}\rho_\Phi^2\,dx_1\cdots dx_d \leq C_d(\ln^{d-1}N+1)\sum_{j=1}^{N}\int_{R^d}|x_1\cdots x_d||\hat{\varphi}_j|^2(x_1,\cdots,x_d)\,dx_1\cdots dx_d. \tag{7}$$

Теорема6. Оператор $L\psi = -\triangle\psi + |x_1\cdots x_d|\psi$ в $L^2(R^d)$, $d \geq 2$ имеет дискретный спектр $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ с $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, $\lambda_j \to \infty$ при $j \to \infty$, и существует такая абсолютная положительная постоянная C'_d, что для любого натурального числа N выполняется оценка

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_j \geq C'_d\frac{N^{\frac{4+d}{2+d}}}{(1+\ln N)^{\frac{2d-2}{2+d}}}. \tag{8}$$

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ МНОГОМЕРНЫХ КЛАССОВ ВАТЕРМАНА

А.Н. Бахвалов
(мех-мат МГУ)
E-mail: *an-bakh@yandex.ru*

В работе рассматривается задача о скорости убывания коэффицентов Фурье функций ограниченной Λ-вариации ($f \in (\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m)BV(\mathbb{T}^m)$) и функций, непрерывных по Λ-вариации ($f \in C(\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m)V(\mathbb{T}^m)$), где $\mathbb{T} = [-\pi,\pi]$. Подробные определения классов см. в [1].

Теоремы 1 и 2 были известны для случая $m = 1$ (см. [2] и [3] соответственно), в многомерном случае они являются новыми.

Теорема 1. *Пусть функция f — из класса $(\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m)BV(\mathbb{T}^m)$, множество $\{1,\ldots,m\}$ разбито на две непустые части γ и ξ. Если номер $\mathbf{n}$ таков, что $n_j = 0$ тогда и только тогда, когда $j \in \gamma$, то тригонометрические коэффициенты Фурье функции f удовлетворяют оценке*

$$|c_{\mathbf{n}}(f)| \leq \frac{C(m)V_{\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m}(f,\mathbb{T}^m)}{\prod_{j\in\xi}\Lambda^j(|n_j|)},$$

где $\Lambda^j(n) = \sum_{k=1}^n(1/\lambda_k^j)$.

Теорема 2. *Пусть функция f — из класса $C(\Lambda^1,\ldots,\Lambda^m)V(\mathbb{T}^m)$. Тогда ее тригонометрические коэффициенты Фурье функции f удовлетворяют оценке*

$$|c_{\mathbf{n}}(f)| = o\left(\frac{1}{\Lambda^1(|n_1|)\ldots\Lambda^m(|n_m|)}\right)$$

при $\min_j |n_j| \to \infty$.

Для некоторых случаев несовпадения классов удается показать, что во всем классе $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)BV(\mathbb{T}^m)$ оценка из теоремы 2 неверна.

Теорема 3. *Пусть* $\beta_j \in (0,1)$ *и* $\sum_{j=1}^m \beta_j \le m-1$. *Тогда найдется непрерывная функция* f *из класса* $(\{n^{\beta_1}\}, \dots, \{n^{\beta_m}\})BV(\mathbb{T}^m)$, *синус-коэффициенты Фурье которой удовлетворяют условию*

$$\varlimsup_{n\to\infty} b_{n,\dots,n}(f) \cdot \Lambda^1(n) \dots \Lambda^m(n) > 0,$$

где $\Lambda^j(n) = \sum_{k=1}^n (1/k^{\beta_j})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00175) и программы "Ведущие научные школы" (проект НШ-3252.2010.1).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Бахвалов А.Н.,* “Непрерывность по Λ-вариации функций многих переменных и сходимость кратных рядов Фурье” // Мат. сб. 2002. Т. 193, N12. 3–20.

2. *Schramm M., Waterman D.,* “On the magnitude of Fourier coefficients” // Proc. Amer. Math. Soc., 1982, V.85, N3. 408–410.

3. *Саблин А.И. ,* “Λ-вариация и ряды Фурье”// Изв. ВУЗов. Математика., 1987. N10, 66–68.

Аппроксимация в задаче навигации

В.И. Бердышев

(Институт математики и механики УрО РАН)

E-mail: *bvi@imm.uran.ru*

Рассматривается задача определения местоположения w автономно движущегося аппарата (ЛА) по геофизическому полю (ГФП) F и его фрагменту φ. Пусть $F = F(u)$ — поле высот региона Q, $w = (t, a)$, где $t \in \mathbb{R}^3$ — центр масс ЛА, $a \in \mathbb{R}^3$ — ориентация ЛА в пространстве $\mathbb{R}^3$, $\Delta = \{l\}$ — конус лучей, жестко связанный с ЛА. Для $l \in \Delta$ найдем расстояние $\rho_{w,l,F} = \rho(t, (t + a(l)) \cap \mathrm{graph} F)$ и назовем фрагментом ГФП функцию $\varphi(l) = \varphi_w(l, F) = \rho_{w,l,F}$, $l \in \Delta$.

Пусть задан линейный класс $\mathcal{P}$ аппроксимирующих функций $p = p(u)$, $u \in Q$, например класс сплайн-функций, и информация о ГФП в целом хранится на ЛА в виде некоторой функции $p \in \mathcal{P}$. Задача навигации состоит в поиске (см. [1])

$$d(w, F, p) = \min\{\|\varphi_w(l, F) - \varphi_W(l, p)\|_\Delta, \quad W \in \mathbb{W}\},$$

где $\mathbb{W} = \{(T, A)\}$ — известная область поиска, $\|\cdot\|_\Delta$ — заданная норма.

Задача о наилучшей (с точки зрения навигации) аппроксимации функции F классом $\mathcal{P}$ формулируется так:

$$\min_{p\in\mathcal{P}} \max_{w\in\mathbb{W}} \rho(w,\ \arg\, d(w, F, p)).$$

В докладе приводятся необходимые условия на функцию $p \in \mathcal{P}$, реализующую этот минимум. Точность решения задачи навигации оценивается через функцию [1]

$$J(\tau, F) = \max_{w,W\in\mathbb{W}} \{|w - W| : \ \|\varphi_w(l, F) - \varphi_W(l, F)\|_\Delta \le \tau\},$$

называемую модулем информативности ГФП. Если $W \in\ \arg\, d(w, F, p)$, то

$$|w - W| \le J(2\beta(F, p), F),$$

где

$$\beta(F, p) = \max_{w\in\mathbb{W}} \|\varphi_w(l, F) - \varphi_w(l, p)\|_\Delta.$$

В случае, когда $Q = [a, b]$, F — строго монотонна на Q, конус Δ состоит из единственного луча, функция $J(\tau, F)$ совпадает с модулем непрерывности обратной функции F^{-1}.

Обсуждается проблема информативности исходного и аппроксимирующих полей.

Работа поддержана РФФИ (проект № 08-01-00325).

1. *В.И. Бердышев, В.Б. Костоусов.* Экстремальные задачи и модели навигации по геофизическим полям. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2007. 270 с.

О достаточных условиях сходимости на некоторых измеримых множествах кратных рядов Фурье-Уолша

С.К. Блошанская, И.Л. Блошанский
(МИФИ; Московский Государственный Областной Университет (МГОУ))
E-mail: *i.bloshn@g23.relcom.ru*

Обозначим $\mathbb{Z}_0^N = \{n = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}^N : n_j \geq 0, \ j = 1, \dots, N\}$. Пусть функция $f \in L_1(\mathbb{I}^N)$ разложена в ряд Фурье по кратный системе Уолша-Пэли $\{\omega_k\}_{k \in \mathbb{Z}_0^N}$, и пусть $S_n(x; f), n \in \mathbb{Z}_0^N, x \in \mathbb{I}^N = [0,1)^N, N \geq 2$ - прямоугольная частичная сумма этого ряда.

В [1] (опираясь на результаты по обобщенной локализации почти всюду (п.в.) для двойных рядов Фурье-Уолша функций из $L_p(\mathbb{I}^2), p \geq 1$) нами были получены результаты, показывающие возможность "локализации" на произвольное открытое (непустое) множество некоторых, заданных на всем $\mathbb{I}^2$, достаточных условий сходимости рассматриваемых двойных рядов Фурье. Например, следующий результат.

Пусть E, $E \subset \mathbb{I}^2$, $\mu E > 0$ (μ – мера Лебега). Положим

$$\mathcal{F}_0(E) = \{f \in L_2(E) : \sum_{m \in \mathbb{Z}_0^2} \Big(\int_E f(x) w_m(x) dx \Big)^2 \cdot \log^2 [min(|m_1|, |m_2|) + 2] < +\infty \}.$$

Теорема A. *Пусть* Ω, $\Omega \subset \mathbb{I}^2$, *- произвольное (непустое) открытое множество. Для любой функции* $f \in \mathcal{F}_0(\Omega) \cap L_p(\mathbb{I}^2)$, $1 < p \leq 2$,

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x; f) = f(x) \quad \textit{почти всюду на} \quad \Omega.$$

Как видим, в качестве таких достаточных условий выбрана принадлежность функции классу $\mathcal{F}_0(\mathbb{I}^2)$ (из результатов Е.М.Никишина и П.Билларда следует, что для любой функции $f \in \mathcal{F}_0(\mathbb{I}^2)$ $\lim\limits_{n \to \infty} S_n(x; f) = f(x)$ п.в. на $\mathbb{I}^2$).

Возникает вопрос о возможности "локализации" на какие-либо измеримые подмножества $\mathbb{I}^N$ каких-либо (заданных на всем $\mathbb{I}^N$) достаточных условий сходимости рассматриваемых рядов Фурье для $N > 2$.

Пусть $E \subset \mathbb{I}^N$, $\mu E > 0$, $N \geq 3$, рассмотрим следующий класс функций:

$$\mathcal{F}(E) = \{f \in L_2(E) : \sum_{m \in \mathbb{Z}_0^N} \Big(\int_E f(x) w_m(x) dx \Big)^2 \cdot \prod_{j=1}^N \log(|m_j| + 2) < +\infty \}.$$

(Ф. Мориц доказал [2, следствие 3], что для любой функции $f \in \mathcal{F}(\mathbb{I}^N)$ $\lim\limits_{n \to \infty} S_n(x; f) = f(x)$ п.в. на $\mathbb{I}^N$.)

В настоящей работе, опираясь на наши результаты по слабой обобщенной локализации для кратных рядов Фурье-Уолша суммируемых по прямоугольникам и для кратных рядов Фурье-Уолша с "лакунарной последовательностью прямоугольных частичных сумм" функций из классов $L_p(\mathbb{I}^N)$, $p > 1$ (см. [3, 4]), мы указываем, какими структурными и геометрическими характеристиками должно обладать множество $E \subset \mathbb{I}^N$, $N \geq 3$, чтобы принадлежность функции только классу $\mathcal{F}(E) \cap L_p(\mathbb{I}^N)$, $1 < p \leq 2$, гарантировала сходимость кратного ряда Фурье-Уолша (с прямоугольной частичной суммой - $S_n(x; f)$ и с "лакунарной последовательностью частичных сумм") функции f п.в. на некотором подмножестве E.

Для формулировки данного результата введем следующие обозначения.

Пусть $M = \{1, 2, \dots, N\}$, $N \geq 3$, $J_k = \{j_1, \dots, j_k\} \subset M, j_1 < \dots < j_k$, при $1 \leq k \leq N-2$ или $J_k = \emptyset$ при $k = 0$, и пусть $\lambda = \lambda(J_k) = (\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_k}) \in \mathbb{Z}_+^k$, $j_s \in J_k$, $s = 1, \dots, k$. Символом $n^{(\lambda)}[J_k] = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$, обозначим N-мерный вектор, у которого компоненты n_j с номерами $j \in J_k$ являются элементами некоторых (однократных) лакунарных последовательностей ($n_j = n_j^{(\lambda_j)}$, $n_j^{(\lambda_j)} \to \infty$ при $\lambda_j \to \infty$ и $n_j^{(\lambda_j+1)} / n_j^{(\lambda_j)} \geq q > 1, \lambda_j = 1, 2, \dots$).

Далее, пусть $\Omega[J_2]$, $\Omega[J_2] \subset \mathbb{I}[J_2]$ – произвольное (непустое) открытое множество, $W[J_2] = \Omega[J_2] \times \mathbb{I}[M \setminus J_2]$, здесь $\mathbb{I}[J_s] = \{(x_{j_1}, \dots, x_{j_s}) : 0 \leq x_{j_\nu} < 1, \nu = 1, \dots, s\} \subset \mathbb{I}^N$. Положим $W = W(J_k) = \bigcup\limits_{J_2 \subset M \setminus J_k} W[J_2]$ и $W^0 = W^0(J_k) = \bigcap\limits_{J_2 \subset M \setminus J_k} W[J_2]$ (предполагая, что $W^0 \neq \emptyset$).

Пусть $E \subset \mathbb{I}^N$, $N \geq 3$, $\mu E > 0$, и пусть $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-2$, или $J_k = \emptyset$, $k = 0$. Будем говорить, что множество E *обладает свойством* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, если найдется множество $W = W(J_k)$ такое, что $\mu(W \setminus E) = 0$.

Теорема 1. *Пусть* $E_0 \subset \mathbb{I}^N$, $N \geq 3$, $\mu E_0 > 0$. *Если существует измеримое множество* $E \subset \mathbb{I}^N$, *обладающее свойством* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$ *для некоторого* J_k, $0 \leq k \leq N-2$, *такое, что* $\mu(E_0 \setminus W^0(J_k)) = 0$, *то для любой функции* $f \in \mathcal{F}(E) \cap L_p(\mathbb{I}^N)$, $1 < p \leq 2$,

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty, j \in J_k, \\ n_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; f) = f(x) \ \text{для почти всех} \ x \in E_0. \tag{1}$$

Замечание 1. Если $k = 0$ (т.е. $J_k = \emptyset$), то "лакунарная" частичная сумма $S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; f) = S_n(x; f)$, т.е. при $k = 0$ в (1) "стоит" прямоугольная частичная сумма кратного ряда Фурье-Уолша функции $f(x)$.

Замечание 2. Для кратных тригонометрических рядов Фурье , результат, аналогичный теореме 1, анонсирован в [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08-01-00669).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Bloshanskaya S.K., Bloshanskii I.L. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Springer Book Series. Vol. "Wavelet Analysis and Applications". Birk-hauser Verlag Basel, Switzerland. 2007. P. 13-24.

2. Móricz F. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1981. V. 37(4). P. 481-496.

3. Блошанская С.К., Блошанский И.Л., Труды МИ РАН. 1997. Т.214.

4. Блошанская С.К., Блошанский И.Л., Совр. проблемы теории функций и их прил. Труды 15-ой Сарат. зимней шк. Саратов. 2010. С.28-29.

5. Блошанский И.Л., Лифанцева О.В. Теория функций, ее прибл. и смеж. вопросы. Матер. 9-ой Казанск. летней шк. Казань. 2009. Т.38. С.48-50.

КРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ С ЛАКУНАРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ЧАСТИЧНЫХ СУММ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ L_p, $p \geq 1$

И.Л. Блошанский, О.В. Лифанцева

(Московский Государственный Областной Университет (МГОУ); Московский государственный областной университет)

E-mail: *i.bloshn@g23.relcom.ru, ov-lifantseva@yandex.ru*

Пусть $M = \{1, \ldots, N\}$, $N \geq 2$, $J_k = \{j_1, \ldots, j_k\} \subset M, j_1 < \cdots < j_k$, при $1 \leq k \leq N-1$ или $J_k = \emptyset$ при $k = 0$. Обозначим $\mathbb{R}[J_k] = \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_j = 0$ при $j \in M \setminus J_k\}$, $\mathbb{T}[J_k] = \{x \in \mathbb{R}[J_k] : -\pi \leq x_j \leq \pi$ при $j \in J_k\} \subset \mathbb{T}^N = [-\pi, \pi]^N$.

Пусть $\lambda = \lambda(J_k) = (\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_k}) \in \mathbb{Z}_+^k$, $j_\nu \in J_k$, $\nu = 1, \ldots, k$. Символом $n^{(\lambda)}[J_k] = (n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ обозначим N-мерный вектор, у которого компоненты n_j с номерами $j \in J_k$ являются элементами некоторых (однократных) лакунарных последовательностей ($n_j = n_j^{(\lambda_j)}$, $n_j^{(\lambda_j)} \to \infty$ при $\lambda_j \to \infty$ и $n_j^{(\lambda_j+1)}/n_j^{(\lambda_j)} \geq q > 1, \lambda_j = 1, 2, \ldots$).

Далее, пусть Ω, $\Omega \subset \mathbb{T}^N$, — произвольное (непустое) открытое множество. Положим $W[J_s] = \Omega[J_s] \times \mathbb{T}[M \setminus J_s]$, $s = 1, 2$, где $\Omega[J_s] = pr_{(J_s)}\{\Omega\}$ — ортогональная проекция множества Ω на пространство $\mathbb{R}[J_s]$. Определим множества $W_s = W_s(J_k) = \bigcup\limits_{J_s \subset M \setminus J_k} W[J_s]$ и $W_s^0 = W_s^0(J_k) = \bigcap\limits_{J_s \subset M \setminus J_k} W[J_s]$. Очевидно, что если $J_k \subset J_m$, $0 \leq k < m \leq N-2$, то $W(J_k) \supset W(J_m)$.

Пусть $E \subset \mathbb{T}^N$, $0 < \mu E < (2\pi)^N$. Как известно (см. [1, 2]), для сходимости почти всюду (п.в.) к нулю кратного ряда Фурье функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, на E достаточно равенства нулю функции $f(x)$ на множестве $W_2(J_0)$, для которого $\mu(E \setminus W_2^0(J_0)) = 0$, при суммировании ряда по прямоугольникам и равенства нулю только на множестве $W_2(J_k) \subset W_2(J_0)$, для которого $\mu(E \setminus W_2^0(J_k)) = 0$, в случае, когда вектор n, $n \in \mathbb{Z}_+^N$, — "номер" прямоугольной частичной суммы $S_n(x; f)$ — имеет k ($1 \leq k \leq N-2$, $N \geq 3$) "лакунарных компонент" на местах с номерами $j \in J_k$. Таким образом (как мы видим) структурно-геометрические характеристики множества, на котором разлагаемая в ряд функция ($f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$) должна быть равна нулю, становятся все "более мягкими" не только с появлением "лакунарных компонент" ($k \neq 0$) в "номере" n (частичной суммы $S_n(x; f)$), но и с увеличением их числа (т.е. с ростом k, $1 \leq k \leq N-2$) в этом "номере".

В классе $L_1(\mathbb{T}^N)$ аналогичный результат справедлив не будет. Для сходимости п.в. к нулю кратного ряда Фурье (суммируемого по прямоугольникам) функции $f \in L_1(\mathbb{T}^N)$ на E достаточно равенства нулю функции $f(x)$ на множестве $W_1(J_0)$, для которого $\mu(E \setminus W_1^0(J_0)) = 0$ (см. [1]); однако для любого $J_k \subset M$,

$1 \le k \le N-1$, и для любых $\{n_j^{(\lambda_j)}\}$, $j \in J_k$, можно привести пример множества $W_1(J_k)$ и функции $f \in L_1(\mathbb{T}^N)$ таких, что $f(x) = 0$ на $W_1(J_k)$, но "J_k-лакунарная последовательность прямоугольных частичных сумм" $S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; f)$ при $n^{(\lambda)}[J_k] \to \infty$ (т.е. при $\lambda_j \to \infty$, $j \in J_k$, $n_j \to \infty$, $j \in M \setminus J_k$), расходится п.в. на $\mathbb{T}^N$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00669).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Блошанский И.Л.* // Изв. АН СССР. Серия матем. 1985. Т. 49(2). С. 243–282.
2. *Блошанский И.Л., Лифанцева О.В.* // Мат. заметки. 2008. Т. 84(3). С. 334–347.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ИНТЕГРАЛ ДРОБНОГО ПОРЯДКА И ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ

С.С. Волосивец
(Саратовский гос. ун-т)
E-mail: *VolosivetsSS@mail.ru*

Пусть $\mathbf{P} = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, таких что $2 \le p_n \le N$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$ и $m_{-n} = m_n^{-1}$ при $n \in \mathbf{N}$. Для $x \in [m_{n-1}, m_n)$, $n \in \mathbf{Z}$, положим $|x|_{\mathbf{P}} = m_n$. Каждое число $x \in \mathbf{R}_+$ записывается в виде
$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_{-n} m_{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} x_n/m_n$, $x_n \in \mathbf{Z} \cap [0, p_i)$, $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Для $x, y \in \mathbf{R}_+$ положим $\chi(x,y) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} (x_j y_{-j} + y_j x_{-j})/p_j\right)$. Пусть $\alpha > 0$, $n \in \mathbf{Z}_+$. Тогда во всякой точке $x > 0$ определена функция $W_n^{\alpha}(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \int_{m_{-n}}^{m_k} |y|_p^{-\alpha} \chi(x,y)(h(y))^{\alpha} dy$. Пусть для $f \in L^p(\mathbf{R}_+)$, $1 \le p < \infty$, существует $g \in L^p(\mathbf{R}_+)$, такая что $\lim\limits_{n\to\infty} \|f * W_n^{\alpha} - g\|_p = 0$. Тогда g называется модифицированным сильным мультипликативным интегралом (МСМИ) порядка α для f в $L^p(\mathbf{R}_+)$ и обозначается через $J_p^{\alpha}(f)$ (см. [1] или [2]).

Теорема. 1) *Пусть $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\mathbf{R}_+)$, $\alpha = 1/p$ и существует $J_p^{\alpha}(f)$. Тогда $J_p^{\alpha}(f) \in BMO(\mathbf{P}, \mathbf{R}_+)$.*

2) *Пусть $1 < p < q < \infty$, $\alpha = 1/p - 1/q$ и весовая функция $v(x)$ удовлетворяет условию Макенхаупта-Видена $A(p,q)$:*

$$\left(|Q|^{-1} \int_Q v^q(x)\, dx\right)^{1/q} \left(|Q|^{-1} \int_Q v(x)^{-p'}\, dx\right)^{1/p'} \le K, \quad 1/p + 1/p' = 1,$$

где Q имеют вид $I_k^n = [k/m_n, (k+1)/m_n)$, $k \in \mathbf{Z}_+$, $n \in \mathbf{Z}$. Тогда для всех $f \in D$ (финитных функций в $\mathbf{R}_+$ и постоянных на всех I_k^n при некотором $n \in \mathbf{Z}$), таких что $\int_{\mathbf{R}_+} f(t)\, dt = 0$, справедливо неравенство

$$\left(\int_{\mathbf{R}_+} |J^{\alpha}(f)(x)|^q v^q(x)\, dx\right)^{1/q} \le C \left(\int_{\mathbf{R}_+} |f(x)|^p v^p(x)\, dx\right)^{1/p}.$$

Работа поддержана грантом президента РФ НШ-4383.2010.1.

Литература

1. Голубов Б.И. *Элементы двоичного анализа.* М., МГУП, 2005.
2. Волосивец С.С. О модифицированных мультипликативных интеграле и производной дробного порядка на полуоси // Известия РАН. Сер. матем., **70**:2 (2006), 3-24.

Оценки смешанных норм сумм двойных рядов по косинусам с кратно монотонными коэффициентами

Т.М. Вуколова
(ЦМО МГУ им. М.В.Ломоносова)
E-mail: *tmvukolova@mail.ru*

Будем рассматривать ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn} \cos mx \cos ny, \tag{1}$$

где для краткости обозначено $\cos 0 \cdot x = \cos 0 \cdot y = \frac{1}{2}$.

Будем писать, что сумма ряда (1) – функция $f(x,y) \in L_{p_1p_2}$, где $p_i \in (0;\infty)$, если

$$\|f\|_{p_1p_2} = \left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}|f(x,y)|^{p_1}dx\right)^{\frac{p_2}{p_1}}dy\right)^{\frac{1}{p_2}} < \infty.$$

Для целых $k_1 \geq 0$ и $k_2 \geq 0$ обозначим

$$\Delta_{k_1k_2}a_{mn} = \sum_{j=0}^{k_2}(-1)^j C_{k_2}^j \sum_{i=0}^{k_1}(-1)^i C_{k_1}^i a_{m+in+j}.$$

Для целых $k_1 \geq 1$ и $k_2 \geq 1$ обозначим также

$$A(k_1,k_2,p_1,p_2) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(\Delta_{k_1-1k_2-1}a_{mn}\right)^{p_1}(m+1)^{k_1p_1-2}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}(n+1)^{k_2p_2-2}\right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

I. Пусть последовательность $\{a_{mn}\}$ удовлетворяет условиям:
$a_{mn} \to 0$ при $m \to \infty$ и любом фиксированном n,
$a_{mn} \to 0$ при $n \to \infty$ и любом фиксированном m (2)
$\Delta_{k_1k_2}a_{mn} \geq 0$ для любых целых неотрицательных m и n и некоторых $k_i \geq 1$.

а) Пусть для данного i числа k_i и p_i таковы, что:
если $k_i = 1$ или $k_i = 2$, то $p_i \in (0;\infty)$, если $k_i \geq 3$, то $p_i \in (\frac{1}{2};\infty)$. Тогда

$$\|f\|_{p_1p_2} \leq C_1 A\left(k_1,k_2,p_1,p_2\right). \tag{3}$$

б) Пусть для данного i числа k_i и p_i таковы, что:
если $k_i = 1$, то $p_i \in (1;\infty)$, если $k_i \geq 2$, то $p_i \in (0;\infty)$. Тогда

$$A\left(k_1,k_2,p_1,p_2\right) \leq C_2\|f\|_{p_1p_2}. \tag{4}$$

В неравенствах (3) и (4) C_1 и C_2 зависят лишь от k_i и p_i.

II. Пусть числа k_i и p_i таковы, что:
если $k_1 = 1$, $k_2 \geq 3$ или $k_1 = 2$, $k_2 \geq 3$, то $p_1 \in (0;\infty)$, $p_2 \in (0;\frac{1}{2}]$,
если $k_1 \geq 3$, $k_2 = 1$ или $k_1 \geq 3$, $k_2 = 2$, то $p_1 \in (0;\frac{1}{2}]$, $p_2 \in (0;\infty)$,
если $k_1 \geq 3$, $k_2 \geq 3$, то $p_1 \in (0;\frac{1}{2}]$, $p_2 \in (0;\infty)$, или $p_1 \in (\frac{1}{2};\infty)$, $p_2 \in (0;\frac{1}{2}]$.
Тогда не существует такой постоянной C_1, зависящей, быть может, лишь от k_i и p_i, что для любой последовательности $\{a_{mn}\}$, удовлетворяющей условиям (2) для этих k_i, и соответствующей ей функции $f(x,y)$ было бы справедливо неравенство (3).

III. Пусть числа k_i и p_i таковы, что:
если $k_1 = k_2 = 1$, то $p_1 \in (0;1]$, $p_2 \in (0;\infty)$ или $p_1 \in (0;\infty)$ $p_2 \in (0;1]$,
если $k_1 = 1$, $k_2 \geq 2$, то $p_1 \in (0;1]$, $p_2 \in (0;\infty)$,
если $k_1 \geq 2$, $k_2 = 1$, то $p_1 \in (0;\infty)$, $p_2 \in (0;1]$.
Тогда не существует такой постоянной C_2, зависящей, быть может, лишь от k_i и p_i, что для любой последовательности $\{a_{mn}\}$, удовлетворяющей условиям (2) для этих k_i, и соответствующей ей функции $f(x,y)$ было бы справедливо неравенство (4).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00302)

Оптимальное представление дискретного сигнала с использованием деревьев

В.В. Галатенко
(Мех-мат ф-т МГУ им. М.В. Ломоносова)
E-mail: *vvgalatenko@yahoo.com*

Пусть f — действительнозначная функция (сигнал), определенная на n-мерном брусе Π. Для обработки, анализа, хранения и передачи исходный сигнал заменяется на дискретный. Простейший способ дискретизации заключается в разбиении бруса Π на 2^{nK} подобных ему брусов Π_j и замене на каждом брусе Π_j исходного сигнала f на константу c_j. Для того, чтобы результат дискретизации был репрезентативен, значение K должно быть достаточно велико. В то же время, если сигнал f в определенных областях изменяется медленно, то дробить эти области можно менее сильно, чем те области, в которых f изменяется быстро. Это замечание часто используется для того, чтобы сократить объем памяти, требуемой для хранения дискретизованного сигнала. Один из стандартных способов такого сокращения — сопоставление сигналу дерева. В случае $n = 1$ ($\Pi = [0; 1]$) это бинарное дерево, в котором вершины $v_{k,j}$ соответствуют двоичным подотрезкам $[j2^{-k}; (j+1)2^{-k}]$, при этом концевым вершинам приписаны числа (усреднения сигнала по соответствующему двоичному отрезку), а неконцевые вершины не используются, то есть им метки не приписаны (см., например, [1; п. 3.3]). Случаи больших размерностей аналогичны, разница заключается лишь в способах разбиения и степени ветвления (в частности, при $n = 2$ строятся квадродеревья, при $n = 3$ — октодеревья, см., например, [2]).

В рамках рассматриваемой структуры дерева представляется естественным содержательно использовать не только концевые, но и неконцевые вершины — а именно, приписывать им метки (числа) как и концевым вершинам, и при восстановлении сигнала ассоциировать с концевыми вершинами $v_{k,j}$ суммы $S_{k,j}$ всех меток, лежащих на пути от корня до этой вершины. Возникает задача построения такой расстановки меток в дереве, которая, во-первых допустима (то есть обеспечивает восстановление сигнала с приемлемой точностью), и, во вторых, среди всех таких расстановок использует минимально возможное число вершин (то есть содержит минимально возможное число ненулевых меток).

Будем считать, что расстановка меток допустима, если L^∞–норма отклонения дискретизованного сигнала от исходного не превосходит некоторого фиксированного порога $\varepsilon_{\max}$. Также пусть задано разбиение $\{\widetilde{\Pi}_m\}_{m=1}^M$ бруса Π на подобные ему брусы, причем $\operatorname{osc}(f; \widetilde{\Pi}_m) \le 2\varepsilon_{max}$ при всех j и наибольший из рангов $\widetilde{\Pi}_m$ равен K.

Теорема. *Построение допустимой расстановки меток, использующей минимально возможное число вершин, может быть осуществлено за $O(KM)$ операций. При этом объем требуемой памяти также не более чем линеен относительно KM.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 08-01-00799-а и 09-01-12173-офи_м), а также программы "Ведущие научные школы РФ" (проект НШ–3252.2010.1).

ЛИТЕРАТУРА

[1] R. A. DeVore *Nonlinear Approximation* // Acta Numerica, **7** (1998), 51–150.

[2] H. Sammet *Applications of spatial data structures: computer graphics, image processing, and GIS.* — Reading, MA: Addison-Wesley, 1990.

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧЕБЫШЁВСКАЯ ТОЧКА СИСТЕМЫ ОГРАНИЧЕННЫХ ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ, КОТОРЫЕ НЕПРЕРЫВНО МЕНЯЮТСЯ В ПОНИМАНИИ МЕТРИКИ ХАУСДОРФА

В.О. Гнатюк, Ю.В. Гнатюк, У.В. Гудыма

(Каменец-Подольский нац. ун-т им. Ивана Огиенка)

E-mail: *gnatyuk_yu_v@mail.ru*

Пусть X -линейное над полем комплексных чисел нормированное пространство, $B(X)$ $(O(X))$- совокупность произвольных (выпуклых) ограниченных замкнутых множеств пространства X, S-компакт, $C(S, B(X))$ $(C(S, O(X)))$ - множество многозначных отображений компакта S в X таких, что для каждого $s \in S$ $a(s) = B_s \in B(X)$ $(a(s) = O_s \in O(X))$ и они неперерывны на S относительно метрики Хаусдорфа на $B(X)$, $a \in C(S, B(X))$, $V \subset X$, $E_{a(s)}(g) = \inf\limits_{y \in a(s)} \|g - y\|$ -наилучшее приближение элемента g множеством $a(s)$, $s \in S$.

Рассматривается задача отыскания величины

$$\alpha_a^*(V) = \inf_{g \in V} \max_{s \in S} E_{a(s)}(g) = \inf_{g \in V} \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} \|g - y\|. \tag{1}$$

Если существует элемент $g^* \in V$ такой, что $\alpha_a^*(V) = \max\limits_{s \in S} E_{a(s)}(g^*)$, то его называют чебышёвской точкой относительно множества V системы $\{a(s), s \in S\}$ ограниченных замкнутых множеств пространства X, которые непрерывно меняются в понимании метрики Хаусдорфа на $B(X)$.

В работе установлены некоторые теоремы существования, единственности, необходимые, достаточные условия и критерии относительной чебышёвской точки, свойства экстремального функционала и экстремального оператора для задачи отыскания величины (1) .

В частности, имеет место следующий критерий относительной чебишёвской точки.

Теорема. Пусть $a \in C(S, O(X))$, $g^* \in V$ и V является Γ^* - множеством относительно точки g^* , в том числе звёздным относительно g^*, выпуклым множеством.

Для того чтобы елемент g^* был чебышёвской точкой системы $\{a(s), s \in S\}$ в множестве V, необходимо и достаточно, чтобы для каждого элемента $g \in V$ существовали элементы $s_g \in S$, $f_g \in B^* = \{f :\ f \in X^*,\ \|f\| \leqslant 1\}$, для которых выполняются соотношения

$$\max_{s \in S} E_{a(s)}(g^*) = E_{a\left(s_g\right)}(g^*) = \operatorname{Re} f_g(g^*) - \sup_{y \in a(s_g)} \operatorname{Re} f_g(y),$$

$$\operatorname{Re} f_g(g - g^*) \geqslant 0.$$

Критерий Q-интегрируемости

М.П. Гусева
(мехмат МГУ им. Ломоносова)
E-mail: *marilla2711@rambler.ru*

Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой, E — измеримое множество конечной меры, действительнозначная функция $f(x)$ измерима на E. Положим

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leqslant n; \\ n\,\mathrm{sgn} f(x), & \text{иначе}; \end{cases}$$

$$[f(x)]_{n;0} = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leqslant n; \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Определение 1. Будем говорить, что $f(x)$ является *Q-интегрируемой* на множестве E, если $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E [f(x)]_n\,dx$ существует; этот предел будем обозначать $(Q)\int\limits_E f(x)\,dx$.

Определение 2. Будем говорить, что $f(x)$ является *Q_0-интегрируемой* на множестве E, если $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E [f(x)]_{n;0}\,dx$ существует; этот предел будем обозначать $(Q_0)\int\limits_E f(x)\,dx$.

Понятие Q-интеграла введено Титчмаршем в работе [1]. Там же введено сужение Q-интеграла, впоследствии названное A-интегралом. Отметим, что A-интеграл активно изучался в связи с приложениями к теории сопряженных тригонометрических рядов Фурье.

Положим $E^+(f) = \{x \in E \mid f(x) \geqslant 0\}$, $E^-(f) = E \setminus E^+(f)$, и $F_n(f) = \{x \in E \mid |f(x)| \geqslant n\}$ при всех $n \geqslant 0$, $F_n^{\pm}(f) = F_n(f) \cap E^{\pm}(f)$.

Теорема 1. Функция $f(x)$ является Q-интегрируемой, если и только если сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[\mu(F_n^+(f)) - \mu(F_n^-(f))\right]$.

Введем множества $G_n(f) = \{x \in E \mid n-1 < |f(x)| \leqslant n\}$ при $n > 1$, $G_1(f) = \{x \in E \mid |f(x)| \leqslant 1\}$, $G_n^{\pm}(f) = G_n(f) \cap E^{\pm}(f)$.

Теорема 2. Функция $f(x)$ является Q_0-интегрируемой, если и только если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left[\mu(G_n^+(f)) - \mu(G_n^-(f))\right]$.

Теорема 3. Пусть $f(x)$ является Q_0-интегрируемой на E. Тогда $f(x)$ является Q-интегрируемой на E, $(Q)\int\limits_E f(x)\,dx = (Q_0)\int\limits_E f(x)\,dx$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Titchmarsh E.C.* On conjugate functions. //
Proc. London Math Soc. 1929. T. 29. C. 49–80.
2. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды.
М.: Физматгиз, 1961. – гл. VIII, §18.

Формула Эрмита для наипростейших дробей

В.И. Данченко, П.В. Чунаев
(Владимирский гос. ун-т, каф. функ. анализа и его приложений)
E-mail: *danch@vpti.vladimir.ru, chunayev@rambler.ru*

Для заданной в некоторой окрестности точки $z = 0$ аналитической функции $f(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \ldots$ интерполяционной *наипростейшей дробью* (н.д.) Паде называется рациональная функция вида

$$\rho_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

для которой $|f(z) - \rho_n(z)| = O(|z|^n)$ при $z \to 0$. Различные методы построения н.д. Паде были предложены в работах [1], [2], [3]. В настоящей заметке для построения таких дробей и оценки остаточного члена интерполяции используется формула Эрмита. Приведем схему построения. Рассмотрим функцию

$$R(z) = \frac{z^n}{Q(z)} = \frac{z^n}{(z - z_1) \cdots (z - z_n)},$$

с различными полюсами $z_k \neq 0$. Пусть γ — гладкий контур, лежащий в круге аналитичности функции $f(z)$. Будем считать, что внутренность γ содержит точку $z = 0$. Тогда формула Эрмита

$$J(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta)\, \frac{R(\zeta) - R(z)}{(\zeta - z)\, R(\zeta)}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{Q(z)} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta^n} \frac{\zeta^n Q(z) - z^n Q(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \tag{2}$$

дает интерполяционную функцию $J(z)$, совпадающую с $f(z)$ в узле $z = 0$ с кратностью n, т.е. $J^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$ при $k = 0, \ldots, n-1$. Из формулы (2) видно, что $J(z)$ является рациональной функцией и ее полюсы находятся среди точек z_k. Предположим для простоты, что множество полюсов функции $J(z)$ совпадает с множеством $\{z_k\}_{k=1}^n$. Теперь требуется подобрать полюсы z_k так, чтобы функция $J(z)$ имела вид (1). Отсюда возникает система уравнений $\mathrm{Res}_{z=z_k} J(z) = 1$, $k = 1, \ldots, n$. Трудность состоит в том, что она нелинейна относительно неизвестных z_k. Нами показано, что если система (с различными z_k) совместна, то коэффициенты f_m и полюсы z_k связаны равенствами $f_m = -\sum_{k=1}^n z_k^{-m-1}$, $m = 0, \ldots, n-1$.

Оценка остаточного члена

$$f(z) - J(z) = \frac{R(z)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z) R(\zeta)}\, d\zeta$$

проводится с использованием применявшегося нами ранее метода (см. [2], [3]) отыскания и оценок чисел z_k^{-1} при известных их степенных суммах.

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП РНПВШ (рег.номер 2.1.1/5568) и гранта РФФИ (проект 08-01-00648).

Литература

1. *Косухин О. Н.* О некоторых нетрадиционных методах приближения, связанных с комплексными полиномами: Дисс...канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 2005.

2. *Данченко В. И.* Об аппроксимативных свойствах сумм вида $\sum_k \lambda_k h(\lambda_k z)$ // Матем. заметки. — 2008. — Т. 83. — №5. — С. 643–649.

3. *Чунаев П. В.* Об одном нетрадиционном методе аппроксимации // Тр. МИАН. — 2010. — Т. 270 (принята к печати).

Оценки сплайн-всплесковых аппроксимаций на неравномерной сетке

Ю.К. Демьянович
(Санкт-Петербургский гос. ун-т)
E-mail: *Yuri.Demjanovich@JD16531.spb.edu*

Рассмотрим вещественное (или комплексное) векторное пространство $\mathfrak{R}$ и вектор-функцию $\vec{\varphi}(t)$, областью определения которой является открытый интервал $\mathfrak{M}$ вещественной оси; пусть $\{\vec{\mathbf{a}}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ и $\{\vec{\mathbf{a}}_j^\circ\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — некоторые системы векторов из пространства $\mathfrak{R}$. Предположим, что вещественнозначные (соответственно, комплекснозначные) финитные (Финитными называем функции и функционалы с компактными носителями.) функции $\omega_j(t)$, $t \in \mathfrak{M}$ и $\omega_j^\circ(t)$, $t \in \mathfrak{M}$, образуют линейно независимые системы и удовлетворяют *аппроксимационным* соотношениям (В этой и в других подобных суммах предполагается, что при каждом фиксированном $t \in \mathfrak{M}$ в сумме имеется лишь конечное число отличных от нуля слагаемых.) $\sum_j \vec{\mathbf{a}}_j\omega_j(t) \equiv \vec{\varphi}(t)$, $\sum_j \vec{\mathbf{a}}_j^\circ\ \omega_j^\circ(t) \equiv \vec{\varphi}(t)\ \forall t \in \mathfrak{M}$. Пусть справедливы *калибровочные* соотношения $\omega_i^\circ(t) \equiv \sum_j \mathfrak{p}_{ij}\omega_j(t)\ \forall i \in \mathbb{Z}$. Вводя линейные пространства $\mathbb{S} \stackrel{\text{def}}{=} \{U \mid U = \sum_j c_j\omega_j\}$, $\mathbb{S}^\circ \stackrel{\text{def}}{=} \{U^\circ \mid U^\circ = \sum_j c_j\omega_j^\circ\}$, имеем $\mathbb{S}^\circ \subset \mathbb{S}$. Предположим, что существуют системы финитных функционалов $\{g_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и $\{g_i^\circ\}_{i\in\mathbb{Z}}$, биортогональные к системам $\{\omega_j\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и $\{\omega_j^\circ\}_{i\in\mathbb{Z}}$ соответственно. Рассмотрим некоторое линейное продолжение функционалов g_i° с пространства $\mathbb{S}^\circ$ на объемлющее пространство $\mathbb{S}$. Справедливы соотношения $\langle g_i, \vec{\varphi}\rangle = \vec{\mathbf{a}}_i$, $\langle g_i^\circ, \vec{\varphi}\rangle = \vec{\mathbf{a}}_i^\circ$, $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^T = I$, где $\mathfrak{P} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{p}_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ $\mathfrak{Q} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{q}_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$, $\mathfrak{p}_{ij} = \langle g_j, \omega_i^\circ\rangle$, $\mathfrak{q}_{ij} = \langle g_i^\circ, \omega_j\rangle$, а I — единичная матрица. Исходный поток $\mathbf{c} = (c_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ разлагается на основной поток $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ и вэйвлетный поток $\mathbf{b} = (b_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ согласно *формулам декомпозиции* $\mathbf{a} = \mathfrak{Q}\mathbf{c}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathfrak{P}^T\mathfrak{Q}\mathbf{c}$. *Формулы реконструкции* имеют вид $\mathbf{c} = \mathfrak{P}^T\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Теорема 1. *Для любого фиксированного* $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ *разложение потока* $\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} (c_s)_{i\in\mathbb{Z}}$, $c_s = \langle g_s, \vec{\varphi}_i\rangle$, *имеет нулевую вэйвлетную составляющую.*

Рассмотрим сетки вида $X : \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots$, $\alpha = \lim_{j\to-\infty} x_j$, $\beta = \lim_{j\to+\infty} x_j$, для которых существует априорно заданное число $K_0 \ge 1$ такое, что $K_0^{-1} \le (x_{j+1} - x_j)/(x_j - x_{j-1}) \le K_0$. Построим линейную оболочку $\mathbb{S}_{(\alpha,\beta)}(X, \varphi) = \{u \mid u = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j\omega_j\ \forall c_j \in \mathbb{R}^1\}$ сплайнов ω_j, определяемых соотношениями

$$\mathbf{a}_{j-2}\omega_{j-2}(t) + \mathbf{a}_{j-1}\omega_{j-1}(t) + \mathbf{a}_j\omega_j(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in (x_j, x_{j+1}) \qquad (1)$$

при условиях $\operatorname{supp}\,\omega_j \subset [x_j, x_{j+3}]$ $\forall j \in \mathbb{Z}$; здесь $\varphi(t)$ — трехкомпонентная вектор-функция из пространства $C^2(\alpha, \beta)$ с равномерно отделенным от нуля вронскианом: $|\det(\varphi, \varphi', \varphi'')| \ge c > 0$, $\mathbf{a}_j = \varphi_{j+1}\det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi'_{j+1}) - \varphi'_{j+1}\times \det(\varphi_{j+2}, \varphi'_{j+2}, \varphi_{j+1})$, $\varphi_k = \varphi(x_k)$, $\varphi'_k = \varphi'(x_k)$.

При достаточно мелкой сетке X система (1) однозначно разрешима относительно $\omega_j(t)$; при этом $\omega_j \in C^1(\alpha, \beta)$. Рассмотрим новую сетку $X^\circ = \{x_j^\circ\}_{j\in\mathbb{Z}}$ такую, что $X^\circ \subset X$. Аналогично предыдущему определим функции ω_j° для сетки X°. Тогда $\mathbb{S}^\circ \subset \mathbb{S} \subset C^1(\alpha, \beta)$ (см. [1]).

Теорема 2. *Если* $u \in C^3(\alpha, \beta)$ *и* $\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} (c_s)_{i\in\mathbb{Z}}$, $c_s = \langle g_s, u\rangle$, *то вэйвлетная составляющая имеет порядок* h^3, *где* $h = \sup_{j\in\mathbb{Z}}(x_{j+1}^\circ - x_j^\circ)$.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 10-01-00245 и 10-01-00297.

Список литературы

[1] Демьянович Ю.К. *Гладкость пространств сплайнов и всплесковые разложения*, Докл. РАН. 2005. Т.401, №4. С.1-4.

Скорость поточечного приближения функций многих переменных (C, β)-средними их рядов Фурье

А.М. Дьяченко

(мех-мат ф-т МГУ им. М.В. Ломоносова.)

E-mail: *dyak86@mail.ru*

Автор изучал задачу о взаимосвязи скорости сходимости в некоторой точке чезаровских (C, β)-средних ряда Фурье ограниченной измеримой функции многих переменных с поведением самой функции. В этом направлении установлен ряд новых результатов. Сформулируем один из них.

Определение. Пусть $\psi(t)$ – монотонно неубывающая на $[0, \infty)$ неотрицательная функция, такая что $\psi(t) \to 0$ при $t \to {}_+0$ и $\psi(t_1 + t_2) \le \psi(t_1) + \psi(t_2)$ при любых $t_1 > 0$ и $t_2 > 0$. Тогда скажем, что $\psi(t) \in \Psi$.

Теорема. Пусть R – положительное число, m – натуральное число, $\psi(t) \in \Psi$ и определенная на $\mathbf{R}^m$, 2π-периодическая по каждому переменному измеримая функция $f(\mathbf{x})$ в некоторой точке $\mathbf{x}_0$ удовлетворяет при всех $\mathbf{t} \in [-\pi, \pi]^m$ условию

$$|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{t}) - f(\mathbf{x}_0)| \le \psi(|\mathbf{t}|),$$

где

$$|t| = \left(\sum_{j=1}^m t_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда, если $\beta \in (0, 1)$, $\sigma_{\mathbf{n}}^\beta(\mathbf{x}; f)$ - чезаровские (C, β)-средние ряда Фурье функции $f(\mathbf{x})$ с ограниченным отношением индексов, т.е. такие, что $\frac{n_i}{n_j} \le R$ при $1 \le i, j \le m$, то

$$|f(\mathbf{x}_0) - \sigma_{\mathbf{n}}^\beta(\mathbf{x}_0; f)| \le C(R, m, \beta) n_1^{-\beta} \int\limits_{\frac{\pi}{n_1}}^{2\pi} \frac{\psi(t)}{t^{\beta+1}} dt,$$

где постоянная $C(R, m, \beta)$ зависит только от R, m и β.

Результаты были получены при финансовой поддержке РФФИ, проект 08-01-00302, а также гранта поддержки ведущих научных школ НШ-3252.2010.1.

Сходимость квадратных частных сумм двойного тригонометрического ряда, лакунарного по одной переменной

М.И. Дьяченко
(Мех-мат МГУ)
E-mail: *dyach@mail.ru*

Как известно, в одномерном случае, из сходимости (или даже суммируемости некоторым методом достаточно общего вида) лакунарного по Адамару тригонометрического ряда вытекает, что сумма квадратов его коэффициентов сходится. Разумеется, верно и обратное: если коэффициенты лакунарного ряда принадлежат пространству l_2, то он сходится почти всюду. Данный результат напрямую не переносится на сходимость по квадратам двойных тригонометрических рядов с лакунарными по одной переменной коэффициентами. Точнее, построен почти всюду расходящийся по квадратам ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}\lambda_n \cos nx \cos m_k y,$$

где при любом фиксированном $k \geq 1$ числа $a_{n,k} \downarrow 0$ при $n \to \infty$, последовательность $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ лакунарна по Адамару, $\lambda_n = \frac{1}{2}$ при $n = 0$ и $\lambda_n = 1$ при $n > 0$, такой, что если

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k}\lambda_n \cos nx$$

при $k = 1, 2, ...,$ то

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(x) < \infty$$

при $x \neq 0| \bmod 2\pi$. Вопрос о нахождении неусиляемого в своих терминах условия для двойного ряда с коэффициентами, лакунарными по одной переменной , достаточного для его сходимости почти всюду по квадратам (или по Прингсхейму) остается пока открытым. Возможно, что это условие имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{N\geq 1} \left| \sum_{n=0}^{N} a_{n,k}\lambda_n \cos nx \right|^2 < \infty$$

при $x \neq 0| \bmod 2\pi$.

Результаты были получены при финансовой поддержке РФФИ, проект 09-01-00175, а также гранта поддержки ведущих научных школ НШ-3252.2010.1.

Гармонический анализ и точные неравенства Джексона в весовых пространствах

В.И. Иванов
(Тульский гос. ун-т)
E-mail: *ivaleryi@mail.ru*

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^d$ — d-мерное действительное евклидово пространство со скалярным произведением $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{d} x_i y_i$, $G(R)$ — конечная группа отражений, порожденная системой корней R, $v_k(x) = \prod\limits_{\alpha\in R_+} |(\alpha, x)|^{2k(\alpha)}$ — степенной вес, определяемый положительной подсистемой R_+ системы корней R и функцией $k(\alpha) : R \to \mathbb{R}_+$, инвариантной относительно $G(R)$, $c_k = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2} v_k(x)\, dx$, $d\mu_k(x) = c_k^{-1} v_k(x)\, dx$, $L_{2,k}(\mathbb{R}^d)$ – пространство комплексных измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^d$ функций с нормой $\|f\|_{2,k}^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 d\mu_k(x) < \infty$.

В конце 80-х годов 20-го века Ч. Данклем был предложен подход к построению гармонического анализа в пространстве $L_{2,k}\left(\mathbb{R}^d\right)$. В его работах, а также в работах М. Реслер, М. де Же, К. Тримеш и других авторов он прибрел достаточно законченный вид. Гармонический анализ в пространстве $L_{2,k}\left(\mathbb{R}^d\right)$ осуществляется с помощью дифференциально-разностных операторов и интегральных преобразований Данкля. Если $e_1, ..., e_d$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^d$, то дифференциально-разностные операторы Данкля определяются равенствами

$$D_j f\left(x\right) = \frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_j} + \sum_{\alpha \in R_+} k\left(\alpha\right)\left(\alpha, e_j\right) \frac{f\left(x\right) - f\left(\sigma_\alpha x\right)}{\left(\alpha, x\right)}, \quad j = 1, ..., d.$$

Для $y \in \mathbb{R}^d$ система $D_j f\left(x\right) = y_j f\left(x\right), \quad f\left(0\right) = 1$ имеет единственное решение $E_k\left(x, y\right)$, которое продолжается до аналитической в $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d$ функции. Для обобщенной экспоненты $e_k\left(x, y\right) = E_k\left(ix, y\right)$ выполнены многие свойства, аналогичные свойствам экспоненты $e^{i(x,y)}$.

Разложение функций из $L_{\,2,k}\left(\mathbb{R}^d\right)$ осуществляется с помощью прямого и обратного преобразований Данкля

$$\widehat{f}^k\left(y\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f\left(x\right) \overline{e_k\left(x, y\right)} d\mu_k\left(x\right), \quad f\left(x\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}^k\left(y\right) e_k\left(x, y\right) d\mu_k\left(y\right).$$

Гармонический анализ в пространстве $L_{2,k}\left(\mathbb{R}^d\right)$ нашел широкое применение в математической физике, теории вероятностей, теории функций. Доклад будет посвящен его применению в теории приближений. Будут обсуждаться определения операторов обобщенного сдвига, модулей непрерывности, величины наилучшего приближения целыми функциями и доказательство точных неравенств Джексона.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00564).

Оценки снизу для сумм собственных значений эллиптических уравнений и систем

А.А. Ильин

(Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН)

E-mail: *ilyin@keldysh.ru*

Рассматривается спектр $\mu_1 \le \mu_2 \le \mu_3 \le \dots$ задачи Дирихле для полигармонического оператора в $\Omega \subset R^n$, $|\Omega| = \mathrm{vol}(\Omega) < \infty$,

$$(-\Delta)^\gamma \varphi_k = \mu_k \varphi_k, \qquad \varphi_k \in H_0^\gamma(\Omega).$$

Показывается, что $\sum_{k=1}^m \mu_k \ge \Sigma_{M,L}^\gamma$, где $\Sigma_{M,L}^\gamma$ решение задачи минимизации

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2\gamma} F(\xi) d\xi \to \inf =: \Sigma_{M,L}^\gamma(m) \quad \text{при условиях,}$$
$$0 \le F(\xi) \le M, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} F(\xi)\, d\xi = m, \qquad |\nabla F(\xi)| \le L.$$

в которой $M = (2\pi)^{-n}|\Omega|$, $L = 2(2\pi)^{-n}\sqrt{|\Omega| I}$ и $I = \int_\Omega x^2 dx$. На основании точного решения этой задачи доказываются оценки снизу (ограничимся случаем $n = 2$ и несколькими примерами).

Теорема. *Для $n = 2$ справедливы следующие оценки, в которых коэффициент при старшей степени m справа точный*

$$\sum_{k=1}^m \mu_k \ge \frac{2\pi}{|\Omega|} m^2 + \frac{1}{24} \frac{119}{120} \frac{|\Omega|}{I} m, \quad \gamma = 1,$$
$$\sum_{k=1}^m \mu_k \ge \frac{16\pi^2}{3|\Omega|^2} m^3 + \frac{\pi}{3\,I} \frac{12095}{12096} m^2, \quad \gamma = 2,$$
$$\sum_{k=1}^m \mu_k \ge \frac{16\pi^2}{|\Omega|^3} m^4 + \frac{\pi^2}{2|\Omega|\,I}\, m^3 + \frac{\pi}{48} \frac{71}{72} \frac{|\Omega|}{I^2} m^2, \quad \gamma = 3.$$

Аналогичные результаты получены для системы Стокса.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 09-01-00288 и 08-01-00784, и Программы РАН №1 “Современные проблемы теоретической математики”

Литература

1. Li P. and Yau S.–T. On the Schrödinger equation and the eigenvalue problem. *Commun. Math. Phys.* **8** (1983), 309–318.
2. Melas A. A lower bound for sums of eigenvalues of the Laplacian. *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2002), 631–636.
3. Ильин А.А. О спектре оператора Стокса. *Функциональный анализ и его приложения.* **43** (2009), 14–25.
4. Ilyin A.A. Lower bounds for the spectrum of the Laplace and Stokes operators. *Discrete and Continuous Dynamical Systems.* **28**:1 (2010), 131–146.

О многочлене, реализующем данный порядок наилучших приближений

Г.Н. Казимиров
(ГГУ им. Ф. Скорины)
E-mail: *grigory.kazimirov@gmail.com*

Будем говорить, что $f \in L_p$, $1 \le p < \infty$, если функция f измерима на отрезке $[-1,1]$ и $\|f\|_p = \left(\int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$, а для $p=\infty$ функция f непрерывна на отрезке $[-1,1]$ и $\|f\|_\infty = \max\limits_{-1\le x\le 1} |f(x)|$. Через $L_{p,\alpha,\beta}$ обозначим множество таких функций f, что $f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \in L_p$ и $\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \|f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\|_p$.

Через $E_n(f)_{p,\alpha,\beta}$ обозначим наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ при помощи алгебраических многочленов степени не выше, чем $n-1$, то есть $E_n(f)_{p,\alpha,\beta} = \inf\limits_{P_n\in P} \|f(x) - P_n(x)\|_{p,\alpha,\beta}$, где P-множество алгебраических многочленов степени не выше, чем n-1.

Для $\lambda > -1$ определим оператор Чебышева-Якоби следующим образом:

$$T_h(f,x,\lambda) = \frac{1}{\pi \cos^\lambda \frac{h}{2}} \int\limits_0^\pi f(\cos\theta) \left(\frac{1+\cos\theta}{1+x}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \cos\lambda r d\varphi \ , \tag{1}$$

где $|h| < \pi$, $0 \le r \le \pi$, $\cos\theta = x\cosh + \cos\varphi\sqrt{1-x^2}\sin h$, $\cos r = \frac{\sqrt{1+x}\cos\frac{h}{2} + \cos\varphi\sqrt{1-x^2}\sin\frac{h}{2}}{\sqrt{1+x\cos h + \cos\varphi\sqrt{1-x^2}\sin h}}$.

Введем обозначения $(m = 2,3,...; r = 2,3,...)$: $\Delta_h^1(f,\delta,\lambda) = T_h(f,x,\lambda) - f(x)$, $\Delta^m_{h_1,\dots,h_m}(f,x,\lambda) = \Delta^1_{h_m}(\Delta^{m-1}_{h_1,\dots,h_{m-1}}(f,x,\lambda),x,\lambda)$, $\tilde\omega_m(f,\delta,\lambda)_{p,\alpha,\beta} = \sup\limits_{|h_i|\le\delta; i=1,\dots,m} \|\Delta^m_{h_1,\dots,h_m}(f,x,\lambda)\|_{p,\alpha,\beta}$,

Теорема. Если $f \in L_{1,0,\lambda}, \lambda > -1 r = 1,2,...$, то функция

$$Q(x) = \int\limits_0^\pi \cdots \int\limits_0^\pi (\Delta^r_{t_1,\dots,t_r}(f,x,\lambda) + (-1)^r f(x)) \prod_{s=1}^r (\frac{\sin\frac{mt_s}{2}}{\sin\frac{t_s}{2}})^{2q+4} (\sin\frac{t_s}{2}\cos\frac{t_s}{2})^{2\nu+4} dt_1\cdots dt_r \tag{2}$$

есть алгебраический многочлен степени не выше, чем $(q+2)(m-1)$.

Этот многочлен реализует порядок $E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \le C_1 n^{-\gamma}$ наилучших приближений функций $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ для которых $\tilde\omega_r(f,\delta,\lambda)_{p,\alpha,\beta} \le C_2\delta^\gamma$.

О некоторых конечно-разностных свойствах конформных гомеоморфизмов

Е.В. Карупу
(Национальный авиационный ун-т, Киев)
E-mail: *karupu@ukr.net*

Пусть в комплексной плоскости задана замкнутая гладкая жорданова кривая. Будем рассматривать угол между касательной к кривой и положительной вещественной осью как функцию длины дуги на этой кривой. Рассмотрим функцию, осуществляющую конформное отображение единичного круга на односвязную область, ограниченную заданной кривой, и функцию, обратную к ней.

Вопрос о получении информации о связи между свойствами функции, характеризирующей кривую, ограничивающую область, и производных функций, реализующих конформные отображения, исследован в многих работах, начиная с широко известной работы Келлога (более детально см. [1]–[4]). В частности, автором были получены обобщения и обращения терем типа Келлога для модулей гладкости высших порядков разных типов.

В докладе рассматриваются оценки для модулей гладкости высших порядков общего вида для производных любого порядка для функций, реализующих конформные отображения. Результаты получены в терминах равномерных криволинейных и интегральных модулей гладкости.

Литература

1. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения. – Киев: Наукова думка, 1975. – 284 с.

2. *Каруп Е. В.* О модулях гладкости конформных отображений. // Укр. матем. журн. – 1978. – **30**, № 4, – с.540-545.

3. *Каруп О. В.* Скінченно-різницеві властивості гладкості конформних відображень. // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 4, – с.175-180.

4. *Karupu O. W.* On some boundary properties of conformal mapping. – In: Further progress in analysis, Proceedings of the 6th International ISAAC Congress, Ankara, World Scientific, Singapore, 2009. p.233-240.

Обобщеные функции Миттаг-Леффлера и их приложения

А.А. Килбас
(Белорусский гос. ун-т)
E-mail: *anatolykilbas@gmail.com*

Рассмотрим функцию $E_{\gamma,m,l}(z)$, определенную для комплексных γ, $l \in \mathbf{C}$ и вещественного $m > 0$ степенным рядом

$$E_{\gamma,m,l}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k; \quad c_0 = 1, \ c_k = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\Gamma[\gamma(jm+l)+1]}{\Gamma[\gamma(jm+l+1)+1]} \quad (k \in \mathbf{N}), \tag{1}$$

$$\mathrm{Re}(\gamma) > 0, \quad \gamma(jm+l) \notin 0, -1, -2, \cdots \quad (j = 0, 1, 2, \cdots).$$

$E_{\gamma,m,l}(z)$ - целая функция от of z порядка $[\mathrm{Re}(\gamma)]^{-1}$ и типа m. В частности, если $m = 1$, то функция (1) совпадает с функцией Миттаг-Леффлера [1]

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{C}, \ \mathrm{Re}(\alpha) > 0)$$

с точностью до постоянного множителя $\Gamma(\gamma l + 1)$:

$$E_{\gamma,1,l}(z) = \Gamma(\gamma l + 1) E_{\gamma,\gamma l+1}(z).$$

Мы доказываем формулы композиций дробных интегралов

$$\left(I_{0+}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} \quad (x > 0; \quad \mathrm{Re}(\alpha) > 0)$$

и дробных производных

$$\left(D_{0+}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{0+}^{n-\alpha}\varphi\right)(x) \quad (x > 0; \quad \mathrm{Re}(\alpha) \geq 0, \ n = [\mathrm{Re}(\alpha) + 1)$$

с обобщенной функцией Миттаг-Леффлера и даем их приложения к решению интегральных и дифференциальных уравнений.

Работа выполнена в рамках НИР БГУ 602/25 "Функции гиперге-ометрического типа и их приложения в математике и механике", входящей в государственную программу РБ "Математические мо-дели", а также при поддержке Белорусского республиканского фон-да фундаментальных исследований.

Литература.

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967. – 299 с.

Оценка остаточного члена интерполяционной формулы Ньютона для однолистной в круге функции

Э.Г. Кирьяцкий
(Вильнюсский технический ун-т имени Гедиминаса каф. мат. моднлирования)
E-mail: *Eduard.Kiriyatzkii@takas.lt*

Теорема. Для любой однолистной в круге $|z|<1$ функции $f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$ и для любых попарно различных точек $z_0,...,z_n,z_{n+1}$ из круга $|z|<1$ справедливо неравенство

$$|f(z_{n+1})-P_n(z_{n+1})|\le\left(-1+\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{1-|z_k|}\right)\prod_{k=0}^{n+1}\frac{1}{1-|z_k|}\prod_{k=0}^{n}|z_{n+1}-z_k|,$$

где $P_n(z)$ – многочлен, интерполирующий функцию в точках $z_0,...,z_n$.

Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда все точки $z_0,...,z_n,z_{n+1}$ взяты на радиусе круга $|z|<1$, наклоненного под углом α к вещественной оси, а функция имеет вид

$$f(z)=\frac{z}{(1-e^{-i\alpha}z)^2}.$$

Об оценках расстояний от полюсов наипростейших дробей до компактов

О.Н. Косухин
(МГУ им. М.В.Ломоносова, мехмат)
E-mail: *kosuhin_ oleg@mail.ru*

Наипростейшей дробью степени n называется рациональная функция комплексного переменного z вида $R_n(z)=\sum_{k=1}^{n}1/(z-a_k)$, где $\{a_k\}$ — её полюсы (не обязательно различные) на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Пусть $d(K,R_n)$ — обычное (евклидово) расстояние между множеством $\{a_k\}$ и заданным замкнутым множеством $K\subset\mathbb{C}$ ($K\ne\mathbb{C}$), $d_n(K,M)$ — infimum величин $d(K,R_n)$ по всем наипростейшим дробям R_n, для которых $|R_n(z)|\le M\ \forall z\in K$. Представляет интерес задача об оценке величин $d_n(K,M)$ при $n\to\infty$. В частном случае $K=(-\infty,+\infty)$ эту задачу поставил Е.А. Горин в 1962 году. Её решением занимались Е.А. Горин (1962), Е.Г. Николаев (1965), А.О. Гельфонд (1966), В.Э. Кацнельсон (1967), но наибольших успехов в случае, когда K прямая или окружность комплексной плоскости, добился В.И. Данченко [1], который не только впервые доказал стремление величин $d_n(K,M)$ к нулю с ростом n, но и нашел точный порядок этих величин. В общем случае вопрос об оценке величин $d_n(K,M)$ остается открытым.

Ниже компакт K называется спрямляемым, если существует такая величина $d(K)>0$, что любые две его точки можно соединить кривой $l\subset K$ длины $|l|\le d(K)$.

Теорема. *Для любого спрямляемого компакта $K\subset\mathbb{C}$ при каждом фиксированном $A>0$ имеет место асимптотическое неравенство*

$$d_n(K,A)\ge 4c(K)\frac{\log^2 n}{n^2}(1+o(1))\quad(n\to\infty),$$

обращающееся в равенство в случае, если K — какой-либо отрезок. Здесь $c(K)$ — гармоническая (логарифмическая) ёмкость компакта K.

Работа поддержана грантом 08-01-00648а РФФИ.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Данченко В. И. *Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных многочленов до прямых и окружностей* / В. И. Данченко // Матем.сб. 1994. **185**, N 8. С. 63-80.

Неравенства для производных и разностей положительных порядков функций с компактным спектром

Н.Л. Кудрявцев
(МГУ им. М.В. Ломоносова, мех-мат)
E-mail: *nilkud@mech.math.msu.su*

Пусть Ω — компакт в $\mathbf{R}^n$. Обозначим через $L_p^\Omega=L_p^\Omega(\mathbf{R}^n)$, $0<p<\infty$ пространство комплекснозначных функций с конечной (квази)нормой $\|f\|_p=(\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|\,dx)^{1/p}$ таких, что $\mathrm{supp}Ff\subset\Omega$ (преобразование

Фурье Ff понимается в смысле распределений). Для функций этого пространства имеют смысл производные $D^r_\omega f$ произвольных порядков $r>0$ по любому направлению $\omega \in \mathbf{R}^n$, $|\omega|=1$, которые определяются как $F^{-1}((i\omega y)^r Ff)$, так и разности дробного порядка $\alpha>0$ с шагом $h\in\mathbf{R}^n$ $\Delta^\alpha_h f(\cdot)=\sum_{j=0}^\infty C^j_\alpha f(\cdot - jh)$, где C^j_α — биномиальные коэффициенты.

Пусть $k_0\in\mathbf{N}$ фиксировано. Для произвольного $k\in\mathbf{Z}$ обозначим через $B(k)=\{y|\,\|y\|<2^k\}$, $D(k)=\overline{B(k)\setminus B(k-k_0)}$, $\{r\}$ обозначает дробную часть числа r.

Теорема 1. *Пусть дано $r>0$. Если $f\in L_p^{\overline{B}(2^k)}(\mathbf{R}^n)$, где $p\in(0,\infty)$, если $r\in\mathbf{N}$ и $p\in(\frac{1}{1+\{r\}},+\infty)$ для дробных r, а $k\in\mathbf{N}$, $\omega\in\mathbf{R}^n$ $(|\omega|=1)$, $t,\ t_1,\ t_2\in(0,1]$ — произвольны, то*

$$\|D^r_\omega f\|_p\le C_1(t2^{-k})^{-r}\|\Delta^r_{\pi t2^{-k}\omega}f\|_p,\ \|D^r_\omega f\|_p\le C_2 2^{kr}\|f\|_p,$$

$$\|\Delta^r_{\pi t2^{-k}\omega}f\|_p\le C_3(t2^{-k})^r\|D^r_\omega f\|_p\ \text{ и }\ \|\Delta^r_{\pi t_1 2^{-k}\omega}f\|_p\le C_4\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^r\|\Delta^r_{\pi t_2 2^{-k}\omega}f\|_p$$

(постоянные в неравенствах не зависят от f, k и t, t_1 и t_2).

Теорема 2. *Пусть дано $r>0$. Если $f\in L_p^{D(k)}(\mathbf{R}^n)$, где $p\in(0,\infty)$, если $r\in\mathbf{N}$ и $p\in(\frac{1}{1+\{r\}},+\infty)$ для дробных r, а $k\in\mathbf{N}$, $t\in(0,\frac{2\pi}{1+\varepsilon})$, $\varepsilon\in(0,1)$— произвольны, то*

$$\|f\|_p\le C_1(t)\sum_{j=1}^n\|\Delta^r_{t2^{-k}e_j}f\|_p\ \text{ и }\ \|f\|_p\le C_2 2^{-kr}\sum_{j=1}^n\|D^r_j f\|_p,$$

с постоянными, не зависящими от f и k.

Первое неравенство в теореме 1 обобщает на случай $p\le1$ соответствующую оценку из [1] (в одномерном случае см. также [2]). Остальные неравенства являются распространением на дробные показатели и $p<1$ известных оценок. Оценки, приведенные в теореме 2, можно рассматривать как неравенства типа Бора-Фавара для соответствующего класса функций.

Литература

[1] Wilmes G. On Riesz-type inequalities and K-functionals related to Riesz potentials in $\mathbf{R}^n$. Numerical Functional Analysis and Optimization 1 (1979), 57-77

[2] Taberski R. Estimates for entire functions of exponential type. Functiones et Approximatio, Comment. Math. 13 (1982), 123-147.

О жадных алгоритмах для словарей с ограниченной когерентностью

Е.Д. Лившиц

(Эверноут. Корп.)

E-mail: *livshitz@rambler.ru*

Пусть H — действительное сепарабельное гильбертово пространство. Множество $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}\subset H$, будем называть словарем, если оно состоит из векторов с единичной нормой и $\overline{\mathrm{span}}\mathcal{D}=H$. В последнее время одним из наиболее распространенных способов получения m-членных приближений по словарю $\mathcal{D}$ для целевой функции $f\in H$ стали жадные алгоритмы.

Чисто [Ортогональный] жадный алгоритм (ЧЖА) [(ОЖА)] *Пусть задан словарь $\mathcal{D}$ и целевая функция $f_0:=f\in H$. Положим $G_0^{PGA}(f,\mathcal{D})[G_0^{OGA}(f,\mathcal{D})]:=G_0:=0$. Для каждого $m\ge0$ последовательно выбираем вектор $g_{m+1}\in\mathcal{D}$ такой, что $|\langle f_m,g_{m+1}\rangle|=\sup_{g\in\mathcal{D}}|\langle f_m,g\rangle|$ и определяем приближение $G_{m+1}:=G_{m+1}^{PGA}(f,\mathcal{D}):=G_m^{PGA}(f,\mathcal{D})+\langle f_m,g_{m+1}\rangle g_{m+1}$ $[G_{m+1}:=G_{m+1}^{OGA}(f,\mathcal{D}):=\mathrm{Proj}_{g_1,\dots,g_{m+1}}(f)]$ и остаток $f_{m+1}:=f-G_{m+1}$.*

Тем самым, для каждого $m\ge1$ построены $G_m^{PGA}(f,\mathcal{D})$, $G_m^{OGA}(f,\mathcal{D})$ — m-членные приближения к f. Сходимость и скорость сходимости жадных алгоритмов для словарей общего вида в значительной степени изучена (см. [1], [2]).

В последние годы вырос интерес к одному частному случаю жадных аппроксимаций: приближению разреженных (sparse) целевых функций по словарям с ограниченной когерентностью [3], [4], [5]. Это связано с тем, что жадные алгоритмы оказались эффективны в задаче *сжатых измерений (compressed sensing)*.

В докладе будут обсуждаться два типа ограничения на когерентность

$$\mu(\mathcal{D})=\sup_{\phi,\psi\in\mathcal{D},\ \phi\ne\psi}|\langle\phi,\psi\rangle|,\quad \mu_1(\mathcal{D}):=\sup_{\phi\in\mathcal{D}}\sum_{\psi\in\mathcal{D},\ \psi\ne\phi}|\langle\phi,\psi\rangle|.$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Для любого словаря $\mathcal{D}$, $m \in \mathbb{N}$, $1 \le m \le 1/(20\mu(\mathcal{D}))$ и $f \in H$ справедливо неравенство*

$$\|f - G_{2m}^{OGA}(f, \mathcal{D})\| \le 3\sigma_m(f, \mathcal{D}),$$

где $\sigma_m(f, \mathcal{D})$ — наилучшее m-членное приближение f по словарю $\mathcal{D}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 08-01-00799 и 09-01-12173.

Литература

1. Temlyakov V.N. “Greedy approximation” // *Acta Numerica.* 2008. V. 17. P. 235–409.

2. Лившиц Е.Д. “О нижних оценках скорости сходимости жадных алгоритмов функций” // *Изв. РАН. Сер. Матем.* 2009. Т. 73. № 6. С. 118–138.

3. Gilbert A.C., Muthukrishnan M., Strauss J. “Approximation of functions over redundant dictionaries using coherence” //*Proc. 14th Annu. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms.* 2003. P. 243—252.

4. Tropp J. A. “Greed is good: algorithmic results for sparse approximation” //*IEEE Trans. Inform. Th.* 2004. V. 50:10. P. 2231–2242.

5. Donoho D. L., Elad M., Temlyakov V. N. “ On Lebesgue-type inequalities for greedy approximation ” //*Journal of Approximation theory* 2007. V. 147:2. P. 185–195.

О рекурсивных разложениях мер

Т.П. Лукашенко

(МГУ имени М.В.Ломоносова, мехмат)

E-mail: *lukashenko@mail.ru*

Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с неотрицательной σ-аддитивной мерой μ, а (Ω, Σ, ν) — пространство с комплексной σ-аддитивной мерой ν (см. [1], глава III). Пусть множества $E_k^m \in \Sigma$ конечной строго положительной меры μ, множества E_k^m и E_l^m при $k \ne l$ не пересекаются, а если $E_k^m \cap E_l^n \ne \varnothing$ и $m < n$, то $E_k^m \supset E_l^n$. Рассмотрим рекурсивное разложение меры ν по мере μ по цепочке систем множеств $\{E_k^m\}_k$.

Определение. Если все множества E_k^m конечной меры ν, то определим *рекурсивное разложение* меры ν по мере μ по цепочке систем множеств $\{E_k^m\}_k$: 1) $r_0 = \nu$; 2) если для натурального m задана мера r_{m-1}, остаток приближения, и система множеств $\{E_k^m\}_k$, то полагаем $\widehat{\nu}_k^m = \frac{r_{m-1}(E_k^m)}{\mu(E_k^m)}$ для всех допустимых k и для множеств $D \in \Sigma$ полагаем меру $r_m(D) = r_{m-1}(D) - \sum\limits_k \widehat{\nu}_k^m \mu\,(D \cap E_k^m)$.

Коэффициенты $\widehat{\nu}_k^m$ — *рекурсивные коэффициенты* меры ν по мере μ по цепочке систем множеств $\{E_k^m\}_k$, $m \in \mathbb{N}$, а ряд комплексных мер $\sigma(\nu/\mu; D) = \sum\limits_m \sum\limits_k \widehat{\nu}_k^m \mu\,(D \cap E_k^m)$ — *рекурсивный ряд* меры ν по мере μ по цепочке систем множеств $\{E_k^m\}_k$. *Частичной суммой* рекурсивного ряда с номером $n \in \mathbb{N}$ назовем сумму $S_n(\nu/\mu; D) = \sum\limits_{m=1}^{n} \sum\limits_k \widehat{\nu}_k^m \mu\,(D \cap E_k^m)$.

Пусть множества E_k^m имеют свойство *дробления* — для всех натуральных m любое множество E_k^m является объединением множеств $E_j^{m+1} \subset E_k^m$. Тогда если множества системы $\{E_k^n\}_k$ покрывают множество $D \in \Sigma$, то для $m \geqslant n$ верно равенство

$$S_m(\nu/\mu; D) = \sum_k \frac{\nu\,(E_k^m)}{\mu\,(E_k^m)} \mu\,(D \cap E_k^m).$$

Из него следует, что для множества E_k^m при $j \geqslant m \geqslant n$ верно равенство

$$\sigma\,(\nu/\mu; E_k^m) = S_j\,(\nu/\mu; E_k^m) = \nu\,(E_k^m)\,.$$

Рекурсивное разложение мер является развитием рекурсивных разложений из [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №08-01-00669) и ведущей научной школы НШ-3252.2010.1.

Литература

1. Данфорд Н. и Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962; ЛКИ, 2008.

2. Лукашенко Т. П., Садовничий В. А. О рекурсивных разложениях по цепочке систем // Доклады РАН. 2009. Т. 425, №6. С. 1-6.

КМА на произведении полей p-адических чисел

С.Ф. Лукомский
(Саратовский гос. ун-т)
E-mail: *Lukomskiisf@info.sgu.ru*

При простом p под группой $\mathbb{Q}_p$ всех p-адических чисел будем понимать совокупность бесконечных в обе стороны последовательностей $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, где $x_n = \overline{0,p-1}$ и в которых лишь конечное число элементов x_n с отрицательными номерами отлично от нуля. Операция $\dot{+}$ в $\mathbb{Q}_p$ определяется как покоординатное сложение в системе счисления с основанием p с переносом единицы в следующий разряд. $\mathbb{Q}_p$ есть нульмерная локально компактная группа с основной цепочкой подгрупп $(G_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ и такой, что $(G_n/G_{n+1})^\sharp = p$. Пусть (g_n) – базисная последовательность в $\mathbb{Q}_p$, т.е. $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$. Любой элемент $x \in \mathbb{Q}_p$ единственным образом представим в виде $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n g_n$ ($a_n = \overline{0,p-1}$). Оператор A_1, определенный равенством $A_1(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n g_{n-1}$, назовем оператором растяжения в $\mathbb{Q}_p$. Пусть $\tilde{G} = \mathbb{Q}_p^d$ – произведение групп p-адических чисел. Определим в $\mathbb{Q}_p^d$ оператор растяжения A_d следующим образом: если $\mathbf{x} = (x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(d-1)}) \in \mathbb{Q}_p^d$, то положим $A_d = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(d-1)}, A_1(x^{(0)}))$, где A_1 – одномерный оператор растяжения. Базисную систему в $\mathbb{Q}_p^d$ образуют элементы $\mathbf{g}_{md+l} = (\underbrace{0,\ldots,0}_{l}, g_m, 0, \ldots, 0)$. Множество

$$H_0 = \left\{\mathbf{x} = \sum a_{mg+l}\mathbf{g}_{md+l} : \ m \in \mathbb{Z}, M \le md + l \le -1, a_{md+l} = \overline{0,p-1}\right\}$$

есть аналог множества натуральных чисел. Основную цепочку подгрупп в $\mathbb{Q}_p^d$ образуют множества $\mathbf{G}_{md+l} = G^l_{m+1} \times G^{d-l}_m$ ($l = \overline{0,p-1}, m \in \mathbb{Z}$). Пусть $\mathbf{G}^\perp_{md+l}$ аннуляторы подгрупп $\mathbf{G}_{md+l}$.

Теорема. *Пусть $\varphi \in L_2(\mathbb{Q}_p^d)$ решение масштабирующего уравнения*

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{h}\in H_0} c_{\mathbf{h}} \varphi(A_d\mathbf{x} \dot{-} \mathbf{h})$$

и $|\hat{\varphi}(\chi)| = \mathbf{1}_{\mathbf{G}_0^\perp}(\chi)$. Тогда φ порождает КМА в $\mathbb{Q}_p^d$

Эта теорема позволяет строить всплесковые базисы в $L_2(\mathbb{Q}_p^d)$, которые не являются тензорными произведениями одномерных базисов.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента по поддержке ведущих научных школ, проект НШ-4383.2010.1 и фонда РФФИ, грант 10-01-00097-а.

Об одном представлении неполиномиальных сплайнов

А.А. Макаров
(Санкт-Петербургский гос. ун-т)
E-mail: *Antony.Makarov@gmail.com*

Известно, что сплайны можно построить с помощью гладкой склейки функций, задаваемых на соседних сеточных интервалах; после этого обычно изучаются их аппроксимационные свойства. При построении сплайн-вэйвлетных разложений на неравномерной сетке [1–5] используется другой подход: рассматриваются аппроксимационные соотношения как система линейных алгебраических уравнений, из которой выводятся (как полиномиальные, так и неполиномиальные) сплайны; при этом аппроксимационные, а зачастую и интерполяционные свойства не требуют специального изучения, поскольку они вытекают из аппроксимационных соотношений. Получаемые сплайны имеют минимальный компактный носитель и обладают максимальной гладкостью.

В предлагаемой работе кубические сплайны для $n = 3$ строятся по *порождающей* вектор-функции $\varphi \in \mathbb{R}^{n+1}$ при помощи *определяющей* вектор-функции $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$, которая является n-местным векторным произведением векторов, каждый из которых является, в свою очередь, также n-местным векторным произведением.

На интервале $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку $X = \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Пусть $\varphi(t)$ – четырехкомпонентная вектор-функция (столбец) с компонентами из пространства $C^2(\alpha, \beta)$; вводя обозначения $\varphi_j = \varphi(x_j)$, $\varphi'_j = \varphi'(x_j)$, $\varphi''_j = \varphi''(x_j)$, определим векторы $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^4$ формулой

$$\mathbf{a}_j = -(\varphi_{j+1} \times \varphi'_{j+1} \times \varphi''_{j+1}) \times (\varphi_{j+2} \times \varphi'_{j+2} \times \varphi''_{j+2}) \times (\varphi_{j+3} \times \varphi'_{j+3} \times \varphi''_{j+3}).$$

В результате получаем дважды непрерывно дифференцируемые сплайны третьего порядка на неравномерной сетке, носитель которых равен $[x_j, x_{j+4}]$.

Литература.

1. Демьянович Ю. К. *Всплесковые разложения в пространствах сплайнов на неравномерной сетке*, Докл. РАН. 2002. Т. 382, № 3. С. 313–316.

2. Демьянович Ю. К. *Гладкость пространств сплайнов и всплесковые разложения*, Докл. РАН. 2005. Т. 401, № 4. С. 1–4.

3. Макаров А. А. *О вэйвлетном разложении пространств сплайнов первого порядка*, Проблемы матем. анализа. Вып. 38. 2008. С. 47–60.

4. Макаров А. А. *Один вариант сплайн-вэйвлетного разложения пространств B-сплайнов*, Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2009. Вып. 2. С. 59–71.

5. Демьянович Ю. К., Макаров А. А. *Калибровочные соотношения для неполиномиальных сплайнов*, Проблемы матем. анализа. Вып. 34. 2006. С. 39–54.

Обобщение неравенств С.М.Никольского на кривые в комплексной плоскости

Дж.И. Мамедханов

(Бакинский Гос. Ун-т, Каф. ТФФА., Институт Математики и Механики, НАН Азербайджана)

E-mail: *jamalmamedkhanov@rambler.ru*

Известно, что неравенства связывающие различные нормы пространств одной и той же функции называются неравенствами типа С.М.Никольского. Нами, ранее, подобные неравенства для многочленов на различных кривых Γ в комплексной плоскости расссматривались с помощью характреистики n и $d(z, \frac{1}{n})$, где n есть степень рассматриваемого многочлена, а $d(z, \frac{1}{n})$ есть расстояние от точки $z \in \Gamma$ до линии уровня $\Gamma_{1+\frac{1}{n}}$.

Здесь мы вводим новую, для этих неравенств, характеристику

$$\delta_n(z) = \int\limits_{\Gamma_{1+\frac{1}{n}}} \frac{|dt|}{|t-z|^{\gamma}}, \ z \in \Gamma.$$

При этом, отметим, что величина $\delta_n^{-1}(z)$ эквивалентна с величиной $d(z, \frac{1}{n})$, в случае когда Γ принадлежит достаточно широкому классу регулярных кривых, т.е. классу кривых S_θ (введенных В.В.Салаевым).

Заметим, что привлечение новой характеристики $\delta_n(z)$ позволяет нам рассмот–реть подобные неравенства на произвольных спрямляемых кривых, из которых можно получить эти неравенства с прежними характеристиками (т.е. n и $d(z, \frac{1}{n})$) для кривых из класса S_θ. В частности, справедлива

Теорема. Пусть Γ есть произвольная спрямляемая кривая, тогда при любых $s \in R$, $\alpha \in [0,1]$ и $0 < p \le p‘ \le \infty$ справедливо неравенство

$$\|P_n\|_{L_{p‘}\left(\Gamma_{1+\frac{1}{n}}, \left(\frac{1}{\delta_n}\right)^{s+(\alpha-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{p‘})}\right)} \le C(p,p‘,s)\|P_n\|_{L_p\left(\Gamma, \left(\frac{1}{\delta_n}\right)^{s+\alpha(\frac{1}{p}-\frac{1}{p‘})}\right)},$$

где

$$\|P_n\|_{L_p\left(\Gamma, \left(\frac{1}{\delta_n}\right)^{s+\gamma}\right)} = \left(\int\limits_{\Gamma} \left|\frac{P_n(z)}{[\delta_n(z)]^{s+\gamma}}\right|^p |dz|\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема Харди-Литтлвуда для ортогональных рядов

Д. Дарбаева, Е.Д. Нурсултанов

(Евразийский нац университет им. Л.Н.Гумилева)

E-mail: *er-nurs@yandex.ru*

Ортонормированную систему $\Phi = \{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ функций, определенных на отрезке [0,1], будем называть регулярной, если существует константа B, такая, что

1) для любого отрезка e из $[0,1]$ и $k \in \mathbb{N}$ верно соотношение

$$\left|\int_e \phi_k(x)dx\right| \leqslant B\min(\mu e, 1/k),$$

2) для любого отрезка w (конечная арифметическая прогрессия с шагом 1) из $\mathbb{N}$ и $t \in (0,1]$ выполнено неравенство

$$\left(\sum_{k\in w}\phi_k\right)^*(t) \leqslant B\min(|w|, 1/t),$$

где $\left(\sum_{k\in w}\phi_k(\cdot)\right)^*(t)$ - невозрастающая перестановка функции $\sum_{k\in w}\phi_k(x)$, $|w|$ - количество элементов во множестве w.

Все тригонометрические системы, системы Уолша, Прайса являются регулярными.

Будем говорить, что последовательность комплексных чисел$a = \{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ лежит в классе M, если найдется $c > 0$, что

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}}|\Delta a_k| \leqslant c\frac{1}{2^n}\left|\sum_{k=1}^{2^n}a_k\right|, n\in\mathbb{N}.$$

Отметим, что в классе M лежат все монотонные, квазимонотонные последовательности.

Теорема. *Пусть* $1 < p < \infty, 0 < q \leqslant \infty$, $\Phi = \{\varphi\}_{n=1}^{\infty}$ *- регулярная система,* $f \sim \sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k$, *где* $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in M$ *. Тогда для того, чтобы* $f \in L_{pq}[0,1]$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{\frac{k}{p}}}\left|\sum_{m=1}^{2^k}a_m\right|\right)^q < \infty,$$

причем

$$\|f\|_{L_{pq}} \sim \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{\frac{k}{p}}}\left|\sum_{m=1}^{2^k}a_m\right|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

О некоторых задачах для многочленов, ортогональных в дискретных пространствах Соболева

Б.П. Осиленкер
(МГСУ)
E-mail: *b_ osilenker@mail.ru*

Пусть $\{\hat{B}_n(x)\}(n \in Z_+; x \in [-1,1])$ система ортонормированных многочленов в дискретных пространствах Соболева, определяемых скалярным произведением

$$<\hat{B}_n, \hat{B}_m> = \int_{-1}^{1}\hat{B}_n(x)\hat{B}_m(x)w(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{L_k}M_{k,i}\hat{B}_n^{(i)}(a_k)\hat{B}_m^{(i)}(a_k) = \delta_{n,m}(1)$$

$w(x)$-весовая функция, точки $a_k \in [-1,1](k = 1,2,...,m)$ и числа $M_{k,i} \geq 0(k = 1,2,...,m; i = 0,1,...,L_k)$. В частном случае

$$<f, g> = \int_{-1}^{1}f(x)g(x)w(x)\,dx + \sum_{k=1}^{m}M_kf(a_k)g(a_k)$$

пространства с данным скалярным произведением называется нагруженными пространствами. Многочлены $\hat{B}_n(x)$ играют важную роль в ряде проблем теории функций, функционального анализа, математической физики и вычислительной математики. В механике они применяются при исследовании материальных систем с непрерывной и точечной нагрузкой. Ряд свойст этих многочленов существенно отличаются от соответствующих свойств классических аналогов. Например, они не удовлетворяют трехчленным рекуррентным соотношениям, в некоторых случаях являются собственными функциями линейных дифференциальных операторов бесконечного порядка (а не второго, как в случае классических ортогональных многочленов Якоби), значения многочленов в точках стремятся к нулю и т.д. Для некоторых классов многочленов $\hat{B}_n(x)$ рассматриваются следующие задачи:

1. Нахождение обобщенной формулы следа и асимптотики определителя Форсайта.
2. Исследование операторов обобщенного сдвига по нагруженным ортогональным многочленам.
3. Исследование линейных методов суммирования рядов Фурье-Соболева (методы Чезаро, Пуассона).
4. Экстремальная задача для производных алгебраических многочленов в пространствах Гегенбауэра - Соболева.

О коэффициентах сходящихся по кубам кратных рядов Уолша

М.Г. Плотников
(Вологодская гос. молочнохозяйственная Ак. им. Н.В. Верещагина)
E-mail: *mgplotnikov@mail.ru*

Пусть $m \in \mathbb{N}$, а

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_m=0}^{\infty} c_{n_1,\dots,n_m} \omega_{n_1,\dots,n_m}(t_1,\dots,t_m) \tag{1}$$

— *m-кратный ряд Уолша.* В [1] В. А. Скворцов установил следующий аналог теоремы Кантора-Лебега для рядов (1): если ряд (S) вида (1) сходится **по прямоугольникам** к конечной сумме на некотором "кресте", то коэффициенты $c_{n_1,\dots,n_m}$ этого ряда стремятся к нулю при $\max\{n_1,\dots,n_m\} \to \infty$. В частности, это означает, что коэффициенты ряда (S) ограничены.

Мы изучали поведение коэффициентов сходящихся **по кубам** рядов (1). С одной стороны, существуют стремящиеся к нулю подпоследовательности рядов (1), сходящихся по кубам на множестве полной меры. С другой стороны, в случае сходимости по кубам даже всюду коэффициенты рядов (1) не только не ограничены, но даже могут содержать сколь угодно быстро растущие подпоследовательности [2]. В этом смысле поведение коэффициентов сходящихся по кубам рядов (1) отличается от аналогичного поведения кратных тригонометрических рядов. Напомним [3,4], что коэффициенты сходящегося по кубам на множестве полной меры кратного тригонометрического ряда растут не быстрее любой экспоненты.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 08-01-00669) и государственной программы "Ведущие научные школы" (грант НШ-3252.2010.1).

Литература

[1] В. А. Скворцов, "О коэффициентах сходящихся кратных рядов Хаара и Уолша", *Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1, Матем.*, 6 (1973), 77–79.

[2] M. G. Plotnikov, "Recovery of the coefficients of multiple Haar and Walsh series", *Real Anal. Exchange*, **33**:2 (2008), 291–308.

[3] J. M. Ash, G. V. Welland, "Convergence, uniqueness, and summability of multiple trigonometric series", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **163** (1972), 401–436.

[4] J. M. Ash, G. Wang, "One and two dimensional Cantor-Lebesgue type theorems", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **349**:4 (1997), 1663–1674.

Признак сходимости неортогональных рекурсивных разложений

А.И. Подкопаев
(МГУ им. М.В. Ломоносова, мех.-мат. ф-т)
E-mail: *tony-meshok@yandex.ru*

Рекурсивным разложением элемента f гильбертова пространства H по последовательности линейных непрерывных из H в H операторов $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется формальный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n r_{n-1}(f)$, где последовательность остатков $\{r_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ определяется формулами $r_0(f) = f$, $r_n(f) = r_{n-1}(f) - T_n r_{n-1}(f)$ $(n > 0)$. Назовём последовательность операторов $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ *рекурсивной*, если $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(f) = 0$ в H для всех $f \in H$ (иными словами, если рекурсивное разложение каждого элемента H по ней сходится к нему в H). Введём обозначения: $H_n = (\operatorname{Ker} T_n)^{\perp}$, $A_n = \|\mathrm{Id} - T_n\|_{H_n \to H}$, P_n — ортогональные проекторы на H_n. Развитие идей [1] (где прослежена также история теории орторекурсивных разложений) позволяет получить следующий признак.

Теорема. *Пусть найдётся такое n_0, что $T_n H_n \subseteq H_n$ для всех $n > n_0$ и выполнено одно из условий: 1) $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n < 1$ и $\{P_{n+m}\}_{n=1}^{\infty}$ рекурсивны для всех $m \in \mathbb{N}$; 2) $\forall m \in \mathbb{N}$ $\prod\limits_{n=m}^{\infty} A_n = 0$, $H_n \subseteq H_{n+1}$ и $A_n \leqslant 1$ для всех $n > n_0$, $\overline{\cup_{n>n_0} H_n} = H$. Тогда $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ рекурсивна.*

Применим теорему к системам сжатий и сдвигов. Пусть $H = L^2(\mathbb{R}^d)$, $H_n = \overline{\operatorname{span}\{\varphi_{n,\vec{k}}\}_{\vec{k}\in\mathbb{R}^d}}$ $(\varphi \in H$, $\varphi_{n,\vec{k}}(\vec{x}) := 2^{dn/2}\varphi(2^n\vec{x} - \vec{k}))$ образуют кратномасштабный анализ (то есть $H_1 \subseteq H_2$ и $\overline{\cup_{n>0} H_n} = H$) и существуют такие $A > 0$ и $B < 2$, что для почти всех $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^d$ $A \leqslant \sum\limits_{\vec{k}\in\mathbb{R}^d} |\hat{\varphi}(\vec{\xi} + \vec{k})|^2 \leqslant B$ $(\hat{\varphi}(\vec{\xi}) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i\langle\vec{x},\vec{\xi}\rangle}\varphi(\vec{x})d\vec{x})$. Тогда последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, задаваемая как $T_n f \overset{H}{=} \sum\limits_{\vec{k}\in\mathbb{R}^d} \varphi_{n,\vec{k}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\vec{x})\overline{\varphi_{n,\vec{k}}(\vec{x})}d\vec{x}$, рекурсивна. Если $d > 1$ и целые сдвиги φ не ортогональны, то быстрое точное обращение их матрицы Грама проблематично, поэтому оптимальная по порядку сложность каскадного алгоритма рекурсивного разложения по $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ существенно меньше, чем по $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Работа поддержана РФФИ (проект 08-01-00669) и программой "Ведущие научные школы" (проект НШ-3252.2010.1).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Галатенко В.В.* Об орторекурсивном разложении с ошибками в вычислении коэффициентов // Изв. РАН. Сер. мат. 2005. Т. 69, № 1. С. 3–16.

Примеры расходящихся рядов Фурье для специального класса перестановок системы Уолша-Пэли

И.В. Поляков
(МГУ)
E-mail: *igorp86@mail.ru*

Для тригонометрической системы широко известен классический результат Карлесона о сходимости почти всюду ряда Фурье функции из $L^2[0, 2\pi]$ по тригонометрической системе к этой функции. Не менее известен классический пример Колмогорова, который доказал существовании функции из $L^1[0, 2\pi]$, ряд Фурье по тригонометрической системе которой расходится почти всюду. Усилением теоремы Карлесона является результат Антонова (см. [2]). Он показал, что для всякой функции из класса $L \ln^+ L \ln^+ \ln^+ \ln^+ L([0, 2\pi])$ ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится к ней почти всюду. Это наилучший результат касающийся сходимости для данной системы. Аналогичный результат получен для системы Уолша в нумерации Пэли Сьелином и Сориа в [3]. В то же время многие авторы обобщали пример Колмогорова. Наиболее сильный результат в этом направлении для тригонометрической системы был получен Конягиным в [4]. Для системы Уолша наиболее сильный результат принадлежит Бочкареву, который в [5] доказал, что для всякой $F(u) = uf(u)$, где $f(u)$ - неубывающая непрерывная на $[0, \infty)$ функция, $f(0) = 1$ и $f(u)$ удовлетворяет условию

$$f(u) = o(\sqrt{\log u}), \text{ при } u \to \infty,$$

существует такая функция $g \in F(L)$, ряд Фурье-Уолша-Пэли которой расходится всюду на $[0, 1)$.

Система Уолша обычно рассматривается в нумерациях Пэли, Качмажа и самого Уолша. Наиболее известна первая из них. В данной работе выделяется некоторый класс Шипповских перестановок системы Уолша-Пэли. На этот класс переносится конструкция Бочкарева и для систем из этого класса строится соответствующий пример. Отметим, что выделенный класс содержит в себе систему Уолша в нумерации самого Уолша. Доказана теорема:

Теорема. Пусть $F(u) = uf(u)$, где $f(u)$ - неубывающая непрерывная на $[0, \infty)$ функция, $f(0) = 1$ и $f(u)$ удовлетворяет условию

$$f(u) = o(\sqrt{(\log u)}) \text{ при } u \to \infty.$$

Система $\{\chi_n\}$ получена из системы Уолша с помощью некоторой перстановки класса P. Тогда существует функция $g \in F(L)$, у которой ряд Фурье по данной системе расходится всюду в $[0, 1)$.

Работа поддержана программой "ведущие научные школы", проект НШ-3252.2010.1

Литература.

1. A.N. Kolmogoroff, Une serie de Fourier-Lebesgue divergente partout, C.R. Acad. Sci. Paris, 1926, V. 183, 1327-1329.

2. Antonov N. Y. Convergence of Fourier series, East Journal on Approximations. 1996. V. 2. № 2. P. 187–196.

3. P. Sjolin, F. Soria Remarks on theorem by N. Y. Antonov, Studia Math. 158, 2003.

4. С. В. Конягин, О расходимости всюду тригонометрических рядов Фурье, Матем. сб., 2000, т. 191, № 1, с. 103–126.

5. Бочкарев С. В. , Всюду расходящиеся ряды Фурье по системе Уолша и мультипликативным системам, Успехи Мат. Наук 2004, т. 59 , вып. 1(355), с 103—124.

О приближении алгебраическими многочленами функций, характеризуемых несимметричным оператором общего сдвига

М.К. Потапов
(МГУ)
E-mail: *mkpotapov@mail.ru*

Обозначим через L_p, где $p \in [1; +\infty]$, множество функций f, которые при $p \in [1; +\infty)$ измеримы по Лебегу и суммируемы в p-й степени на отрезке $[-1; 1]$, а при $p = \infty$ - непрерывны на отрезке $[-1; 1]$, причем $\|f\|_p = \left(\int\limits_{-1}^{1} \mid f(x) \mid^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ при $p \in [1; +\infty)$, $\|f\|_p = \max\limits_{-1 \le x \le 1} \mid f(x) \mid$ при $p = \infty$.

Через $L_{p,\alpha,\beta}$ обозначим множество функций $f(x)$, таких что $f(x)(1-x)^\alpha (1+x)^\beta \in L_p$, причем $\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \|f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\|_p$.

Через $E_n(f)_{p,\alpha,\beta}$ обозначим наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ при помощи алгебраических многочленов $P_{n-1}(x)$ степени не выше, чем $n-1$, в метрике $L_{p,\alpha,\beta}$, т.е. $E_n(f)_{p,\alpha,\beta} = \inf\limits_{P_{n-1}} \|f - P_{n-1}\|_{p,\alpha,\beta}$.

Для каждой данной пары целых неотрицательных чисел s и r введем оператор обобщенного сдвига

$$T_y\left(f, x\right) = \frac{2^{s+r}}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} f(R) \psi(x, y, z) \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

$$\text{где} \quad \psi(x,y,z) = \frac{\cos[s(\phi_1 - \phi) + r(\phi_1 - \mu)](1-R)^r(1-R^2)^{\frac{s}{2}}}{(1+y)^{s+r}(1-x)^r(1-x^2)^{\frac{s}{2}}},$$

$$R = xy + z\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}, \quad \cos\phi_1 = z, \quad \sin\phi_1 = \sqrt{1-z^2},$$

$$\cos\phi = \frac{-x\sqrt{1-y^2} + yz\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-R^2}}, \quad \sin\phi = \frac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-R^2}},$$

$$\cos\mu = \frac{z(1-xy) - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}{1-R}, \quad \sin\mu = \frac{\sqrt{1-z^2}(y-x)}{1-R}.$$

При помощи этого оператора обобщенного сдвига для функции $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ определим обобщенную разность и обобщенный модуль гладкости:

$$\Delta_t^1(f) = T_{\cos t}(f, x) - f(x), \quad \Delta_{t_1,\ldots,t_k}^k(f) = \Delta_{t_k}^1\left(\Delta_{t_1,\ldots,t_{k-1}}^{k-1}(f)\right), \quad k \ge 2,$$

$$\widetilde{\omega}_k(f, \delta)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{|t_i| < \delta, \quad i=1,\ldots,k} \|\Delta_{t_1,\ldots,t_k}^k(f)\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Теорема. Пусть даны числа k, p, s, r, α и β такие, что $k \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N} \cup 0$, $r \in \mathbb{N} \cup 0$, $p \in [1; +\infty]$, $-\frac{1}{2} + \frac{s}{2} < \beta \le \frac{s}{2}$ при $p = 1$, $-\frac{1}{2p} + \frac{s}{2} < \beta < \frac{s}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$ при $p \in (1; +\infty)$, $\frac{s}{2} \le \beta < \frac{s}{2} + \frac{1}{2}$ при $p = \infty$, $\alpha = \beta + s$. Тогда если $f \in L_{p,\alpha,\beta}$, то справедливы неравенства

$$M_1 E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \le \widetilde{\omega}_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p,\alpha,\beta} \le \frac{M_2}{n^{2k}} \sum_{d=1}^{n} d^{2k-1} E_d(f)_{p,\alpha,\beta},$$

где положительные M_1 и M_2 не зависят от f и $n \in \mathbb{N}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00302) и программы поддержки Ведущих научных школ (НШ-32-52-2010.1)

Теоремы вложения классов Никольского

М.К. Потапов, Б.В. Симонов, С. Ю. Тихонов
(МГУ; Волгоградский гос. технический ун-т, каф. прикладной математики)
E-mail: *mkpotapov@mail.ru, htf212@vstu.ru*

В 1963 году С.М. Никольский ввел в рассмотрение классы функций с доминирующим смешанным модулем гладкости. В данной заметке приводятся теоремы вложения этих классов.

Пусть $L_p = L_p(\mathbb{T}^2)$ $(1 < p < \infty)$ — пространство измеримых функций двух переменных $f(x,y)$, 2π-периодических по каждой переменной, таких, что

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{T}^2)} = \left(\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x,y)|^p\,dx\,dy\right)^{1/p} < \infty, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y)\,dy = 0.$$

Пусть

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}(f;\delta_1,\delta_2)_p = \sup_{\substack{|h_1|\le\delta_1\\|h_2|\le\delta_2}} \Big\| \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} (-1)^{k_1+k_2}\binom{\alpha_1}{k_1}\binom{\alpha_2}{k_2} f(x+(\alpha_1-k_1)h_1, y+(\alpha_2-k_2)h_2)\Big\|_p$$

— смешанный модуль гладкости функции $f(x,y) \in L_p(\mathbb{T}^2)$ порядков $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$ по переменным x и y, соответственно.

Обозначим через $\mathcal{SH}_p^{\alpha_1,\alpha_2}$ класс Никольского, т.е. множество функций $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$ таких, что

$$\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\Big(f;\delta_1,\delta_2\Big)_p \le C\,\Omega(\delta_1,\delta_2),$$

где $1 < p < \infty$, $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ и $\Omega \in \mathcal{M}_{\alpha_1,\alpha_2}$, то есть, Ω — функция типа смешанного модуля гладкости порядков α_1 и α_2.

Справедливы следующие две теоремы. Теорема 1. Пусть $1 < p < q < \infty$, $\theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $\alpha_1 > \theta, \alpha_2 > \theta$. Пусть $\Omega \in \mathcal{M}_{\alpha_1,\alpha_2}$, $\Lambda \in \mathcal{M}_{\alpha_1-\theta,\alpha_2-\theta}$. Тогда для вложения

$$\mathcal{SH}_p^{\alpha_1,\alpha_2}(\Omega) \subset \mathcal{SH}_q^{\alpha_1-\theta,\alpha_2-\theta}(\Lambda) \tag{1}$$

достаточно, чтобы

$$\left(\int_0^{\delta_1}\int_0^{\delta_2}\Big[\big(t_1t_2\big)^{-\theta}\Omega(t_1,t_2)\Big]^q \frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{q}} \le C\Lambda(\delta_1,\delta_2).$$

Теорема 2. Пусть $1 < p < q < \infty$, $\theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $\alpha_1 > \theta, \alpha_2 > \theta$. Пусть ω_1, ω_2, λ_1 и λ_2 — функции типа модуля гладкости порядков α_1, α_2, $\alpha_1 - \theta$ и $\alpha_2 - \theta$, соответственно. Пусть также

$$\Omega(\delta_1,\delta_2) = \omega_1(\delta_1)\omega_2(\delta_2), \quad \Lambda(\delta_1,\delta_2) = \lambda_1(\delta_1)\lambda_2(\delta_2).$$

Тогда для вложения (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\left(\int_0^{\delta_j}\Big[t_j^{-\theta}\omega(t_j)\Big]^q \frac{dt_j}{t_j}\right)^{\frac{1}{q}} \le C\lambda(\delta_j), \qquad j = 1,2.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект N 09-01-00175) и Программы Поддержки Ведущих Научных Школ (проект НШ 32-52.2010.1).

Скорость сходимости средних Стеклова на пространствах однородного типа в терминах размерности Хаусдорфа

В.Г. Кротов, М.А. Прохорович
(Белорусский гос. ун-т; Белорусский Гос. ун-т)
E-mail: *vkrotov@cosmostv.by, prohorovich@mail.ru*

Пусть (X,d,μ) — метрическое пространство с регулярной борелевской мерой μ, удовлетворяющей условию удвоения порядка $\gamma > 0$: для любой точки $x \in X$ и любых $0 < r \le R$ выполнено $\mu\big(B(x,R)\big) \le cR^{\gamma}r^{-\gamma}\mu\big(B(x,r)\big)$. Здесь и далее $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$.

Рассмотрим максимальные функции

$$\mathcal{S}_\alpha f(x) = \sup_{B\ni x} r_B^{-\alpha}\int_B |f(y) - f_B|d\mu(y), \quad f_B = \int_B f\,d\mu = \frac{1}{\mu(B)}\int_B f\,d\mu$$

где точная верхняя грань берется по всем шарам B, $r_B \in (0,1)$, содержащим точку $x \in X$.

С помощью этих максимальных функций определим классы

$$C^p_\alpha(X) = \left\{ f \in L^p : \|f\|_{C^p_\alpha} = \|f\|_{L^p} + \|\mathcal{S}_\alpha f\|_{L^p} < \infty \right\},\ \alpha > 0,\ 1 < p < \infty.$$

Для $\mathbb{R}^n$ эти классы были введены в [1], а в общем случае в [2]. Класс $C^p_1(X)$ совпадает с классом Хайлаша–Соболева [3] (см. также [2,4]), а при $X = \mathbb{R}^n$ — с классическим пространством Соболева $W^p_1(\mathbb{R}^n)$ [1,3].

Для множества $E \subset X$ определим хаусдорфову вместимость

$$H^s_\infty(E) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} r_i^s : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{r_i}(x_i) \right\}.$$

Теорема. *Пусть $1 < p < \infty$, $\alpha > 0$ и $f \in C^p_\alpha(X)$. Тогда для любого $\beta \in (0,\alpha)$ соотношение*

$$\lim_{r\to+0} r^{-\beta}\left[f(x) - \int_{B(x,r)} f\,d\mu \right] = 0$$

выполнено всюду, кроме множества E с $H^{\gamma-(\alpha-\beta)p}_\infty(E) = 0$.

Литература.

1. A.P.Calderón Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions // Studia Math. 1972. Vol. 44. P. 561–582.

2. D.Yang New characterization of Hajłasz-Sobolev spaces on metric spaces // Science in China. 2003. Vol. 46, №5. P. 675–689.

3. P.Hajłasz Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces // Poten. Anal. 1996. Vol. 5, №4. P. 403–415.

4. И.А.Иванишко Обобщенные классы Соболева на метрических пространствах с мерой // Мат. заметки. 2005. Т. 77, №6. С. 937–940.

Об одной теореме вложения

Б.В. Симонов

(Волгоградский гос. технический ун-т, каф. прикладной математики)

E-mail: *htf212@vstu.ru*

В данной работе продолжается исследование, началом которому послужила следующая теорема (Харди и Литтлвуд [1], С.М. Никольский [2, гл. 6]).

Пусть $1 \le p < q < \infty$ и $\theta = N(1/p - 1/q) < 1$. Тогда при $\theta < s \le 1$ имеет место вложение $Lip_N(s;p) \subset Lip_N(s-\theta;q)$, где $Lip_N(s;p) = \{f \in L_p([0,1]^N) : \omega_p(f;\delta)_p = \sup\limits_{|h_1|\le\delta,\dots,|h_N|\le\delta} \big(\int\limits_0^1 |f(x_1+h_1,...,x_N+h_N) - f(x_1,...,x_N)|^p dx_1...dx_N\big)^{\frac{1}{p}} = O(\delta^s)\}$.

В.П. Ильиным [3, с. 304] было доказано, что в случае $s = 1, 1 < p < \infty$ имеет место более сильное утверждение. Именно в этом случае

$$Lip_N(1;p) \subset B^{1-\theta}_{qp}(I^N), \qquad 1 < p < q < \infty, \tag{1}$$

где $B^{1-\theta}_{qp}$– пространство Бесова, $B^{1-\theta}_{qp}([0,1]^N) = \{f \in L_q([0,1]^N) : \int\limits_0^1 \big(t^{\theta-1}\omega_q(f;t)\big)^p \frac{dt}{t}\}$.

В настоящей работе результат В.П. Ильина обобщается на простанства Лоренца.

Функция $\varphi(t)$ называется φ– функцией, если $\varphi(t)$– непрерывна, не убывает, вогнута на $[0,1], \varphi(0) = 0$ и имеет в каждой точке интервала $(0,1)$ производную $\varphi'(t)$.

Пусть $\varphi(t) - \varphi$– функция, $0 < \alpha < \infty$; $\Lambda(\varphi,\alpha)$ (пространство Лоренца)- множество измеримых функций $f(x_1,...,x_N)$, заданных на $\mathbb{R}^N$, периодических с периодом 1 по каждой переменной, для которых конечна квазинорма $||f||_{\Lambda(\varphi,\alpha)} = \big(\int\limits_0^{2\pi} \big(\varphi(t)f^{**}(t)\big)^\alpha \frac{dt}{t}\big)^{\frac{1}{\alpha}}$, где $f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f^*(u)du (t > 0), f^*(u) (0 \le u \le 1)$– невозрастающая перестановка функции, равноизмеримая с $|f(x_1,...,x_N)|$, рассмотренной на $I^N = [0,1]^N$; $\omega_{\Lambda(\varphi,\alpha)}(f,\delta) = \sup\limits_{|h_1|\le\delta,\dots,|h_N|\le\delta} ||f(x_1+h_1,...,x_N+h_N) - f(x_1,...,x_N)||_{\Lambda(\varphi,\alpha)}$– модуль непрерывности функции $f \in \Lambda(\varphi,\alpha)$; $Lip_N(s;\Lambda(\varphi,\alpha)) = \{f \in \Lambda(\varphi,\alpha) : \omega_{\Lambda(\varphi,\alpha)}(f,\delta) = O(\delta^s)\}, 0 < s \le 1;$ $B(\Lambda(\varphi,\alpha);\Phi(t),\beta) = \{f \in \Lambda(\varphi,\alpha) : \int\limits_0^1 \big(\Phi(t)\omega_{\Lambda(\varphi,\alpha)}(f,t)\big)^\beta \frac{dt}{t} < \infty-\}$ класс Бесова.

Утверждение . Пусть $0<\alpha,\beta<\infty$, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$– две φ– функции, такие, что $\alpha_\psi=\underline{\lim}_{t\to 0}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}>1$, $\alpha_\varphi>\beta_\psi=\overline{\lim}_{t\to 0}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}$ и при всех $\delta\in(0,1]$
$\int\limits_\delta^1\big(\frac{\varphi(t^N)}{\psi(t^N)}\big)^\beta\frac{dt}{t}\le C_1(\varphi,\psi,\beta,N)\big(\frac{\varphi(\delta^N)}{\psi(\delta^N)}\big)^\beta$ $\int\limits_0^\delta\big(\frac{\psi(t^N)t}{\varphi(t^N)}\big)^\alpha\frac{dt}{t}\le C_2(\varphi,\psi,\alpha,N)\big(\frac{\psi(\delta^N)\delta}{\varphi(\delta^N)}\big)^\alpha$. Тогда

$$Lip_N(1;\Lambda(\varphi,\beta))\subset B(\Lambda(\psi,\alpha);\frac{\varphi(t^N)}{\psi(t^N)t};\beta). \tag{2}$$

Замечание. Если $\varphi(t)=t^{\frac{1}{p}},\beta=p,\psi(t)=t^{\frac{1}{q}},\alpha=q,1<p<q<\infty$, то выполнены все условия, наложенные на функции φ и ψ в утверждении.Тогда справедливо вложение (2), а значит и (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00175) и гранта поддержки ведущих научных школ НШ-3252.2010.1

Литература

[1] Hardy G.H., Littlewood J.E. A convergence criterion for Fourier series // Math. Z. 1928. Bd. 28, N 4. S. 612 - 634.

[2] Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

[3] Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.

Наилучшие m-членные тригонометрические приближения

С.А. Стасюк
(Институт математики НАН Украины)
E-mail: *stasyuk@imath.kiev.ua*

Пусть L_q, $1\le q\le\infty$, — пространство Лебега 2π-периодических по каждой переменной функций $f(\mathbf{x})=f(x_1,\dots,x_d)$ со стандартной нормой $||\cdot||_q$. $B^{\mathbf{R}}_{p,\theta}$, $\mathbf{R}=(R_1,\dots,R_d)>\mathbf{0}$, $1\le p,\theta\le\infty$, — анизотропные классы Никольского–Бесова (определение см., напр., в [1]) периодических функций многих переменных, $g(\mathbf{R})=(\sum_{n=1}^d 1/R_n)^{-1}$.

Наилучшим m-членным тригонометрическим приближением классов $B^{\mathbf{R}}_{p,\theta}$ в метрике L_q называется величина

$$\sigma_m(B^{\mathbf{R}}_{p,\theta})_q=\sup_{f\in B^{\mathbf{R}}_{p,\theta}}\inf_{\Theta_m}\inf_{P(\Theta_m;\cdot)}||f(\cdot)-P(\Theta_m;\cdot)||_q,$$

где $P(\Theta_m;\mathbf{x})=\sum\limits_{j=1}^m c_{\mathbf{k}^j}e^{i(\mathbf{k}^j,\mathbf{x})}$, $\Theta_m=\{\mathbf{k}^j\}_{j=1}^m$ — система векторов $\mathbf{k}^j=(k_1^j,\dots,k_d^j)$ с целочисельными координатами, $c_{\mathbf{k}^j}$ — произвольные числа.

Сформулируем один из полученных результатов.

Теорема. *Пусть* $1\le p\le 2<q<\infty$, $1\le\theta\le\infty$, *тогда*

$$\sigma_m(B^{\mathbf{R}}_{p,\theta})_q\asymp\begin{cases} m^{-g(\mathbf{R})+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & \textit{если } g(\mathbf{R})>\frac{1}{p},\\ m^{-\frac{1}{2}}(\ln m)^{1-\frac{1}{\theta}}, & \textit{если } g(\mathbf{R})=\frac{1}{p},\\ m^{-\frac{q}{2}(g(\mathbf{R})-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}, & \textit{если } \frac{1}{p}-\frac{1}{q}<g(\mathbf{R})<\frac{1}{p}.\end{cases}$$

При $d=1$ теорема доказана в [2].

Литература

1. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

2. Белинский Э.С. Приближение "плавающей" системой экспонент на классах гладких периодических функций // Матем. сб. — 1987. — **132**, № 1. — С. 20–27.

Необходимое условие включения методов Вороного

С.А. Степанянц
(МГУ им. М.В. Ломоносова)
E-mail: *gorvvin@bk.ru*

В данной работе будет рассматриваться суммирование методов Вороного (или Нёрлунда) числовых рядов $\sum a_n$ с действительными или комплексными членами.

Определение и свойства методов Вороного (W, P_n) можно найти в [1, гл.4]. Приведём это определение в форме, удобной для дальнейшего использования.

Пусть $\{P_n\}_{n=0}^{+\infty}$ – неубывающая последовательных действительных чисел с $P_0 > 0$. Говорят, что $\sum a_n = A\ (W, P_n)$, если $\lim\limits_{m\to+\infty} \frac{1}{P_m}\sum\limits_{\nu=0}^{m} P_{m-\nu}a_\nu = A$.

Вместе с $\{P_n\}$ будем рассматривать производящую функцию $P(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P_n x^n$. Если $P(x)$ является рациональной функцией в некотором круге с центром в нуле, то говорят, что $P \in \mathcal{P}$. Известно, что многие классические методы суммирования могут быть представлены как методы Вороного для некоторой $\{P_n\}$. В частности, методы Чезаро (C, k) и дискретных средних Рисса (Rd, k) (определения см.[1, гл.5]) являются методами Вороного с производящими функциями из $\mathcal{P}$.

Будем говорить, что метод суммирования R включается в метод T $(R \subset T)$, если из того, что $\sum a_n = A\ (R)$ следует, что $\sum a_n = A\ (T)$.

Теорема. *Пусть (W, P_n) и (W, Q_n) – два регулярных метода Вороного с производящими функциями $P(x)$ и $Q(x)$ соответственно. Пусть $P \in \mathcal{P}$, $Q \in \mathcal{P}$ и существует число γ, т.ч. $|\gamma| < 1$; $P(\gamma) = 0$; $Q(\gamma) \neq 0$.*
Тогда $(W, P_n) \not\subset (W, Q_n)$.

Следствие. Рассматривая нули производящих функций методов (Rd, k) можно сделать вывод об отсутствии шкалы для этих методов, то есть $(Rd, k) \not\subset (Rd, k+1)$ для натуральных $k > 2$.

Замечание. Условие теоремы нельзя усилить в том смысле, что если $|\gamma| \leq 1$, то утверждение теряет силу. Например: $(Rd, 2) \subset (C, 3)$, но производящая функция для метода $(Rd, 2)$ имеет ноль в точке $\gamma = -1$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант N 09-01-00175.

Литература

1. Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951.

Аффинные фреймы

П.А. Терехин
(Саратовский гос. ун-т им. Н.Г.Чернышевского, мех-мат ф-т, каф. Мат. анализа)
E-mail: *terekhinpa@info.sgu.ru*

Аффинной системой, порожденной функцией $\psi(t)$, $t \in R^d$, называется семейство функций

$$\psi_{j,k}(t) = |\det a_j|^{1/2}\psi(a_j t - bk), \qquad j \in N, \quad k \in Z^d.$$

Скажем, что семейство $\{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ненулевых элементов банахова пространства F образует *фрейм* в F относительно X, если существуют постоянные $0 < A \leq B < \infty$ такие, что для любого непрерывного линейного функционала $g \in F^*$ его коэффициенты Фурье $\langle\psi_\lambda, g\rangle$, $\lambda \in \Lambda$, удовлетворяют неравенствам

$$A\|g\|_{F^*} \leq \|\{\langle\psi_\lambda, g\rangle\}\|_{X^*} \leq B\|g\|_{F^*}.$$

Получены условия на порождающую функцию ψ, при выполнении которых аффинная система функций $\{\psi_{j,k}\}_{j\in N, k\in Z^d}$ образует фрейм в пространствах $L^p(R^d)$ относительно подходящего пространства числовых семейств X.

Работа выполнена при поддержке грантов Президента РФ для ведущих научных школ и молодых российских ученых, проекты НШ-4383.2010.1 и МК-346.2009.1, а также Российского фонда фундаментальных исследований, проект 10-01-00097.

Литература

[1] П. А. Терехин, “Банаховы фреймы в задаче аффинного синтеза”, *Матем. сборник,* **200**:9 (2009).

[2] П. А. Терехин, “Линейные алгоритмы аффинного синтеза в пространстве Лебега $L^1[0, 1]$”, *Изв. РАН. Сер. матем.,* **74**:5 (2010).

[3] П. А. Терехин, “Фреймы в банаховом пространстве”, *Функц. анализ и его прил.,* (принято к печати).

Об асимптотических формулах для значений некоторых линейных дифференциальных операторов второго порядка

А.Ю. Трынин
(Саратовский государственный университет)
E-mail: *tayu@rambler.ru*

Пусть $\rho_\lambda \geq 0$, и при каждом неотрицательном λ функция $q_\lambda(x)$ есть произвольный элемент из шара $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ радиуса ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле. Для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ при $\lambda \to +\infty$ обозначим $y(x,\lambda)$ решения задачи Коши

$$y'' + (\lambda - q_\lambda(x))y = 0, \quad y(0,\lambda) = 1, \quad y'(0,\lambda) = 0. \tag{1}$$

Получны точные по порядку асимптотические формулы решений задачи Коши (1). Здесь, для примера, приведены начальные условия только типа синуса. При этом, по сравнению с хорошо известными результатами классической спектральной теории дифференциальных операторов, обеспечивающими такой же порядок приближения, правда в случае фиксированной, независящей от λ функции q_λ удалось снять требование непрерывности потенциала q_λ. Эти исследования дополняют результаты работ [1,2].

Теорема 1. Пусть

$$\rho_\lambda \geq 0 \quad \rho_\lambda = o(\sqrt{\lambda}), \ \textit{при } \lambda \to \infty.$$

Тогда существует такое $\lambda_1 > 4\pi^2\rho_\lambda^2$, что для всех $\lambda \geq \lambda_1$, любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ и произвольного $x \in [0,\pi]$ решение задачи Коши (1) удовлетворяет следующим неравенствам

$$|y(x,\lambda) - \cos\sqrt{\lambda}x - \beta(x,\lambda)\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}| \leq \frac{\rho_\lambda\Big(1+\pi\rho_\lambda\Big)}{2\lambda},$$

где

$$\beta(x,\lambda) = \frac{1}{2}\int_0^x q_\lambda(\tau)\,d\tau.$$

Теорема 3. Пусть счётное множество $X = \{x_l\}_{l=1}^\infty$ содержится в отрезке $[0,\pi]$, последовательности действительных чисел $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяют условиям $\lambda_n \nearrow \infty$, $\quad A_n \searrow 0$ при $n \to \infty$. Кроме того, существует число $\alpha : -\frac{1}{2} < \alpha < 0$, такое, что для всех натуральных n будет выполняться неравенство $A_n \geq \lambda_n^\alpha$. Тогда для любого $x \in X$ имеет место неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{8\sqrt{\lambda_n}}{A_n}\Big|y(x,\lambda_n) - \cos\sqrt{\lambda_n}x - \beta(x,\lambda_n)\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}x}{\sqrt{\lambda_n}}\Big| \geq x.$$

Работа выполнена при поддержке гранта президента РФ (проект НШ-4383.2010.1).

Литература.

1. Винокуров В.А., Садовничий В.А. *Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма-Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом.* ДАН, Том **64**, № 4, 2000, с. 47-108.

2. Трынин А.Ю. *Обобщение теоремы отсчетов Уиттекера–Котельникова–Шеннона для непрерывных функций на отрезке*, Матем. сб., 200:11 (2009), 61–108.

О характеристике чебышевских конусов конечной размерности и конечной коразмерности

В.М. Федоров
(МГУ, мех-мат)
E-mail: *vferdorov@rambler.ru*

Пусть E — банахово пространство над полем $\mathbb{F}$ действительных чисел или комплексных чисел и E^* его сопряженное пространство. Будем говорить, что множество $M \subset E$ обладает свойством *существования*, если для любого $x \in E$ существует $y \in M$ такой, что выполняется равенство $\rho(x, M) = \|x - y\|$. Множество M обладает свойством *единственности*, если для любого $x \in E$ имеется не более одного такого элемента $y \in M$. Множество M, обладающие свойством существования и единственности, называются *чебышевским*. Выпуклое коническое множество $K \subset E$ называется *клином*. Замкнутый клин будем называть *конусом*.

Пусть $p \in K$. Далее обозначаем через $\nabla_p K \doteqdot \mathrm{cone}(K - p)$ — коническую оболочку множества $K - p$, называемую опорным клином в точке p; через $\Pi_p K \doteqdot \nabla_p K \cap (-\nabla_p K)$ — наибольшее линейное подпространство, содержащееся в опорном клине $\nabla_p K$, называемое опорной плоскостью в точке p; через $\nabla_p^\circ K \doteqdot \{\alpha \in K^\circ \mid \Re\alpha(p) = 0\}$ — полярный* конус опорного клина $\nabla_p K$ в точке p, где $K^\circ \doteqdot \{\alpha \in E^\circ \mid \Re\alpha(x) \leqslant 0,\, x \in K\}$.

Рассмотрим конус $K \subset C(X)$ в банаховом пространстве непрерывных функций $f : X \to \mathbb{F}$ на компактном хаусдорвовом топологическом пространстве X с чебышевской нормой.

Определение 1. Будем говорить, что ненулевая функция $g \in \Pi_p K$ имеет *полярные нули* $g(x_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, если найдется такая ненулевая линейная комбинация функционалов Дирака $\alpha = \sum_{i=1}^n c_i \delta_{x_i}$, которая принадлежит полярному* конусу $\alpha \in \nabla_p^\circ K$.

Теорема 1. Конус $K \subset C(X)$ конечной размерности является чебышевским в том и только в том случае, когда для любой точки $p \in K$ каждая ненулевая функция из опорной плоскости $g \in \Pi_p K$ не имеет полярных нулей на компакте X.

Пусть функционал $\alpha \in C^*(X)$ и $d\nu = \phi\, d\mu$ — соответствующая представляющая мера функционала α на компакте X, где $|\phi(x)| \leqslant 1$ при всех $x \in X$. Носителем меры $\mathrm{supp}(\mu)$ называется наименьшее замкнутое подмножество X, вне которого мера равна нулю. Носители функционала α и меры μ совпадают $\mathrm{supp}(\alpha) = \mathrm{supp}(\mu)$. Далее через $\mathrm{zero}(f)$ обозначаем множество нулей непрерывной функции f, т. е. $\mathrm{zero}(f) \doteqdot \{x \in X \mid f(x) = 0\}$.

При этих обозначениях можно сказать, что ненулевая функция $g \in \Pi_p K$ имеет *полярные нули* на компакте X в том и только в том случае, когда существует ненулевой функционал $\alpha \in \nabla_p^\circ K$, для которого $\mathrm{supp}(\alpha) \subset \mathrm{zero}(g)$. Это определение, очевидно, согласуется с указанным выше. Для конусов K бесконечной размерности имеет место

Теорема 2. Конус $K \subset C(X)$ не обладает свойством единственности тогда и только тогда, когда существуют точка $p \in K$, ненулевой опорный функционал $\alpha \in \nabla_p^\circ K$ и ненулевая функция $g \in \Pi_p K$, для которых имеет место включение $\mathrm{supp}(\alpha) \subset \mathrm{zero}(g)$.

Из этих теорем легко можно вывести теоремы Хаара и Колмогорова о единственности наилучшего приближения конечномерным подпространством. В случае, когда конус является бесконечномерным подпространством в $C(X)$, теорему 2 в несколько другой формулировке доказал Зингер, а затем обобщил Фелпс. Из теорем 1 и 2 вытекают следующее два следствия в действительном случае, где $m_p \doteqdot \dim \Pi_p K$.

Следствие 1. Для того чтобы конус $K \subset C(X)$ конечной размерности $\dim K < \infty$ был чебышевским необходимо, чтобы при всех $p \in K$ каждый ненулевой опорный функционал $\alpha \in \nabla_p^\circ K$ имел носитель $\mathrm{supp}(\alpha)$, состоящий не менее, чем из $m_p + 1$ точки.

Следствие 2. Для того чтобы конус $K \subset C(X)$ конечной размерности $\dim K < \infty$ был чебышевским достаточно, чтобы при всех $p \in K$ каждая ненулевая функция $f \in \Pi_p K$ имела систему нулей $\mathrm{zero}(f)$, состоящую не более, чем из $m_p - 1$ точки.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №090100175)

Приближение классов Соболева с переменным показателем алгебро-тригонометрическими полиномами

И.И. Шарапудинов

(Дагестанский научный центр РАН)

E-mail: *Sharapud@iwt.ru*

Пусть $f(t)$ достаточно гладкая функция, заданная на $[-1, 1]$. В настоящей статье рассмотрена задача о приближении $f(t)$ комбинациями вида $p_n(t) + \tau_m(t)$ где $p_n(t)$ - алгебраический полином степени n, $\tau_m(t) = a_0 + \sum_{k=1}^m a_k \cos k\pi t + b_k \sin k\pi t$ тригонометрический полином порядка m. Подобные задачи часто встречаются в различных областях приложений, в которых для заданного временного ряда наблюдений $f(t)$ требуется найти так называемый тренд $p_n(t)$ и периодическую составляющую $\tau_m(t)$. Обозначим через X некоторое нормированное с нормой $\|f\|_X$ пространство функций $f = f(t)$, заданных на $[-1, 1]$. Если X содержит все алгебраические и тригонометрические полиномы, то мы можем определить величину $E_{n,m}(f)_X = \inf_{p_n, \tau_m} \|f - p_n - \tau_m\|_X$, представляющую собой наилучшее приближение функции $f \in X$ алгебро - тригонометрическими полиномами $p_n(x) + \tau_m(x)$ порядка $n + m$. Если $\mathcal{Y}$ - некоторый подкласс из X, то положим $\mathcal{E}_{n,m}(\mathcal{Y})_X = \sup_{f \in \mathcal{Y}} E_{n,m}(f)_X$. Ставится задача об исследовании поведения величины $\mathcal{E}_{n,m}(\mathcal{Y})_X$ для различных нормированных пространств X и классов $\mathcal{Y} \subset X$. В настоящей работе основное внимание будет уделено случаю, когда $X = C[-1, 1]$ - пространство функций $f = f(x)$, заданных и непрерывных на $[-1, 1]$. Что же касается подклассов $\mathcal{Y}$, то мы будем рассматривать соболевские классы $W^r_{p(x)}(M)$ с переменным показателем $p(x)$, веденных в работах автора и получивших последние годы интенсивное развитие в работах многих аиторов. Через $L^{p(x)}(-1,1)$ мы обозначим лебегово пространство функций $f=f(x)$ с нормой $\|f\|_{p(x)}=\inf\{\alpha>0:\int_{-1}^{1}|f(x)/\alpha|^{p(x)}dx\le 1\}$. В пространстве $C[-1,1]$ мы будем выделять классы Соболева $W^r_{p(x)}(M)$, состоящее из $r-1$-раз непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна, а $f^{(r)}(x)\in L^p(-1,1)$ и $\|f^{(r)}\|_{p(x)}\le M$. Через $\tilde W^r_{p(x)}(M)$ мы обозначим подкласс функций $f\in W^r_{p(x)}(M)$, которые допускают 2-периодическое продолжение на всю числовую ось с сохранением гладкости, другими словами, если $f\in \tilde W^r_{p(x)}(M)$, то $f^{(\nu)}(-1)=f^{(\nu)}(1)$, $\nu=0,1,\dots,r-1$. Основная идея, которая позволяет успешно решить поставленную задачу для классов $W^r_{p(x)}(M)$ заключается в следующем. Для заданной функции $f\in W^r_{p(x)}(M)$ подбирается алгебраический полином $p_n(x)=p_n(f,x)$, удовлетворяющий условиям $p_n(\pm1)=f(\pm1)\quad(\nu=0,1,\dots,r-1)$, который доставляет для функции $f(x)$ и ее производных $f^{(\nu)}(x)$ одновременное равномерное на $[-1,1]$приближение порядка $n^{\nu-r}$. Затем разность $g_n(x)=f(x)-p_n(x)$ продолжается 2-периодически на всю числовую ось сохранением гладкости так, чтобы $g_n(x)$ попала в класс $\tilde W^r_{p(x)}(c)$. После этого функцию $g_n(x)$ приближаем тригонометрическими полиномами. При решении этой задачи основную роль играют теорема, в которой установлены новые аппроксимативные свойства смешанных рядов по полиномам Лежандра и Якоби, введенных и исследованных в ряде работ автора.

On quantitative geometry of anisotropic Sobolev, Besov and Lizorkin-Triebel spaces, non-commutative and other spaces and applications

S. Ajiev
(University of New South Wales)
E-mail: *ajievss@unsw.edu.au*

Abstract. We describe the core of a quasi-Euclidean approach to the local and non-local geometry of function and other spaces and outline the range of its immediate applications, including the basic local and non-local constants, exponents and moduli.

Anisotropic spaces of Sobolev, Besov and Lizorkin-Triebel types of functions defined on open subsets of an Euclidean space and endowed with various geometrically friendly (equivalent) norms, non-commutative Lebesgue spaces (Schatten-von Neumann classes) and some other abstract and concrete Banach spaces are dealt with in a quantitative manner.

Further applications include variants of fixed-point, Kadets-Lyapunov and Pitt theorems and classical Hölder-Lipschitz mappings.

Attention is paid to some new geometric quantities that are introduced and utilized.

References.

1. S. S. Ajiev, *Characterizations of $B^s_{p,q}(G)$, $L^s_{p,q}(G)$, $W^s_p(G)$ and other function spaces. Applications.* // Tr. Matem. Inst. Steklova 227 (1999) 7–42. Engl. transl. Proc. Steklov Math. Inst. 227 (1999) 1–36.

2. S. S. Ajiev, *On Chebyshev centres, retractions, metric projections and homogeneous inverses for Besov, Lizorkin-Triebel, Sobolev and other Banach spaces.* // East J. Approx. 2009. V. 15. No. 3. P. 375–428.

3. *S. S. Ajiev*, On concentration, deviation and Dvoretzky's theorem for Besov, Lizorkin-Triebel and other spaces. // Compl. Var. Ellipt. Eq. (Special issue dedicated to Gérard Bourdaud.) P. 1–23 (in print).

4. *K. Ball, E. A. Carlen, E. H. Lieb*, Sharp uniform convexity and smoothness inequalities for trace norms. // Invent. Math. V. 115. No. 3. 1994. P. 463–482.

5. O. V. Besov, V. P. Il'in, S. M. Nikol'skiy, *Integral representations of functions and embedding theorems*, Nauka-Fizmatgiz, Moscow, 1996 (1st Ed. Nauka, Moscow, 1975.)

6. V. I. Burenkov, *Sobolev Spaces on Domains*, (Teubner Texts in Mathematics, V. 137), B. G. Teubner Verlagsgesellschaft mbH., Stuttgart, 1998.

7. Yu. N. Chekanov, Yu. E. Nesterov, and A. A. Vladimirov, *On uniformly convex functionals*, // Vestnik Mosk. Univ., Ser. Vych. Mat. Kibern. 3 (1978) 12–23.

8. *T. Domínguez Benavides*, Fixed point theorems for uniformly Lipschitzian mappings and asymptotically regular mappings. // Nonlin. Anal. 1998. V. 32. No. 1. P. 15-27.

9. *S. Janson, J. Peetre*, Paracommutators-boundedness and Schatten-von Neumann properties.// Trans. Amer. Math. Soc. 1988. V. 305. P. 467-504.

10. *V. M. Kadets*, Remark on the Lyapunov theorem on vector measures.// Func. Anal. Appl. 1992. V. 25. No. 4. P. 295–297.

11. *J. Lindenstrauss, L. Tzafriri*, Classical banach spaces. Volume I. (In: "Ergebnisse, v. 92") Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag. 1977. P. 1–188+i–xiii.

12. *V. D. Milman*, Geometric theory of Banach spaces. II. Geometry of the unit ball. // Uspehi. Mat. Nauk. 1969. V. 26. No. 6(162). P. 73–149.

13. *S. A. Pichugov*, The Jung constant of L_p.// Math. Notes. 1988. V. 43. No. 5 P. 604–614.

Sharp inequalities of Nagy-Kolmogorov type in the spaces of Weil

V.A. Kofanov

(Dnepropetrovsk National University)

E-mail: *vladimir.kofanov@gmail.com*

For $r \in \mathbf{N}$ and $p \in (0, \infty]$ we denote by $L^r_{p,\infty}(\mathbf{R})$ the space of all functions $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ for which $x^{(r-1)}$ are locally absolutely continuous, $x \in L_p(\mathbf{R})$ and $x^{(r)} \in L_\infty(\mathbf{R})$.

We prove the following sharp inequality of Nagy-Kolmogorov type

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{W_q} \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_{W_q}}{L(\varphi_r)_p^\alpha} L(x)_p^\alpha \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha}, \quad x \in L^r_{p,\infty}(\mathbf{R}),$$

in the cases 1) $k = 0$, $q \ge p$, 2) $1 \le k \le r-1$, $q \ge 1$, where φ_r is the perfect Euler's spline of order r, $\alpha = (r-k)/(r+1/p)$,

$$\|x\|_{W_q} := \lim_{\Delta\to\infty} \sup_{a\in\mathbf{R}} \left(\frac{1}{\Delta} \int\limits_a^{a+\Delta} |x\,(t)|^q \, dt \right)^{1/q},$$

$$L(x)_p := \sup \left\{ \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \;:\; a, b \in \mathbf{R},\ |x(t)| > 0,\ t \in (a, b) \right\}.$$

Besides, we show that for any ω, γ, $\delta > 0$ there exists a function $x \in L^r_{p,\infty}(\mathbf{R})$ such that

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{W_q} = \omega, \quad L(x)_p = \gamma, \quad \left\|x^{(r)}\right\|_\infty = \delta$$

if and only if

$$\omega \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_{W_q}}{L(\varphi_r)_p^\alpha}\, \gamma^\alpha\, \delta^{1-\alpha}.$$

We established also the following generalization of Calderon and Klein's inequality for the entire functions f of exponential type σ:

$$\left\|f^{(k)}\right\|_{W_q} \le \sigma^k \left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi |\cos t|^q dt \right\}^{1/q} \|f\|_\infty, \quad k \in \mathbf{N}, \quad q \ge 1.$$

COMPACTNESS IN THE SPACES OF MEASURABLE FUNCTIONS IN TERMS OF LOCAL SMOOTHNESS INEQUALITIES

V.G. Krotov

(Belarussian State University)

E-mail: *vkrotov@cosmostv.by*

Let (X, d, μ) be a bounded metric space with a regular Borel measure μ satisfying doubling condition

$$\mu(B(x, 2r)) \le c\mu(B(x, r)), \quad \text{where} \quad B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

Let $L^0(X)$ be the set of all (classes of equivalence) measurable functions on X, then $L^0(X)$ is complete metric space with respect to metric

$$d_{L^0}(f, g) = \int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\, d\mu.$$

Convergence in this space coincide with convergence on measure.

Let Ω be the set of positive increasing functions $\eta : (0, 2\operatorname{diam} X] \to (0, 2\operatorname{diam} X]$ such that $\eta(t)t^{-a} \downarrow$ for some $a > 0$.

For $f \in L^0(X)$ and $\eta \in \Omega$ denote by $D_\eta(f)$ the set of all functions $g \in L^0(X)$ such that

$$|f(x) - f(y)| \le [g(x) + g(y)]\eta(d(x, y)) \quad \text{for almost all} \quad x, y \in X. \tag{1}$$

Note that inequality (1) on $X = [0, 1]^n$ was considered by K.I.Oskolkov [1] ($n = 1$) and V.I.Kolyada [2] ($n \ge 1$).

For any $f \in L^0(X)$ there exists $\eta \in \Omega$ such that $D_\eta(f) \ne \varnothing$ [3].

Theorem 1. *The set $S \subset L^0(X)$ is completely bounded if and only if*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \sup_{f\in S} \mu\{|f| > \lambda\} = 0$$

and for some $\eta \in \Omega$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \sup_{f\in S} \inf_{g\in D_\eta(f)} \mu\{|g| > \lambda\} = 0.$$

Theorem 2. *The set $S \subset L^p(X)$, $p > 0$, is completely bounded if and only if S is bounded and for some $\eta \in \Omega$*

$$\sup_{f\in S} \inf_{g\in D_\eta(f)} \|g\|_{L^p(X)} < \infty \tag{2}$$

If X is unbounded, then for verifying the complete boundedness of S in theorem 2 it is necessary to add to (2) the following condition

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{f\in S} \int_{X\setminus B(x_0,R)} |f|^p \, d\mu = 0,$$

where x_0 is some fixed point in X.

1. Осколков К.И. Аппроксимативные свойства суммируемых функций на множествах полной меры. Матем. сборник. 1977. Т. 103, №4. С. 563–589.

2. Коляда В.И. Оценки максимальных функций, связанных с локальной гладкостью. Доклады АН СССР. 1987. Т. 293, №4. С. 534–537.

3. Кротов В.Г. Количественная форма C-свойства Лузина. Укр. мат. журнал 2010. Т. 62, №3. С. 388-396.

Hörmander spaces on manifolds

A. A. Murach

(Institute of mathematics NAS of Ukraine, Kyiv)

E-mail: *murach@imath.kiev.ua*

The talk is devoted to the Hilbert Hörmander spaces $H^\mu := B_{2,\mu}$ parametrized by a weight function μ. These spaces were introduced over $\mathbf{R}^n$ and Euclidean domains by L. Hörmander. The space $H^\mu(\mathbf{R}^n)$ consists of the distributions $w \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ such that $\mu F w \in L_2(\mathbf{R}^n)$, with Fw being the Fourier transform of w.

We introduce the Hörmander spaces $H^\varphi(\Gamma)$ on a smooth closed compact manifold Γ for a wide class of radial function parameters $\mu(\xi) = \varphi((1 + |\xi|^2)^{1/2})$ with $\varphi \in \mathrm{RO}$. Here RO is the set of all Borel measurable functions $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$ such that $c^{-1} \le \varphi(\lambda t)/\varphi(t) \le c$ for every $t \ge 1$ and $\lambda \in [1, a]$, with the constants $a > 1$ and $c \ge 1$ depending on φ. The class RO was introduced by V. G. Avakumović. We find that the condition $\varphi \in \mathrm{RO}$ is necessary and sufficient for $H^\varphi(\Gamma)$ to admit the equivalent definitions similar to those used for the Sobolev spaces.

Theorem 1. *For every $\varphi \in \mathrm{RO}$ the following definitions of $H^\varphi(\Gamma)$ are equivalent:*

I. *$H^\varphi(\Gamma)$ consists of the distributions on Γ which belong in local coordinates to $H^\mu(\mathbf{R}^n)$ with $\mu(\xi) = \varphi((1 + |\xi|^2)^{1/2})$ and $n = \dim \Gamma$.*

II. *$H^\varphi(\Gamma) = [H^{s_0}(\Gamma), H^{s_1}(\Gamma)]_\psi$ is a result of the interpolation with the function parameter $\psi(t) = t^{-s_0/(s_1-s_0)} \varphi(t^{1/(s_1-s_0)})$ of the Hilbert Sobolev spaces $H^{s_j}(\Gamma)$ with $s_j \in \mathbf{Z}$ and $c_0 t^{s_0} \le \varphi(t) \le c_1 t^{s_1}$.*

III. *$H^\varphi(\Gamma)$ is a completion of $C^\infty(\Gamma)$ with respect to the norm $\|\varphi(A^{1/m})\, u\|_{L_2(\Gamma)}$, where A is an elliptic positive self-adjoint pseudo-differential operator of order $m > 0$.*

Theorem 2. *The class $\{H^\varphi(\Gamma) : \varphi \in \mathrm{RO}\}$ coincides (up to equivalence of norms) with the set of all Hilbert spaces that possess the interpolation property for couples of the Hilbert Sobolev spaces $H^{s_0}(\Gamma)$, $H^{s_1}(\Gamma)$, $-\infty < s_0 < s_1 < \infty$.*

We indicate some applications of the spaces $H^{\varphi}(\Gamma)$ in the spectral theory of elliptic self-adjoint operators: convergence of spectral expansions almost everywhere or in the norm in the space C^j with $j \in \mathbf{Z}_+$.

The results are obtained together with V. A. Mikhailets [1].

References

1. Mikhailets V. A., Murach A. A. On elliptic operators on a closed compact manifold. Dopov. Nats. Acad. Nauk. Ukr., 2009, **3**, 29–35.

On sharp constants in trace embedding theorems

A.I. Nazarov
(СПбГУ)
E-mail: *an@AN4751.spb.edu*

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, be an open cone, and let $G = \Omega \cap \mathbb{S}^{n-1}$ be a strictly Lipschitz domain in the unit sphere. Denote by $\dot{\mathcal{C}}^1(\Omega)$ the set of continuously diferentiable functions with support bounded away from zero and infinity. For $1 \leq p \leq \infty$ denote by $\dot{W}^1_p(\Omega)$ the completion of $\dot{\mathcal{C}}^1(\Omega)$ w.r.t. the norm $\|\nabla v\|_{p,\Omega}$.

Let us consider a scale of the weighted trace spaces $L_{q,\sigma}(\partial\Omega)$ with norm

$$\|v\|_{q,\sigma,\partial\Omega} = \|r^{\sigma-1}v\|_{L_q(\partial\Omega)}$$

(here $r = |x|$).

For $1 < p < \infty$, $p \neq n$ and $\frac{1}{p} \leq \sigma \leq \min\{1, \frac{n}{p}\}$, denote by $p^{**}_\sigma = \frac{(n-1)p}{n-\sigma p}$ the critical exponent in the trace embedding theorem $\dot{W}^1_p(\Omega) \hookrightarrow L_{q,\sigma}(\partial\Omega)$:

$$\lambda(p,\sigma,\Omega) = \inf_{v \in \dot{W}^1_p(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla v\|_{p,\Omega}}{\|v\|_{p^{**}_\sigma,\sigma,\partial\Omega}} > 0. \qquad (I_\sigma)$$

We call (I_σ) *the trace Hardy–Sobolev inequality.*

We discuss the problem of attainability of sharp constant in (I_σ). For $\sigma = \frac{1}{p}$ and for $p < n$, $\sigma = 1$, also the values of sharp constant is calculated.

The author was supported by RFBR grant N08-01-00748.

Bibliography.

1. A.I. Nazarov, *Trace Hardy–Sobolev inequalities in cones,* Algebra & Analysis, **22** (2010), N5 (Russian).

On the converse theorem of approximation in various metrics for non-periodic functions

M. Tomic
(Faculty of Technical Sciences, University of Pristina in Kosovska Mitrovica, Kosovska Mitrovica, Serbia University of East Sarajevo, East Sarajevo, Republic of Srpska)
E-mail: *milostomic@yahoo.com*

The modulus of smoothness in the norm of space L_q of non-periodic functions of several variables is estimated by best approximations by entire functions of exponential type in the metric of space L_p, $1 \leq p \leq q < \infty$. In this way we generalize and improve the converse theorem from [3], 6.4. The notions of the best approximation and of the modulus of smoothness are given in [2] and [3]. Let $g_v = g_{v_1 \ldots v_n}(x_1, \ldots, x_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $(g_v \in L_p)$, be an entire function of exponential type v_i with respect to the variable x_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. The best approximation $E_{v_1 \ldots v_n}(f)_p$ of a function $f \in L_p\,(R^n)$ by entire functions of exponential type is the quantity

$$E_{v_1 \ldots v_n}(f)_p = \inf_{g_v} \|f - g_{v_1 \ldots v_n}\|_p. \qquad (1)$$

The modulus of smoothness of order k of a function f with respect to the variable x_i is the quantity

$$\omega_k(f; \delta_i)_p = \omega_k(f; 0, \ldots, 0, \delta_i, 0, \ldots, 0)_p = \sup_{|h_i| \leq \delta_i} \|\Delta^k_{h_i} f\|_p. \qquad (2)$$

Let $g_v = g_{v_1 \ldots v_n}(x_1, \ldots, x_n)$ be an entire function of exponential type by which the best approximation $E_{v_1 \ldots v_n}(f)_p$ is achieved, i.e. let (1) hold. From these entire functions $g_{v_1 \ldots v_n}(x_1, \ldots, x_n)$, we create entire functions $\xi_\lambda = g_{2^{(\lambda+1)l_1} \ldots 2^{\lambda+1} \ldots 2^{(\lambda+1)l_n}} - g_{2^{\lambda l_1} \ldots 2^{\lambda} \ldots 2^{\lambda l_n}}$, $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ for given natural numbers l_j, $(j =$

$1, 2, \ldots, n)$, where $l_i = 1$ for a chosen number $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. To prove the converse theorem of approximation we use

Theorem 1. Let a function $f \in L_p(R^n)$ and r_j be non-negative integer numbers, and l_j, $(j = 1, \ldots, n)$, be natural numbers, where $l_i = 1$ for some $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. If the following inequality holds for the best approximation of function f

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda^{q\sigma-1} E^q_{\lambda^{l_1}\ldots\lambda\ldots\lambda^{l_n}}(f)_p < \infty, \tag{3}$$

where

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} l_j \left(r_j + \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right), \quad 1 \le p \le q < \infty, \tag{4}$$

then the function f has derivative $f^{(r_1,\ldots,r_n)}$ belonging to the space L_q and in the sense of L_q the equality

$$f^{(r_1,\ldots,r_n)} \overset{(q)}{=} g^{(r_1,\ldots,r_n)}_{1\ldots1} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \xi^{(r_1,\ldots,r_n)}_{\lambda}. \tag{5}$$

holds.

Theorem 2. Let the conditions of theorem 1 1 be satisfied (the condition (3) where σ is given by (3)), and let k and m_i be given natural numbers. Then the inequality

$$\omega_k \left(f^{(r_1,\ldots,r_n)}; 0, \ldots, 0, \frac{1}{m_i}, 0, \ldots, 0 \right)_q \le$$

$$\le C \left\{ \frac{1}{m_i^k} \left[\|f\|_p^q + \sum_{\lambda=1}^{m_i} \lambda^{q(\sigma+k)-1} E^q_{\lambda^{l_1}\ldots\lambda\ldots\lambda^{l_n}}(f)_p \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\sum_{\lambda=m_i+1}^{\infty} \lambda^{q\sigma-1} E^q_{\lambda^{l_1}\ldots\lambda\ldots\lambda^{l_n}}(f)_p \right]^{\frac{1}{q}} \right\} \tag{6}$$

holds, where constant C does not depend on either f nor $m_i = 1, 2, \ldots$

References

1. *Ilyssov N. A.* Obratnaya teorema teorii priblizenij (Russian), Mat. zam. 50 (1991), 57- 65. [The Converse Theorem of Theory of Approximation in Various Metrics].

2. *Nikol'skij S. M.* Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems. (Russian), (Second edition, revised and supplemented), Nauka, Moscow, 1977.

3. *Timan A. F.* Theory of Approximation of Functions of a Real Variable (Russian), Gos.Izdat. FM , Moscow, 1960.

4. *Miloš Tomić* On Converse Theorem of Approximation in Various Metrics for Periodic Functions of Several Variables, Facta Universitatis (Ni?), Ser. Math. Inform. 15 (2000), 49-56.

5. *Miloš Tomić* On Representation of Derivatives of Functions in Lp, Mat. Vesnik (in appear).

2. Функциональный анализ

Задачи с условиями сопряжения на незамкнутой липшицевой поверхности для сильно эллиптических систем 2-го поряда

М.С. Агранович
(Московский институт электроники и математики)
E-mail: *magran@orc.ru*

Пусть S — липшицева поверхность размерности $n-1$, для простоты лежащая на n мерном торе $\mathbb{T} = \mathbb{T}^n$ с 2π-периодическими координатами, имеющая $(n-2)$-мерный липшицев край ∂S, $n \geqslant 2$. Мы рассматриваем сильно эллиптическую систему 2-го порядка $Lu = 0$ на $\mathbb{T} \setminus \overline{S}$ с граничными условиями на S. Это задача Дирихле с данными Дирихле $u^{\pm}$ на двух сторонах поверхности S, разность $u^- - u^+$ которых равна нулю на ∂S; аналогичная задача Неймана; две задачи со спектральным параметром в условиях на S, аналогичные задаче Пуанкаре–Стеклова. Для задач Дирихле и Неймана указываются условия их однозначной разрешимости сначала в простейших L_2-пространствах, затем в близких к ним пространствах H^s_p бесселевых потенциалов и B^s_p Бесова. Спектральные задачи на собственные функции сводятся к спектральным уравнениям с операторами типа потенциала простого слоя и гиперсингулярного оператора на S. Описываются некоторые спектральные свойства этих операторов, включая оценки собственных значений, полноту корневых функций в указанных банаховых пространствах и суммируемость рядов Фурье по ним методом Абеля–Лидского. В теории упругости незамкнутая поверхность — модель трещины, в электродинамике и акустике — модель незамкнутого экрана. Ссылки на литературу будут указаны в докладе.

Глобальная разрешимость задачи Коши для полулинейных гиперболических систем

А.Б. Алиев
(Азербайджанский Технический Ун-т)
E-mail: *aliyevagil@yahoo.com*

В области $R_+ \times R^n$ рассмотрим здачу Коши

$$u_{i_{tt}} + u_{i_t} + (-1)^{l_i} \Delta^{l_i} u = f_i(u_i, u_2),\ t > 0,\ x \in R^n, \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u_i(0, x) = \varphi_i(x), \quad u_{i_t}(0, x) = \psi_i(x), \quad x \in R^n, \quad i = 1, 2 \tag{2}$$

Предположим, что

$$f_i(\cdot) \in C^1\left(R^2\right); \tag{3}$$

$$\left|f_i\left(u_1, u_2\right)\right| \leq C\left|u_1\right|^{\alpha_i}\left|u_2\right|^{\beta_i},\ \alpha_i > 0,\ \beta_i > 0,\ i = 1, 2, \tag{4}$$

где

$$\frac{\alpha_i}{l_1} + \frac{\beta_i}{l_2} > \frac{2}{n} + \frac{1}{\max\left(l_1, l_2\right)}, \quad i = 1, 2. \tag{5}$$

Теорема. *Пусть выполнены условия (3)-(5). Тогда существует такое* $\delta > 0$, *что если*

$$\sum_{i=1}^{2}\left[\|\varphi_i\|_{L_1(R^n)} + \|\varphi_i\|_{W_2^{l_i}(R^n)} + \|\psi_i\|_{L_1(R^n)} + \|\psi_i\|_{L_2(R^n)}\right] < \delta$$

то задача (1),(2) имеет единственное решение (u_1, u_2) *где* $u_i \in C\left([0,\infty); W_2^{l_i}(R^n)\right) \cap C^1([0,\infty); L_2(R^n))$, $i = 1, 2$.

Для $u_i(t,x)$ *имеют место оценки:*

$$\sum_{|\gamma|=r} \|D^\gamma u_i(t,x)\|_{L_2(R^n)} \le C(1+t)^{-\frac{n+2r}{4l_i}}, \quad r = 0, 1, ..., l_i$$

$$\|u_{i_t}(t,x)\| \le C(1+t)^{-\lambda_i},$$

$$\lambda_i = \min\left\{1 + \frac{n}{4l_i}, \frac{n}{2}(\alpha_i + \beta_i) - \frac{n}{2l_2} - \varepsilon\right\}, \quad i = 1, 2.$$

Критерий ограниченности вариации самоподобных функций

Н.В. Гаганов

(МГУ имени М.В.Ломоносова, механико-математмчесий ф-т)

E-mail: *ngaganov@yandex.ru*

Для произвольных наборов чисел $\{c_k\}_{k=1}^n$, $\{d_k\}_{k=1}^n$ и $\{\beta_k\}_{k=1}^n$, $k = 1, 2, \ldots, n$ определим *оператор подобия* в пространстве ограниченных функций $B[0,1]$:

$$\mathcal{S}(f)(t) = \sum_{k=1}^n \left(d_k \cdot f(S_k^{-1}(t)) + \beta_k + c_k \cdot t\right) \cdot \chi_{(\alpha_k, \alpha_{k+1})},$$

где $S_k(x) = a_k x + \alpha_k$, $k = 1, \ldots n$.

Известно (см. [1]), что при условии $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |d_k| < 1$ этот оператор является сжимающим в пространстве $B[0,1]$ и, следовательно, существует неподвижная точка этого отображения: такая функция f, что $\mathcal{S}(f) = f$. Такие функции называют *самоподобными. Представляет интерес ответ на вопрос, когда эта функция имеет ограниченную вариацию.*

Теорема 1. *Самоподобная разрывная функция f имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k=1}^n |d_k| < 1.$$

Теорема 2. *Самоподобная непрерывная функция f, отличная от линейной, имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий:*

1) $\sum_{k=1}^n |d_k| < 1$.

2) $\sum_{k=1}^n |d_k| = 1$ *и все функции* $\theta_k := \dfrac{d_k t + c_k}{a_k}$ *при* $k = 1, \ldots, n$ *имеют общую неподвижную точку.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00423 и 09-01-90408).

Литература

1. Шейпак И.А. О конструкции и некоторых свойствах самоподобных функций в пространствах $L_p[0,1]$ // Мат. заметки. 2007. Т. 81(6). С. 924–938.

Расширение линейных операторов Фредгольма на абстрактные пространства Винера (АПВ)

М.М. Галламов

(МПГУ)

E-mail: *gallamov@gmail.com*

Пусть $\mathbb{L}_1$ и $\mathbb{L}_2$ – банаховы пространства $\mathtt{L}(\mathbb{L}_1; \mathbb{L}_2)$ – пространство непрерывных линейных операторов из $\mathbb{L}_1$ в $\mathbb{L}_2$ с равномерой нормой. Оператор $F_{21} \in \mathtt{L}(\mathbb{L}_1; \mathbb{L}_2)$ называется *почти обратимым*, если существуют такие операторы S_{12}^l и S_{12}^r в $\mathtt{L}(\mathbb{L}_2; \mathbb{L}_1)$, что

$$S_{12}^l F_{21} = \mathbf{1}_1 + K_1, \; F_{21} S_{12}^r = \mathbf{1}_2 + K_2.$$

Здесь $\mathbf{1}_\alpha$ и K_α тождественный и компактный операторы на $\left(\mathbb{L}_\alpha, |\cdot|_\alpha\right)$, $\alpha = 1, 2$.

Теорема 1 (С. М. Никольский).

Каждый фредгольмовый линейный оператор $F_{21} \in \mathtt{L}(\mathbb{L}_1; \mathbb{L}_2)$ почти обратим. Более того, опрераторы S^l_{12} и S^r_{12} можно выбрать так, чтобы опреаторы K_1 и K_2 были операторы конечного ранга.

Доказательство данной теоремы можно найти в [1, Гл. II. §2. п. 3. Теорема (С. М. Никольский). С. 82]

Если $\mathbb{B}$ – произвольное сепарабельное вещественное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Оно допускает задание структуры *АПВ* $(i,\ \mathbb{H},\ \mathbb{B})$ [2, Гл. I. §4. Теорема 4.4]. Здесь $i\colon \mathbb{H} \to \mathbb{B}$ – отображение вложения плотного гильбертова подпространство $\mathbb{H}$ с нормой $|\cdot| = \sqrt{\langle \cdot\,,\,\cdot\rangle}$ пространства $\mathbb{B}$ в $\mathbb{B}$. Образ $i\,(\mathbb{H})$ пространства $\mathbb{H}$ отождествляется с самим $\mathbb{H}$. Норма $\|\cdot\|$ суженная на $\mathbb{H}$ является *измеримой по Гроссу* [2, Гл. I. §4. Определение 4.4]. На $\mathbb{B}$ существует *борелевская (гауссовская) мера p* [2, Гл. I. §4. Теорема 4.1], которая называется *мерой Винера.* Изввестно, что если измеримое подпространство $\mathbb{S}$ пространсва $\mathbb{B}$ содержит $\mathbb{H}$ и $p(\mathbb{S}) > 0$, то $p(\mathbb{S}) = 1$; $p(\mathbb{H}) = 0$. Тройка $(i,\ \mathbb{H},\ \mathbb{S})$ также является *АПВ.*

Пусть $\mathbb{B}_\alpha$ – сепарабельное вещественное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_\alpha$ со структурой *АПВ* $(i_\alpha,\ \mathbb{H}_\alpha,\ \mathbb{B}_\alpha)$ и мерой Винера $p_\alpha,\ \alpha = 1,\ 2$.

Рассмотрим непрерывный линейный опрератор Фредгольма

$$F_{21}\colon\ (\mathbb{H}_1,\ |\cdot|_1) \to (\mathbb{H}_2,\ |\cdot|_2)\,, \tag{1}$$

который также определяет линейный оператор

$$F^{'}_{21}\colon\ (\mathbb{H}_1,\ \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{H}_2,\ \|\cdot\|_2)\,.$$

на линейном многообразии $(\mathbb{H}_1,\ \|\cdot\|_1)$

Вопрос: существует ли такой носитель $\mathbb{S}_\alpha$ меры Винера p_α, что линейный оператора (1) допускает расширение до непрерывного линейного оператора

$$\widetilde{F}_{21}\colon\ \left(\mathbb{S}_1,\ \|\cdot\|_{\mathbb{S}_1}\right) \to \left(\mathbb{S}_2,\ \|\cdot\|_{\mathbb{S}_2}\right)? \tag{2}$$

Здесь $\|\cdot\|_{\mathbb{S}_\alpha}$ измеримая норма на $\mathbb{H}_\alpha$. Ответ положителен в виде следующей теоремы. Теорема 2 Пусть заданы *АПВ* $(i_\alpha,\ \mathbb{H}_\alpha,\ \mathbb{B}_\alpha)$ и линйный оператор Фредгольма F_{21} (см. (1)). Тогда существуют такой носитель $\mathbb{S}_\alpha$ меры Винера p_α с измеримой нормой $\|\cdot\|_{\mathbb{S}_\alpha}$, $\alpha = 1,\ 2$, что сужение линейного непрерывного опрератора $\widetilde{F}_{21}$ (см. (2)) на $\mathbb{H}_1$ совпадает с F_{21}.

Доказательство существенно опирается на теорему *С. М. Никольсного* в той части, что в качестве линейных опрераторов K_1 и K_1 можно взять операторы конечного ранга (см. теорему 1).

Литература.

1. А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука. – 1979

2. Х.-С. Го. Гауссовские меры в банаховых пространствах. М.: Мир. – 1979

Условия стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с растущими младшими коэффициентами

В.Н. Денисов

(МГУ имени М.В.Ломоносова, ф-т вычислительной математики и кибернетики)

E-mail: *vdenisov2008@yandex.ru*

В полупространстве $\mathbb{R}^N$, $t \geq 0$ рассмотрим задачу Коши

$$\Delta u + c(x,t)u - u_t = 0, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

где

$$c(x,t) \leq -\alpha^2|x|^{2l}, \quad 0 < l < 1, \tag{3}$$

$u_0(x)$ — непрерывная в $\mathbb{R}^N$ начальная функция, такая, что

$$|u_0(x)| \leq C\exp\left(a|x|^{1+m}\right), \tag{4}$$

где $0 < m < 1$.

Теорема. *Если выполняется неравенство*

$$l > m, \tag{5}$$

то для решения задачи (1), (2) существует предел

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0, \tag{6}$$

равномерный по x на любом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Замечание. Неравенство (5) нельзя заменить на неравенство $l \leq m$.

Аналогичные результаты получены и для решения задачи Коши для не дивергентного параболического уравнения с младшими коэффициентами.

Работа выполнена при поддержке Гранта РФФИ (№ 09-01-00446).

Обзор работ по тематике стабилизации решений параболических уравнений имеется в [1, 2].

Литература.

[1] Денисов В.Н. УМН, 2005, т. 60, № 4, с. 145-212.

[2] Денисов В.Н. ДАН РАН, 2010, т. 430, № 5, с. 586-588.

О представлениях быстроубывающих функций с помощью канонического оператора Маслова и их приложениях к линейным уравнениям в частных производных

С.Ю. Доброхотов

(Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН)

E-mail: *dobr@ipmnet.ru*

Под быстроубывающими функциями понимаются функции вида $V(\frac{x}{\mu})$, $x \in \mathbb{R}^n_x$, где $V(y)$- гладкая функция убывающая быстрее $|y|^{-\kappa}$, $\kappa > 1$ при $|y| \to \infty$, $< 0\mu << 1$. Для таких функций предлагаются два представления, основанные на каноническом операторе Маслова, которые позволяют получить эффективные асимптотические формулы для решения задачи Коши с начальными быстроубывающими функциями указанного вида для линейных скалярных и векторных уравнений с частными производными. Обсуждаются вопросы, связанные с приложениями в задачах гидродинамики.

Работа выполнена совместно с А.И.Шафаревичем и Б.Тироцци и поддержана грантом РФФИ 08-01-00726.

К обоснованию метода подобластей решения одного интегро-дифференциального уравнения

К.С. Ермолаева, Л.Б. Ермолаева

(КГАСУ)

E-mail: *leila_ermolaeva@bk.ru*

Пусть $C^{(1)}$ – пространство непрерывно дифференцируемых на $[-1, 1]$ функций с нормой $\|x\| = \|x\|_C + \|x'\|_C$, а $DL \subset C$ – класс Дини–Липшица.

Работа посвящена обоснованию в пространстве $C^{(1)}$ метода подобластей решения интегро-дифференциального уравнения (кратко: и.д.у.) первого порядка

$$Kx \equiv x(t) + \int_{-1}^{1} h(t,s)x'(s)ds = y(t), \quad -1 \leq t \leq 1, \tag{1}$$

где $y(t), h(t,s)$ – известные функции, а $x(t)$ – искомая.

Как хорошо известно, уравнение указанного метода задается оператором (см., напр., в [1]) Π_n : $\Pi_n x = DL_n X, (Dx)(t) \equiv x'(t), X(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$, где L_n- оператор Лагранжа, построенный по узлам $t_k = cos\frac{2k-1}{2n}\pi$, $k = 1, ..., n$..

Справедлива следующая

Теорема 1.*Для оператора метода подобластей имеет место порядковая оценка:*

$$\|\Pi_n\|_{C^{(1)}\to C^{(1)}} = O(lnn).$$

Следствие.*Пусть функция $x(t)$ имеет производную $x'(t) \in DL$. Тогда*

$$\|x - \Pi_n x\|_{C^{(1)}} = O(lnn \cdot \omega(x', \frac{1}{n})) \to 0, \ n \to \infty.$$

Отметим, что теорема 1 доказывается с помощью результатов работы [2].

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) функция $y(t)$ имеет производную $y'(t) \in DL$;

2) $h(t,s) \in L_1$ по s равномерно относительно t, существует $h'_t(t,s) \in DL$ по t равномерно относительно s;

3) уравнение (1) имеет единственное решение любой правой части из $C^{(1)}$;

4) $t_k = cos\frac{2k-1}{2n}\pi$, $k = 1, ..., n$.

Тогда СЛАУ n–го порядка метода подобластей имеет единственное решение, хотя бы при всех n, начиная с некоторого натурального n_0. Приближенные решения $x_n^*(t)$, построенные по указанному методу, сходятся в метрике пространства $C^{(1)}$ к точному решению уравнения (1) со скоростью, определяемой порядковым соотношением

$$\|x^* - x_n^*\| = Olnn \cdot E_n(x^{*\prime}),$$

где $E_n(z)$ - наилучшее равномерное приближение функции z алгебраическими многочленами степени не выше $n-1$.

Литература

1. Ермолаева Л. Б. *Аппроксимативные свойства полиномиальных операторов и решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений методом подобластей: //*Дисс. канд. физ. мат. наук. – Казань, 1987. – 154 с.

2. Байгузов Н. С. *Некоторые оценки для производных алгебраических многочленов и их приложение к приближенному дифференциированию//*Матем. заметки. – 1969. Т. 5, № 2. – С. 183–194.

Непрерывность и дифференцируемость треугольных отображений

Р.И. Жданов

(МГУ им. М. В. Ломоносова)

E-mail: *rizhdanov@gmail.com*

Треугольными отображениями мер, называются такие отображения $T = (T_1, \ldots, T_n)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, что T_1 есть функция переменной x_1, T_2 – функция (x_1, x_2), и т.д.: компонента T_i является функцией от $(x_1, \ldots, x_i)$, причем T_i возрастает по переменной x_i. Нас будут интересовать отображения указанного вида, переводящие одну заданную вероятностную борелевскую меру μ в другую заданную меру ν: $\nu = \mu \circ T_{\mu,\nu}^{-1}$. В работе [1] доказано существование такого отображения для всякой пары вероятностных мер μ и ν на $\mathbb{R}^n$, где μ абсолютно непрерывна. Кроме того, построена каноническая версия отображения $T_{\mu,\nu}$ и установлена его единственность с точностью до μ-эквивалентности.

Теорема 1. *Пусть μ и ν – борелевские вероятностные меры на $\mathbb{R}^n$ с локально ограниченными и локально отделенными от нуля плотностями, причем проекции μ и ν на координатные подпространства $\mathbb{R}^k$ при $k \le n$ входят в $W^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^k)$ и $W^{1,\beta}_{loc}(\mathbb{R}^k)$ соответственно, где $\alpha, \beta > 1$. Пусть λ – мера Лебега на $\Omega = [0,1]^n$, $C^{0,\gamma}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ – пространство γ-гельдеровых функций.*

Тогда выполняются следующие утверждения:

1. $T_{\mu,\lambda} \in W^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

2. *Если $\alpha > n$, то $T_{\mu,\lambda} \in C^{0,\gamma}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, где $\gamma = 1 - n/\alpha$.*

3. *Если $\alpha > n$, то $T_{\lambda,\mu} \in C^{0,\gamma}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, где $\gamma = (1 - n/\alpha)^{n-1}$.*

4. *Если $\alpha, \beta > n$, то $T_{\mu,\nu} \in C^{0,\gamma}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, где $\gamma = (1 - n/\alpha)(1 - n/\beta)^{n-1}$.*

Отображение $T_{\mu,\lambda}$ может не быть непрерывным, даже для непрерывной плотности ρ_μ. Следующая теорема дает достаточное условие непрерывности.

Теорема 2. *Пусть меры μ и ν обладают безатомическими условными мерами. Если канонические треугольные отображения $T_{\mu,\lambda}$ и $T_{\nu,\lambda}$ непрерывны, то отображение $T_{\mu,\nu}$ непрерывно.*

Работа написана при частичной поддержке проектов РФФИ 07-01-00536 и 08-01-90431-Укр.

Список литературы

1. Богачев В.И., Колесников А.В., Медведев К.В.// Треугольные преобразования мер. Мат. сборник. 2005. Т. 196. С. 3–30.

Групповой анализ одного класса случайных блужданий

В.И. Заляпин
(ЮУрГУ)
E-mail: *vzal@susu.ac.ru*

I. Рассмотрим случайное блуждание ξ в $\mathbb{R}^{n+k}$, задаваемое однородной переходной функцией

$$P\{x,y\} = P\{0, x-y\} = \begin{cases} p_i & x-y=e_i \\ 0, & x-y \neq e_i \end{cases}, i = 1, 2, \ldots, n+k, \qquad (1)$$

где e_i – система базисных ортов. Рандомизуем это случайное блуждание пуассоновским процессом, параметр которого без ограничения общности можно считать равным единице.

Пусть $A = (a_{ij}),\ i = 1, 2, \ldots, k,\ j = 1, 2, \ldots, n+k$ – матрица с целочисленными элементами, $m \in \mathbb{R}^k$ –целочисленный вектор. Положим $x \sim y \ \Leftrightarrow\ \exists m:\ x - y = mA$. Обозначим через $\mathcal{R}_n^k(A)$ совокупность классов эквивалентности $\mathcal{H}_y(A) = \{x \in \mathbb{R}^{n+k}:\ \exists m:\ x = y + mA\}$.

Случайное блуждание (1) индуцирует случайное блуждание в $\mathcal{R}_n^k(A)$, при этом

$$P\{\xi \in \mathcal{H}_y(A)\} = e^{-t}\mathcal{G}_y(tp),\ p = \{p_1, \ldots, p_{n+k}\}.$$

Здесь $\mathcal{G}_y(z)$ – функции пуассоновского блуждания (Ф.П.Б.) [1].

II. Рассмотрим группу комплексных матриц $\mathcal{T}$ с элементами

$$t(\varphi, z) = \begin{pmatrix} e^{-\varphi} & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $e^{-\varphi}$ – диагональная матрица с элементами $e^{-\varphi_i}, i = 1, 2, \ldots, n+k, A\varphi = 0,\ z \in \mathbb{C}^{n+k}$ – вектор-столбец.

III. Теорема. *Матричные элементы неприводимых (не обязательно унитарных) представлений группы $\mathcal{T}$ выражаются через функции пуассоновского блуждания.*

IV. Примеры. 1). $A = (1, 1)$, Ф.П.Б. – модифицированные функции Бесселя, группа $\mathcal{T}$ – группа гиперболических движений плоскости $\mathbb{C}^2$ [2].

2). $A = (1, 1, \ldots, 1)$, Ф.П.Б. – функции Люстерника (обобщенные цилиндрические функции), группа $\mathcal{T}$ – группа сверхгиперболических движений $\mathbb{C}^{n+1}$ [3].

Литература.

1. *Заляпин, В.И.* О системе функций пуассоновского блуждания./Заляпин В.И., Люстерник Л.А.//ДАН СССР.–1972.– Т.207, №1. С.29-31

2. *Виленкин, Н.Я.* Специальные функции и теория представлений групп./Виленкин Н.Я.–М.: Наука. 1991.–576 с

3. *Люстерник, Л.А.* Об одной задаче теории массового обслуживания и обобщенных цилиндрических функциях./Люстерник Л.А.// УМН.– 1970.– 25:4. С19-22

Роль теоремы С.М. Никольского о фредгольмовом операторе в становлении и развитии теории функционально-дифференциальных уравнений

Г.Г. Исламов
(Удмуртский гос. ун-т)
E-mail: *ggislamov@udm.net*

Теория функционально-дифференциальных уравнений описывает и изучает свойства таких динамических процессов, ход которых зависит от их предыстории и планируемого будущего состояния этих процессов. Ввиду сложного поведения процессов такого рода значительные усилия исследователей были направлены на создание стройной и плодотворной теории линейных процессов. Без преувеличения можно констатировать, что краеугольным камнем такой теории стала замечательная теорема Сергея Михайловича Никольского о представлении ограниченного фредгольмова (нётерового индекса нуль) оператора в виде суммы непрерывно-обратимого оператора и ограниченного конечномерного оператора [1]. В сущности, этот важный математический результат говорит о том, что указанная сумма операторов описывает широкий класс линейных процессов с хорошими свойствами, имеющими важное прикладное значение. Конструктивным дополнением к этой теореме С.М. Никольского выступает известное обобщение В.А. Треногина леммы Шмидта, играющей важную роль в теории ветвлений решений операторных уравнений [2]. В докладе будет показано значение и продемонстрировано применение теоремы С.М. Никольского о фредгольмовом операторе при обосновании следующих конструкций современной теории функционально-дифференциальных уравнений:

1) Этапы математического моделирования в общей теории функционально-дифференциальных уравнений;

2) Абстрактная схема построения функциональных пространств;

3) Аддитивно-мультипликативная факторизация функционально-дифференциальных операторов;

4) Факторизация операторов Грина в задаче о скорости аппроксимации конечномерными операторами;

5) Возмущения минимального ранга функционально-дифференциальных операторов;

6) Альтернатива Фредгольма для функционально-дифференциальных уравнений с краевыми неравенствами;

7) Минимальные семейства циклических векторов операторов Грина.

8) Теорема Рябенького-Филиппова в теории краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений.

Литература

1. Никольский С.М. Изв. АН СССР, сер. мат. 7, № 3, 1943. - С. 147-166.

2. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.

О спектре Тэйлора генераторов полугрупп

А.Р. Миротин

(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

E-mail: *amirotin@yandex.ru*

Пусть $A = (A_1, \ldots, A_n)$ есть набор частных генераторов ограниченной n-параметрической C_0-полугруппы T операторов в комплексном банаховом пространстве X. Комплекс Кошуля $\mathcal{K}(X, A)$ набора A

$$0 \longleftarrow X_0 \xleftarrow{d_0} X_1 \longleftarrow \cdots \xleftarrow{d_{n-1}} X_n \longleftarrow 0,$$

где $X_m = X \otimes \bigwedge^m \mathbb{C}^n$ $(m = 0, \ldots, n)$, формально выглядит так же, как и для набора ограниченных операторов (см., например, [1]), но, поскольку соответствующие этому набору дифференциалы d_m не ограничены, их области определения $D(d_m)$ должны выбираться (и выбираются) таким образом, что $d_m : D(d_m) \to D(d_{m-1})$.

Как и в случае ограниченных операторов, спектр Тэйлора $\sigma(A)$ набора A состоит из тех $\lambda \in \mathbb{C}^n$, для которых комплекс $\mathcal{K}(X, \lambda - A)$ не является точным. При этом, вообще говоря, $\mathrm{pr}_1\sigma(A) \neq \sigma(A_1)$, т. е. проекционное свойство может нарушаться. Основным результатом доклада является теорема об отображении спектра Тэйлора для многомерного функционального исчисления Бохнера-Филлипса (см. [2]), в котором функции Бернштейна n переменных применяются к наборам $A = (A_1, \ldots, A_n)$, описанным выше.

Теорема. *Для любой функции Бернштейна ψ от n переменных справедливо включение $\sigma(\psi(A)) \supseteq \psi(\sigma(A))$.*

Литература.

1. А. Я. Хелемский. Гомология в банаховых и полинормированных алгебрах. М. : МГУ, 1986.

2. А. Р. Миротин. Многомерное $\mathcal{T}$-исчисление от генераторов C_0-полугрупп / Алгебра и анализ. – 1999. – Т. 11, N 2. – С. 142 – 170.

Об асимптотике спектра векторного сингулярного дифференциального оператора четвертого порядка

О.В. Мякинова

(Башкирский Гос. ун-т)

E-mail: *llmmst@rambler.ru*

Рассмотрим в пространстве $H = L^2(0, +\infty) \oplus L^2(0, +\infty)$ минимальный дифференциальный оператор $L_0(y) = -y^{(4)} + Q(x)y, y = (y_1(x), y_2(x))$,
$0 < x < +\infty$. Здесь $Q(x) = \|q_{i,j}(x)\|^2_{i,j=1}$- вещественная симметрическая матрица, собственные значения которой $\mu_i(x) \to -\infty$ при $|x| \to +\infty$.

Теорема 1. *Пусть для $x > x_0$ при достаточно больших x_0 выполнены условия:*
1) $|\mu_i'(x)| \leq C\,|\mu_i(x)^\alpha|\,, i = \overline{1,2}$, $0 < \alpha < 5/4$, $C = const$;

2) $\int_{x_0}^{\infty} |\mu_i|^{-1/2}\,dx < \infty$, $\int_{x_0}^{\infty} \left|\frac{\mu_i''}{\mu_i^2}\right| dx < \infty$;

3) $0 < A \le \left|\frac{\mu_i}{\mu_j}\right| \le B$, $i,j=\overline{1,2}$;

4) $\left|\frac{\mu_i}{\phi'(x)}\right| \le C_1$, $C_1 = const$, $\int_{x_0}^{\infty} \left|\frac{\phi''}{\mu_i^{5/4}}\right| dx < \infty$, $i = 1,2$. *Тогда система* $l(y) = \lambda y$ *имеет 8 линейно независимых решений* $y_j(x,\lambda)$, *для которых при* $\Gamma \ni \lambda \to \infty$, $\Gamma = \{\lambda : \lambda = \sigma + i\tau, \sigma > 0, \delta \le \tau \le \sigma^{\gamma}, \delta > 0, 0 < \gamma < 1\}$
имеют место асимптотические формулы, равномерные по x, $0 < x < \infty$

$$y_{1,2} = \tilde{\psi_{1,2}}(x,\lambda) e^{\int_0^x (m(t))^{1/4} dt}(1+o(1)),\ y_{3,4} = \tilde{\psi_{1,2}}(x,\lambda) e^{i\int_0^x (m(t))^{1/4} dt}(1+o(1)),$$
$$y_{5,6} = \tilde{\psi_{1,2}}(x,\lambda) e^{-\int_0^x (m(t))^{1/4} dt}(1+o(1)),\ y_{7,8} = \tilde{\psi_{1,2}}(x,\lambda) e^{-i\int_0^x (m(t))^{1/4} dt}(1+o(1)),$$

где $\tilde{\psi}_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{m^8}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\tilde{\psi}_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{m^8}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $m = \frac{\mu_1+\mu_2-2\lambda}{2}$

Функция $\phi'(x)$ - это скорость вращения собственных векторов матрицы $Q(x)$.
Обозначим:

$$\delta(t) = \begin{cases} \frac{2^{5/4}}{\pi}\int_0^{\infty}((2t - (-(\mu_1(x)+\mu_2(x)))^{1/4} - (-(\mu_1(x)+\mu_2(x))^{1/4})dt, t > 0 \\ \frac{2^{1/4}}{\pi}\int_0^t d\sigma \int_{2\sigma > \mu_1+\mu_2} \frac{dx}{((\mu_1+\mu_2)-2\sigma)^{3/4}}, t < 0 \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1, а также условия 1)* $\mu_i(x) \le -c|x|^{4/3+\epsilon}$, $\epsilon > 0$, $c > 0$, *2)* $A_1 \le \left|\frac{\delta(-t)}{\delta(t)}\right| \le A_2$, $\alpha\delta(t) \le t\delta(t)' \le \beta\delta(t)$, $0 < \alpha < \beta < 1$, *при больших* $|t|$.
Тогда для функции $N(\lambda)$*- числа собственных значений оператора* L_0*, не превосхо-дящих* λ*, имеют место асимптотические формулы* $N(\lambda) \approx \delta(\lambda)$ *при* $\lambda \to \pm\infty$.

Некоммутативная локализация в C^*-алгебрах

В.Е. Назайкинский, Е.А. Яровитчук
(Институт проблем механики РАН; Московский институт электронного машиностроения)

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ — унитальные C^*-подалгебры C^*-алгебры $\mathcal{B}H$ ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H, причем

$$\mathcal{K}H \subset \mathcal{A}, \qquad \mathcal{K}H \cap \mathcal{C} = \{0\}, \qquad [\mathcal{A}, \mathcal{C}] \subset \mathcal{K}H,$$

где $\mathcal{K}H$ — идеал компактных операторов в H. Через $\langle \mathcal{A}, \mathcal{C} \rangle$ обозначим C^*-подалгебру в $\mathcal{B}H$, порожденную $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$. Пусть $\widehat{\mathcal{C}}$ — *спектр* алгебры $\mathcal{C}$ (множество классов эквивалентности ее неприводимых представлений). Для $x = [\pi] \in \widehat{\mathcal{C}}$ положим $\mathcal{A}_x = \mathcal{A}/\mathcal{J}_x$, где $\mathcal{J}_x$ — пересечение с $\mathcal{A}$ двустороннего C^*-идеала, порожденного в $\langle \mathcal{A}, \mathcal{C} \rangle$ ядром представления π.

Для случая, когда алгебра $\mathcal{C}$ коммутативна (так что $\widehat{\mathcal{C}}$ — ее пространство максимальных идеалов), известен следующий *принцип локализации* (см., например, статью Б. А. Пламеневского и В. Н. Сеничкина в журнале «Алгебра и анализ», т. 13, вып. 6 (2001), с. 124–174):

$$\widehat{\mathcal{A}} = \bigcup_{x \in \widehat{\mathcal{C}}} \widehat{\mathcal{A}}_x \cup [\mathrm{id}],$$

где [id] — класс эквивалентности тождественного представления. Если, например, $\mathcal{A}$ — алгебра псевдодифференциальных операторов (ПДО) нулевого порядка на замкнутом многообразии X, а $\mathcal{C} = C(X)$, то $\widehat{\mathcal{A}}_x$ состоит из одномерных представлений, задаваемых значениями символа ПДО в точках сферы $S_x^*X = T_x^*X/\mathbb{R}_+$ над точкой x.

В докладе устанавливается обобщение этого принципа на случай некоммутативной алгебры $\mathcal{C}$ (которое оказывается полезным, например, при изучении ПДО, инвариантных относительно действия группы изометрий многообразия) и обсуждается применение такого обобщения к ПДО на многообразиях с углами.

Многопараметрические обратные спектральные задачи и их приложения

Н.Ф. Валеев, С.А. Рабцевич
(Башкирский гос. ун-т; Башкирский Гос. ун-т)
E-mail: *valeevnf@yandex.ru, rabtsevichsa@rambler.ru*

Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве H задано семейство m-параметрических операторов вида

$$B(\vec{p}, \lambda) = B_0(\lambda) + p_1 B_1(\lambda) + p_2 B_2(\lambda) + \ldots + p_m B_m(\lambda), \tag{1}$$

где $\vec{p} = (p_1, p_2, ..., p_m) \in \mathbf{C}^m$, $\lambda \in \mathbf{C}$-спектральный параметр. При этом линейные операторы $B_k(\lambda) : H \to H$, удовлетворяют следующим условиям:

1. $B_k(\lambda)$ аналитические семейства в смысле Като;
2. $[B_0(\lambda)]^{-1} B_k(\lambda)$ мероморфная функция от $\lambda \in \mathbf{C}$ со значениями во множестве компактных операторов;

Для указанного оператора $B(\vec{p}, \lambda)$ рассматривается следующая многопараметрическая обратная спектральная задача (далее МПОСЗ). *Требуется найти возможные значения вектора $\vec{p}$ из пространства $\mathbf{C}^m$, при которых наперед заданные числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ являются собственными значениями оператора $B(\vec{p}, \lambda)$.*

Сформулированная постановка задачи возникает в математических моделях диагностики или идентификации технических систем по ее собственным колебаниям, а также при исследовании моделей управления резонансными характеристиками объекта, когда посредством подбора доступных параметров объекта (линейной динамической системы) требуется придать ей те или иные частотно-резонансные характеристики.

В докладе будут представлены результаты исследований МПОСЗ для дифференциальных операторов, возникающих в различных приложениях.

Роль вариационного принципа для мер при описании сред без давления

Ю.Г. Рыков
(Институт Прикладной математики им.М.В.Келдыша)
E-mail: *Yu-Rykov@yandex.ru*

Рассмотрим следующую систему уравнений в частных производных, которая описывает процессы концентрации или разрежения некоторой величины ϱ в некоторой одномерной среде

$$\begin{array}{l} \varrho_t + (\varrho A'(u))_x = 0 \\ (\varrho u)_t + (\varrho u A'(u))_x = 0 \ . \end{array} \tag{1}$$

Здесь функция $A(u) \in C^2(R)$ и $A''(u) > 0$. Величина $A'(u)$ имеет смысл скорости частиц концентрирующейся субстанции.

Характерным свойством системы (1) является образование особенностей: разрывов у u и δ-особенностей у ϱ. Поэтому решение этой системы будем понимать в смысле теории распределений, при этом умножение на ϱ интерпретируется как интегрирование по соответствующей мере.

Если $A'(u) \equiv u$, то мы получим так называемую систему газовой динамики без давления. Системы типа (1) могут описывать, например, течения гранулированных сред [1], распределение вещества на космологических масштабах, разнообразные процессы типа конденсации/кластеризации. Можно еще предполагать, что (1) будет полезна при описании эволюции гипотетической 'темной материи', поскольку согласно современным представлениям эта субстанция взаимодействует только посредством гравитации и поэтому подобна 'газу' из галактик.

При доказательстве теоремы существования (см., например, [2], [3] в частном случае) важную роль играют минимумы по переменной a при фиксированных t, x функции типа

$$F(t, x; a) = \int_{0-0}^{a-0} \left[u_0(s) - A'^{-1}\left(\frac{x-s}{t}\right) \right] P_0(ds) \ , \tag{2}$$

где u_0, P_0 — соответствующие начальные функция u и мера ϱ.

Можно показать, что свойство (2) иметь минимум можно использовать и для формулировки теоремы единственности. При этом условия единственности формулируются единообразно для широкого класса начальных данных. Фактически, указанное свойство заменяет собой энтропийные условия. Подобный подход имеет смысл и в случае более общих гиперболических систем законов сохранения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 09-01-00288 и программы № 1 ОМН РАН.

Литература

[1] E. Efrati et all. Phys. Rev. Letter, v.94, 088001, 1–4 (2005).
[2] W. E, Yu. Rykov, Ya. Sinai. Comm. Math. Phys., 177, 349–380 (1996).

[3] F. Huang, Z. Wang. Comm. Math. Phys., 222, 117–146 (2001).

О полноте корневых функций некоторых классов пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

В.С. Рыхлов
(Саратовский гос. ун-т им. Н.Г. Чернышевского, мех-мат ф-т)
E-mail: *RykhlovVS@info.sgu.ru*

Рассмотрим пучок $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,1]$ вида

$$\sum_{s+k=n} p_{sk}\lambda^s y^{(k)}, \quad p_{sk}\in\mathbf{C}, \quad p_{0n}\neq 0, \tag{1}$$

$$\sum_{s+k=\kappa_{i0}} \lambda^s\alpha_{isk}y^{(k)}(0)=0,\ i=\overline{1,l}, \tag{2}$$

$$\sum_{s+k\le\kappa_{i0}} \lambda^s\alpha_{isk}y^{(k)}(0)+\sum_{s+k\le\kappa_{i1}} \lambda^s\beta_{isk}y^{(k)}(1)=0,\ i=\overline{l+1,n}, \tag{3}$$

где $\lambda,\alpha_{isk},\beta_{isk}\in\mathbf{C}$, $\kappa_{i0},\kappa_{i1}\in\{0,1,\dots,n-1\}$, $1\le l\le n-1$. Пусть корни $\omega_1,\dots,\omega_n$ характеристического уравнения $\sum_{s+k=n}p_{sk}\omega^k=0$ различны, отличны от нуля и лежат на одном луче, исходящем из начала координат. Не нарушая общности, можно считать

$$0<\omega_1<\omega_2<\dots<\omega_n. \tag{4}$$

Обозначим: $a_{ij}=\sum\limits_{s+k=\kappa_{i0}}\alpha_{isk}\omega_j^k$ $(i=\overline{1,n})$, $\quad b_{ij}=\sum\limits_{s+k=\kappa_{i1}}\beta_{isk}\omega_j^k$, $\kappa_i=\min\{\kappa_{i0},\kappa_{i1}\}$ $(i=\overline{l+1,n})$, $j=\overline{1,n}$; $[n]_+=\begin{cases} n, & \text{если } n\ge 0,\\ 0, & \text{если } n<0.\end{cases}$

Отметим, что краевые условия (2)–(3) при $2l<n$ уже не являются полураспадающимися. Тем не менее, удалось распространить теорему автора о кратной полноте и на этот случай.

Теорема 1. *Если верно (4),* $1\le l\le n-1$ *и* $\det(a_{ij})_{i,j=1}^l\neq 0$, $\det(a_{ij})_{i,j=1}^n\neq 0$, $\det(b_{ij})_{i,j=l+1}^n\neq 0$, *то система корневых функций пучка (1)–(3) m-кратно полна в $L_2[0,1]$ при $m\le n-l$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа* $\sum_{i=l+1}^n[m-1-\kappa_i]_+$.

В случае $l=1$ из теоремы 1 получаем $(n-1)$-кратную полноту корневых функций в $L_2[0,1]$. Что же касается n-кратной полноты, то оказывается справедлив следующий результат.

Теорема 2. *Если выполняется условие (4), $l=1$ и $a_{11}\neq 0$, то система корневых функций пучка (1)–(3) n-кратно неполна в $L_2[0,1]$ с бесконечным дефектом.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00270) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ (проект № НШ-4383.2010.1).

Инвариантные банаховы пределы

Е.М. Семенов, Ф. А. Сукочев
(Воронежский гос. ун-т)
E-mail: *nadezhka_ ssm@geophys.vsu.ru*

Банахово пространство ограниченных последовательностей $x=(x_1,x_2,\dots)$ с нормой $\|x\|=\sup\limits_n|x_n|$ обозначается через l_∞. Линейный функционал $B\in l_\infty^*$ называется банаховым пределом, если 1) $B\ge 0$, 2) $B(1,1,1,\dots)=1$, 3) $B(Tx)=B(x)$ для любого $x\in l_\infty$, где T — оператор сдвига, т. е. $T(x_1,x_2,\dots)=(x_2,x_3,\dots)$. Существование банаховых пределов было установлено С. Банахом с помощью теоремы Хана–Банаха. Для любой сходящейся последовательности $x=(x_1,x_2,\dots)$ $B(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. Множество банаховых пределов обозначим через $\mathfrak{B}$. Ясно, $\mathfrak{B}$ есть замкнутое выпуклое множество на единичной сфере пространства l_∞^*.

Г. Лоренц доказал, что для заданных $x\in l_\infty$, $a\in R^1$ равенство $B(x)=a$ справедливо для всех $B\in\mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=m+1}^{m+n}x_k=a$ равномерно по $m\in\mathbb{N}$. У. Эберлейн доказал существование банаховых пределов, инвариантных относительно преобразования Тёплица.

Пусть H — линейный непрерывный в l_∞ оператор, удовлетворяющий условиям: $H \geq 0$, $\|H\|_{l_\infty} = 1$ и $\limsup\limits_{j\to\infty}(A(I-T)x)_j \geq 0$ для любого $x \in l_\infty$, $A \in R(H)$, где $R(H) = \mathrm{conv}\{H^k, k \in \mathbb{N}\}$.

Теорема 1. Существует такой $B \in \mathbb{B}$, что $B(x) = B(Hx)$ для всех $x \in l_\infty$.

Обозначим через $\mathfrak{B}(H)$ множество $B \in \mathfrak{B}$, для которых $B = BH$.

Теорема 2. Для того чтобы $B \in \mathfrak{B}$ принадлежал $\mathfrak{B}(H)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{\substack{A\in R(H),\\ z\in S}} \liminf_{j\to\infty}(A(x+z))_j \leqslant B(x) \leqslant \inf_{\substack{A\in R(H)\\ z\in S}} \limsup_{j\to\infty}(A(x+z))_j$$

для всех $x \in l_\infty$, где $S = (I-T)l_\infty$.

При некоторых дополнительных предположениях диаметр множества $\mathfrak{B}(H)$ в l_∞^* равен 2. Этим условиям удовлетворяет, например, оператор Чезаро C $\left((Cx)_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)$. Приложения относятся к некоммутативной геометрии.

Первый автор был поддержан РФФИ, второй автор — Австралийским исследовательским Советом.

Сжимаемость многозначных отображений, не использующая метрику Хаусдорфа

П.В. Семенов
(МГПУ)
E-mail: *pavels@orc.ru*

Для замкнутых подмножеств A и B метрического пространства $(X; d)$ хаусдорфово расстояние $H_d(A, B)$ есть инфимум множества всех положительных ε, для которых множества A и B целиком лежат в ε-окрестностях друг друга. В терминах H_d обычно формулируют условия сжимаемости многозначных отображений $F : X \to X$. Например, $H_d(Fx, Fy) \leqslant k(d(x, y))d(x, y)$ для некоторой функции $k : [0, +\infty) \to [0, 1)$. Оказывается, что для успешного построения сходящейся последовательности пикаровских приближений совсем не обязательно требовать того, чтобы множества Fx и Fy были бы целиком близки друг к другу.

Фиксируем две числовые функции $\alpha : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$, $\beta : [0, +\infty) \to [0, 1)$. Отображение $F : X \to X$ назовем (α, β)-*сжатием*, если для каждого $x \in X$ найдется $y \in Fx$ такой, что $d(x, y) \leqslant \alpha(d(x, y)) \cdot \mathrm{dist}(x, Fx)$ и $\mathrm{dist}(y, Fy) \leqslant \beta(d(x, y)) \cdot d(x, y)$. Согласованное поведение функций $\alpha(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$ гарантирует наличие неподвижных точек отображения F.

Скажем, что числовая функция $h : (0, 1] \to (0, +\infty)$ *существенно положительна*, если $\inf\{h(s) \mid s \geqslant a\} > 0$, при $a > 0$, а числовая функция $g : X \to [0, +\infty)$ *устойчиво положительна*, если из неравенства $g(x) > 0$ следует, что $\inf\{g(y) \mid y \in U(x)\} > 0$ для некоторой окрестности $U(x)$ точки x. Например, если многозначное отображение $F : X \to X$ полунепрерывно сверху, то функция $x \mapsto dist(x, Fx), x \in X$ устойчиво положительна. То же верно и в случае, когда функция $x \mapsto dist(x, Fx), x \in X$ полунепрерывна снизу.

Теорема. Пусть $\lim\limits_{s\to t+0} \sup \beta(s) < 1,\ t \geqslant 0$ и $\alpha(t) = 1 + \gamma(1 - \beta(t))$, где $\gamma : (0, 1] \to [0, +\infty)$ ограниченная сверху функция такая, что $\lim\limits_{s\to 0} \gamma(s) = 0$, а функция $p(s) = s - (1 - s) \cdot \gamma(s)$ существенно положительна. Тогда любое (α, β)-сжатие $F : X \to X$ полного метрического пространства в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку, если функция $x \mapsto dist(x, Fx), x \in X$, устойчиво положительна.

Частными случаями этой теоремы являются результаты работ [1,2,3] и многие другие предшествующие результаты. Например, при $\gamma(s) \equiv s,\ \alpha(s) = 2 - \beta(s),\ p(s) = s^2$ получаем теорему 5 из [1].

Работа поддержана грантом РФФИ 08-01-00663

Литература.

1. L. Ciric, Fixed point theorems for multivalued contractions in complete metric spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 348(2008), 499-507.

2. D. Klim, D. Wardowski, Fixed point theorems for set-valued contractions in complete metric spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 334(2007), 132-139.

3. N. Mizoguchi, W. Takahashi, Fixed point theorems for multivalued mappings in complete metric spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 141(1989), 177-188.

Полное описание Никольским класса фредгольмовых операторов

В.А. Треногин
(МИСиС)
E-mail: *vtrenogin@mail.ru*

Одним из выдающихся результатов Сергея Михайловича Никольского является теорема, дающая полное описание класса фредгольмовых ограниченных операторов.

Пусть X и Y банаховы пространства оба вещественные или оба комплексные. Напомним, что оператор $A \in L(X, Y)$ называется фредгольмовым, если подпространства нулей оператора и сопряженного к нему оператора имеют одинаковые конечные размерности.

Теорема Никольского утверждает, что оператор является фредгольмовым или если является суммой непрерывно обратимого и конечномерного операторов или когда является суммой непрерывно обратимого и вполне непрерывного операторов.

Этот результат С.М. Никольского сыграл важнейшую роль в развитии теории линейных операторов в банаховых пространствах и ее приложений, например, в теории ветвления решений нелинейных уравнений.

В то же время следует отметить, что этот выдающийся результат, который потребовал нескольких лет работы С.М. Никольского, был затем без всяких ссылок бессовестно растаскан и присвоен рядом советских и зарубежных дельцов от науки.

В докладе рассмотрен круг вопросов, примыкающих к теореме Никольского.

Неограниченность множества устойчивых инвариантных многообразий системы Навье-Стокса

А.В. Фурсиков
(Механико-математический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова)
E-mail: *fursikov@gmail.com*

Для трехмерной системы Навье-Стокса с нулевой правой частью будет описано неограниченное множество в пространстве H^1 начальных условий, для которых существует единственное гладкое решение, экспоненциально убывающее, когда время t неограниченно растет. Это утверждение связано с построением неограниченных устойчивых инвариантных многообразий.

В сообщении будет указан метод построения устойчивых инвариантных многообразий для трехмерной системы Навье-Стокса. Отметим, что устойчивые инвариантные многообразия являются важным понятием, использующемся для построения стабилизации решений эволюционных уравнений посредством управления с обратной связью.

Доказательство указанных результатов будет опубликовано в работе [1].

[1]Fursikov, A.V. Local existence theorems with unbounded set of input data and unboundedness of stable invariant manifolds for 3D Navier-Stokes equations.- Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series S, V.3 №2, June 2010.

Устойчивость однозначной разрешимости по дополнительной информации

И.Г. Царьков
(каф. мат. анализа мех-мат ф-та МГУ)
E-mail: *tsar@mech.math.msu.su*

Пусть W – банахово пространство, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $S = \partial\Omega$ класса C^2, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $Q_0 = \overline{\Omega} \times \{0\}$, $S_T = S \times (0,T)$, $\partial''Q = S \times [0,T]$, $\partial' Q_T = Q_0 \cup \partial''Q$. Рассмотрим для функций $u \in W_q^{2,1}(\overline{Q}_T) \cap C^{1+\beta,\frac{\beta}{2}}(\partial' Q)$ $(q > n+2)$ параболическое уравнение $\mathcal{L}_w u = 0$, где

$$\mathcal{L}_w u = u_t - \sum_{i,j} a_{ij}(x,t,w,u,\nabla u) u_{x_i x_j} + a(x,t,w,u,\nabla u).$$

Будем предполагать, что коэффициенты a_{ij} имеют частные производные 1-го порядка по всем переменным, и для любых чисел $M, M_0, M_1 > 0$ и множества $\mathfrak{M}(M, M_0, M_1) = \{(x,t,w,u,p) \in Q_T \times W \times \mathbb{R}^{n+1} \mid$

$|u| \leqslant M, \|w\|_W \leqslant M_0, |p| \leqslant M_1\}$ найдутся константы $\nu, \mu, \mu_1 > 0$ и функции $\Psi, \Theta \in L_q(Q_T)$, такие, что для произвольных $(x,t,w,u,p) \in \mathfrak{M}(M, M_0, M_1)$ выполнено неравенства:

1). $\nu|\xi|^2 \leqslant \sum a_{i,j}(x,t,w,u,p)\xi_i\xi_j \leqslant \mu|\xi|^2$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$;

$$2).\ \left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_k}(x,t,w,u,p)\right| \leqslant \mu_1; \left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}(x,t,w,u,p)\right|, \left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}(x,t,w,u,p)\right| \leqslant \Psi(x,t);$$

3). $|a(x,t,w,u,p)| \leqslant \Theta(x,t), \|a(\cdot,\cdot,w_1,u,p) - a(\cdot,\cdot,w_2,u,p)\|_{L_q(\Omega)} \leqslant \mu_1(\|w_1 - w_2\| + |u_1 - u_2| + |p_1 - p_2|)$ для всех $w_i, u_i, p_i : \|w_i\| \leqslant M_0, |u_i| \leqslant M, |p_i| \leqslant M_1$.

Теорема. *Пусть* $M_1, M_0 > 0$, $\gamma = \frac{\beta + \frac{n}{q}}{2 - \frac{2}{q}}$. *Тогда найдутся числа* $c, \varepsilon_0 > 0$, *зависящие только от* M_1, M_0, β, *области* Q_T, *и такие, что для всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *и произвольных* $(w_k, \varphi_k, g_k) \in W \times \Phi \times L_q(Q_T)$ *и произвольных решений* $v_k \in W_q^{2,1}(\overline{Q}_T) \cap C^{1+\beta, \frac{\beta}{2}}(\partial' Q_T)$ *задачи* $\begin{cases} \mathcal{L}_{w_k}(v_k) = g_k & \text{на } Q_T \\ v_k = \varphi_k & \text{на } \partial' Q_T \end{cases}$ *таких, что* $\|\nabla v_k\|_{C(\overline{Q}_T)} \leqslant M_1$; $\|w_k\|_W$, $\|g_k\|_{L_q(Q_T)}$, $\|\varphi_k\|_{C^{1+\beta, \frac{\beta}{2}}(\partial' Q)} \leqslant M_0$ $(k = 1, 2)$, *и любой* ε*-сети* Γ *во множестве* $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$, *где* $\tau \in [0, T] : \|v(\cdot, \tau)\| = \|v\|_{C(\overline{Q}_T)}$, $v = v_1 - v_2$, *верна оценка:*

$$\|v_1 - v_2\|_{C(\overline{Q}_T)} \leqslant c\big(\|w_1 - w_2\|_W + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\Phi + \|g_1 - g_2\|_{L_q(Q_T)}\big)\varepsilon^\gamma + 2\|(v_1 - v_2)\big|_\Gamma\|_\infty.$$

О траекторных аттракторах неавтономной 2D системы Навье-Стокса в пространствах Никольского

В.В. Чепыжов
(Институт проблем передачи информации им.А.А. Харкевича РАН)
E-mail: *chep@iitp.ru*

Доклад основан на совместных работах с М.И.Вишиком.

Рассматривается неавтономная 2D система Навье–Стокса

$$\partial_t u + \nu L u + B(u) = g(x,t),\ (\nabla, u) = 0,\ u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

$x \in \Omega \Subset \mathbb{R}^2$, $t \geq 0, u = u(x,t) = (u^1, u^2) := u(t)$, $g = g(x,t) = (g^1, g^2) := g(t)$. Здесь $Lu = -P\Delta u$ обозначает оператор Стокса, $\nu > 0$, $B(u) = P\sum_{i=1}^2 u_i \partial_{x_i} u$; P – ортогональный проектор на пространство H бездивергентных векторных полей с конечной L_2-нормой.

Предполагается, что зависящая от времени внешняя сила $g_0(x,t) =: g_0(t)$ в (1) является *трансляционно компактной* (*тр.к.*) функцией в $L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; H) =: L_2^{loc}$ (или $g_0(t)$ *тр.к.* в $L_{2,w}^{loc}(\mathbb{R}_+; H) =: L_{2,w}^{loc}$). Это означает, что семейство сдвигов $\{g_0(t+h) \mid h \geq 0\}$ образует предкомпактоное множество в L_2^{loc} (соответственно, в $L_{2,w}^{loc}$). Через $\mathcal{H}_+(g_0)$ обозначается *оболочка* функции g_0 в пространстве $L_{2,w}^{loc}$, т.е., $\mathcal{H}_+(g_0) = [\{g(t+h) \mid h \geq 0\}]_{L_{2,w}^{loc}}$. Изучается семейство уравнений (1) с внешними силами $g \in \mathcal{H}_+(g_0)$.

Обозначим через $H^{\mathbf{r}}(Q_{t_1,t_2}), \mathbf{r} = (2,2,1)$ пространство Никольского в цилиндре $Q_{t_1,t_2} := \Omega \times]t_1, t_2[$, которое состоит из функций $\varphi(x,t) = (\varphi^1 \varphi^2) =: \varphi(t),\ t \in]t_1, t_2[$, с конечной нормой

$$\|\varphi\|^2_{H^{\mathbf{r}}(Q_{t_1,t_2})} = \int_{Q_{t_1,t_2}} \left(\sum_{|\alpha| \leq 2} |\partial_x^\alpha \varphi(x,t)|^2 + |\partial_t \varphi(x,t)|^2 \right) dxdt. \tag{2}$$

Каждой внешней силе $g(t) \in \mathcal{H}_+(g_0)$ соответствует *пространство траекторий* $\mathcal{K}_g^+$, которое, по определению, есть объединение всех решений $u(t) = u_g(t), t \geq 0$, уравнения (1) из пространства $H^{\mathbf{r},loc}(Q_+) =: H^{\mathbf{r},loc}$, $Q_+ = \Omega \times]0, +\infty[$, (т.е., $u(t) \in H^{\mathbf{r}}(Q_{t_1,t_2})$ при любом $]t_1, t_2[\subset \mathbb{R}_+$). Обозначим $\mathcal{K}^+ = \bigcup_{g \in \mathcal{H}_+(g_0)} \mathcal{K}_g^+$. *Трансляционная полугруппа* $\{T(h) \mid h \geq 0\}$ действует на пространстве $H^{\mathbf{r},loc}$ по формуле $T(h)\varphi(t) = \varphi(t+h),\ h \geq 0$. Легко видеть, что $T(h)u_g(t) = u_g(t+h) = u_{T(h)g}(t) \in \mathcal{K}^+_{T(h)g}$. Следовательно,

$$T(h)\mathcal{K}^+ \subseteq \mathcal{K}^+\ \forall h \geq 0.$$

Доказано, что множество $\mathcal{K}^+$ замкнуто в $H^{\mathbf{r},loc}$. Легко устанавливается, что полугруппа $\{T(h)\}$ непрерывна в топологии $H^{\mathbf{r},loc}$. Обозначим через $H^{\mathbf{r},a}(Q_+) =: H^{\mathbf{r},a}$ подпространство в $H^{\mathbf{r},loc}$, состоящее из функций $\varphi(t)$, $t \geq 0$, которые имеют конечную норму

$$\|\varphi\|^2_{H^{\mathbf{r}.\mathbf{a}}} := \sum_{|\alpha| \leq 2} \|\partial_x^\alpha \varphi\|_a^2 + \|\partial_t \varphi\|_a^2 < +\infty, \text{где } \|g_0\|_a^2 = \sup_{t \geq 0} \int_t^{t+1} |g_0(s)|^2 ds.$$

По определению, *траекторным аттрактором* полугруппы трансляций $\{T(h)\}$ на $\mathcal{K}^+$ называется множество $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{K}^+$, такое, что $\mathfrak{A}$ компактно в $H^{\mathbf{r},loc}$, ограничено в $H^{\mathbf{r},a}$, строго инвариантно относительно $\{T(h)\} : T(h)\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\ \forall h \geq 0$, и которое обладает следующим свойством притяжения: для любого множества $B \subset \mathcal{K}^+$, ограниченного в $H^{\mathbf{r},a}$, и для любого $[t_1, t_2] \subset \mathbf{R}_+$ множество $T(h)B$ стремится к $\mathfrak{A}$ в сильной топологии $H^{\mathbf{r}}(Q_{t_1,t_2})$, (см. (2)) т.е.,

$$\mathbf{dist}_{H^{\mathbf{r}}(Q_{t_1,t_2})}(T(h)B, \mathfrak{A}) \to 0\ (h \to +\infty).$$

В работе доказана основная теорема о существовании траекторного аттрактор $\mathfrak{A}$ системы (1), при условии, что функция $g_0(t)$ является тр.к. в (сильном) пространстве L_2^{loc}. Если функция $g_0(t)$ тр.к. в (слабом) пространстве $L_{2,w}^{loc}$, то построен “слабый” траекторного аттрактор $\mathfrak{A}_w$ в слабой топологии $H_w^{\mathbf{r},loc}(Q_+)$. В этом случае $T(h)B \to \mathfrak{A}_w$ при $h \to +\infty$ в слабой топологии пространств $H^{\mathbf{r}}(Q_{t_1,t_2})$ при каждом $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}_+$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, код проекта 08-01-00784.

Стационарное уравнение А.Н. Колмогорова с градиентным коэффициентом сноса

С.В. Шапошников

(мех-мат ф-т МГУ им. М.В. Ломоносова)

E-mail: *starticle@mail.ru*

Исследуются вероятностные меры μ на $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющие стационарному уравнению А.Н. Колмогорова

$$\Delta\mu - \operatorname{div}(\mu b) = 0,$$

причем, коэффициент сноса b является градиентом гладкой функции, т. е. $b = \nabla v$ и $v \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Итак, предположим, что существует вероятностная мера μ на $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющая такому уравнению. Верно ли, что μ задается плотностью вида const$\cdot e^v$? Единственно ли решение указанного уравнения в классе вероятностных мер? Отметим, что вопросам единственности и неединственности решений эллиптических уравнений в классе вероятностных мер посвящен целый ряд статей (см., например, [1], [2] и [3]). В случае градиентного коэффициента сноса оказалось, что вероятностное решение не обязано задаваться плотностью вида const$\cdot e^v$, а если задается, то является единственным вероятностным решением данного уравнения.

Литература

[1] Богачев В.И., Рёкнер М., Штаннат В. Единственность решений эллиптических уравнений и единственность инвариантных мер диффузий. Матем. сб. 2002. Т. 193, N 7. С. 3–36.

[2] Шапошников С.В. О неединственности решений эллиптических уравнений для вероятностных мер. Докл. РАН, 2008, т. 420, N 3, с. 320-323.

[3] Shaposhnikov S.V. On nonuniqueness of solutions to elliptic equations for probability measures. Journal of Functional Analysis 254 (2008) 2690-2705

Асимптотика спектра несамосопряженного оператора на поверхности вращения

Х. Рухиан, А.И. Шафаревич

(мех.-мат МГУ)

E-mail: *shafarev@yahoo.com*

В докладе описана асимптотика при $\epsilon \to 0$ спектра оператора Лапласа со сносом

$$\hat{H} = \epsilon\Delta + \partial_v \tag{1}$$

на двумерной поверхности вращения M, диффеоморфной сфере; здесь v – векторное поле на M, направленное вдоль параллелей и изменяющееся только вдоль широты. Мы рассматриваем простейший случай $v = z\frac{\partial}{\partial\varphi}$, где (z, φ) – высота и долгота на поверхности; считаем, что поверхность получена вращением вокруг вертикальной оси z графика функции $x = f(z)$, $z \in [-1, 1]$.

Для каждого целого $m = O(1)$ рассмотрим на комплексной плоскости переменной E граф Г, состоящий из трех кривых, заданных уравнениями

$$\Im \int_{-1}^{1} \sqrt{(imz - E)(1 + f_z^2)}dz = 0;$$
$$\Im \int_{\pm 1}^{E/im} \sqrt{(imz - E)(1 + f_z^2)}dz = 0. \tag{2}$$

Теорема 1. Пусть E – точка комплексной плоскости, не лежащая на графе Г. Тогда в $O(\epsilon)$-окрестности точки E нет точек спектра оператора $\hat{H}$.

Таким образом, при $\epsilon \to 0$ спектр концентрируется вблизи графа Г. Распределение точек спектра на ребрах этого графа определяется следующим утверждением.

Теорема 2. Пусть комплексное число E удовлетворяет одному из следующих равенств:

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\epsilon}} \int_{-1}^{1} \sqrt{(imz - E)(1 + f_z^2)}dz = n;$$
$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\epsilon}} \int_{-1}^{E/im} \sqrt{(imz - E)(1 + f_z^2)}dz = n + \frac{1}{2}; \tag{3}$$
$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\epsilon}} \int_{E/im}^{1} \sqrt{(imz - E)(1 + f_z^2)}dz = n + \frac{1}{2},$$

где $n \in \mathbb{Z}, n = O(1/\sqrt{\epsilon})$. Тогда в $O(\epsilon)$-окрестности точки E содержится собственное значение оператора $\hat{H}$.

Замечение. Уравнения (3) аналогичны условиям квантования Бора – Зоммерфельда – Маслова; они представляют собой топологические условия на периоды голоморфной формы pdz на римановой поверхности, задаваемой в $\mathbb{C}^2$ уравнением $p^2 + (imz + E)(1 + f_z^2) = 0$. Эта поверхность гомеоморфна тору с четырьмя дырками - две при проекции на плоскость переменной z переходят в точки ± 1, а две – в бесконечно удаленную точку. После заклейки двух последних точек получается поверхность с тремя независимыми циклами; именно эти циклы дают вклад в уравнения (3).

О спектре задачи Штурма-Лиувилля с самоподобным сингулярным индефинитным весом

А.А. Владимиров, И.А. Шейпак
(МГУ имени М.В.Ломоносова; ВЦ РАН им. А.А.Дородницына)
E-mail: *vladimi@mech.math.msu.su, iasheip@yandex.ru*

Уравнение малых колебаний струны описывается спектральной задачей

$$-y'' - \lambda\rho y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0. \tag{1}$$

Мы рассматриваем в качестве веса ρ элемент пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0,1]$, т.е. обобщённую функцию. В этом классе весов описать асимптотическое поведение собственных значений не представляется возможным. С точки зрения получения асимптотических формул хорошим классом функций оказались самоподобные функции (см., например, [1]).

Основные результаты.

Проведена классификация самоподобных квадратично суммируемых сингулярных функций и получены результаты о влиянии на асимптотику собственных значений задачи (1) непрерывной сингулярной компоненты функции P и дискретной компоненты соответственно. Асимптотические формулы, описывающие поведение считающей функции собственных значений задачи (1) в случае, когда функция P имеет положительный спектральный порядок получены в [2],[3].

Дальнейшие результаты относятся к описанию поведения собственных значений задачи (1) в предположении, что ρ является обобщённой производной самоподобной функции P, имеющей счётное число скачков, причём самоподобие невырожденно.

При этих предположениях справедлива следующая

Теорема. *Существуют такие положительные числа $\mu_{+,l}$, $l = 0, 1, \ldots, m_1$, что последовательность положительных собственных значений задачи (1), занумерованные в порядке возрастания удовлетворяет при $k \to +\infty$ асимптотикам*

$$\lambda_{l+km_1} = \mu_{+,l} \cdot q^k(1 + o(1)).$$

Существуют такие положительные числа $\mu_{-,l}$, $l = 0, 1, \ldots, m_2$, что последовательность отрицательных собственных значений задачи (1), занумерованные в порядке убывания удовлетворяет при $k \to +\infty$ асимптотикам

$$\lambda_{-(l+km_2)} = -\mu_{-,l} \cdot q^k(1 + o(1)).$$

Число $q > 1$ определяется параметрами самоподобия функции P.

Таким образом, если P является самоподобной функцией скачков, то собственные значения растут экспоненциальным образом (в отличие вклада сингулярной непрерывной компоненты, определяющей степенной закон изменения считающей функции).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 07-01-00423, грант № 09-01-90408.

Литература

[1] И.А.Шейпак *Конструкции и некоторых свойствах самоподобных функций в пространствах* $L_p[0, 1]$, Матем. заметки, **81**, №6, 2007, 924–938.

[2] А.А.Владимиров, И.А.Шейпак *Самоподобные функции в пространстве* $L_2[0, 1]$ *и задача Штурма–Лиувилля с сингулярным индефинитным весом*, Матем. сборник, **197**:11, 2006, 13–30.

[3] А.А.Владимиров, И.А.Шейпак *Индефинитная задача Штурма–Лиувилля для некоторых классов самоподобных сингулярных весов*, Тр. МИРАН им. В. А. Стеклова, **255**, 2006, 88–98.

О свойствах базисности собственных векторов для возмущений самосопряженных операторов

А.А. Шкаликов

(МГУ имени М.В.Ломоносова, механико-математический ф-т)

E-mail: *ashkalikov@yahoo.com*

В докладе будут сообщены теоремы о базисных свойствах возмущений самосопряженных (или нормальных) операторов, среди которых отметим следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть спектр самосопряженного оператора T дискретен и состоит из несгущающейся последовательности $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ его собственных значений (т.е. число собственных значений на любом интервале $(t, t+1), t \in \mathbb{R}$, не превышает фиксированного числа p). Пусть φ_k — ортонормированная система собственных векторов оператора T, а оператор B таков, что выполнены условия*

$$\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(T), \qquad \|B\varphi_k\| \leqslant b = const.$$

Тогда спектр оператора $T + B$ дискретен, состоит из собственных значений $\{\lambda\}_{k=1}^{\infty}$ и функции распределения собственных значений

$$n(r, T) = \sum_{\mu_k < r} 1, \quad n(r, A) = \sum_{|\lambda_k| < r} 1$$

подчинены соотношению

$$n(r, A) = n(r, T) + O(1), \qquad \text{т.е.} \quad |n(r, A) - n(r, T)| < C \ \text{ при } r \to \infty.$$

Здесь предполагается, что собственные значения $\{\lambda\}_{k=1}^{\infty}$ занумерованы с учетом алгебраической кратности. Кроме того, постоянная C в последнем неравенстве оценивается величиной $C'(b^2p + 1)$, где C' — абсолютная постоянная.

Теорема 2 *При выполнении условий Теоремы 1 система собственных и присоединенных векторов оператора $A = T + B$ образует базис со скобками пространства $\mathcal{H}$. При этом в скобки нужно заключать только члены, отвечающие сближающимся собственным значениям (т.е. при любом заданном $\varepsilon > 0$ в скобки заключаются члены, отвечающие собственным значениям λ_k, λ_j оператора A, для которых $|\lambda_k - \lambda_j| < \varepsilon$).*

Ранее сформулированные результаты были известны при выполнении существенно более сильного условия — ограниченности оператора-возмущения B.

On Hölder-Lipschitz maps between Sobolev, Besov, Lizorkin-Triebel, non-commutative and other Banach spaces

S. Ajiev
(University of New South Wales)
E-mail: *ajievss@unsw.edu.au*

Abstract. Anisotropic spaces of Sobolev, Besov and Lizorkin-Triebel types of functions defined on open subsets of an Euclidean space and endowed with various geometrically friendly norms, non-commutative Lebesgue spaces (Schatten-von Neumann classes) and some other abstract and concrete Banach spaces are dealt with in a quantitative manner.

For the maps between any couple of the mentioned spaces, their duals, quotients and the spaces finitely represented in them, we provide quantitative approaches to the problems of the approximation of the uniformly continuous maps by means of Hölder-Lipschitz maps and the extension of the Hölder-Lipschitz maps providing the description of the admissible exponents and explicit estimates for the related constants.

Our approach, based on the general schemes due to K. Ball and Minty, allows us to improve the known constants for Lebesgue spaces and either to rediscover or to find the classical moduli of uniform convexity for commutative and non-commutative Lebesgue and some Sobolev, Besov, Lizorkin-Triebel and other spaces.

References.

1. S. S. Ajiev, *Characterizations of $B^s_{p,q}(G)$, $L^s_{p,q}(G)$, $W^s_p(G)$ and other function spaces. Applications.* // Tr. Matem. Inst. Steklova 227 (1999) 7–42. Engl. transl. Proc. Steklov Math. Inst. 227 (1999) 1–36.

2. S. S. Ajiev, *On Chebyshev centres, retractions, metric projections and homogeneous inverses for Besov, Lizorkin-Triebel, Sobolev and other Banach spaces.* // East J. Approx. 2009. V. 15. No. 3. P. 375–428.

3. *K. M. Ball*, Markov chains, Riesz transforms and Lipschitz maps. // Geom. Funct. Anal. V. 92. No. 2. 1992. P. 137–172.

4. O. V. Besov, V. P. Il'in, S. M. Nikol'skiy, *Integral representations of functions and embedding theorems*, Nauka-Fizmatgiz, Moscow, 1996 (1st Ed. Nauka, Moscow, 1975.)

5. *Y. Benyamini, J. Lindenstrauss*, Geometric nonlinear functional analysis. Volume 1. (In: "Colloquium Publications", V. 48.) Providence, Rhode Island: American Mathematical Society. 2000. P. 1–489+i–xii.

6. V. I. Burenkov, *Sobolev Spaces on Domains*, (Teubner Texts in Mathematics, V. 137), B. G. Teubner Verlagsgesellschaft mbH., Stuttgart, 1998.

7. Yu. N. Chekanov, Yu. E. Nesterov, and A. A. Vladimirov, *On uniformly convex functionals*, // Vestnik Mosk. Univ., Ser. Vych. Mat. Kibern. 3 (1978) 12–23.

8. *A. Naor*, A phase transition phenomenon between the isometric and isomorphic extension problems for Hölder functions between L_p spaces. // Mathematika. 2001. V. 48. No. 1-2 P. 253–271.

9. *A. Naor, Y. Peres, O. Schramm, and S. Sheffield*, Markov chains in smooth Banach spaces and Gromov-hyperbolic metric spaces. // Duke Math. J. 2006. V. 134. P. 165–197.

ON THE SPECTRUM OF THE GENERALIZED DIFFERENCE OPERATOR Δ_a OVER THE SEQUENCE SPACE $bv_p (1 \le p \le \infty)$

A.M. Akhmedov
(Baku State University, Mech. and Math. Faculty)
E-mail: *akhmedovali@rumbler.ru*

In this work we investigate the spectrum of a generalized difference operator acting on the sequence space $bv_p\,(1 \le p \le \infty)$ ([1] and [2]). Let X be the Banach space and $B(X)$ be the set of all bounded linear operators on X into itself. We introduce the operator Δ_a on any real sequence space w as follows: $\Delta_a x = \Delta_a\,(x_n) = (a_n x_n - a_n x_{n-1})_{n=0}^{\infty}$,where $x = (x_n) \in x, x_{-1} = a_{-1} = 0$ and $\lim a_n = a < \infty$.

One generalization of the operator Δ was done in [3] by P. D. Srivastava and S. Kumar, in which they studied the fine spectrum of considered operators on c_0.

For the operator $\Delta_a$we establish the boundedness of it on bv_a.

Theorem 1. $\Delta_a \in B\,(bv_p)\,, (1 \le p \le 1)$with norm satisfies $(2+2^p)^{\frac{1}{2}} \le \|\Delta_a\|_{bv_p} \le 2A$, where$A = \sup\limits_{n \ge 0} |a_n|$.

By $\sigma\,(\Delta_a)$we denote the spectrum of Δ_a. The main result of this paper is

Theorem 2.

$$\sigma\,(\Delta_a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - a| \le |a|\}$$

This theorem can be proved by the next theorem.

Theorem 3 (I. Schur). If$T \in B\,(l_1) \cap B\,(l_\infty)$then $T \in B\,(l_p)\,, (1 < p < \infty)$.

References.
1. F. Başar and B. Altay, On the space of sequences of p-bounded variation and related matrix mappings, Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 55, no. 1, 2003, 136-147.
2. A. M. Akhmedov and F. Başar, The fine spectrum of the difference operator Δ over the sequence space $bv_p\,(1 \le p \le \infty)$, Acta Math. Sinica, vol. 23, no. 10, Oct. (2007), 1757-1768.
3. P. D. Srivastava and S. Kumar, On the spectrum of the generalized difference operator Δ_v over the sequence space c_o, Communications in mathematical analysis, vol. 6, no.1 (2009), 8-21.

On the spectrum of a generalized difference operator over the sequence space c

A.M. Akhmedov, S.R. El-Shabrawy
(Baku State University, Mech. and Math. Faculty)
E-mail: *akhmedovali@rumbler.ru, srshabrawy@yahoo.com*

P. Srivastava and S. Kumar [3] introduced the generalized difference operator Δ_v on the sequence space c_0 as follows: $\Delta_v : c_0 \to c_0$ is defined by

$$\Delta_v x = \Delta_v\,(x_n) = (v_n x_n - v_{n-1} x_{n-1}) \text{ with } x_{-1} = 0,$$

where (v_k) is either constant or strictly decreasing sequence of positive real numbers satisfying $\lim\limits_{k\to\infty} v_k = L > 0$ and $v_0 \le 2L$. Also, P. Srivastava and S. Kumar [3] determined the spectrum and the fine spectrum of the operator Δ_v on the sequence space c_0.

In this paper we determine the spectrum of the generalized difference operator Δ_v on the sequence space $l_p, (1 \le p \le \infty)$. The results of our paper not only generalize the corresponding results of [1] and [2] but also give results for some more operators.

By $B(X)$, we denote the set of all bounded linear operators on the Banach space X into itself.

We have the following main result:

Theorem 1.

1. $\Delta_v \in B\,(X)$ with norm $\|\Delta_v\|_c = v_0 + v_1$.
2. $\sigma\,(\Delta_v, c) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha - L| \le L\}$.
3. $\sigma\,(\Delta_v, c)$.

References.
1. A. M. Akhmedov and F. Başar, On the spectrum of the difference operator Δ over the sequence space $l_p\,(1 \le p \le \infty)$, Demonstratio Mathematica, vol. 39, no. 3 (2006), 585-595.
2. B. Altay and F. Başar, On the fine spectrum of the difference operator on c_0 and c, Information Sci., 168 (2007), 217-224.
3. P. D. Srivastava and S. Kumar, On the spectrum of the generalized difference operator Δ_v over the sequence space c_0, Communications in mathematical analysis, vol. 6, no.1 (2009), 8-21.

The Peierls-Bogoliubov inequality in von Neumann algebras and characterization of tracial functionals

A.M. Bikchentaev
(Kazan State University, Russia)
E-mail: *Airat.Bikchentaev@ksu.ru*

It is an important issue in statistical mechanics to calculate the value of the so-called *partition function* $\mathrm{tr}(e^{\widehat{H}})$, where the Hermitian matrix $\widehat{H}$ is the Hamiltonian of a physical system. Since that computation is often difficult, it is easier to compute the related quantity $\mathrm{tr}(e^{H})$, where H is a convenient approximation of the Hamiltonian $\widehat{H}$. Let $\widehat{H} = H + K$. The *Peierls-Bogoliubov inequality* provides useful information on $\mathrm{tr}(e^{H+K})$ from $\mathrm{tr}(e^{H})$. This inequlity states that, for two Hermitian operators H and K

$$\mathrm{tr}(e^{H}) \exp \frac{\mathrm{tr}(e^{H}K)}{\mathrm{tr}(e^{H})} \le \mathrm{tr}(e^{H+K}).$$

A positive linear functional φ on a von Neumann algebra $\mathcal{M}$ is said to be *normal* if $\varphi(\sup A_i) = \sup \varphi(A_i)$ for every bounded increasing net $\{A_i\}$ of positive operators in $\mathcal{M}$; *tracial* if $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ for all A, B in $\mathcal{M}$.

Theorem 1. *A positive normal functional φ on von Neumann algebra $\mathcal{M}$ is tracial if and only if*

$$\varphi(e^H)\exp\frac{\varphi(e^{H/2}Ke^{H/2})}{\varphi(e^H)}\le\varphi(e^{H+K})$$

for all positive operators H,K in $\mathcal{M}$.

Remark. We also proved that any inequality of Hölder, Cauchy-Schwarz-Bunyakovskii, Golden-Tompson, etc. characterizes the tracial functionals among all positive normal functionals on a von Neumann algebra.

H. Araki (Lett. Math. Phys. 19 (1990), 167-170) proved that

$$\mathrm{tr}((A^{1/2}BA^{1/2})^{rp})\le\mathrm{tr}((A^{r/2}B^rA^{r/2})^p),\quad A,B\ge 0,\quad r\ge 1,p>0.$$

This inequality is a generalization of the one due to Lieb and Thirring, and closely related to the Golden-Thompson inequality.

Theorem 2. *A positive normal functional φ on von Neumann algebra $\mathcal{M}$ is tracial if and only if*

$$\varphi((A^{1/2}BA^{1/2})^{rp})\le\varphi((A^{r/2}B^rA^{r/2})^p)$$

for some $r>1$, $p>0$ and for all positive operators A,B in $\mathcal{M}$.

We also give the affirmative answer to the question of J. Zemánek (a review Zbl 0942.15015, Zentralblatt MATH).

Supported by the Russian Federal Agency of Science and Innovations (contract 02.740.0193).

Sharp spectral stability estimates for uniformly elliptic differential operators

V.I. Burenkov
(L.N.Gumilyov Eurazian National University)
E-mail: *burenkov@cardiff.ac.uk*

We consider the eigenvalue problem for the operator

$$Hu=(-1)^m\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}D^\alpha\left(A_{\alpha\beta}(x)D^\beta u\right),\quad x\in\Omega,$$

subject to homogeneous Dirichlet or Neumann boundary conditions, where $m\in\mathbb{N}$, Ω is a bounded open set in $\mathbb{R}^N$ and the coefficients $A_{\alpha\beta}$ are real-valued Lipschitz continuous functions satisfying $A_{\alpha\beta}=A_{\beta\alpha}$ and the uniform ellipticity condition

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m}A_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta\ge\theta|\xi|^2$$

for all $x\in\Omega$ and for all $\xi_\alpha\in\mathbb{R},|\alpha|=m$, where $\theta>0$ is the ellipticity constant.

We consider open sets Ω for which the spectrum is discrete and can be represented by means of a non-decreasing sequence of non-negative eigenvalues of finite multiplicity $\lambda_1[\Omega]\le\lambda_2[\Omega]\le\dots\le\lambda_n[\Omega]\le\dots$ Here each eigenvalue is repeated as many times as its multiplicity and $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n[\Omega]=\infty$.

The aim is sharp estimates for the variation $|\lambda_n[\Omega_1]-\lambda_n[\Omega_2]|$ of the eigenvalues corresponding to two open sets Ω_1, Ω_2 with continuous boundaries, described by means of the same *fixed* atlas $\mathcal{A}$.

There is vast literature on spectral stability problems for elliptic operators. However, very little attention has been devoted to the problem of spectral stability for higher order operators and in particular to the problem of finding explicit qualified estimates for the variation of the eigenvalues.

Our analysis comprehends *operators of arbitrary even order*, *with homogeneous Dirichlet or Neumann boundary conditions*, and *open sets admitting arbitrarily strong degeneration.*

Three types of estimates will be under discussion: for each $n\in\mathbb{N}$ for some $c_n>0$ depending only on n, $\mathcal{A},m,\theta$ and the Lipschitz constant L of the coefficients $A_{\alpha\beta}$

$$|\lambda_n[\Omega_1]-\lambda_n[\Omega_2]|\le c_nd_{\mathcal{A}}(\Omega_1,\Omega_2),$$

where $d_{\mathcal{A}}(\Omega_1,\Omega_2)$ is the so-called *atlas distance* of Ω_1 to Ω_2,

$$|\lambda_n[\Omega_1]-\lambda_n[\Omega_2]|\le c_n\omega(d_{\mathcal{HP}}(\partial\Omega_1,\partial\Omega_2)),$$

where $d_{\mathcal{HP}}(\partial\Omega_1,\partial\Omega_2)$ is the so-called *lower Hausdoff-Pompeiu deviation* of the boundaries $\partial\Omega_1$ and $\partial\Omega_2$ and ω is the common modulus of continuity of $\partial\Omega_1$ and $\partial\Omega_2$, and, under certain regularity assumptions on $\partial\Omega_1$ and $\partial\Omega_2$,

$$|\lambda_n[\Omega_1]-\lambda_n[\Omega_2]|\le c_n\mathrm{meas}\left(\Omega_1\Delta\Omega_2\right),$$

where $\Omega_1 \Delta \Omega_2$ is the symmetric difference of Ω_1 and Ω_2.

Joint work with P.D. Lamberti.

Supported by the RFBR grant (project 08-01-00443).

Blow-up Solutions of Nonlinear Parabolic and Hyperbolic Equations

T.S. Gadjiev, R.A. Rasulov
(Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan)
E-mail: *tgadjiev@mail.az, tgadjiev@yahoo.com*

In this paper the unbounded increasing solutions of the scalar nonlinear partial parabolic and hyperbolic equations for the finite time is investigated.

The sufficient condition for nonlinearity is established. Under this condition every solution of the investigated problem is blown-up. I.e., there is the number $T > 0$ such that

$$\|u(x,t)\|_{L_2(R^n)} \to \infty, t \to T < \infty$$

The existence of the solution is proved by smallness of the initial function.

These type of nonlinear equations describe the processes of electron and ionic heat conductivity in plasma, fusion of neutrons and etc. One of the essential ideas in theory of evolutional equations is known as method of eigenfunctions. In this paper we apply such method.

In [1] the existence of unbounded solution for finite time with a simple nonlinearity have been proved. In [2] has been shown that, under the critical exponent any nonnegative solution is unbounded increasing for the finite time. Similar results were obtained in [3] and corresponding theorems are called Fujita-Hayakawa's theorems. More detailed reviews can be found in [4], [5] and [6].

The analogous questions is also considered for nonlinear hyperbolic equations.

References

[1] S. Kaplan, On the growth of solution of quasi-linear parabolic equations,
Comm. Pure and Appl. Math., vol. 16, 1963, 305-330.

[2] H.Fujita, On the blowing up solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo I, vol. 13, 1996, 109-124.

[3] K.Hayakawa, On non existence of global solutions of some semi linear
parabolic equations, Proc Japan Acad, Ser. A, Math. Sci., vol. 49, 1973, 503-505.

[4] V.A. Galaktionov, N. Levine, A general approach to critical Fujita exponents
and systems, Nonlinear Anal., vol. 34, 1998, 1005-1027.

[5] K.Deng, N. Levine, The role of critical exponents in blow-up theorems.
J. Math. Anal. Appl., vol. 243, 2000, 85-126.

[6] A.A.Samarskii, V.A.Galaktionov, Kurdyumov, Mikahailov, Blow-up in quasi linear parabolic equations, Nauka, Moskow,1987.

On Sturm-Liouville problems with singular coefficients

A.S. Goriunov, V.A. Mikhailets
(Institute of Mathematics, NAS of Ukraine, Kyiv)
E-mail: *goriunov@imath.kiev.ua, mikhailets@imath.kiev.ua*

The talk deals with the singular Sturm-Liouville expressions

$$l(y) = -(p(t)y')' + q(t)y$$

on a finite interval $\mathcal{J} \ni t$ with coefficients

$$q = Q', \quad 1/p, Q/p, Q^2/p \in L(\mathcal{J}, \mathbb{C}).$$

Here derivative of the function Q is understood in the sense of distributions. Due to a special regularization $D^{[0]}y = y$, $D^{[1]}y = py' - Qy$, $D^{[2]}y = (D^{[1]}y)' + \frac{Q}{p}D^{[1]}y + \frac{Q^2}{p}y$,
these expressions may be defined as Shin-Zettl *quasi*-differential expressions

$$l[y] := -D^{[2]}y.$$

Therefore corresponding maximal and minimal operators are correctly defined as quasi-differential. In the case of regular coefficients they coincide with the classic Sturm-Liouville operators.

A resolvent approximation of two-point boundary-value problems is investigated. In the symmetric case ($p = \overline{p}, Q = \overline{Q}$) bijective parametric descriptions of all self-adjoint and maximal dissipative extensions of the minimal operator are found. They are given in terms of homogenous boundary conditions of the canonic form. These descriptions are bicontinuous with respect to a parameter.

The case $p \equiv 1$ was studied in [1]. Some our results are new for this case too [2]. Statements of results may be found in [3].

References

1. *A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov* Sturm-Liouville operators with singular potentials. // Math. Notes. – 1999. – **66**, № 5-6.

2. *A. S. Goriunov, V. A. Mikhailets* Resolvent convergence of Sturm-Liouville operators with singular potentials. // Matn Notes. – 2010. – **87**, № 2. (arXiv:1001.4160[math.FA]).

3. *A. S. Goriunov, V. A. Mikhailets* Regularization of singular Sturm-Liouville equations. // Methods Funct. Anal. Topology. – 2010. – № 2. (arXiv:1002.4371[math.FA]).

THE EXTREMAL SPLINES IN MARKOV-FRIEDRICHS-KOLMOGOROV INEQUALITIES

G.A. Kalyabin

(Каф. мат. анализа и теории функций РУДН)

E-mail: *gennadiy.kalyabin@gmail.com*

In [1] the constructive formulas were obtained for the sharp (i.e. the least possible) constants $A_{r,k}(x),\ r \in \mathbb{N},\ k \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ in the inequalities

$$|f^{(k)}(x)| \leq A_{r,k}(x) \left(\int_{-1}^{1} |f^{(r)}(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}; \quad f \in \overset{\circ}{W}{}_2^r (-1, 1), \tag{1}$$

namely:

$$((r-k-1)!)^2 A_{r,k}^2(x) = \frac{(1-x^2)^{2r-2k-1}}{2^{2r-2k-1}(2r-2k-1)} - \sum_{n=r-k}^{r-1} (n+0.5) \left| \int_{-1}^{x} (x-t)^{r-k-1} P_n(t) \, dt \right|^2, \tag{2}$$

where $P_n(t)$ stand the classical Legendre polynomials orthogonal on $[-1, 1]$.

According to the general theory of extremalities [2, § 2.5] the function $f_{r,k}(t; x)$ yielding the solution of the problem

$$\int_{-1}^{1} |f^{(r)}(t)|^2 \, dt \to \min; \quad f^{(k)}(x) = 1, \quad f \in \overset{\circ}{W}{}_2^r (-1, 1), \tag{3}$$

is a polynomial of the degree $\leq (2r-1)$ on both segments $[-1, x]$ and $[x, 1]$.

Our aim is to give explicit expressions for the splines $f_{r,k}$ in the case $x = 0$.

Theorem. *Let $m := [k/2],\ j := k - 2m$; then for $t \in [0, 1]$ one has*

$$f_{r,k}(t; 0) = (-1)^k f_{r,k}(-t; 0)$$
$$= Q_{r,k} \Big(- t^{2r-k-1} + t^j \sum_{s=0}^{r-1} \binom{r-m-j-0.5}{s} (1-t^2)^s \Big), \tag{4}$$

where the positive constants

$$Q_{r,k} := (k!)^{-1} \binom{r-m-j-0.5}{m}^{-1} \binom{r+j-0.5}{r-m-1}^{-1}. \tag{5}$$

The work was supported by grants of RFBR No 08-01-00443, 06-01-00341, 06-01-04006 and DFG-Projekt, GZ: 436 RUS113/90/0-1.

REFERENCES

1. *Kalyabin G.A.* Sharp estimates for functions of class $\overset{\circ}{W}{}_2^r (-1, 1)$. Doklady Mathematics,

2009, Vol. 80, No 2, pp. 713 – 715.
2. *Tikhomirov, V. M.* Some problems of approximation theory. Moscow State University Publishers, 1976.

On removable sets of solutions of elliptic equations

M.I. Arazm, T.S. Gadjiev, V.A. Mamedova
(Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan)
E-mail: *tgadjiev@mail.az, vafa_ eng6@yahoo.com*

We consider a nondivergent elliptic equation of second order whose leading coefficients are from some weight space. The sufficient condition of removability of a compact with respect to this equation in the weight space of Hölder functions was found.

Let D be a bounded domain situated in n-dimensional Euclidean space E_n of the points $x = (x_1, ..., x_n)$, $n \geq 3$, ∂D be its boundary. Consider in D the following elliptic equation

$$\mathcal{L}u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{_{ij}} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\, u_{_i} + c(x)\, u = 0, \tag{1}$$

in supposition that $\|a_{ij}(x)\|$ is a real symmetric matrix, moreover $\omega(x)$ is a positive measurable function.

$$\gamma\, |\xi|^2\, \omega(x) \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \leq \gamma^{-1} \omega(x)\, |\xi|^2 ;\ \xi \in E_n,\ x \in D, \tag{2}$$

$$a_{ij}(x) \in C^1_\omega\left(\overline{D}\right);\ i, j, 1, ..., n, \tag{3}$$

$$|b_i(x)| \leq b_0;\ -b_0 \leq c(x) \leq 0;\ i = 1, ..., n;\ x \in D. \tag{4}$$

The compact $E \subset \overline{D}$ is called removable with respect to the equation (1) in the space $C^\lambda_\omega(D)$ if from

$$\mathcal{L}u = 0,\ x \in D\backslash E;\ u|_{\partial D\backslash E} = 0;\ u(x) \in C^\lambda_\omega(D) \tag{5}$$

it follows that $u(x) \equiv 0$ in D.

Theorem. *Let D be a bounded domain in E_n, $E \subset \overline{D}$ be a compact. If with respect to the coefficients of the operator $\mathcal{L}$ the conditions (2)-(4) are fulfilled, then for removability of the compact E with respect to the equation (1) in the space $C^\lambda_\omega(D)$ it sufficies that*

$$m_H^{n-2+\lambda}(E) = 0.$$

Smoothness of Hill's potential and its spectral gaps

V. Molyboga
(Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv)
E-mail: *molyboga@imath.kiev.ua*

Let $\{\gamma_q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ be the lengths of spectral gaps in a continuous spectrum of the Hill-Schrödinger operators

$$S(q)u = -u'' + q(x)u, \quad x \in \mathbb{R},$$

with 1-periodic real-valued potentials $q \in L^2(\mathbb{T})$. Let weight function $\omega :\ [1,\infty) \to (0,\infty)$. We prove that under the condition

$$\exists s \in [0,\infty): \quad k^s \ll \omega(k) \ll k^{s+1},\ k \in \mathbb{N},$$

the map $\gamma :\ q \mapsto \{\gamma_q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfies the equalities [1]:

$$\texttt{i)}\quad \gamma(H^\omega) = h^\omega_+, \qquad\qquad \texttt{ii)}\quad \gamma^{-1}\left(h^\omega_+\right) = H^\omega.$$

Here the real function space

$$H^\omega = \left\{ f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik2\pi x} \in L^2(\mathbb{T}) \;\middle|\; \sum_{k\in\mathbb{N}} \omega^2(k) |\widehat{f}(k)|^2 < \infty,\ \widehat{f}(k) = \overline{\widehat{f}(-k)},\ k \in \mathbb{Z} \right\},$$

and

$$h^\omega = \left\{ a = \{a(k)\}_{k\in\mathbb{N}} \middle| \sum_{k\in\mathbb{N}} \omega^2(k)|a(k)|^2 < \infty \right\},$$
$$h^\omega_+ = \{a = \{a(k)\}_{k\in\mathbb{N}} \in h^\omega \mid a(k) \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

If the weight ω is such that

$$\exists a > 1, c > 1: \qquad c^{-1} \leq \frac{\omega(\lambda t)}{\omega(t)} \leq c \quad \forall t \geq 1,\ \lambda \in [1, a],$$

then the function class H^ω is a real Hörmander space $H^\omega_2(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ with the weight $\omega(\sqrt{1+\xi^2})$, see [2] and the references therein.

All results were obtained jointly with Prof. Vladimir Mikhailets.

The investigation is partially supported by DFFD of Ukraine under grant 28.1/017.

References.

1. V. Mikhailets, V. Molyboga, *Smoothness of Hill's potential and lengths of spectral gaps*, arXiv: math.SP/1003.5000.

2. V. Mikhailets, A. Murach, *On the elliptic operators on a closed compact manifold*, Reports of NAS of Ukraine (2009), no. 3, 29–35. (Russian)

Exponential characteristics of differential-difference problems in Banach spaces

L.K. Orlik

(Russian State Social University, Moscow; Moscow Border Guard Institute of)

E-mail: *Lubov.orlik@gmail.com*

Consider the differential-difference problem:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} - \sum\limits_{j=1}^{n} A_j(t)y(t-a_j) = f(t) & (0 \leq t < \infty), \\ y(t) = 0 & (t \leq 0), \end{cases} \tag{1}$$

in the region $0 \leq t < \infty$. Here $0 \leq a_1 < \ldots < a_n$, $(a_j \in \mathbb{R})$, $f(t)$, $y(t)$ are continuous vector-functions whose values lie in some complex Banach space X; $A_j(t)$ are families of bounded linear almost periodic operators which act in X.

Let

$$E_\alpha = \left\{ f(t) \colon \overline{\lim_{t\to\infty}} \left(t^{-1} \ln \|f(t)\|_X \right) < \alpha + \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0 \right\}.$$

The totality of solutions y is covered by E_β for β sufficiently large if f ranger over $B_\alpha \supset E_\alpha$, B_α is a Banach space which respect to the norm

$$\|f\|_{B_\alpha} = \sup_{0\leq t<\infty} \|f(t)\|_X e^{-\alpha t}.$$

Denote by $\inf \beta = \varkappa(\alpha)$ and is called exponential characteristic of problem (1).

Theorem. There exists an $(-\infty <)\, \alpha_0 \leq \beta_0 \leq \gamma_0 \,(< +\infty)$ such that $\varkappa(\alpha) = \beta_0$ for $\alpha \leq \alpha_0$; $\varkappa(\alpha) = \alpha$ for $\alpha \geq \gamma_0$; $\varkappa(\alpha)$ is increasing function on (α_0, γ_0). That is has the cvazicanonical form (fig.1)

For problem (1) with periodic coefficients we get $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0$ and $\varkappa(\alpha) = \max(\alpha, \alpha_0)$.

Here β_0 is highest exponent and γ_0 is general exponent of associated homogeneous problem. That is has the canonical form (fig. 2).

REFERENCES

1. Orlik L.K. Exponential characteristic of evolutional equation in Banach space. Moscow, VARXBZ, 2005, 400 p.

2. Orlik L.K. Exponential characteristic of hyperbolic partial differential equation in Banach space / International Conference: Modern Analysis and Applications (MMA 2007) dedicated to the centenary of Mark Krein, Odessa, Ukraine, april 9–14 ,2007, P.106–107.

3. Orlik L.K. On the Order of Exponential Growth of Solutions of Linear Difference and Partial Differential Equations in Banach Space / Ukrainian Mathematical Congress — 2009 dedicated to the centennial of N.N. Bogoliubov, Kiev. Ukraine (Aug. 27–29, 2009).

4. Orlik L.K. Exponential characteristic of differential-difference problem in Banach space/Тезисы докладов Российской школы конференции “Математика,информатика,их приложения и роль в образовании”. — М.:РУДН, 2009, С. 36–38.

Around approximation properties of type p

Q. Latif, O. Reinov

(Abdus Salam School of Mathematical Sciences, Lahore, Pakistan; Department of Mathematics and Mechanics, Saint Petersburg State University)

E-mail: *orein51@mail.ru*

Answering in negative a question of Sinha D.P. and Karn A.K. posed in the paper [1] (whether for $p \in [1, 2)$ every Banach space has the approximation property of type p of [1]), we obtained also some new results in this direction. Recall (see [1])that a Banach space X has the AP of type p, $1 \leq p \leq \infty$, if for every Banach space Y each absolutely p -summing operator $T : Y \to X$ can be approximated in topology of π_p-compact convergence (see [1,2] or arXiv:1002.3902v1 [math.FA], and also arXiv:1003.0085v1 [math.FA]) by finite rank operators from Y to X.

We define, generally, the properties of bounded approximation (BAP) of type p, by using the same topology, and in a quite natural manner. Then we characterize them (and the AP of type p) in terms of *new* types of tensor products (in a sense, "strange tensor products") and consider the natural questions if the AP's and those BAP's of type p give us different notions (for $p \neq 2$).

The answers are rather curious if comparing with the corresponding results around the usual Grothendieck's approximation and bounded approximation properties.

The research was supported by the Higher Education Commission of Pakistan.

References.

1. D.P. Sinha, A.K. Karn, *Compact operators which factor through subspaces of l_p*, Math. Nachr. **281** (2008), 412–423.

2. O.I. Reinov, *Approximation of operators in Banach spaces,* Application of functional analysis in the approximation theory, KGU, Kalinin, (1985), 128-142.

On removable sets of the first boundary-value problem for degenerated elliptic equations

T.S. Gadjiev, V.A. Mamedova, A.I. Shariffar

(Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan)

E-mail: *tgadjiev@mail.az, vafa_ eng6@yahoo.com*

Let's consider the elliptic equation in the bounded domain $D \subset E_n$

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = f(x)$$

In assumption, that $\|a_{ij}(x)\|$ is a real symmetric matrix with measurable in D elements, moreover for all $\xi \in E_n$ and a.e. $x \in D$ the condition

$$\gamma \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \gamma^{-1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) \xi_i^2 \tag{1}$$

$$\lambda_i(x) = (|x|_\lambda)^{\alpha_i}, \quad |x|_\alpha = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \frac{2}{2+\alpha_i}, \; 0 \leq \alpha_i < \frac{2}{n-1} \tag{2}$$

Here $\gamma \in (0, 1]$ is a constant.

Denote by $\mathcal{M}(D)$ the set of all bounded in D functions.

The compact E is called the removable relative to the first boundary value problem for the operator L in the space $\mathcal{M}(D)$, if all generalized solution of the equation $\mathcal{L}u = 0$ in ∂ / E formed in zero on ∂D and belonging to the space $\mathcal{M}(D)$, identically equal to zero.

Theorem. *Let relative to the coefficients of the operator $\mathcal{L}$, conditions (1)-(2) be fulfilled. Then for removability of the compact $E \subset D$ relative to the first boundary value problem for the operator $\mathcal{L}$ in the space $\mathcal{M}(D)$ it is necessary and sufficient, that*

$$cap_{\mathcal{L}}(E) = 0,$$

$cap_{\mathcal{L}}(E)$ is a capacity.

Теоремы о равносходимости для оператора Штурма-Лиувилля с потенциалами $q \in W_2^{\theta}$, $\theta \geqslant -1$

И.В. Садовничая
(МГУ имени М.В.Ломоносова)
E-mail: *ivsad@yandex.ru*

В докладе будет рассмотрен оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly = l(y) = -\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)y, \tag{1}$$

в пространстве $L_2[0,\pi]$ с краевыми условиями Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$. Предполагаем, что потенциал имеет вид $q(x) = u'(x)$, $u \in W_2^{\theta}[0,\pi]$, $0 \le \theta < 1/2$, где производная понимается в смысле теории распределений, а через $W_2^{\theta}[0,\pi] = [L_2, W_2^1]_{\theta}$ обозначается пространство Соболева с дробным индексом.

Теорема 1. *Пусть $R > 0$. Рассмотрим оператор (1), действующий в пространстве $L_2[0,\pi]$ с краевыми условиями Дирихле. Предположим, что потенциал имеет вид $q(x) = u'(x)$, где $u(x)$ — комплекснозначная функция из пространства $W_2^{\theta}[0,\pi]$, $0 < \theta < 1/2$, причем $\|u\|_{W_2^{\theta}} \le R$. Пусть $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система собственных и присоединенных функций оператора L и $\{w_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — биортогональная к ней система. Для произвольной функции $f \in L_2[0,\pi]$ обозначим $c_n := (f(x), w_n(x))$ и $c_{n,0} := \sqrt{2/\pi}(f(x), \sin nx)$. Тогда существует натуральное число $M = M_{\theta,R}$, такое, что*

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} c_n y_n(x) - \sum_{n=1}^{m} \sqrt{\frac{2}{\pi}} c_{n,0} \sin nx \right\|_{W_2^{\theta}} \le C_{\theta,R} \left(\sqrt{\sum_{n \ge \sqrt{m}} |c_{n,0}|^2} + \frac{\|f\|_{L_2}}{m^{\theta(1-\theta)}} \right)$$

при любом $m \geqslant M$.

Теорема 2. *Рассмотрим оператор (1), действующий в пространстве $L_2[0,\pi]$, с краевыми условиями Дирихле. Предположим, что потенциал имеет вид $q(x) = u'(x)$, где $u(x)$ — комплекснозначная функция из пространства $W_2^{\theta}[0,\pi]$, $0 \le \theta < 1/2$. Пусть $f \in L_2[0,\pi]$. Тогда*

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} c_n y_n(x) - \sum_{n=1}^{m} \sqrt{\frac{2}{\pi}} c_{n,0} \sin nx \right\|_{C^{\theta}} \to 0, \quad m \to +\infty.$$

Об асимптотиках собственных значений и собственных функций оператора Штурма-Лиувилля с потенциалами распределениями

А.М. Савчук
(МГУ имени М.В.Ломоносова, механико-математический ф-т)
E-mail: *artem_savchuk@mail.ru*

В докладе будет рассмотрен оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly = l(y) = -\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)y,$$

в пространстве $L_2[0,\pi]$ с краевыми условиями Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$. Предполагаем, что потенциал имеет вид $q(x) = u'(x)$, $u \in L_2^[0,\pi]$, где производная понимается в смысле теории распределений.

Операторы такого вида были определены и подробно исследованы в работах [1]–[3]. В частности, было доказано, что оператор L имеет чисто дискретный спектр и были получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций. В этих формулах асимптотическое разложение собственных функций содержало только главный член асимптотики, а оценка остатка зависела от потенциала q. В настоящем докладе будет обсуждаться вид второго асимптотического слагаемого и будут получены оценки остатка в терминах $\|q\|$. Эти разложения и подобные оценки оказались очень полезными для доказательства теорем о равносходимости (см. [4]).

Доклад основан на совместной работе с А.А.Шкаликовым.

Литература:

[1] *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки, Том 66. No. 6 (1999). С. 897–912.

[2] *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Операторы Штурма-Лиувилля с потенциалами-распределениями// Труды Моск. Матем. общества, Том 64 (2003). С. 159–219.

[3] *Savchuk A.M., Shkalikov A.A.* Inverse problem for Sturm–Liuville operators with distribution potentials: Reconstruction from two spectra//, Russian Journal of Math. Physics, V.12. 2005. P. 507–514.

[4] *Садовничая И.В.* Теоремы о равносходимости для операторов Штурма-Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева $W_2^{-1}[0,\pi]$// arXiv:0806.3016.

3. Смежные вопросы математического анализа

Пространственные аналоги изопериметрического неравенства Е. Николаи

Ф.Г. Авхадиев
(Казанский государственный университет)
E-mail: *favhadiev@ksu.ru*

Рассмотрим обобщенный функционал Сен-Венана

$$P(\Omega) = 2 \int_{\Omega} u(x)\, dx,$$

где Ω – область в n-мерном евклидовом пространстве, а $u = u(x)$ – обобщенное решение краевой задачи: $\Delta u = -2, \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega;\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega$. Кроме того, нам потребуются моменты инерции области относительно координатных плоскостей, определяемые формулами:

$$I_k(\Omega) = \int_{\Omega} x_k^2\, dx \quad (k = 1, 2, ..., n).$$

Пользуясь гармоническим средним этих моментов, мы доказываем следующее обобщение классического изопериметрического неравенств Е. Николаи для жесткости кручения односвязной плоской области.

Теорема. *Для любой области Ω в n-мерном евклидовом пространстве справедливо неравенство*

$$P(\Omega) \le 4 \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{I_k(\Omega)} \right) \right]^{-1}.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда Ω является эллипсоидом с центром в начале координат.

Мы обсуждаем также возможность получения двухсторонних оценок для $P(\Omega)$ с использованием различных инерциальных моментов для выпуклых и произвольных областей Ω.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 08-01-00381) и Федерального Агентства по науке и инновациям (госконтракт №02.740.11.0193).

Функциональные пространства $\mathbf{A}_N$, $\mathbf{A}_S$, $\mathbf{A}_{NS}$ и их приложения в задачах геофизической гидродинамики

В.И. Агошков
(Институт выч. мат. РАН, МГУ им. М.В.Ломоносова)
E-mail: *agoshkov@inm.ras.ru*

Аннотация. В [5, 6] введены функциональные пространства $\mathbf{A}_N$, $\mathbf{A}_S$, $\mathbf{A}_{NS}$ вектор-функций, определенных в шаровых слоях и подчиненных особым условиям в 'полюсных точках', а также изучен ряд свойств этих пространств, играющих важную роль при исследовании разрешимости и численном решении краевых задач геофизической гидродинамики. Так, с применением указанных пространств может быть изучена проблема оценки границ спектра операторов типа $\mathcal{A} = \mathrm{div}\Delta^{-1}\mathrm{grad}$ (– "операторы давления"), которая связана как с вопросами разрешимости целого класса задач, так и с формулировкой эффективных алгоритмов их решения. Одни из первых результатов по изучению свойств таких операторов получены в

[2], где в случае использования декартовой системы координат получен принципиальный результат – существование обратного ограниченного оператора $\mathcal{A}^{-1}$ при некоторых дополнительных условиях. Оценкам границ спектра подобных операторов (с получением явной зависимости их от геометрических параметров области, в которой решается задача) посвящена работа [3]. Распространение результатов этих работ на операторы "типа $\mathcal{A}$", возникающие в задачах геофизической гидродинамики, рассмотрено в [4,5]. Отмечаем, что как известно, применение криволинейных ортогональных систем координат при изучении задач геофизической гидродинамики на сфере (или в шаровом слое) вносит специфические сингулярности в задачу. Поэтому как исследование свойств операторов "типа $\mathcal{A}$", а также получение оценок границ, их спектра становится зачастую нетривиальной задачей.

В настоящей работе на основе общей теории функциональных просиранств [1] получены новые результаты, относящиеся к пространствам $\mathbf{A}_N$, $\mathbf{A}_S$, $\mathbf{A}_{NS}$: доказаны теоремы вложения этих пространств в пространства L_p; получены условия асимптотических разложений гладких вектор-функций в окрестности 'полюсных точек'; продолжено изучение проблемы оценки границ спектра операторов "типа $\mathcal{A}$".

В работе рассмотрен также ряд приложений полученных результатов к конкретным задачам геофизической гидродинамики.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 09-01-12029-офи-м, 10-01-00806)

Список литературы

1. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977 , 456 стр.
2. Crouzeix M. Etude d'une méthode de linéarisation. Résolution numérique des équations de Stokes stationnaires. Applications aux équations de Navier–Stokes stationnaires. – In "Approximations et Méthodes Iteratives de Résolutions Variationnelles et de Problémes Non Linéaires", Cah. de lÍRIA, 12, 139-244 (1974).
3. Чижонков Е.В. Релаксационные методы решения седловых задач. – М.: Институт вычислительной математики РАН, 2002.
4. Agoshkov V.I. Estimates of spectrum bounds for some operators in geophysical hydrodynamics. – Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, V. 23, No. 4, 2008, pp. 305-327.
5. Agoshkov V.I. Spectrum bounds for some operators. – Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, V. 24, No. 2, 2009, pp. 1-31.
6. Агошков В.И. Функциональные прстранства $\mathbf{A}_N$, $\mathbf{A}_S$, $\mathbf{A}_{NS}$ и оценка границ спектра одного класса операторов . – Материалы международной конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложений", 30 марта - 02 апреля 2009г., Москва, МГУ ,стр.112.

Информационный подход в задачах восстановления операторов и их значений

Е.Н. Горохова
(ГВУЗ «Киевский нац. эконом. ун-т им. Вадима Гетьмана»)
E-mail: *LenaG78@bigmir.net*

В роботах Н. П. Корнейчука [1,2,3] среди актуальных вопросов современного развития теории приближений особое внимание уделялось проблематике, связанной с информационным подходом к задачам аппроксимации, которые можно интерпретировать как задачи восстановления некоторого математического объекта по неполной дискретной информации. В частности, в [3] введено понятие слабо известных элементов операторного уравнения $Ax = y$, где оператор A принадлежит пространству линейных ограниченных операторов, действующих в линейных нормированных пространствах из X в Y, а также сформулированы три основные задачи восстановления операторов и его значений по неполной дискретной информации, постановка одной из которых следующая

Пусть известен или слабо известен оператор A, слабо известно в пространстве Y его значение $y = Ax$ на элементе x, который надо приближенно восстановить, зная лишь то, что он принадлежит области определения оператора A в пространстве X.

В рамках этой задачи для интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$\int_0^1 K(t,u)x(t)dt = y(u), 0 \leq u \leq 1, x \in X, y \in Y,$$

где X и Y - пространства периодических функций, установлены аппроксимативные характеристики (оценки погрешности невязки) слабых решений исходного уравнения, представленных с помощью базисов из 1-периодических моносплайнов Бернулли порядка $r \geq 1$ и 1-периодических нормированных

В-сплайнов порядка $r \geq 2$ минимального деффекта, согласованных с гладкостью правой части $y(u)$ и ядра $K(t,u)$ по дискретной информации о правой части, заданной соответственно наборами интерполяционных функционалов и интерполяционных функционалов специального вида.

Литература

1. Н. П. Корнейчук, Сплайны в теории приближений. - М.: Наука, 1984. - 352 с.
2. N. P. Korneichuk *Encoding and recovery of operator values* J. Comlexity. - 1992. - Vol. 8. - P. 79-91.
3. Н. П. Корнейчук *Информационные аспекты в теории приближения и восстановление операторов* Укр.Мат.Журн. - 1999. **51**, №3. с.314-327.

Оптимизация циклических процессов с дисконтированием

А.А. Давыдов, Т.С. Шуткина
(Владимирский гос. ун-т; Владимирский государственный университет)
E-mail: *davydov@vlsu.ru, shutkina@vlsu.ru*

Циклический процесс моделируется управляемой системой на окружности с управляющим параметром, пробегающим компактное гладкое многообразие. При наличии непрерывной плотности выгоды f на окружности возникает задача выбора цикла с максимумом средней временной выгоды за один оборот. Известно, что такой цикл существует при достаточно общих ограничениях на управляемую систему и плотность выгоды [1], [2], [3], [4]. Например, при отсутствиии дисконтирования оптимальное движение устроено довольно просто - оно использует максимальные и минимальные допустимые скорости на участках, где плотность выгоды соответственно меньше либо больше максимальной средней временной выгоды за цикл. Оказалось, что аналогичные результаты имеют место и в случае с дисконтированием получаемой выгоды или прилагаемого усилия, то есть когда ищется максимум функционала

$$\int\limits_0^T e^{-\alpha t} f(x(t))dt / \int\limits_0^T e^{-\beta t} dt$$

с некоторыми вещественными показателями дисконтирования $\alpha > 0$ и β.

В докладе будут изложены эти и смежные результаты.

Литература

1. V.I. Arnol'd - *Averaged optimization and phase transition in control dynamical systems*// Funct. Anal. and its Appl. **36** (2002), 1-11.
2. A.A Davydov, H. Mena-Matos - *Singularity theory approach to time averaged optimization*// Singularities in geometry and topology, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007, 598-628.
3. А. А. Давыдов - *Особенности типичного дохода в модели Арнольда циклических процессов*// Тр. МИАН, 250, Наука, М., 2005, 79–94.
4. А. А. Давыдов, Т. С. Шуткина - *Оптимизация циклического процесса с дисконтированием по его средней временной выгоде* // УМН, 64:1(385),(2009), 143-144.

Осциллирующие функции и весовые пространства Соболева

Т.Е. Денисова
(Московский городской психолого-педагогический университет)
E-mail: *DenisovaTE@mgppu.ru*

В докладе будут рассмотрены функции, осциллирующие на полуоси $\mathbb{R}^+$, т.е. функции, определённые и непрерывные на полуоси $\mathbb{R}^+$ и меняющие знак в любой окрестности бесконечно удалённой точки $+\infty$. Функции такого вида возникают при решении различных классов задач. Например, хорошо известны результаты школы академика Соболева С.Л. о почти периодичности решений уравнений Соболева только для некоторых пространственных областей (эллипсоид и цилиндр). В случае произвольной области решение не является почти периодическим, но может быть осциллирующим.

Осциллирующие функции не образуют линейного векторного пространства, поэтому для их изучения предлагается рассматривать некоторые функциональные пространства, содержащие осциллирующие функции. Такой подход использует результаты и методы работ Успенского С.В. и его учеников.

В весовом пространстве Соболева $W_{p,\alpha}^N(\mathbb{R}^+)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{R}$, $p > 1$ определим подпространство $QW_{p,\alpha}^N(\mathbb{R}^+) = \{f \in W_{p,\alpha}^N(\mathbb{R}^+) | \exists D^k f(0^+) \in \mathbb{R}$ $\forall k \in \{0, 1, ..., N\}, \exists \sup\limits_{(0,1]} \left|\hat{f}(\gamma)\right| \in \mathbb{R}^+\}$, где $\hat{f}(\gamma)$ — преобразование Лапласа, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$. Связь между такого типа пространствами и осциллирующими функциями устанавливает следующее предложение.

Лемма. Если $f \in QW_{p,\alpha}^N(\mathbb{R}^+)$, то $D^k f$ — либо суммируемая, либо осциллирующая на полуоси $\mathbb{R}^+$ функция для всех $k \in \{0, 1, ..., N-1\}$.

В ряде задач математической физики требуется установить, в каком случае функция $f : \mathbb{R}^+ \times g \to \mathbb{R}$, где $g \subset \mathbb{R}^n$, будет осциллирующей по переменной t (по времени). Для решения этой задачи определим пространства $W_{p,\alpha}^N(\mathbb{R}^+, W_r^m(g)) = \{f \mid D_t^k f \in W_2^m(g)\ \forall t \in \mathbb{R}^+, \left\|D_t^k f, W_r^m(g)\right\| \in L_{p,\alpha}(\mathbb{R}^+)\, \forall k \in \{0, 1, ..., N\}\}$ с нормой $\left\|f, W_{p,\alpha}^N(\mathbb{R}^+, W_r^m(g))\right\|^p = \sum\limits_{k=0}^N \|\|\|D_t^k f, W_r^m(g)\|, L_{p,\alpha}(\mathbb{R}^+)\|^p$ и $QW_{p,\alpha}^N(\mathbb{R}^+, W_r^m(g)) = \{f \in W_{p,\alpha}^N(\mathbb{R}^+, W_r^m(g)) \mid \exists D_t^k f(0^+, x) \in \mathbb{R}\, \forall k \in \{0, 1, ..., N\}, \exists \sup\limits_{(0,1]} \left\|\hat{f}(\gamma, x), W_r^m(g)\right\| \in \mathbb{R}^+\}$ с нормой

$$\left\|f, QW_{p,\alpha}^N(\mathbb{R}^+, W_r^m(g))\right\| = \left\|f, W_{p,\alpha}^N(R^+, W_r^m(g))\right\| +$$
$$+ \sum_{k=0}^N \sup_{(0,1]} \left\|D_t^k \hat{f}(\gamma, x),\ W_2^m(g)\right\|.$$

Справедлив следующий результат.

Теорема. Для любой ограниченной области $g \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой (класса C^2) $(n-1)$-мерной границей выполнено вложение

$$D_x^\rho D_t^k W_{p,\alpha}^N(\mathbb{R}^+,\ W_r^m(g)) \subset QW_{p,\alpha}^{N-k}(\mathbb{R}^+)$$

для любого мультииндекса $\rho = (\rho_1, ..., \rho_n)$, определяемого неравенством $\sum\limits_{i=1}^n \rho_i < m - \frac{n}{2}$, для любого значения $x \in g$ и для всех $k \in \{[\alpha],\ [\alpha]+1,\ ..., N-1\}$ при $1 < \frac{1}{p} - \alpha \leqslant N+1$.

В качестве примера будет показана возможность применения данного подхода к изучению поведения решения $u(t, x)$ уравнения, если может быть получена оценка вида $\left\|D_t^k u,\ W_2^m(g)\right\| = O(t^{m-1}+1)$. В частности, для первой начально-краевой задачи уравнений соболевского типа из теоремы следует, что в случае, когда начальные функции принадлежат пространству Соболева W_2^m, производная решения соответствующего порядка является либо осциллирующей, либо суммируемой на полуоси $\mathbb{R}^+$ функцией.

Аппроксимационная теорема об интегралах вдоль контуров на комплексной плоскости и неинтегрируемость сферического маятника с периодически колеблющейся точкой подвеса

С.А. Довбыш
(Институт механики МГУ)
E-mail: *sdovbysh@yandex.ru*

Будем говорить, что конечный набор функций, голоморфных в некоторой области на комплексной плоскости и имеющих там неустранимые особенности, обладает свойством $(*)$, если любая их нетривиальная линейная комбинация оказывается функцией, имеющей неустранимую особенность.

Теорема. Пусть

$$f_i(t) = \sum_{n \in N_i} f_i^{(n)} e^{nt}, \quad 1 \leqslant i \leqslant I$$

— ряды, сходящиеся при малых e^t, где $N_i \subset \mathbb{N}$ — бесконечные арифметические прогрессии, причём $f_i^{(n)} \neq 0$ для всех $n \in N_i$, кроме, может быть, конечного количества. Пусть каждая из прогрессий N_i содержит бесконечное число членов, не принадлежащих всем другим прогрессиям. Пусть, наконец, функции $a_{ij}(t)$ и $b_{ij'}(t)$ $(1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J_i,\ 1 \leqslant j' \leqslant J_i')$, голоморфные в некоторой (T-периодической) области $D \subset \mathbb{C}$, имеют период $T \notin \sqrt{-1}\mathbb{R}$, причём для каждого i набор функций $a_{ij}(t)$ $(1 \leqslant j \leqslant J_i)$ обладает в D свойством $(*)$. Для любого ориентированного замкнутого контура $\Gamma \subset D$ введём обозначения

$$g_{ij}[\Gamma](t') = \oint_\Gamma f_i(t+t') a_{ij}(t)\, dt, \qquad h_{ij}[\Gamma](t') = \oint_\Gamma f_i(t+t') b_{ij}(t)\, dt.$$

Тогда для любых комплексных t_* и c_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J_i)$, вещественных положительных ε_*, ε и ограниченной области $V \subset \mathbb{C}$ найдутся такие число $t'_* \in \mathbb{C}$, удовлетворяющее неравенству $|t'_* - t_*| \leqslant \varepsilon_*$, и замкнутый контур $\Gamma \subset D$, что

$$|C^{-1}g_{ij}[\Gamma](t'_*) - c_{ij}| \leqslant \varepsilon, \qquad |C^{-1}h_{ij'}[\Gamma](t')| \leqslant C_1 \quad \text{при} \quad t' \in V$$

для всех i, j, j' с некоторыми константами C и C_1, где t'_* зависит лишь от ε_*, а C_1 не зависит от ε.

В качестве приложения теоремы рассмотрено расщепление комплексных сепаратрис в задаче о движении сферического маятника, точка подвеса которого совершает малые периодические колебания. Как следствие, с использованием ранее полученных автором результатов о неинтегрируемости многомерных систем, доказана неинтегрируемость этой задачи в наиболее сильном аналитическом смысле (отсутствие непостоянного комплексного мероморфного первого интеграла) при определённых условиях на особенности компонент ускорения точки подвеса как функций комплексного времени. Весьма примечательно, что этот результат справедлив независимо от характера особенностей, с чем раньше в строгих результатах о неинтегрируемости не приходилось сталкиваться.

Теорема о равномерных аттракторах полупроцессов

В.М. Ипатова
(Московский физико-технический институт)
E-mail: *ipatval@mail.ru*

Динамические системы, порождаемые диссипативными эволюционными уравнениями, и их аттракторы привлекают внимание исследователей в различных областях знаний. Первоначально аттракторы рассматривались только для автономных уравнений, затем это понятие было обобщено [1] на случай неавтономных эволюционных систем. Важным для приложений является вопрос о том, насколько близки аттракторы дискретных аппроксимаций математических моделей к их истинным аттракторам. Для автономных уравнений этот вопрос был изучен в [2], где была доказана теорема о полунепрерывной зависимости от параметра аттракторов семейств полудинамических систем. В работе [3] аналогичный результат был получен для равномерных аттракторов семейств полупроцессов, соответствующих неавтономным эволюционным уравнениям. В [2,3] предполагалось, что рассматриваемые семейства имеют общую полугруппу времени, поэтому при исследовании сходимости аттракторов конечно-разностных схем приходилось считать, что шаг сетки представляется в виде $\tau = \tau_n = T_0/n$, где T_0 – некоторое положительное число, $n \in \mathbb{N}$.

В настоящей работе доказана более общая теорема о полунепрерывной сверху зависимости от параметра равномерных аттракторов семейств полупроцессов для случая, когда рассматриваемые семейства могут не иметь общей полугруппы времени.

Работа выполнена при поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"на 2009 - 2013 годы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chepyshov V.V., Vishik M.I. Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension // J. Math. Pures Appl. – 1994. – V. 73. – P. 279-333.

2. Капитанский Л.В., Костин И.Н. Аттракторы нелинейных эволюционных уравнений и их аппроксимаций // Алгебра и анализ. – 1990. – Т. 2. – Вып. 1. – С. 114-140.

3. Ипатова В.М. Об аттракторах аппроксимаций неавтономных эволюционных уравнений // Математический сборник. – 1997. – Т. 188. – N 6. – С. 47-56.

Разложения типа Альманси для операторов второго порядка

В.В. Карачик
(Южно-Уральский гос. ун-т)
E-mail: *karachik@susu.ru*

В работе автора [1] были получены разложения типа Альманси для дифференциальных операторов вида $\Delta_\lambda = \lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, $\lambda_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ в ограниченной, звездной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. В настоящей заметке обосновывается возможность разложений типа Альманси

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |x|_A^{2k} u_k(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{1}$$

для операторов $L(D)$ второго порядка $L(D) = (A\nabla, \nabla)$, где матрица A порядка $n \times n$ невырожденная и симметричная, $|x|_A^2 = (A^{-1}x, x)$, причем следует считать, что $|x|_A^{2k} \equiv (|x|_A^2)^k$, а $u_k(x)$ – некоторые решения уравнения $L(D)u(x) = 0$ в звездной области Ω, определяемые единственным образом по заданной функции $f(x)$.

Теорема 1. *Пусть функция $f \in C^{2m+2}(\Omega)$ – произвольное решение уравнения $L^{m+1}(D)u = 0$ в Ω, тогда имеет место представление*

$$f(x) = v_0(x; f) + \sum_{k=1}^{m} |x|_A^{2k} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{k-1}\alpha^{n/2-1}}{4^k k!(k-1)!} v_k(\alpha x; f)\, d\alpha, \tag{2}$$

где функции $v_k(x; f)$ определяются из равенств

$$\begin{aligned} v_0(x; f) &= f(x) + \sum_{s=1}^{m} (-1)^s |x|_A^{2s} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{s-1}\alpha^{s+n/2-2}}{4^s s!(s-1)!} L^s(D) f(\alpha x)\, d\alpha, \\ v_k(x; f) &= v_0(x; L^k(D) f), \quad k = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{3}$$

Следствие. Пусть функция $f(x)$ – некоторое решение уравнения $L^{m+1}(D)u = 0$, тогда существуют такие функции $u_0(x), \ldots, u_m(x)$, являющиеся решениями уравнения $L(D)u = 0$, что имеет место представление (1)

$$f(x) = u_0(x) + u_1(x)|x|_A^2 + \cdots + u_m(x)|x|_A^{2m}.$$

Эту формулу можно привести к виду $f(x) = u(x) + (|x|_A^2 - 1)g(x)$, где $L(D)u = 0$. В частности, эта формула верна, когда $f(x)$ – полином и значит $f(x) = u(x)|_{|x|_A^2=1}$, т.е. решение $u(x)$ совпадает с $f(x)$ на множестве $|x|_A^2 = 1$. Существование полиномиальных решений краевых задач для уравнений эллиптического типа исследовал С.М.Никольский в [2].

Пример. Рассмотрим волновое уравнение $D_t^2 u - \Delta u = 0$. Для него $L(D) = D_t^2 - \Delta$ и значит $|x|_A^2 = t^2 - \|x\|^2$. Разложим полином $f(t, x) = t^2 + \|x\|^2$ по формуле (2). Найдем волновой полином $v_0(t, x; f)$ из (3). Поскольку $L(D)f(t, x) = (D_t^2 - \Delta)(t^2 + \|x\|^2) = (2 - 2n)$, то имеем

$$v_0(t, x; f) = t^2 + \|x\|^2 - (t^2 - \|x\|^2) \int_0^1 \frac{\alpha^{(n+1)/2-1}}{4}(2 - 2n)\, d\alpha = \frac{2}{n+1}\Big(nt^2 + \|x\|^2\Big).$$

Нетрудно видеть, что $v_1(t, x; f) = v_0(t, x; L(D)f) = v_0(t, x; 2 - 2n) = 2 - 2n$. Поэтому, по формуле (2) найдем искомое разложение

$$t^2 + \|x\|^2 = \frac{2}{n+1}\Big(nt^2 + \|x\|^2\Big) + \Big(t^2 - \|x\|^2\Big)\frac{1-n}{n+1}.$$

В случае, когда $L(D) = \Delta$ и $f(x)$ – полином справедливо утверждение.

Теорема 2. *Пусть $P_m(x) = Q_{m-2}(x)\|x\|^2 + H_m(x)$ и $n > 2$, тогда гармонический полином $H_m(x)$ находится из равенства*

$$H_m(x) = (-1)^m \frac{\|x\|^{2m+n-2}}{(n-2, 2)_m} P_m(D)\|x\|^{2-n}.$$

Литература

1. Карачик В.В. Об одном разложении типа Альманси // Математические заметки, 2008, -Т.83. -N.3, -С.370–380.

2. Никольский С.М. Граничная задача для полиномов // Труды Мат. Инс. РАН, 1999, -Т.227, -С.223–236.

К спектральной теории линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных

О.В. Алексеева, В.В. Корниенко, Д.В. Корниенко

(ЕГУ им. И.А.Бунина)

E-mail: *o.v.alexeeva@gmail.com, v_v_kornienko@mail.ru, dmkornienko@mail.ru*

Вопросы спектральной теории граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных исследовались многими авторами. При этом под граничной задачей понимается система условий, определяющих сужение так называемого максимального дифференциального оператора [1], порождаемого общей дифференциальной операцией в конечной области евклидова пространства. Это сужение должно одновременно быть расширением минимального оператора и обеспечивать однозначную разрешимость соответствующего дифференциального уравнения при любой правой части из гильбертова пространства функций с суммируемым квадратом. Исследование вопросов спектральной теории граничных задач тесно связано с актуальными вопросами описания регулярных граничных задач для общих дифференциальных операторов безотносительно к их типу в классическом смысле. Соответствующие исследования проводились в работах А.А.Дезина, В.Р.Романко и их учеников. Однако вопросы спектральной теории для общих систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных изучены не достаточно полно.

Настоящая работа посвящена исследованию структуры спектра и свойств системы собственных вектор-функций дифференциального оператора $L:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$, порождаемого в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ граничной задачей для линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$D_t^l u^1 - B(D_x)u^2 = \lambda u^1 + f^1, \quad D_t^l u^2 + B(D_x)u^1 = \lambda u^2 + f^2; \tag{1}$$

$$-D_t^l u^1 + B(D_x)u^2 = \lambda u^1 + f^1, \quad D_t^l u^2 + B(D_x)u^1 = \lambda u^2 + f^2, \tag{2}$$

рассматриваемых в ограниченной области $G_{t,x} = G_t \times G_x$ конечномерного евклидова пространства $\mathbb{R}^{1+m}_{t,x} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^m_x$. Здесь $l = 1,2$; $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$; $B(D_x) = \sum_{|\alpha|\leqslant r} b_\alpha D_x^\alpha$; $b_\alpha = b_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$; $D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1}D_{x_2}^{\alpha_2}\ldots D_{x_m}^{\alpha_m}$; $D_{x_k}^{\alpha_k} = \frac{\partial^{\alpha_k}}{\partial x_k^{\alpha_k}}$; $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$; $\alpha_k = 0,1,2,\ldots$; $k = 1,2,\ldots,m; r\in\mathbb{N}$. Для систем Коши-Римана ($l=1, B(D_x) = D_x$) имеется ряд глубоких результатов, относящихся к описанию правильных граничных условий [2] в областях специального вида. Описанию регулярных граничных задач для более общих систем уравнений при числе переменных более двух посвящена работа [3]. Краевые задачи для сильно и усиленно эллиптических систем изучались в [4], [5] соответственно. Однако спектральные свойства этих граничных задач и граничных задач иного типа при числе переменных более двух почти не изучены.

Литература

1. Дезин А. А. Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач. — М.: Наука — МАИК "Наука / Интерпериодика", 2000. — 175с. (Тр.МИАН; Т.229).

2. Дезин А. А. Теоремы существования и единственности решений граничных задач для уравнений с частными производными в функциональных пространствах // Успехи матем. наук, 1959. — Т. XIV, вып. 3 (87) — С. 21–73.

3. Романко В. К. О системах операторных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения, 1987. — Т. 23, № 9. — С. 1574–1585.

4. Вишик М. И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Матем. сборник, 1951. — Т. 29, (71), выпуск 4. — С. 615–676.

5. Солдатов А. П. О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости // Дифференц. уравнения, 2003. — Т. 39, № 5. — С. 674–686.

О ПОСТРОЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЗАДАННЫМ ВЫБОРОМ НУЛЬ-ПРОСТРАНСТВ

Л.Д. Менихес

(Южно-Уральский гос. ун-т)

E-mail: *ldm@susu.ac.ru*

При решении интегральных уравнений I рода существенно используются различные методы регуляризации. Ввиду того, что существуют нерегуляризуемые интегральные уравнения, важную роль играют различные достаточные условия регуляризуемости. В работах [1, 2] приводятся достаточные условия регуляризуемости в которых решающую роль играет исследование нуль-пространств некоторых операторов. В докладе будет рассказано, как следующие две теоремы используются в теории регуляризуемости. Но эти результаты представляют и самостоятельный интерес.

Теорема 1. *Пусть p_1 и p_2 – два вещественных числа и $p_1 > p_2 \geq 2$. Тогда существует инъективный интегральный оператор из $C(a,b)$ в $L_2(a,b)$ с гладким симметричным ядром, продолжение которого по непрерывности на $L_{p_2}(a,b)$ имеет бесконечномерное нуль-пространство, а продолжение на $L_{p_1}(a,b)$ имеет конечномерное нуль-пространство.*

Теорема 2. *Пусть (p_n) – последовательность вещественных чисел, удовлетворяющая условиям:*

1) $p_n \geq 2$;

2) $p_n < p_{n+1}$*;*
3) $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$.

Тогда существует инъективный интегральный оператор с гладким симметричным ядром из $C(a,b)$ *в* $L_2(a,b)$ *такой, что нуль-пространство его продолжения по непрерывности на любое* $L_{p_n}(a,b)$ *бесконечномерно, а нуль-пространство его продолжения на* $L_p(a,b)$ *конечномерно.*

Литература

1. Менихес Л.Д. О регуляризуемости некоторых классов отображений, обратных к интегральным операторам // Матем. заметки, 1999. – Т. 65, N 2. – С. 222–229.
2. Менихес Л.Д. Об одном достаточном условии регуляризуемости линейных обратных задач // Матем. заметки, 2007. – Т. 82, N 2. – С. 242–247.

Нормальная разрешимость обратной задачи для уравнения первого порядка в банаховом пространстве

А.И. Прилепко
(МГУ им. М.В. Ломоносова)
E-mail: *DSTkachenko@mephi.ru*

1^0. Обратная задача. Даны: $I = [0, +\infty)$, $T \in \mathbb{R}^1$, банаховы пространства E и P. Найти пару: вектор-функцию $y(t)$ и параметр p из условий:

$$\int\limits_0^T y(t)\, d\mu(t) = y^1, \qquad 0 < T < +\infty, \qquad y^1 \in E, \tag{1}$$

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + G(t)p + g(t), \qquad t \in I, \qquad y(0) = y^0, \tag{2}$$

если все другие величины, входящие в (1), (2), даны, причем $d\mu(t)$ – мера, непрерывная справа. В частности, если $d\mu(t) = \delta(T-t)\, dt$, то условие (1) принимает вид финального наблюдения

$$y(T) = y^1, \qquad y^1 \in E. \tag{3}$$

Рассматриваются разные случаи задания операторов $A(t)$, $G(t)$ и вектор-функции $g(t)$.

1^0. Теорема. Пусть A – постоянный оператор с компактной C^0-полугруппой и областью определения $D(A)$. Предположим, что $P \equiv E$ и $G(t) \in C^1\big([0,T],\ L(E)\big)$, $g(t) \equiv 0$, $y^0,\ y^1 \in D(A)$, причем оператор $\int\limits_0^T G(t)\, d\mu(t)$ имеет обратный в E. Тогда обратная задача (1), (2) нормально разрешима.

Рассматриваются и другие условия на входные данные, когда имеется корректная разрешимость задачи (1), (2).

Отметим, что задачи теории управления и оптимального управления сводятся к данной постановке (1), (2) при некотором определенном выборе оператора $G(t)$.

Соседние нули дзета-функции Римана, лежащие на критической прямой

З.Х. Рахмонов, Ш.А. Хайруллоев
(Институт математики АН Республики Таджикистан)
E-mail: *zarullo_r@tajik.net*

Первым результатом о нулях дзета – функции Римана $\zeta(s)$ на критической прямой является теорема Г.Харди [1]. В 1914 г. он доказал, что $\zeta(1/2+it)$ *имеет бесконечно много вещественных нулей.* Затем Харди и Литтлвуд [2] в 1921 г. доказали, что промежуток $(T, T+H)$ при $H \geq T^{1/4+\varepsilon}$ содержит нуль нечетного порядка $\zeta(1/2+it)$. Чешский математик Ян Мозер [3] в 1976 г. доказал, что это утверждение имеет место при $H \geq T^{1/6}\ln^2 T$. В 1981 г. А.А. Карацуба [4] доказал теорему Харди–Литллвуда уже при $H \geq T^{5/32}\ln^2 T$.

В работе [5] задачу о величине промежутка $(T, T+H)$ критического прямой в котором, содержится нуль нечетного порядка дзета–функции сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар для оценки специальных тригонометрических сумм, то есть:

Теорема 1. Пусть (k, l) – произвольная экспоненциальная пара, отличная от $(1/2, 1/2)$,

$$\theta(k;l) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2 - \theta_1^{-1}(k;l)}\right), \quad \theta_1(k;l) = \frac{l}{0,5-k},$$

тогда промежуток $(T, T+H)$, $T \geq T_0 > 0$, $H \geq T^{\theta(k;l)} \ln^2 T$ содержит нуль нечетного порядка дзета – функции Римана.

Заметим, что $H \geq T^{5/32} \ln^2 T$ в теореме А.А.Карацуба является следствием теоремы 1, при

$$(k, \lambda) = \left(\frac{1}{14}, \frac{11}{14}\right) = AAB(0,1), \quad \theta_1\left(\frac{1}{14}, \frac{11}{14}\right) = \frac{11}{6} = 1,8(3), \quad \theta\left(\frac{1}{14}, \frac{11}{14}\right) = \frac{5}{32} = 0,15625.$$

Минимизация $\theta(k;l)$ равносильно минимизации $\theta_1(k;l)$. В работе [6] применением метода оптимизации экспоненциальных пар найдена нижняя грань величины $\theta_1(k;l)$ по множеству всех экпоненциальных пар, а именно длина промежутка критической прямой, в котором содержится нуль нечетного порядка дзета-функции, выражена через константу Ранкина.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{P}_1$ множество всех экспоненциальных пар (k, l) отличных от $(1/2, 1/2)$, тогда справедливо соотношение

$$\inf_{(k,l)\in\mathcal{P}_1} \theta_1(k;l) = R + 1,$$

где $R = 0,8290213568591335924092397772831120\ldots$ — постоянная Ранкина.

1. *Hardy G.H.* Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann // Compt.Rend. Acad.Sci–1914.–v.158.–P.1012–1014.

2. *Hardy G.H., Littlewood J.E.* The zeros of Riemann's zeta–function on the critical line // Math.Z.–1921.–Bd 10.–S.283–317.

3. *Мозер Я.* Об одной сумме в теории дзета-функции Римана. — Acta arith., 1976, 31, S. 31–43.

4. *Карацуба А.А.* О расстоянии между соседними нулями дзета–функции Римана, лежащими на критической прямой // Труды МИАН. 1981.–т. 157.С.49–63.

5. *Рахмонов З.Х., Хайруллоев Ш.А.* Расстояние между соседними нулями дзета – функции Римана, лежащими на критической прямой // ДАН Республики Таджикистан, 2006, т. 49, №5, стр. 393 – 400.

6. *Рахмонов З.Х., Хайруллоев Ш.А.* Соседние нули дзета – функции Римана, лежащие на критической прямой // ДАН Республики Таджикистан, 2009, т. 52, №5, стр. 331 – 337.

О B_u-ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

С.А. Будочкина, В.М. Савчин

(Российский университет дружбы народов)

E-mail: *sbudotchkina@yandex.ru, vsavchin@yandex.ru*

Рассматривается эволюционное уравнение, представленное в операторном виде

$$N(u) \equiv P_{3u,t}u_t^2 + P_{2u,t}u_{tt} + P_{1u,t}u_t + Q(t,u) = 0. \tag{1}$$

Будем предполагать, что билинейная форма

$$\Phi(\cdot,\cdot) \equiv \int_{t_0}^{t_1} <\cdot,\cdot> dt : V \times V \to \mathbb{R} \tag{2}$$

является симметрической и невырожденной.

Получены следующие результаты:

- условия B_u-потенциальности оператора N уравнения вида (1) на $D(N)$ относительно билинейной формы (2);

- в терминах необходимых и достаточных условий определена структура уравнения движения (1) в случае B_u-потенциальности;

- построено действие по Гамильтону;

- получено условие инвариантности до дивергенции действия по Гамильтону и дан общий вид первых интегралов уравнения (1);

- получено условие инвариантности уравнения движения вида (1) и дана формула для нахождения его первых интегралов;

- получены необходимые и достаточные условия представимости заданного эволюционного операторного уравнения (в случае $P_{2u,t} \equiv 0$, $P_{3u,t} \equiv 0$) в форме B_u-гамильтонового уравнения

$$u_t = G_u(B_u - gradH[u]);$$

- исследован вопрос о распознавании B_u-гамильтоновости эволюционного операторного уравнения вида (1) ($P_{3u,t} \equiv 0$, $P_{2u,t} \equiv 0, P_{1u,t} \equiv I$, оператор Q не зависит от t и является линейным по u).

Теоретические результаты проиллюстрированы конкретными примерами.

Изопериметрическая монотонность для одной краевой задачи с параметром

Р.Г. Салахудинов
(Казанский гос. ун-т, мех-мат)
E-mail: *Rustem.Salahudinov@ksu.ru*

область в $\mathbb{R}^n$ гладкой границей. Рассмотрим краевую задачу

$$\triangle u + \alpha u + 1 = 0 \text{ в } G,$$

$$u = 0 \text{ на } \partial G,$$

где α — параметр, $\alpha < \lambda(G)$, $\lambda(G)$ — основная частота G. Краевая задача параметром оказалась полезным инструментом при доказательстве ряда гипотез в математической физике (см., например, [1], [2]).

Пусть $p > 0$. Обозначим через D_p шар в $\mathbb{R}^n$ такой, что $\|u^*\|_{L^p} = \|u\|_{L^p}$, где $u^*(x)$ — решение аналогичной краевой задачи в D_p. Отметим, что из классического неравенства Фабера – Крана и его обобщений на $\mathbb{R}^n$ следует, что $\lambda(D_p) < \lambda(G)$.

Теорема. *Пусть $\alpha < \lambda(D_p)$, тогда справедливо неравенство*

$$\|u\|_{L^q} \leq \|u^*\|_{L^q},$$

где $q > p$. Равенство в неравенстве достигается тогда и только тогда, когда G шар в $\mathbb{R}^n$.

В работе также рассматриваются оценки для некоторого класса интегралов, построенных на основе функции $u(x)$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (госконтракт №02.740.11.0193).

Литература

1. Bandle C. Isoperimetric Inequalities and Applications. – Boston, London, Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1980. -228p.

2. Kohler-Jobin M.-Th. Isoperimetric monotonicity and isoperimetric inequalities of Payne – Rayner type for the first eigenfunction of the Helmholtz problem // ZAMP. -1981. -V. 32. P. 625–646.

Интерпретация теории колебаний и устойчивости в некоторых учебных пособиях МГУ

А.П. Сейранян
(Институт механики МГУ)
E-mail: *seyran@imec.msu.ru*

В работе анализируется интерпретация теории колебаний и устойчивости в спецпрактикумах МГУ по теоретической и прикладной механике, изданных в 1987 и 2009 годах [1,2]. Теоретическая часть задач спецпрактикумов, в принципе, не претендует на самостоятельное исследование по колебаниям и устойчивости, а является, в основном, компиляцией сведений из известных источников, указанных в списках литературы соответствующих разделов. Несмотря на это, в представленной работе выявлены грубые просчеты и ошибки, допущенные в этих изданиях.

Список литературы.

1. Спецпрактикум по прикладной механике. Часть 1. Изд-во Московского университета. 1987. 81 с.

2. Спецпрактикум по теоретической и прикладной механике. Изд-во Московского университета. 2009. 235 с.

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ И ПРИЛОЖЕНИЯ (ПРЕЗЕНТАЦИЯ КНИГИ)

А.А. Майлыбаев, А.П. Сейранян

(Институт механики МГУ)

E-mail: *seyran@imec.msu.ru*

В новой книге авторов [1] излагаются фундаментальные основы и методы многопараметрической теории устойчивости с приложениями к задачам механики. В ней отражены современные знания и достижения теории бифуркаций собственных значений, анализа чувствительности характеристик устойчивости, теории устойчивости неконсервативных систем, анализа особенностей границ областей устойчивости, изучены вопросы устойчивости периодических систем и задачи оптимизации упругих систем при ограничениях по устойчивости. Книга сочетает математические основы с интересными классическими и современными задачами механики.

Список литературы.

1. Майлыбаев А.А., Сейранян А.П. Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике. М.: Физматлит, 2009. 400 с.

Интегральные тождества для соленоидальных векторных полей и их приложения к уравнениям Эйлера и Навье-Стокса

В.И. Семенов

(Кузбасский региональный институт повышения квалификации и переподготовки работников образования)

E-mail: *visemenov@rambler.ru*

Разложение пространства векторных полей $L_2(\Omega) = J(\Omega) \oplus G(\Omega)$ в прямую сумму соленоидальных и потенциальных полей (см. [1]) дает пример одного из интегральных тождеств, которое необходимо для обоснования разрешимости уравнений Навье–Стокса. На самом деле, из условия соленоидальности выводятся принципиально новые интегральные тождества, которые позволяют, более глубоко, исследовать как уравнения Навье–Стокса так и уравнения Эйлера, динамику несжимаемой жидкости. Например, для любой тройки соленоидальных и финитных векторных полей, независимо от размерности пространства, справедливо следующее равенство:

$$\int (w_{i,\,j} + w_{j,\,i}) c_{ki}(v) c_{kj}(u) dx = -\int w_i (c_{ki}(u) \triangle v_k + c_{ki}(v) \triangle u_k) dx.$$

Здесь по повторяющимся индексам в произведениях выполняется суммирование, символ $w_{i,\,j}$ означает дифференцирование i–той координаты по переменной x_j, $c_{ki}(u) = u_{k,\,i} - u_{i,\,k}$. Отсюда в размерности $n = 2$ имеем интегральное тождество:

$$\int u_i u_{k,\,i} \triangle u_k dx = 0. \tag{1}$$

В качестве следствия в размерности $n = 2$ выводим, независящую от вязкости, априорную оценку

$$\|\nabla u\|_2 \le \|\nabla \varphi\|_2 + \int_0^t \|\nabla f\|_2 dt$$

(из результатов [1] это не следует) для решений задачи Коши и начально–краевой задачи уравнений Навье-Стокса. Независимость априорной оценки от вязкости объясняет простоту плоскопараллельных течений, обеспечивает существование глобального слабого решения для уравнений Эйлера на плоскости и объясняет, почему это свойство верно для уравнений Навье–Стокса на плоскости (факт существования глобального решения впервые доказан О.А. Ладыженской).

Другая серия интегральных тождеств связана с работами [2] и [3]. В них показывается, что если решения задачи Коши имеют определенную асимптотику, то справедливы равенства:

$$\int u_j u_k dx = \frac{\delta_{jk}}{n} \|u\|_2^2,\ j,k = 1,...,n,$$

где δ_{jk} - символ Кронекера. На самом деле, эти равенства есть следствие соленоидальности поля u, если потенциальная составляющая поля $u_i u_{,\,i}$ суммируема. Еще одна серия тождеств связана с импульсом жидкости $P = \frac{1}{2}\int x \times rot\, udx$ и полным моментом импульса жидкости $M = \int x \times udx$.

Доказательство последней серии тождеств проводится с применением однопараметрических групп квазиизометрических отображений [4] и дается в [5].

Если размерность $n \geq 3$, то интеграл в (1) может быть отличным от нуля. Более того, он выражается через тензор напряжений векторного поля. Это создает качественно иную ситуацию по сравнению с плоским случаем, но дает основную идею изучения уравнений Навье-Стокса в пространстве. Автор изменил конструкцию построения решений уравнений Навье-Стокса из [1]. Считая начальную скорость $\varphi \in W_2^3$, определим число и функционал формулами:

$$T_0 = 3^{-4}\frac{4\nu^3}{\|\nabla\varphi\|_2^4},\ l(\varphi) = \|\varphi\|_2 \cdot \|\nabla\varphi\|_2.$$

Введем основные параметры $\lambda,\ \mu,\ \varepsilon$:

$$\lambda = \frac{4}{9}\frac{\nu^2}{l(\varphi)},\ \mu = \frac{T_*}{T_0},\ \lim_{t\to T_0}\|u(t,\cdot)\|_2^2 = \|\varphi\|_2^2(1-\varepsilon\lambda^2),$$

где $[0, T_*)$ – наибольший промежуток существования решения класса $L_{p,\,q}$ и параметр ε определяется для значения $\lambda < 1$. При отсутствии внешних сил решение определено на промежутке $[0, T_0)$ в обеих задачах, движение жидкости в целом определяется универсальным числом. Оно зависит от коэффициента вязкости, начальной скорости и ее градиента. На турбулентность влияет величина диссипации ε кинетической энергии, по крайней мере в тех областях (ограниченных и неограниченных) с кусочно–гладкой границей, где каждая замкнутая кривая стягивается в точку. Здесь указывается промежуток существования решения в зависимости от параметра ε. Описываются условия, для которых глобальные решения из класса $L_{p,\,q},\ 3/p + 2/q \leq 1$, существуют и не существуют. Указывается промежуток blow up для этих решений (оценка параметра μ).

Здесь следует добавить, что турбулентность наступает лишь тогда, когда значение кинетической энергии в момент времени T_0 близко к минимальному значению. Так как для всех решений справедливо неравенство $\lim_{t\to T_0}\|u(t,\cdot)\|_2^2 \geq \|\varphi\|_2^2(1-\lambda^2)$, то с физической точки зрения наступление коллапса при минимальных значениях кинетической энергии естественно.

Опираясь на равномерные относительно t оценки различных норм решений задач , полученных автором, изложенные результаты, в основном, можно перенести на начальные данные φ из класса W_2^1. Т.е. известным результатам О.А. Ладыженской можно дать универсальную форму и дополнить их независимыми и качественно новыми оценками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженская О. А.Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Изд. второе. - М: Наука, 1970.

2. Доброхотов С. Ю., Шафаревич А. И. О поведении на бесконечности поля скоростей несжимаемой жидкости// Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1996. №4. С.38-42.

3. Brandolese L. On the localization of symmetric and asymmetric solutions of the Navier-Stokes equations in R^n// Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 2001. V.332. P.125-130.

4. Семенов В. И. Квазиконформные потоки в пространствах Мебиуса//Мат. сборник. 1982. Т.119(161). №3. С.325-339.

5. Семенов В. И. Некоторые общие свойства соленоидальных векторных полей и их приложения к уравнениям Эйлера и Навье-Стокса на плоскости //Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. 2008. Вып. 15. №13(53). С.109-129.

Гармонические функции на двумерных стратифицированных множествах

Л.А. Ковалева, А.П. Солдатов

(Белгородский гос. университет)

E-mail: *soldatov@bsu.edu.ru*

Пусть задано семейство $D_p \subseteq$, $1 \leq p \leq n$, областей, ограниченных кусочно- гладким контуром. Пусть гладкие дуги $\Gamma_{pj},\ \ 1 \leq j \leq m_p$, составляют контур ∂D_p. Аналогично случаю римановых поверхностей [1] стратифицированное множество G получается из этих областей путем склеивания некоторых групп семейства (Γ_{pj}). Если положить $m = m_1 + \ldots + m_n$ и множество $\{1,\ldots,m\}$ разбить на подмножества O_p из m_p элементов, то можно ввести единую нумерацию $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m$ граничных дуг, полагая $\{\Gamma_{pj},\ 1 \leq j \leq m_p\} = \{\Gamma_j,\ j \in O_p\}$. Пусть группы склеиваемых дуг определяются разбиением множества $\{1,\ldots,m\}$ на подмножества Q_k, $1 \le k \le l$, из s_k элементов, $m = s_1 + \ldots + s_l$. Дуги Γ_j с $\{j\} = Q_k$, отвечающие множеству Q_k с $s_k = 1$, составляют границу стратифицированного множества G. Процедуру склеивания можно описать с помощью гладких параметризаций $\gamma_j : [0,1] \to \Gamma_j$, считая, что при $0 < t < 1$ склеиваются точки $\gamma_j(t) \in \Gamma_j$, $j \in Q_k$.

По определению семейство $u = (u_p)$ гармонических в D_p функций $u_p \in C(\overline{D}_p)$ определяет гармоническую функцию на стратифицированном множестве G, если для каждого множества Q_k, число элементов которого $s_k > 1$, граничные значения $u_p^+ \circ \gamma_j$, $j \in O_p \cap Q_k$, совпадают и их нормальные производные связаны контактным соотношением

$$\sum_p \sum_{j \in O_p \cap Q_k} |\gamma_j'| \frac{\partial u_p^+}{\partial n} \circ \gamma_j = 0.$$

Эквивалентное определение уравнения Лапласа на стратифицированных множествах осуществляется с помощью надлежащим образом введенных мер[2]. На остальных дугах $\Gamma_j \subseteq \partial G$, отвечающих множеству $Q_k = \{j\}$ из одного элемента, можно задавать различные краевые условия. Например, можно рассмотреть задачу Дирихле.

Подобная постановка сводится к обобщенной задаче Римана [3] для семейства аналитических функций $\phi = (\phi_p)$, $\phi_p = u_p + iv_p$, к которой применимы результаты [4] ее фредгольмовой разрешимости.

Работа выполнена при частичной поддержке ФАНИ, контракт № 02.740.11.0613

Литература

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., и др., Дифференциальные уравнения на геометрических графах, М.: Физматлит, 2004, 272с.

2. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. М., ИЛ, 1960.

3. Риман Б. Сочинения. М.: Гостехиздат, 1948.

4. Солдатов А.П. , Метод теории функций в эллиптических краевых задачах на плоскости. II. Кусочно-гладкий случай //Изв. АН СССР. 1992. Т.56, No 3. С.566-604.

О структуре множества сингулярности локально-липшицевого минимаксного/вязкостного решения уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана

Е.А. Колпакова, Н.Н. Субботина

(Институт математики и механики УрО РАН)

E-mail: *eakolpakova@gmail.ru, subb@uran.ru*

Работа посвящена классической проблеме исследования тонких свойств локально липшицевых функций [1], являющихся минимаксными/вязкостными решениями [2] следующей задачи

$$\varphi_t(t,x) + H(t,x,\varphi_x(t,x)) = 0, \quad \varphi(0,x) = \sigma(x),$$

где $t \in [0,T]$, $x \in R$. Пусть выполнены следующие предположения

(A1) функция $H(t,x,s)$ дважды непрерывно дифференцируема по всем переменным и выпукла по s для любых $(t,x) \in [0,T] \times R = \Pi_T$;

(A2) функция $\sigma(x)$ непрерывно дифференцируема;

(A3) функции $\frac{\partial H(t,x,s)}{\partial x}, \frac{\partial H(t,x,s)}{\partial s}$ обладают подлинейным ростом по x, s;

(A4) $\lim\limits_{\xi \to \pm\infty} \tilde{x}(t,\xi) = \pm\infty$, $\lim\limits_{\xi \to \pm\infty}$, где $\tilde{x}(\cdot,\xi) : [0,T] \to R$ — решения характеристической системы

$$\dot{\tilde{x}} = \partial H(t,\tilde{x},\tilde{s})/\partial s, \ \dot{\tilde{s}} = -\partial H(t,\tilde{x},\tilde{s})/\partial x, \ \dot{\tilde{z}} = \tilde{s}\partial H(t,\tilde{x},\tilde{s})/\partial s - H(t,\tilde{x},\tilde{s})$$

с начальными условиями

$$\tilde{x}(0) = \xi, \ \tilde{s}(0) = d\sigma(\xi)/dx, \ \tilde{z}(0) = \sigma(\xi), \ \xi \in R.$$

Определение Множеством сингулярности для функции $\varphi(\cdot) : \Pi_T \to R$ называется множество точек (t,x), в которых $\varphi(\cdot)$ недифференцируема.

Опираясь на результаты работы [3], доказано следующее утверждение.

Теорема *Множество сингулярности минимаксного/вязкостного решения $\varphi(t,x)$ рассматриваемой задачи Коши состоит из не более, чем счетного числа линий $(t,x(t))$, удовлетворяющих условию Ранкина—Гюгонио*

$$\dot{x}(t) = \frac{H(t,x(t),\tilde{s}(t,\xi_1)) - H(t,x(t),\tilde{s}(t,\xi_2))}{\tilde{s}(t,\xi_1) - \tilde{s}(t,\xi_2)}, \ \xi_1 \ne \xi_2, \quad \tilde{x}(t,\xi_1) = \tilde{x}(t,\xi_2) = x(t).$$

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН "Математическая теория управления", РФФИ (проект 08-01-00410) и Программы Правительства РФ по поддержке ведущих научных школ (проект НШ-2640.2008.1)

Список литературы

1. Никольский С.М. Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица, многочленами // ДАН СССР, 1944. Т. 42. № 3. С. 113–116.

2. Субботин А.И. Обобщенные решения уравнения в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. Москва—Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.

3. Олейник О.А. О задаче Коши для нелинейных уравнений в классе разрывных функций // Докл. Акад. наук СССР. 1954. Т. 95. № 3. С. 451–454.

О сходимости нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышева

С.П. Суетин

(Мат. инст. им. В. А. Стеклова РАН)

E-mail: *suetin@mi.ras.ru*

В докладе обсуждаются вопросы сходимости нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышева для вещественнозначной, голоморфной на отрезке $E = [-1, 1]$ функции f в предположении, что эта функция имеет вне E конечное число особенностей многозначного характера.

Пусть f, $f\colon E \to \mathbb{R}$, задана разложением в ряд Чебышева: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k T_k(x)$. *Нелинейной аппроксимацией Паде–Чебышева* порядка $n \in \mathbb{N}$ называется рациональная функция $F_n = P_n/Q_n$, где $\deg P_n, \deg Q_n \le n$, $Q_n(x) \ne 0$ при $x \in E$, такая, что $c_k(F_n) = c_k(f)$, $k = 0, \dots, 2n$. Нелинейная аппроксимация F_n существует не всегда, но если существует, то единственна. Отметим, что в системе `MAPLE` реализованы именно нелинейные аппроксимации Паде–Чебышева.

Сходимость аппроксимаций Паде–Чебышева функции f может быть охарактеризована в терминах следующей смешанной (гриново-логарифмической) теоретико-потенциальной задачи равновесия:

$$V^{\lambda}(x) + G_F^{\lambda}(x) \equiv \mathrm{const}, \qquad x \in E,$$

где λ – единичная мера с носителем на E, $F \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E$ – компакт, в дополнение к которому f продолжается как (однозначная) мероморфная функция, V^{λ} – логарифмический, а G_F^{λ} – гринов потенциалы меры λ; компакт F обладает определенным свойством "симметрии".

Этот результат является естественным развитием полученного в [1,2] результата о сходимости диагональных аппроксимаций Паде–Фробениуса общих ортогональных разложений для марковских функций.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 08-01-00317 и 09-01-12160-офи-м) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-8033.2010.1).

Литература.

1. А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин , О сходимости аппроксимаций Паде ортогональных разложений , Труды МИАН, 1991, 200 , 136–146

2. A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, S. P. Suetin , On the rate of convergence of Padé approximants of orthogonal expansions , American–Russian Advances in Approximation Theory , Springer-Verlag , New York, 1992, 169–190

О решении граничной обратной задачи для параболического уравнения

Е.В. Табаринцева

(Южно-Уральский гос. ун-т)

E-mail: *eltab@rambler.ru*

Рассматривается задача восстановления функции $z(t) = u(1, t) + h_1 u_x(1, t)$, $z(t) \in L_2[0, \infty)$ (граничного условия третьего рода), где функция $u(x, t)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a(x)u, \; x \in (0, 1), \; t > 0 \tag{1}$$

$$u(x, 0) = 0; \quad u(0, t) + h_0 u_x(0, t) = 0$$

(здесь h_0 и h_1 - заданные постоянные, $a(x) \in C^2[0,1]$ - заданная функция, $a(x) \geq 0$ при $x \in [0,1]$, $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по x на промежутке $x \in [0,1]$ и $\xi(t) = u(x,t) \in W_2^1[0,\infty)$ при всех $x \in [0,1]$) и дополнительному условию

$$u(x_0,t) = p(t),\ x_0 \in (0,1). \tag{2}$$

Поставленная задача сводится к задаче вычисления значений неограниченного оператора.

Для построения устойчивых приближенных решений задачи (1)-(2) используется метод проекционной регуляризации.

Получена точная по порядку оценка погрешности метода проекционной регуляризации с выбором параметра регуляризации по схеме М.М. Лаврентьева на одном из стандартных классов равномерной регуляризации.

Для апостериорного выбора параметра регуляризации реализации рассмотренного метода используется адаптивная схема (см. [2]).

Работа поддержана грантом р_урал_а N 07-01-96001.

Литература

1. В.К.Иванов, В.В.Васин, В.П.танана. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978

2. Ильин А.М. Уравнения математической физики. Челябинск, Издательский центр ЧелГУ, 2005.

3. S.Pereverzev and E.Schock. On the adaptive selection of the parameter in regularization of ill-posed problems //SIAM J.Numer.Anal., Vol.43, No 5, p.2060-2076

КОМПЬЮТЕРНЫЕ (ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ) ПОПЕРЕЧНИКИ И СМЕЖНЫЕ ЗАДАЧИ

Н.Т. Темиргалиев
(национальный университет имени Л.Н.Гумилева)
E-mail: *ntmath29@mail.ru*

Доклад составлен на основе Обзора 2010 года [1] и затрагивает следующие темы: **Тема 1.** Компьютерный (вычислительный) поперечник. **Тема 2.** Классы функций. **Тема 3.** Алгебраическая теория чисел и тензорные произведения функционалов (в сочетании с гармоническим анализом) в задачах восстановления. **Тема 4.** Равномерно распределенные сетки и задача эффективизации метода Монте-Карло. **Тема 5.** Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах численного интегрирования. A. Квадратурные формулы. B. Теоретико-числовые методы в задачах численного интегрирования. C. Построение равномерно распределенных сеток Коробова методом вычислительных экспериментов. D. Еще о теоретико-числовых методах. E. Численное интегрирование бесконечно дифференцируемых функций (теорема Е. Нурмолдина). **Тема 6.** Применение тензорных произведений функционалов в задачах численного интегрирования. **Тема 7.** Восстановление функций. **Тема 8.** Дискретизация решений уравнений в частных производных. **Тема 9.** Теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа. **Тема 10.** Теория вложений и приближений. **Тема 11.** Ряды Фурье.

Список литературы

1. Темиргалиев Н. Компьютерный (вычислительный) поперечник. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах восстановления (метод Квази-Монте Карло). Теория вложений и приближений. Ряды Фурье. // Вест.ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, 2010. Спец. выпуск, посвященный научным достижениям математиков ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, 194 с.
2. Темиргалиев Н. "Математика: Избранное. Наука"/под ред. Б. С. Кашина. - Астана: Изд-во ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, 2009, 613 с.
3. Теория функций и вычислительные методы, Материалы Международной конф., посвященной 60-летию со дня рождения проф. Н.Темиргалиева, Изд-во ЕНУ, Астана-Боровое, 5-9 июня, 2007, 233 с.

Глобальная асимптотика полиномов Мейкснера

Д.Н. Туляков
(Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН)
E-mail: *dnt@mail.nnov.ru*

Линейные рекуррентные соотношения имеют много приложений в различных задачах анализа, теории приближений, теории вероятностей. Соотношения вида

$$Q_{n+1}(x)=\sum_{j=0}^{p-1}a_j(x,n)Q_{n-j}(x)\ ,\quad n\in\mathbb{N}, \tag{1}$$

где множители $a_j(x,n)$ – полиномы по x, приводят к ортогональным многочленам и их обобщениям.

Асимптотику решений $Q_n(x)$ для случаев стремления к бесконечности аргумента соотношения (номера n) и спектрального параметра x при различных соотношениях между их ростом называют *асимптотиками типа Планшереля–Ротаха.*

Однако методы доказательства асимптотических формул типа Планшереля–Ротаха, исходя из *весов ортогональности*, непригодны для дискретных весов ортогональности, а между тем много задач из теории случайных процессов и случайных поверхностей связаны с многочленами Мейкснера и их обобщениями. В связи с этим актуальной задачей является построение асимптотических разложений для базисов решений разностных уравнений (1) в перекрывающихся, уходящих на бесконечность областях плоскости (n,x) и получить глобальную асимптотическую картину поведения решений.

В докладе автор приводит результаты об асимптотическом поведении многочленов Мейкснера, полученные методом работы автора [1] исходя из *рекуррентных коэффициентов*, и вкратце приводит сам метод. Первые глубокие результаты о получении асимптотик по рекуррентным коэффициентам были в [2], но методы различны.

Литература.

1. Д. Н. Туляков, *Асимптотика типа Планшереля–Ротаха для линейных рекуррентных соотношений с рациональными коэффициентами*, Матем. сб., 2010 (готовится к печати)

2. J. Geronimo, O. Bruno, W. van Assche, *WKB and turning point theory for second-order difference equations*, Janas, Jan (ed.) et al., Spectral methods for operators of mathematical physics. Proceedings of the international conference on operator theory and its applications in mathematical physics, OTAMP, Bedlewo, Poland, 2002. Basel: Birkhauser. Operator Theory: Advances and Applications (2004), 154, 101–138.

Оценка суммы значений функции делителей

Г.В. Федоров
(МГУ, мех-мат)
E-mail: *glebonyat@mail.ru*

Пусть $\tau_k(m)$ — число решений $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ уравнения $x_1x_2\ldots x_k=m$ в целых положительных числах. Введем обозначение

$$T_k^{(l)}(n)=\sum_{1\le m\le n}\tau_k^l(m).$$

При $l=1$ эту сумму будем обозначать $T_k(n)$.

Задачу о верхней оценке суммы $T_k^{(l)}(n)$ одним из первых стал рассматривать К. К. Марджанишвили. В 1939 г. с помощью неравенства

$$T_k(n)=\sum_{1\le m\le n}\tau_k(m)\le n\frac{(k-1+\ln n)^{k-1}}{(k-1)!} \tag{1}$$

К. К. Марджанишвили [1] доказал следующую оценку:

$$T_k^{(l)}(n)=\sum_{1\le m\le n}\tau_k^l(m)\le n\cdot A_k^{(l)}\left(k^l-1+\ln n\right)^{k^l-1},\quad \text{где}\quad A_k^{(l)}=\frac{k^l}{(k!)^{\frac{k^l-1}{k-1}}},$$

при любых целых $n\ge 1$, $k\ge 2$, $l\ge 1$.

В 2006 г. Д. А. Митькиным была улучшена оценка для $T_k^{(l)}(n)$. В его работе [2] получено неравенство

$$\tau_k(n)\tau_l(n)\le\tau_{kl}(n) \tag{2}$$

и доказано следующее утверждение

$$T_k^{(l)}(n) = \sum_{1 \le m \le n} \tau_k^l(m) \le \frac{n}{(k^l-1)!} \left(k^l - 1 + \ln n\right)^{k^l-1}.$$

Автор доказал более точное неравенство для оценки суммы $T_k(n)$, чем ранее известное неравенство (1), тем самым улучшил оценку суммы $T_k^{(l)}(n)$. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. *При любых целых $n \ge 1$ и $k \ge 2$ выполняется неравенство*

$$T_k(n) = \sum_{1 \le m \le n} \tau_k(m) \le n \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \frac{\ln^j n}{j!}. \qquad (3)$$

Сумма в правой части неравенства (3) может быть представлена в виде *многочлена Лагерра.* Тогда с учетом неравенства (2) находим оценку

$$T_k^{(l)}(n) \le n L_{k^l-1}(-\ln n).$$

Автор выражает благодарность научному руководителю, профессору В. Н. Чубарикову за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

1.*Марджанишвили К. К.* Оценка одной арифметической суммы // Докл. АН СССР. 1939. **22**, вып. 7. 391—393.

2.*Митькин Д. А.* Об оценке некоторых арифметических сумм с числом делителей // Матем. заметки. 2006. **80**, вып. 3. 471—472.

Асимптотика двухточечных аппроксимаций Паде

Д.В. Христофоров

(Мат. инст. им. Стеклова РАН)

E-mail: *khrden@gmail.com*

Доклад посвящен асимптотике двухточечных аппроксимаций Паде функций марковского типа.

На отрезке $\Delta := [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, $0 \notin \Delta$, рассматривается класс $K = \{f(z)\}$ функций следующего вида:

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{\rho(x)}{w^+(x)} \frac{dx}{z-x} + r(z), \quad z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

где $w(z) = \sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}$, при надлежащих ограничениях на весовую функцию $\rho(x)$ и рациональную функцию $r(z)$. Функции из класса K мероморфны в области $D := \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta$.

Пусть $\mathcal{R}_n = \{p_n/q_n\}$, где p_n и q_n - полиномы степени не выше n, $q_n \not\equiv 0$.

Оказывается, что верна следующая теорема

Теорема. *Для функции $f \in K$ справедлива следующая импликация:*

$$f_n \in \mathcal{R}_n, \quad (f-f_n)(z) = O(z^n), \, z \to 0, \quad (f-f_n)(z) = O(1/z^{n+1}), \, z \to \infty.$$

$$\Downarrow$$

$$(f-f_n)(z) = \Sigma_n(z)[1+o(1)], \quad z \in D, \, n \to \infty,$$

где $o(1) = o(\delta^n)$, $0 < \delta < 1$, функция $\Sigma_n(z)$ выписывается явным образом, является мероморфной в области D и сходится в области D и вне полюсов функции f к нулю с геометрической скоростью.

Данный результат представляет собой сильную асимптотику двухточечных аппроксимаций Паде. Теорема продолжает работу [1], в которой выведена асимптотика корня n-й степени многоточечных аппроксимаций Паде, и работу [2], в которой сильная асимптотика выведена для классических аппроксимаций Паде.

Литература.

1. L. Baratchart, M. Yattselev, Multipoint Pade approximants to complex Cauchy transforms with polar singularities, Journal of Approximation Theory 156(2009), p. 187-211

2. Гончар А.А., Суетин С.П., Об аппроксимациях Паде мероморфных функций марковского типа, Совр. пробл. матем., 5, МИАН, М., 2004, с. 3-67.

О многочленах Мейкснера с переменным весом

В.Н. Сорокин, Е.Н. Чередникова
(МГУ)
E-mail: *vnsormm@mech.math.msu.su, cherednikova_ en@mail.ru*

Изучается обобщение ортогональных многочленов дискретной переменной, а именно, многочленов Мейкснера. Получено предельное распределение нулей многочленов в терминах равновесных логарифмических потенциалов и в терминах алгебраических кривых.

Неравенство типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана

М.С. Саидусайнов, М.Ш. Шабозов
(Хорогский Государственный университет, Хорог, Таджикистан; Институт математики АН Республики Таджикистан, Душанбе, Таджикистан)

Среди экстремальных задач теории функций важное место занимают неравенства между нормами последовательных производных или неравенства типа Колмогорова в различных банаховых пространствах вещественных функций.

Аналитическая в единичном круге функция $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k,\ z = \rho e^{it},\ 0 \le \rho < 1$ принадлежит весовому пространству Бергмана $B_{q,\gamma},\ 1 \le q \le \infty$, если

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi} \iint_{|z|<1} \gamma(|z|)|f(z)|^q d\sigma \right)^{1/q} < \infty,$$

где $\gamma(|z|)$ - неотрицательная измеримая весовая функция, $d\sigma$ - элемент площади и интеграл понимается в смысле Лебега.

Используя специфику гильбертова пространства нами доказаны аналоги неравенства Колмогорова в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma}$ - аналитических в единичном круге функций $f(z)$ для которых

$$\|f\|_{B_{2,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi} \iint_{|z|<1} \gamma(|z|)|f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} < \infty,$$

где $\gamma(|z|)$ - неотрицательная измеримая весовая функция, $d\sigma$ - элемент площади и интеграл понимается в смысле Лебега.

Совокупность всех алгебраических полиномов степени $\le n-1$ обозначим p_{n-1}. Величину

$$E_n(f)_{B_{2,\gamma}} = \inf\left\{ \|f - p_{n-1}\|_{B_{2,\gamma}} : p_{n-1} \in p_{n-1} \right\}$$

назовем наилучшим приближением функции $f \in B_{2,\gamma}$ множеством p_{n-1}. Производную r - го порядка функции $f(z)$ по аргументу t комплексной переменной $z = \rho exp(it)$ обозначим через $f_a^{(r)}(z)$. При этом $f_a^{(1)} = f'(z) \cdot zi,\ f_a^{(r)}(z) = \{f_a^{(r-1)}(z)\}_a',\ r = 2, 3, ...$

Имеет место следующее утверждение

Теорема. *Если аналитическая в единичном круге функция $f(z)$ и ее производные $f_a^{(r-\nu)}(z),\ \nu = 1, 2, ..., r$ принадлежат пространству $B_{2,\gamma}$, то справедливы следующие неравенства типа Колмогорова*

$$\|f_a^{(r-\nu)}\|_{B_{2,\gamma}} \le \|f_a^{(r)}\|_{B_{2,\gamma}}^{1-\nu/r} \cdot \|f\|_{B_{2,\gamma}}^{\nu/r}, \tag{1}$$

$$E_n\left(f_a^{(r-\nu)}\right)_{B_{2,\gamma}} \le E_n^{1-\nu/r}\left(f_a^{(r)}\right)_{B_{2,\gamma}} \cdot E_n^{\nu/r}(f)_{B_{2,\gamma}}, \tag{2}$$

которые точны в том смысле, что существует функция $f_0(z) \in B_{2,\gamma}$ обращающая (1) и (2) в равенства.

Литература

1. Вакарчук С.Б. В сб."Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии", Киев, 1988, с.4-7.

2. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения, М.: Наука, 1976, 320 с.

3. Шабозов М.Ш.,Саидусайнов М.С. Неравенство типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана // ДАН РТ, 2007, т.50, №1, с.14-19.

Dispersive long-time decay for Klein-Gordon equation

A.I. Komech, E.A. Kopylova

(Institute for Information Transmission Problems RAS)

E-mail: *ek@iitp.ru*

We obtain a dispersive long time decay for the solutions of Klein-Gordon equation

$$\ddot{\psi}(x,t) = \Delta\psi(x,t) - m^2\psi(x,t) + V(x)\psi(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n = 1, 2, 3, \quad m > 0$$

in weighted energy norms. In vectoral form, the equation reads

$$\dot{\Psi}(t) = \mathcal{H}\Psi(t) \tag{1}$$

where

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta - m^2 + V & 0 \end{pmatrix}$$

For $s, \sigma \in \mathbb{R}$, denote by $H^s_\sigma = H^s_\sigma(\mathbb{R}^n)$ the weighted Sobolev spaces with the finite norms

$$\|\psi\|_{H^s_\sigma} = \|\langle x\rangle^\sigma \langle\nabla\rangle^s \psi\|_{L^2} < \infty, \qquad \langle x\rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$$

We assume that $V(x)$ is a real function, and $|V(x)| + |\nabla V(x)| \le C\langle x\rangle^{-\beta}$, where $\beta > 3$ for $n = 3$, and $\beta > 5$ for $n = 1, 2$.
We consider the “regular case” in the terminology of [1] which holds for *generic potentials*. In other words, the point $\pm m$ is neither eigenvalue nor resonance for the operator $\mathcal{H}$.
Denote by $\mathcal{F}_\sigma$ the Hilbert space $H^1_\sigma \oplus H^0_\sigma$ of vector-functions $\Psi = (\psi, \pi)$ with the norm

$$\|\,\Psi\|_{\mathcal{F}_\sigma} = \|\psi\|_{H^1_\sigma} + \|\pi\|_{H^0_\sigma} < \infty$$

Our main result is the following decay of the solutions to (1): in the “regular case”,

$$\|P_c\Psi(t)\|_{\mathcal{F}_{-\sigma}} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{O}(|t|^{-3/2}), & n = 1, 3 \\ \mathcal{O}(|t|^{-1}\log^{-2}|t|), & n = 2 \end{array} \right| \qquad t \to \pm\infty$$

for initial data $\Psi(0) \in \mathcal{F}_\sigma$ with $\sigma > 5/2$, where P_c is a Riesz projection onto the continuous spectrum of the operator $\mathcal{H}$. The decay extends the results obtained by Jensen and Kato [1] for the 3D Schrödinger equation. For the proof we modify the spectral approach of Jensen and Kato to make it applicable to relativistic equations.

References.

1. A.Jensen, T.Kato, Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions, Duke Math. Journal, **46** (1979), 583-611.

2. A.Komech, E.Kopylova, Weighted Energy Decay for 3D Klein-Gordon Equation, *J. of Diff.Eqns*, **248** (2010), n.3, 501-520.

3. A.Komech, E.Kopylova, Weighted Energy Decay for 1D Klein-Gordon Equation, *Comm. PDE*, **35** (2010), n.2, p.353-374.

4. E.Kopylova, Dispersive estimates for Shcrödinger and Klein-Gordon equation, *Uspekhi Matem. Nauk*, **65** (2010), n.1 (391), 97-144. [Russian]

4. Преподавание математики

Компьютеры в математике

Э.Т. Аванесов, В.А. Гусев
(Пятигорский гос. технологический ун-т; Ивановский государственный энергетический университет)
E-mail: *eduard.avanesov@gmail.com*

Развитие исследований по применению компьютеров в математике представляет собой важную и актуальную задачу.

Эра приложений компьютеров в исследовании различных вопросов арифметики составляет 50-60 лет, и постоянное совершенствование широкомасштабного использования компьютеров оказывает глубокое влияние на все области математики.

Не следует забывать, что и само существование компьютеров дает психологическую уверенность исследователю при анализе и решении трудных задач.

Кроме того, нужно заметить, что многие проблемы математики оказываются разрешенными благодаря мощному развитию электронно-вычислительной техники и совершенствованию искусства программирования, а также построению и развитию языков программирования высокого уровня.

Особое значение в применении компьютеров играет исследование многочисленных задач, алгоритмов и проблем в теории чисел.

Доступность и конкретность их формулировок привлекает большое внимание педагогов и является прекрасной базой для внеклассной кружковой работы, проводимой авторами.

Литература.

1. Computers in number theory, ed. A. Atkin and B.J. Birch, London, Acad. Press, 1977.

2. Аванесов Э.Т., Гусев В.А., Борженская А.Л. Компьютеры в теории чисел, Пятигорск, РИА-КМВ, 2008

3. Аванесов Э.Т., Гусев В.А. К преподаванию теоретико-числовых проблем в курсе математики, Materials of the conference, МГУ, 2009

Педагоги-математики орловцы: А.П. Киселев (1852–1940), К.Д. Краевич (1833–1892)

Ф.С. Авдеев, Т.К. Авдеева
(Орловский гос. ун-т)
E-mail: *ivan_ avd@mail.ru*

Листая учебники „Арифметики“для 6 класса, написанного авторским коллективом под руководством академика С.М. Никольского, мы не раз встречаем в задачах указание из „Арифметики“А.П. Киселева. [1] На наш взгляд, это не случайно, тем самым автор учебника „напоминает“учителю математики о необходимости познакомить учащихся с этой исторической личностью.

Андрей Петрович Киселев (1852–1940), уроженец города Мценска Орловской губернии, окончил орловскую мужскую гимназию с золотой медалью, затем физико-математический факультет Санкт-Петербургского университета. Работал учителем математики в реальном училище и в Михайловском кадетском корпусе города Воронежа, в 1901 году вышел в отставку. После 1917 года преподавал математику в Ямской школе для взрослых (1918 год, город Воронеж). С 1921 года А.П. Киселев работает в Ленинграде: в высшей военно-педагогической школе (до 1924 года), главруком Смольнинских военных курсов (1925); в школе военных сообщений (1926).[2]

Не удивляйтесь столь частой смене мест, ведь уже с 1924 года Андрей Петрович Киселев является персональным пенсионером Ленинграда, однако страстное желание поделиться своими знаниями и опытом побуждало его к общению с коллегаими и учениками, не давая спокойно сидеть на месте.

Высоко профессиональный учитель математики (стаж работы составляет свыше 25 лет) А.П. Киселев известен как автор школьных учебников математики, которые прослужили русской, а затем советской школе, без малого 100 лет (с 1882 по 1976 г.). Большинство советских ученых–математиков по праву можно считать учениками А.П. Киселева, открывшего им математику своими учебниками.

Имя этого Учителя увековечено: в краеведческом музее г. Мценска есть экспозиция, посвященная А.П. Киселеву; у здания бывшей мужской гимназии (ныне здание юридического факультета Орловского государственного университета) в Орле установлен его бюст; его имя присвоено школе №3 г. Мценска и учебно-воспитательному комплексу №2 г. Воронежа.

О том, что уроки математики А.П. Киселева актуальны и сегодня свидетельствует тот факт, что его учебники переиздаются и в третьем тысячелетии (2002, 2006, 2007 годы переиздания).

Не оправданно забыт Константин Дмитриевич Краевич (1833–1892), уроженец Малоархангельского уезда Орловской губернии, лучший учитель физики Петербурга второй половины XIX века. Мировую славу ему принесли его учебники по физике, математике и космографии.[3]

„Курс начальной алгебры “, составленный для употребления в средних учебных заведениях [4] выдержал 6 изданий. Высокий отзыв по этому учебнику представил Ученому комитету при главном управлении училищ (Создан для координации работы по созданию учебников, рекомендовал Министерству народного образования учебники для использования в учебных заведениях.) П.Л. Чебышев.

В предисловии к первому изданию этого учебника К.Д. Краевич изложил те педагогические принципы, которыми он руководствовался при написании своего учебника алгебры, они не потеряли своей актуальности и по сей день. Далее Константин Дмитриевич указал, исходя из своего опыта, на трудности перехода от изучения арифметики к изучению алгебры.

Учитывая, что в учебнике [4] приводятся лишь основные задачи, что явно недостаточно для полноценного обучения, К.Д. Краевич издал в дополнение к „Курсу начальной алгебры“еще „Собрание алгебраических задач“, который содержал 1765 примеров и задач по тем же темам и разделам [5].

Этот сборник задач пользовался большим успехом во второй половине XIX века и был одобрен Ученым комитетом в качестве руководства для употребления в гимназиях, так как примеры и задачи были хороше приспособлены к преподаванию курса алгебры. Добавим, что это был один из первых отечественных задачников по алгебре, который заменил собой „Собрание примеров, формул и задач из буквенного вычисления и алгебры“немецкого математика Мейер–Гирша (1848, 1864) и А.Н. Больмана „Практические упражнения по алгебре “(СПб., 1853).

В краеведческом музее поселка, Колпна Орловской области есть экспозиция, посвященная К.Д. Краевичу, Ярищенская средняя общеобразовательная школа Колпнянского района Орловской области носит имя К.Д. Краевича.

Литература

1. Арифметика: 6 класс: Учебник для общеобразовательных учереждений / *С.М. Никольский, И.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин.* – М.: Издат. отдела УНЦ ДО МГУ, 1997. – 312 с. ил.

2. *Авдеев Ф.С., Авдеева Т.К.* Андрей Петрович Киселев [Текст]/ *Авдеев Ф.С.,Авдеева Т.К.*, — Орел: Издательство Орловской телерадиовещательной компании, 2002. – 268 с. ил.

3. *Авдеева Т.К.* Классики педагогического образования в системе профессиональной подготовки учителя математики: Монография.– Орел: ОАО „Типография“„Труд“, 2004.– 392 с. ил.

4. *Краевич К.Д.* Курс начальной алгебры. Составлен для употребления в средних учебных заведениях. Изд. 2-ое, испр. и доп. СПб., тип. Акад. наук, 1864. – XXII, 228 с.

5. *Краевич К.Д.* Собрание алгебраических задач. Составлен для употребления в средних учебных заведениях. СПб., тип. Акад. наук, 1864. - 176 с.

Педагоги-математики орловцы: И.И. Жегалкин (1869-1947) — начало пути

И.Ф. Авдеев, Т.К. Авдеева

(Орловский гос. ун-т)

E-mail: *ivan_ avd@mail.ru*

Это не первая публикация о педагогах–математиках орловцах, ранее излагались материалы о А.П. Киселеве и К.Д. Краевиче, которые кроме преподавательской деятельности прославились как авторы школьных учебников по математике, физике, космографии, прослужившие в школе не один десяток лет. [1]

И вот И.И. Жегалкин, математик профессор Московского университета.

Иван Иванович Жегалкин родился 24 июля 1869 года в семье потомственного Почетного гражданина г. Мценска Орловской губернии. После получения домашнего образования поступил в подготовительные классы Тульской гимназии, откуда через 2 года перешел в Орловскую гимназию, которую окончил в 1889 году. Осенью того же года поступил в Императорский Московский университет на математическое отделение физико-математического факультета. Его учителями были: Цингер В.Я. (геометрия), Бугаев Н.В. (введение в анализ), Бобынин В.В. (история математики), Млодзеевский Б.К. (теория вероятностей), Лахтин Л.К. (алгебра), Херсонский Г.Х. (дифференциальные уравнения с частными производными) и др. [2] Окончив ниверситет в 1893 году с получением диплома первой степени, И.И. Жегалкин, вероятно, не предполагал, что вскоре он вернется сюда и многие из его преподавателей станут коллегами.

В 1894 он поступил кандидатом в Московскую контору государственного банка, позднее был утвержден в должности помощника контролера 3 разряда, затем перемещен на должность помощника второго разряда.

Недолго был И.И. Жегалкин банковским чиновником, с 1899 начинается его преподавательская деятельность: преподаватель комерческой арифметики в вечерних классах московского общества распространения комерческого образования (1899–1903); преподаватель математики в реальном училище К.К. Мазинга (1900–1903); приглашен лектором на высшие женские курсы в Москве (1902); зачислен приват доцентом в Императорский Московский университет (1902).

В это время у Ивана Ивановича уже имеется первая печатная работа по математике „Строка Тейлора для неявной функции“

В Московском университете Жегалкин И.И. успешно проходит магистерские испытания и в 1908 году защищает диссертацию по теме „Трансфинитные числа“. Официальными оппонентами у него были заслуженный профессор Л.К. Лахтин и ординарный профессор Д.Ф. Егоров.

В начале своей преподавательской деятельности в университете И.И. Жегалкин вел „упражнения по курсу „Введение в анализ““, лекции по которому читал Л.К. Лахтин [2]. После защиты магистерской диссертации Иван Иванович читал курс теории множеств. Следует отметить, что Жегалкин И.И. был в числе первых у нас в стране, кто разрабатывал вопросы математической логики, а его монография „Трансфинитные числа“– одна из первых книг не только в отечественной, но и в мировой литературе, посвященная абстрактной теории множеств.

В Московском университете И.И. Жегалкин работал на кафедре чистой математики вместе с Л.К. Лахтиным, Б.К. Млодзеевским, Д.Ф. Егоровым, К.А. Андреевым и др.

Непросто складывалась судьба педагога–математика орловца И.И. Жегалкина: были открытия в области математики, результаты педагогического труда и опыт изложены в его учебниках математики для высшей школы, был и кружок по теории множеств, которым он руководил до последних дней своей жизни об этом вы узнаете из наших следующих публикаций.

Литература

1. *Авдеева Т.К.* Классики педагогического образования в системе профессиональной подготовки учителя математики: Монография.– Орел: ОАО Типография „Труд “, 2004.– 392 с. ил.

2. *Петрова С.С.* Из истории преподавания математики в Московском университете с 60-х годов XIX – до начала XX в./Историко–математические исследования. Вторая серия. Выпуск 11 (46). — М.: „Янус –К “, 2006, с. 130–147.

Использование функции sign (знак) в обобщенном методе интервалов

Д.В. Алексеев
(МГУ, мех.-мат. ф-т, лаборатория ПТК)
E-mail: *dvalex@rambler.ru*

Напомним, что функция sign задается как $\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0 \end{cases}$. Основными свойствами, позволяющие использовать ее при решении неравенств обобщенным методом интервалов являются следующие:

Свойство 1 При всех a, b выполнено $\operatorname{sign}(a \cdot b) = \operatorname{sign}(a) \cdot \operatorname{sign}(b)$

Свойство 2 При всех a и при всех $b \neq 0$ выполнено $\operatorname{sign}(a/b) = \operatorname{sign}(a)/\operatorname{sign}(b)$

Свойство 3 При всех a, b и целых n выполняется $\operatorname{sign}(|a| - |b|) = \operatorname{sign}(a^{2n} - b^{2n}) = \operatorname{sign}(a^2 - b^2)$

Свойство 4 При всех $a, b > 0$ и $a \neq 1$ выполнено $\operatorname{sign}(\log_a b) = \operatorname{sign}((a-1) \cdot (b-1))$.

Свойство 5 При всех $a, b, c > 0$ и $a \neq 1$ выполнено $\operatorname{sign}(\log_a b - \log_a c) = \operatorname{sign}((a-1) \cdot (b-c))$.

Свойство 6 При всех $a > 0$, при всех b, c и $a \neq 1$ выполнено $\operatorname{sign}(a^b - a^c) = \operatorname{sign}((a-1) \cdot (b-c))$.

Свойство 7 Для любой строго монотонно возрастающей функции $f(x)$ при всех a, b, принадлежащих области определения f $\mathrm{sign}(f(a) - f(b)) = \mathrm{sign}(a - b)$. (Для убывающей функции g: $\mathrm{sign}(g(a) - g(b)) = -\mathrm{sign}(a - b))$.

Использование функции sign позволяют формализовать рассуждения, связанные с решение задач обобщенным методом интервалов.

Например, неравенство вида $F(x) > 0$ сводится к уравнению $\mathrm{sign}(F(x)) = 1$, $F(x) \geqslant 0$ к условию $\mathrm{sign}(F(x)) \in \{0, 1\}$, и.т.д.

Обобщенный метод интервалов базируется на том факте, что непрерывная функция $F(x)$, не обращающаяся в ноль на интервале (a, b) сохраняет постоянный знак на этом интервале. Кроме того, очевиддно равенство $\mathrm{sign}\left(\frac{F_1(x)\cdot\ldots\cdot F_n(x)}{G_1(x)\cdot\ldots\cdot G_m(x)}\right) = \mathrm{sign}(F_1(x))\cdot\ldots\cdot\mathrm{sign}(F_n(x))\cdot\mathrm{sign}(G_1(x))\cdot\ldots\cdot\mathrm{sign}(G_m(x))$, при условии, что левая часть равенства определена, т.е. функции $F_1, ..., F_n$ определены, а $G_1, ..., G_m$ определены и не обращаются в 0. Полезно подчеркнуть, что знак этой дроби может быть полностью определен на основе знаков составляющих ее функций.

В обобщенном методе интервалов производится разбиение области определения точками, в которых функции $F_1, ..., F_n$ обращаются в ноль на интервалы. На каждом из получившихся интервалов функции $F_1, ..., F_n, G_1, ..., G_m$ сохраняют знак, следовательно, сохраняет знак и дробь $\frac{F_1(x)\cdot\ldots\cdot F_n(x)}{G_1(x)\cdot\ldots\cdot G_m(x)}$. Таким образом, определив знаки на каждом из интервалов, легко выбрать промежутки, образующие множество решений соответствующего неравенства.

Необходимо обратить внимание учащихся, что определение знака функции на конкретном интервале может быть сделано разными способами, например: а) Подстановкой некоторой точки, принадлежащей данному интервалу; б) Анализом поведения функции на данном интервале; в) Сравнением со знаком на соседнем интервале с подсчетом количества перемен знака.

Роль и место курса дифференциальных уравнений в структуре профессиональной компетентности будущего учителя математики

Р.М. Асланов, А.В. Синчуков
(МПГУ)
E-mail: *r_ aslanov@list.ru, avsinchukov@inbox.ru*

Понятие «компетентность» представляет собой полезную категорию, дающую возможность выстраивать альтернативные критерии качества выпускника в сфере профессиональной деятельности и количественно оценивать это качество. Понятие «компетентность» близко к понятию «профессионализм», но выбор для анализа качества подготовки выпускника вуза критериев, связанных с компетентностью обусловлен во многом тем, что вуз может обеспечить профессиональную готовность и компетентность выпускника, но не профессионализм. В рамках настоящего сообщения делается попытка выяснить роль курса дифференциальных уравнений в формировании профессионально-педагогической компетентности будущего учителя математики.

Отечественной высшей педагогической высшей школой накоплен огромный опыт в математической подготовке будущего учителя математики: в работах известных математиков и методистов неоднократно озвучивались принципы, на которых должно строиться математическое образование будущих учителей математики. Вместе с тем, государственные образовательные стандарты нового поколения сформулированы на языке компетентностного подхода, в связи с чем возникает задача интеграции накопленного опыта и теоретических положений заявленного дидактического подхода.

ГОС ВПО нового поколения выделяет в структуре профессиональной компетентности три компонента: общекультурные, профессиональные и специальные компетенции. В виду универсальности приложений, теория дифференциальных уравнений играет особую роль в формировании следующих групп специальных компетенций:

1. способность понимать универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость в различных областях человеческой деятельности, роль и место математики в системе наук, значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике, общекультурное значение математики;

2. владение математикой как универсальным языком науки, средством моделирования явлений и процессов, способен пользоваться построением математических моделей для решения практических проблем, понимать критерии качества математических исследований, принципы экспериментальной и эмпирической проверки научных теорий.

Разработанное авторами методическое обеспечение курса «Дифференциальные уравнения», читаемого будущим учителям математики, учитывает необходимость развития перечисленных компетенций за счет следующих дидактических особенностей:

1. изложение теоретического материала ведется на основе рассмотрения математических моделей реальных явлений: колебаний струны, охлаждения тела и т.п.;

2. построение отдельных разделов курса ведется с учетом реализации межпредметных связей: например, изложение теории линейных дифференциальных уравнений опирается на алгебраический материал и теорию функций комплексного переменного;

3. материалы для практических занятий и самостоятельной работы студентов содержат большое количество прикладных задач, решаемых методами теории дифференциальных уравнений.

Некоторые случаи задачи о построении треугольника по трём элементам

Ю.А. Белов
(Ярославский гос. ун-т им. П.Г. Демидова)
E-mail: *belov@uniyar.ac.ru*

В сообщении рассматривается классическая (архаическая) тема – построение треугольника по трём элементам циркулем и линейкой.

В качестве исходных элементов использовались стороны треугольника – a, b, c, соответствующие противолежащие углы $\angle A, \angle B, \angle C$, медианы m_a, m_b, m_c, высоты h_a, h_b, h_c, биссектрисы l_a, l_b, l_c.

Используя эти данные можно сформулировать ровно 95 геометрически различных задач, которые и рассматривались. Далее для краткости, например, задача о построении треугольника по двум сторонам и биссектрисе угла между ними обозначается как (a, b, l_c); аналогично и для других задач. Фактически эти обозначения являются стандартными, в частности они такие же в справочном пособии [2], где имеется наиболее полное собрание задач по теме. В этой книге кроме указанных исходных элементов рассматривались ещё радиусы вписанных, описанных и вневписанных окружностей. Наиболее интересные полученные результаты кратко можно сформулировать таким образом.

Теорема Для следующих десяти задач не существует процедуры построения треугольника циркулем и линейкой: (a, b, l_a), $(a, \angle A, l_b)$, (a, m_a, l_b), (a, m_b, l_b), (a, m_b, l_c), (a, l_a, l_b), (h_a, l_a, l_b), (h_a, l_b, l_c), (m_a, l_a, l_b), (h_a, l_b, l_c).

В списке №6 (неразрешимых задач) из [2] они имеют номера 1, 5, 11, 16, 17, 22, 65, 66, 82, и 87 соответственно.

Кроме указанных, имеется, конечно, известная задача об отсутствии процедуры построения треугольника по трём биссектрисам – доказательство изложено, например, в [1].

Результаты, указанные в теореме, основаны приблизительно на тех же соображениях, что использованы для задачи о трёх биссектрисах из [1] – элементах теории пифагоровых расширений и некоторых элементарных геометрических замечаниях.

Литература.

1. М.М. Постников Теория галуа Физ-мат. лит. М., 1963, 218 с. 2. В.И. Голубев, Л.Н. Ерганжиева, К.К. Мосевич Построение треугольника. М., Бином, 2008, 248 с.

Интерпретации в математическом образовании

Л.П. Бестужева, Л.Б. Медведева
(Ярославский гос. ун-т)
E-mail: *alakor@yandex.ru*

Построение интерпретаций (или моделей) является одним из основных методов познания окружающего мира. Из многочисленных толкований смысла этого понятия, почерпнутых в словарях и энциклопедиях, за основу примем одно из них, наиболее подходящее для нашей заметки, и кроме того, короткое: интерпретация – это общенаучный метод перевода формальных символов и понятий на язык содержательного знания.

Среди различных видов интерпретаций, используемых как внутри математики, так и в других областях знания, выделяются интерпретации геометрические. В них языком содержательного знания оказывается язык геометрии, а основой служат такие объекты, как: геометрические фигуры и пространства, построенные на разных неизоморфных системах аксиом, векторы, различные группы преобразований, координатный метод Декарта.

Без интерпретаций не обойтись и в самой геометрии, так же как и при аксиоматическом построении любой теории. Множество таких объектов, в которых данная система аксиом находит своё реальное воплощение, называется «моделью» или «интерпретацией» данной системы аксиом. Доказательство непротиворечивости системы аксиом сводится к доказательству существования хотя бы одной модели или интерпретации, в которой реализуется данная аксиоматика. Например, непротиворечивость геометрии Евклида доказывается построением арифметической интерпретации системы аксиом Гильберта, непротиворечивость геометрии Лобачевского доказывается построением моделей Бельтрами, Кэли-Клейна, Пуанкаре. Геометрической интерпретацией систем алгебраических уравнений являются алгебраические многообразия. Грассмановы многообразия служат интерпретацией систем k-мерных линейных подпространств заданного линейного пространства.

Выше были приведены примеры интерпретаций внутри математики. Поскольку математический язык является универсальным языком научного знания, то математические модели рассматриваются как интерпретации задач, решаемых в таких предметных областях как физика, химия, биология, экономика, психология и т.д. При этом часто оказывается, что математическая суть различных явлений одна и та же. Например, многие уравнения гидродинамики, теории упругости, электродинамики и дифференциальной геометрии имеют одинаковый вид, а такие различные понятия как изокоста, изокванта, изотерма, изобара, изобата, изогиета, изогипса сводятся к одному математическому понятию – линия уровня функции. Задачи разного экономического содержания имеют одну и ту же математическую модель, которая называется задачей линейного программирования. К ней же сводится и антагонистическая матричная игра. С другой стороны, один и тот же объект или задача какой-либо предметной области в зависимости от целей исследования могут иметь разные интерпретации.

Важность интерпретаций определяется их значением как для развития науки, так для математического образования на разных его этапах. Понятие интерпретации тесно связано с понятием «понимание». Этот факт определяет в этом случае цель интерпретации – способствовать постижению смысла понятия, теоремы, метода, решения задачи, теории.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского гуманитарного научного фонда (№ 08-06-00302).

Математическое образование будущих инженеров в аспекте требований работадателей

Г.Г. Битнер

(Казанский гос. технический ун-т им. А.Н. Туполева, филиал «Восток»)

E-mail: *ggbitner@mail.ru*

Благополучие страны, основа ее развития — в интеллектуальном потенциале общества. А он закладывается, формируется в образовательном учреждении. Форма и структура современного учреждения высшего профессионального образования должна максимально соответствовать требованиям и запросам работодателей.

Математика является одной из важнейших дисциплин, способствующей раскрытию потенциала человека, развитию его личности. Она закладывает фундаментальные качества личности, а вместе с тем и фундамент нашего общества. Выдающийся швейцарский педагог И.Г. Песталоцци не раз отмечал, что обучение математике чрезвычайно существенно для улучшения экономического развития страны и для подъема благосостояния народа.

Потому для эффективного управления качеством формирования математической культуры будущих инженеров как составляющей их профессиональной культуры необходимы технологии, способные оптимально выстраивать образовательный процесс, в значительной мере «вписанный» в реальную профессиональную деятельность, и предусматривающие:

установление исходного уровня студентов и каждого студента;

сознательное и планомерное педагогическое воздействие;

отбор и структурирование содержания обучения;

выбор сочетания методов, форм организации, средств обучения и самообучения;

планирование самостоятельной работы;

проектирование контролирующих процедур и коррекцию в соответствии с полученными результатами.

А для этого сначала необходимо определить для каждой специальности список основных потребителей, совместно с ними спланировать, организовать и провести исследования по изучению того, какими должны быть учебные программы профессионального и соответственно математического образования. А также какими, для каждой конкретной организации, фирмы компетенциями должен обладать будущий инженер для эффективной работы уже на другой день после защиты диплома.

Об учебно-методическом комплекте «Геометрия» для общеобразовательной школы под редакцией В.А. Садовничего

В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, В.В. Прасолов
(МГУ, физ. ф-т; Независимый Московский Университет)
E-mail: *butuzov@phys.msu.ru, prasolov@mccme.ru*

Авторы доклада под руководством академика В.А.Садовничего и совместно с издательством "Просвещение" ведут работу по созданию нового учебно-методического комплекта "Геометрия" для общеобразовательной школы. В 2010 году вышел в свет учебник "Геометрия 7" и в ближайшее время выйдут сопутствующие пособия "Книга для учителя" (поурочные разработки по 7 классу) и "Дидактические материалы" (по 7 классу). Идет работа по созданию учебников для следующих классов и соответствующих пособий для учителя. Комплект будет полностью соответствовать компонентам государственного образовательного стандарта.

Учебник для 7 класса содержит 3 главы: 1. Начальные геометрические сведения. 2. Треугольники. 3. Окружность. В учебниках для 8 и 9 классов также будет по три главы. В 8 классе: 4. Параллельность. 5. Многоугольники. 6. Решение треугольников. В 9 классе: 7. Векторы и координаты. 8. Площадь. 9. Некоторые сведения из стереометрии.

Это перечисление показывает, что порядок изложения материала отличается от известных учебников Л.С.Атанасяна и др. и А.В.Погорелова. Принципиальной особенностью, отличающей данный курс школьной геометрии от других, является то, что вместо традиционной аксиомы параллельных принимается более простое утверждение о существовании прямоугольника, у которого две смежные стороны равны данным отрезкам. Этот факт является наглядно очевидным и позволяет дать более простые доказательства некоторых теорем школьной геометрии.

Авторы стремятся к доступности, четкости и наглядности изложения материала в сочетании со строгой логикой, используя свой многолетний опыт работы над школьными учебниками геометрии. Основные геометрические понятия вводятся на основе наглядных представлений, что делает учебник доступным для самостоятельного изучения школьниками.

Доказательства теорем в учебниках хорошо иллюстрированы, многие рисунки снабжены подписями, позволяющими ученику разобраться в доказательстве теоремы, даже не читая основного текста книги, а переходя от одного рисунка к другому.

Каждый учебник будет снабжен подробной исторической справкой, отражающей этапы развития геометрии и роль великих геометров в ее становлении.

Еще одна важная особенность учебников состоит в тщательно продуманном подборе задачного материала. О системе задач и других особенностях учебно-методического комплекта будет подробно рассказано в докладе.

О вступительных экзаменах в СУНЦ МГУ

О.П. Виноградов
(МГУ, мех-мат ф-т)
E-mail: *ovinogradov@mail.ru*

18 апреля 2010 года состоялись вступительные устные экзамены для школьников московского региона в СУНЦ МГУ. Приведем условия задач, предлагавшихся на экзамене.

Московский устный экзамен в 10–й класс.
Физико–математическое отделение.
Апрель 2010 года.
Вариант I

1. Саша получил пятерок в 3–ей четверти на 5% меньше, чем во 2–ой четверти, а в 1–ой четверти на 20% больше, чем в 3–ей. На сколько процентов Саша получил пятерок больше в 1–ой четверти, чем во 2–ой четверти?
2. Центр O окружности радиуса 3 лежит на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC. Катеты треугольника касаются окружности. Найдите площадь треугольника, если длина отрезка OC равна 5.
3. Из чисел $7, 8, 9, \dots, 153, 154$ выбирают одно число, а затем из оставшихся чисел выбирают еще одно

число. Сколько существует так составленных различных пар чисел, у которых второе выбранное число делится на 3?
4. Пусть a_n является $n-$м членом арифметической прогрессии. Вычислить сумму $S = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{2009}a_{2010}}$, если $a_1 = 1$, а разность прогрессии равна 3.
5. Число $\sqrt{2000 \times 2001 \times 2002 \times 2003 + 1}$ является целым. Найдите это число.

Московский устный экзамен в 11–й класс.
Физико–математическое отделение.
Апрель 2010 года
Вариант I

1. Число a больше числа b на $x\%$, а число b меньше числа a на $\left(\frac{4}{5}x\right)\%$. Найдите x.
2. Ветви параболы $y(x) = ax^2 + bx + c$ направлены вниз, а вершина находится в точке $(1; 1)$. Расстояние от начала координат до точки пересечения графика параболы с осью равно 3. Напишите уравнение этой параболы.
3. Внутри треугольника ABC с основанием $AC = 30$ см и высотой $BD = 10$ см расположен равнобедренный прямоугольный треугольник так, что его гипотенуза параллельна основанию, вершина прямого угла лежит на AC, а вершины острых углов лежат на AB и BC. Определите стороны вписанного треугольника.
4. Сколько существует натуральных трехзначных чисел с ненулевыми цифрами, у которых любые две цифры отличаются друг от друга не меньше чем в два раза, а сумма цифр больше 10?
5. Найдите все $a > \frac{1}{2}$, для которых интервал $(4a + 1; 6a)$ содержит внутри себя ровно одну целую точку.

Работа выполнена при содействии фонда РГНФ №08-06-00144а.

О построении графиков функций в средней школе

К.Е. Боказе
(Евразийский Национальный Университет им. Л.Н.Гумилева)
E-mail: *vokaze61@mail.ru*

Изучение функции в средней школе не ограничивается лишь введением определения этого понятия и умения учащихся распознать функцию и описать ее свойства. Одним из важных моментов в изучении функции является наглядное представление функции – ее геометрическая интерпретация, которая дается посредством понятия графика функции.

Согласно принятой в республике Казахстан (РК) программе, в курсе математики 6-ого класса и алгебры 7-9 классов определение графика функции, обычно, не дается. Понятие графика функции воспринимается учащимися на интуитивной основе, простым сообщением, что графиком линейной функции является прямая, квадратичной – парабола, обратной пропорциональности – гипербола. Полное исследование и построение графика функции изучается в 10-11классах.

Переход в 2000 году к Единому Национальному Тестированию (ЕНТ) в РК имеет последствием формальное изучение вопроса построения графиков (справедливости ради скажем, “и не только”). При подготовке к ЕНТ от школьных учителей требуется лишь развитие навыков быстрого (в течении 1,5 минут) решения задач, а так как в тестовых заданиях не требуется построение графиков, то этот аспект изучения функции остается без должного внимания. Пробелы в умении построения и преобразования графиков, графического исследования функций сказываются при изучении курса высшей математики поступившими в вузы вчерашними школьниками.

Навыки работы с графиками функции целесообразно формировать у учащихся в процессе изучения функции в соответствующих классах. Для этого требуется арифметизация плоскости – введения координатной системы [1, стр.71]. Далее, преобразование графиков функции сначала проводится в модельной ситуации – для линейной, квадратичной функции, обратной пропорциональности. Затем, на основе продемонстрированных наглядных представлений, описывается общий случай. В целом, по нашему мнению, тема построения графиков функций разработана вполне удовлетворительно. Мы имеем ввиду следующие результаты систематизации и обобщений [1, стр. 81-82].

Если функция $g(x) = f(x - A)$, при $A{>}0$, то график функции $g(x)$получается путем параллельного переноса графика функции $f(x)$ вправо вдоль оси Ox на A единиц, при $A < 0$ - влево вдоль оси Ох на $|A|$ единиц.

Аналогично, для $g(x) = f(x) + B$, при $B > 0$ и $B < 0$ так же осуществляется параллельный перенос, только вдоль оси Оу.

Так же рассматриваются случаи сжатия и растяжения графика исходной функции.

Особо нужно отметить случай преобразований графика функций, содержащих знак модуля. Если функция $g(x)$ имеет вид $|f(x)|$, то верхняя часть графика (относительно оси Ox) функции $f(x)$ сохраняется, а нижняя часть графика заменяется симметричным отображением нижней части графика $f(x)$ относительно оси Ox. А в случае $g(x) = f\ (|x|)$ правая часть графика (относительно оси Oy) функции $f(x)$ сохраняется, а левая удаляется и затем к правой части графика добавляется ее симметричное отображение относительно оси Oy. Практические же навыки преобразований графиков приобретаются в ходе решения задач.

Однако, как нам представляется, отождествление действительных чисел и точек прямой относится к методически очень трудным темам школьной математики.

Наши предложения по теме "Графики функций" базируются на методических решениях проблемы арифметизации прямой и плоскости, разработанной в учебнике [1, стр. 27-28, стр.71-72].

Литература

1.Темиргалиев Н., Аубакир Б., Баилов Е., Потапов М.К., Шерниязов К., Алгебра и начала анализа для X-XI классов, Алматы, "Жазушы". 2002

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

К.Е. Воказе, М.А. Жайнибекова

(Евразийский Национальный Университет им. Л.Н.Гумилева; Евразийский Национальный Университет им.Л.Н.Гумилева)

E-mail: *vokaze61@mail.ru*

Основными функциями, рассматриваемые в школе, являются числовые функции числового аргумента. Поэтому очень важно в старших классах систематизировать понятие числа. Разделяются понятия: есть числа и есть их записи, наподобие того, что есть слова и есть письменность – записи слов.

Роль слов играют числа, роль букв в записи чисел – цифры. Равно как по записи буквами читают слова, так и по записи цифрами читают числа.

Имеются пять особых чисел: 0 (нейтральный элемент по отношению к операции сложения: $0+a = a$ для любого числа a), 1 (нейтральный элемент по отношению операции умножения : $1{\cdot}a = a$ для любого числа), $\pi, e, i = \sqrt{-1}$.

Степень есть действия над числами: необходимо научить учащихся понимать записи $2^0,\ 2^3,\ 2^{-13},\ 2^{\frac{1}{17}},\ 2^{-\frac{1}{21}},\ 2^{\sqrt{23}},\ 2^{-\sqrt{3}}$.

Здесь наряду с теоретическими сведениями, большую пользу принесут вычисления: нахождение точных значений или выписывание нескольких первых значащих цифр данных степеней.

Вывод шести свойств степени в общем случае выходит за рамки школьной программы. Достаточно ограничиться наглядным и простым случаем для целых неотрицательных степеней.

Определение степени числа применяется при введении понятия логарифма действительного положительного числа. А именно, данное положительное число x записывается в виде степени a^c с заданным основанием a ($a > 0$, $a \neq 1$), показатель степени c и есть определяемый логарифм.

После основательной проработки степени числа такое введение логарифмов станет более легким и понятным для восприятия. Основные свойства логарифмов выводятся на основании свойств степени. Числовые функции числового аргумента, изучаемые в школе, носят алгоритмический характер. В частности, для определения первых трех элементарных функций – степенной, показательной и логарифмической – используется подробное изученное определение степени числа. Тогда в определении степени фиксируя показатель степени и беря основание в виде аргумента, получаем степенную функцию, поступая наоборот – показательную. В логарифме считая записываемое в виде степени число за аргумент, получаем логарифмическую функцию.

Используя определение функции [1, стр.58] в каждом из следующих случаев правило fдействительной переменной (аргументу) х ставит в соответствие не просто какое-то число, а соответственно:
1) действительную степень α числа x , т.е. $f : x \mapsto x^\alpha$ для степенной функции,
2) действительное число a в степени x ($a{\neq}1,\ a{>}0$), т.е. $f : x \mapsto a^x$ для показательной функции,
3) логарифм положительного действительного числа хпо основанию a($a{\neq}1,\ a{>}0$), т.е $f : x \mapsto \log_a x$ для логарифмической функции.

Литература

1. Темиргалиев Н., Аубакир Б., Баилов Е., Потапов М. К., Шерниязов К. Алгебра и начала анализа, 10-11 классы. А., "Жазушы", 2002.

Особенности преподавания математики для студентов аграриев

Г.В. Воронина

(Орловский гос. аграрный ун-т)

E-mail: *voroninag@yandex.ru*

Одна из основных задач современной средней школы — реализация Концепции профильного обучения. Как же обстоит решение этой проблемы на практике при обучении школьников одному из основных предметов — математике? Ответ попытаемся дать с позиций студентов-аграриев, которые выбрали в качестве своей будущей профессии сельскохозяйственные специальности. Большинство из них в школе обучались в соответствии с гуманитарным профилем и успехи по математике имели весьма скромные. Как показало анкетирование, только 32% студентов 1–2 курсов считают знания математики необходимыми в будущей профессиональной деятельности. Поэтому преподавателю математики аграрного вуза прежде всего необходимо развить интерес студентов к своему предмету и показать его значимость для их будущей профессии.

Специфика математики в том, что ее основным методом обучения является решение задач. Рассматривая вопросы активизации обучения математике в высшей школе, методисты особо выделяют так называемые прикладные задачи. Однозначного определения этого понятия нет, например, под прикладной понимается задача, «поставленная вне математики и решаемая математическими средствами» [2, с. 7] или под прикладной понимается сюжетная задача, которая «описывает реальную или приближенную к реальной ситуацию и содержит вопрос в том виде, в котором он обычно задается на практике» [3]. На наш взгляд, второе определение более удачное. Итак, практика профессионального обучения доказала эффективность использования в процессе изучения курса математики прикладных задач.

В сельскохозяйственных вузах математика относится к дисциплинам общенаучной подготовки и изучается на 1–2 курсах, в то время как специальные дисциплины, связанные с будущей профессией — на старших курсах, что создает определенные трудности преподавателю математики: ему необходимо разработать систему профессионально-ориентированных задач, решаемых математическими методами. Составление такой системы прикладных математических задач предполагает установление не формальных междисциплинарных связей. Не случайно Б.В. Гнеденко [1, с. 18] подчеркивает, что необходимо так строить преподавание, чтобы студент постоянно ощущал, что, изучая математику, он приближается к более глубокому пониманию своей специальности. Использование информации, необходимой в будущей профессиональной деятельности, активизирует действия студента, вызывает его профессиональный интерес. Поэтому для студентов важно уже с первых дней учебы в вузе видеть взаимосвязь математики с будущей профессией. При обучении математике следует систематически использовать агрономические понятия, термины, идей, модели и задачи. При таком подходе студенты уже на начальном этапе обучения вовлекаются в сферу профессиональной деятельности.

С целью развития интереса к предмету важно, чтобы при решении прикладных задач студенты-аграрии кроме математических знаний и умений получали полезную информацию из фабулы задачи. Приведем пример стандартной прикладной задачи. Приведены данные об урожайности (т/га) двух сортов гороха: для 1-го — 4,4; 3,6; 3,1; 4,9; 4,7; 3,7; для 2-го — 3,1; 3,6; 4,1; 3,7; 4,9; 4,7. Определите основные статистические характеристики данного показателя. Ее фабула содержит минимум профессиональной информации и вряд ли вызовет их интерес. Изменим условие задачи: во Всероссийском научно-исследовательском институте зернобобовых и крупяных культур Орловской области в 2003 году включены в Госреестр высокопродуктивные сорта гороха «Мультик» (основные достоинства: высокая устойчивость к полеганию и осыпанию, высокий коэффициент размножения, короткостебельность, потенциальная продуктивность, ср. урожайность 2,9 т/га), и «Шустрик»(основные достоинства: высокая устойчивость к полеганию, раннеспелость, высокая семенная продуктивность, ср. урожайность 2,9 т/га). На основании данных об урожайности (т/га) этих сортов за отчетный период: «Мультик»: 4,4; 3,6; 3,1; 4,9; 4,7; 3,7, «Шустрик»: 3,1; 3,6; 4,1; 3,7; 4,9; 4,7 рассматривают вопрос о посеве только одного сорта гороха. Какое решение следует принять?

Такого рода задачи вызывают интерес у студентов. Когда возникает интерес, преподаватель математики укажет метод, с помощью которого фермер может сделать правильный выбор посадочного материала. Цель решения поиск значения показателя, от результата которого будет приниматься решение о посеве только одного сорта гороха. Для получения ответа студенту необходимо самостоятельно определить, какие средние характеристики необходимо вычислить и выбрать ту, которая показывает более эффективный результат.

Таким образом, помещая в фабулу математической задачи профессиональную информацию для аграриев: селекционеры, основные характеристики, показатели качества, достоинства, зона возделывания и др., будущий специалист осознанно усваивает математических знания, видит реальное применение этих знаний в профессиональной деятельности. Наш опыт показывает, что обучение математике становится более успешным и эффективным при использовании прикладных задач, несущих полезную профессиональную информацию.

1. Гнеденко Б.В. Математическое образование в вузах. — М.: Высшая школа, 1984. — 74 с.
2. Терешин Н.А. Прикладная направленность школьного курса математики. Книга для учителя. — М.: Просвещение, 1990. — 96 с.
3. Колмакова Н.Р. Прикладные задачи как средство пропедевтики основных понятий математического анализа в школе. Дисс. ... канд. пед. наук. — Красноярск, 1991. — 169 с.

Дополнительное математическое образование (ДМО) школьников

М.М. Галламов
(МПГУ)
E-mail: *gallamov@gmail.com*

Обучение по ДМО строится на следующих принципах:

Первый принцип: ***Обучение на основании всеобъемлющей программы по элементарной математике.***

Пояснение: Данная программа включает в себя материал по элементарной математике не вошедший как в Госстандарт, так и на изучение которого в Госстандарте выделено недостаточное количество часов. Программа рассчитана на учащихся 5 – 11 классов. Каждый раздел и тему можно изучать в течение всех семи лет обучения, что дает возможность не перегружать обучаемых и достаточно глубоко изучить ту или иную тему или раздел элементарной математики. Причем нет необходимости изучать все предложенные разделы и темы в течение всего периода обучения – это физически невозможно. Как правило, наибольший интерес вызывают те темы и разделы программы, которые связаны с олимпиадной математикой. При реализации программы – это необходимо учитывать. Обучение по данной программе осуществляется в три этапа.

I этап – обучение учащихся 5 – 6 классов и симеклассников первого полугодия. Обучение на первом этапе длится 2,5 года. На этом этапе основной целью является: 1) выработка и развитие элементарных представлений, образов о необходимых абст-рактных математических понятиях для дальнейшего изучения; 2) овладение простыми способами и приемами решения нестандартных задач; 3) выявление индивидуальных особенностей и качеств обучаемого, а также их развитие и воспитание необходимых навыков; 4) знакомство с олимпиадной математикой. Изучаются *элементарные принципы, методы, способы, технические приемы, а также ознакомление с принципами математическими рассуждениями, математической культурой, историей математической открытий и биографиеями математиков.*

II этап – обучение учащихся с середины седьмого класса по девятый класс. Обучение на вто-ром этапе также длится 2,5 года. Это самый важный и напряженный этап обучения. Обучение по программе ДМО включает в себя: 2) знакомство с элементами некоторых теорий; 3) овладение приемами математических доказательств; 4) выработка навыков математического мышления; 5) приложение математики и её история; 6) олимпиадную математику.

III этап – обучение учащихся 10 – 11 классов. Обучение на третьем этапе длится 2 года. На этом этапе основной целью является: 1) Подготовка к будующей профессии через исследовательские проекты, связанные с теоретическими исследованиями не только в области самой математики, но и её применении в физике, информатике, экономике криптографии, химии, биологии, экологии, медицине, философии, юриспруденции, искусстве, архитектуре, музыке, астрономии, технике, строительстве и т. д.; 2) олимпиадную математику; 3) поступление в вуз через олимпиады.

Программа состоит из одиннадцати разделов: 1) арифметика; 2) алгебра; 3) анализ; 4) дискретная математика; 5) теория вероятностей и математическая статистика; 6) планиметрия; 7) стереометрия; 8) дискретная геометрия; 9) комбинаторная геометрия; 10) топология; 11) математические рассуждения. Каждый раздел расписывается по темам. Темы не расписываются, а указывается подробно литература, что дает возможность изучать материал со своих позиций и подготовленности аудитории, а также указаны некоторые границы излагаемого материала. Выделение разделов программы, отбор тем и литературы основан на личном опыте и научных интересах автора программы. Вследствие чего к каждому разделу даются необходимые пояснения в виде преамбулы.

Количество часов на изучение каждой темы отводиться по необходимости – в зависимости от реальных условий: подготовленности и интересов аудитории и препо-давателя.

Второй принцип: ***Форма реализации программы***

Программа реализуется на базе такой организационной структуры как школы дополнительного математического образования (ШДМО); общие положения, организационная структура, формы обучения в которой приводятся ниже.

2.1. *Общие положения.*

1) ШДМО представляет собой одну из форм дополнительного математического образования мотивированных учащихся 5 – 11 классов, в основу которой кладется принцип обучения, а воспитания осуществляется через созидание. 2) Полное обучение в ШДМО составляет 7 лет, начиная с пятого класса. Несмотря на это учащийся может приступить к занятиям в школе в любой момент в первые три года обучения. Через 2 – 3 года обучаемый приобретает такие навыки самостоятельной работы, что дальше вполне может продолжать свое обучение по индивидуальной программе. 3) Программа школы ориентирована на качественное и глубокое математическое образование вне зависимости от места проживания обучаемого – в мегаполисе или глухой деревушке, а также его уровня подготовки. 2) Основой обучения является систематические и регулярные занятия, рассчитанные на прилежании и трудолюбии обучаемого.

2.2. *Организационная структура.*

1) Учебный год в ШДМО состоит из двух частей: Первая часть учебного года состоит из 30 учебных недель с сентября по май следующего года, вторая часть представляет собой выездную летную математическую школу. 2) Группы формируются по классам их 15 – 20 человек. В каждой группе не менее двух преподавателей. 3) Ведется учебный журнал группы, в котором отражаются результаты текущей работы обучаемых, их посещаемость, а также отражается тема проводимого занятия и индивидуальные задания. 4) За каждую четверть обучаемому выдается ведомость, оценивающая его результаты работы в четверти по каждому виду работы. 5) По результатам работы в выездных математических школах выдаются отдельные ведомости. 6) Преподаватель обязан представлять, изложенные темы и индивидуальные задания в электронном виде.

2.3. *Формы обучения.*

1) Формы обучения в ШДМО следующие: а) очная, б) очно-заочная, в) дистанционная. 2) Очная форма обучения осуществляется посредством пяти видов занятий а) аудиторные занятия, б) консультации и прием индивидуальных заданий, в) исследовательская работа, г) олимпиадная математика и д) выездная математическая школа как летняя, так и зимняя. 3) Виды занятий: а) Аудиторные занятия проходят один раз в неделю: для 5 – 6 классов 2 часа в неделю, 7 класс 3 часа в неделю и 8 - 9 класс 4 часа в неделю. б) Консультации и прием индивидуальных заданий два раза в неделю 5 – 6 класс 4 часа в неделю, 7 класс 6 часов в неделю и 8 – 9 класс 8 часов в неделю. Они могут проводится как индивидуально, так и коллективно. в) Исследовательская работа проводится в следующем виде – каждому обучаемому выдается тема доклада и список литературы. В конце учебного года обучаемый должен выступить с докладом на конференции. На подготовку каждого доклада ученика к конференции за руководство в 5 – 6 классе 4 часа, в 7 классе 6 часов и в 8 – 9 классах 8 часов. г) Олимпиадная математика представляет собой вид занятий, включающий в себя математические турниры различного вида (письменная и устная олимпиады, математический бой, мате-матическая регата и другие). Математические турниры должны проводится не менее 5 раз в учебном году и не реже один раз в четверть. На учебный год за подготовку и проведение математических турниров выделяется в 5 – 6 классах – 50 часов, в 8 классе – 60 часов и в 8 – 9 классах – 70 часов д) Выездная математическая школа особо важный вид занятий, как для обучения, так и для воспитания. Количество часов, выделяемое на такую школу лучше проводить из расчета на один день. 5 – 6 классы 3 часа аудиторных занятий, 3 часа консультаций и прием индивидуальных занятий, если в этот день проводиться математический турнир, то 10 часов и 2 часа на воспитательные мероприятия. Итого в общей сложности 8 или 12 часов. 7 – 9 классы 4 часа аудиторных занятий, 4 часа консультаций и прием индивидуальных занятий, если в этот день проводиться математический турнир, то 12 часов и 2 часа на воспитательные мероприятия. Итого в общей сложности 10 или 14 часов.

Такая форма обучения была реализована автором на практике.

Метод замены множителей

В.И. Голубев
(ИСИ РАН)
E-mail: *egolubeva@gmail.com*

В 1992 году по инициативе Всесоюзной Ассоциации учителей математики фирмой «Квантор» была издана серия учебно-методической литературы.

В одном из выпусков этой серии и был изложен метод замены множителей как очень эффективный способ решения целого класса неравенств.

Для большинства учителей и школьников является полным откровением следующее мгновенное преобразование неравества

$$\frac{((x^2+x+1)^{\frac{x+2}{x+3}}-(x^2+x+1)^2)\cdot\log_{x^2}(100+x)}{(\sqrt{x^2-x}-1-x^2)\cdot(|2x-1|-6)}>0$$

в дробно-рациональное

$$\frac{x(x+1)(\frac{x+2}{x+3}-2)(x^2-1)(99+x)}{((x^2-x)-(1+x^2)^2)(2x-7)(2x+5)}>0.$$

Метод замены множителей существенно экономит время на экзаменах, столь необходимое для решения задач повышенной сложности.

Базовая информация по методу замены множителей

1. *Стандартный вид неравенств*, когда применяется метод замены множителей:

   $$\frac{u_1\cdot u_2\cdot\dots\cdot u_n}{v_1\cdot v_2\cdot\dots\cdot v_n}\vee 0,$$

   где символ «$\vee$» обозначает один из четырех возможных знаков неравества: $<, \leq, >, \geq$.

2. *Основная идея метода замены множителей* состоит в замене любого множителя в числителе и знаменателе на знакосовпадающий с ним и имеющий те же корни.

3. Две основные замены:

   $$(t_1-t_2)\leftrightarrow(f(t_1)-f(t_2)),$$

   если $f(t)$ — строго возрастающая функция;

   $$(t_1-t_2)\leftrightarrow(f(t_2)-f(t_1)),$$

   если $f(t)$ — строго убывающая функция.

О преподавании элементов теории вероятностей и статистики в дистанционной школе

Н.А. Горбачева, Т.А. Зорина, Л.Н. Посицельская

(ГОУ ЦО «Технологии обучения»; Московский автомобильно-дорожный гос. технический ун-т)

E-mail: *gorbacheva@i.home-edu.ru, zorina@i.home-edu.ru, posicelskaja@i.home-edu.ru*

О необходимости изучения в школе элементов теории вероятностей и статистики речь идет очень давно. Сегодня вероятностно-статистический материал обязательно входит в основной школьный курс.

Аккумулируя разные подходы к методике преподавания теории вероятностей и статистики, мы разработали дистанционный курс "Статистика и теория вероятностей"(http://iclass.home-edu.ru/course/view.php?id=150), возможности которого позволяют сделать обучение наглядным и вариативным как по подаче изучаемого материала, так и по формам контроля. В нем используются интерактивные лекции, компьютерные тесты, тренажеры, дидактические игры, инструменты для виртуальных экспериментов и моделирования. Учащиеся могут выбрать этот курс в качестве элективного или профильного.

Курс имеет модульную структуру, и его отдельные блоки в нашей школе изучаются на уроках алгебры. Мы поддерживаем методику введения понятий теории вероятностей до комбинаторики, но считаем, что комбинаторика является не только инструментом для подсчета вероятностей, но и средством развития мышления. Поэтому уже в 5-м классе дети знакомятся с логикой перебора, построением дерева возможных вариантов, решают несложные комбинаторные задачи. Умение систематизировать информацию из больших наборов данных ученики приобретают в 6-м классе. В 7-м классе изучаются основы описательной статистики, кроме того, учащиеся знакомятся с понятием вероятности, так как именно этот возраст, по мнению психологов, наиболее благоприятен для формирования вероятностных представлений. В 8-м и 9-м классах продолжается изучение теории вероятностей, в том числе применение комбинаторики, испытания Бернулли.

Изучение стохастики, которое происходит с опорой на процессы окружающего мира, на жизненный опыт ребенка, повышает интерес к математике, что и наблюдают учителя в нашей школе. Регулярное решение на уроках математики наряду с текстовыми также и вероятностных задач способствует развитию мышления учащихся.

Современные школьники владеют компьютером как рабочим инструментом, поэтому мы активно используем в обучении программы Word и Excel для построения таблиц, диаграмм, для расчетов статистических характеристик. С помощью недавно появившихся программ ("Логомиры Вероятности", "Живая Статистика") учащиеся могут проводить разнообразные виртуальные эксперименты, что особенно важно при дистанционном обучении [1].

Опыт показывает, что детям интереснее находить и анализировать числовые показатели для реальных, а не вымышленных данных. Информация для статистической обработки может быть получена в результате самостоятельной проектной работы учащихся.

Литература

1. Посицельская Л. Н., Горбачева Н. А., Зорина Т. А. Информационные технологии как средство индивидуализации обучения. // Международная конференция "Современные проблемы математики и механики", посвященная 70-летию академика В. А. Садовничего. — МГУ, 2009. С. 345.

Проблема существования интеграла Римана–Стилтьеса

Е.А. Горин, Т.Н. Казарихина

(МПГУ)

E-mail: *evgeny.gorin@mtu-net.ru, tn_k@hotbox.ru*

Классический интеграл Лебега шире и в известном смысле проще интеграла Римана. Схема Колмогорова позволяет объяснить интеграл Лебега (в контексте конечных множеств) младшим школьникам.

Однако для классического интеграла Лебега нет формулы интегрирования по частям, тогда как классическое тождество

$$\int_a^b f\,dg - \int_a^b g\,df = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

показывает, что для интеграла Стилтьеса формула сохраняется (причем оба интеграла слева существуют или нет одновременно). В связи с этим при изложении теории меры и интеграла целесообразно достаточно тщательно описать, когда для функции f, интегрируемой по Лебегу относительно меры, порожденной непрерывной слева функцией g конечной полной вариации по формуле $\nu([\alpha,\beta)) = g(\beta) - g(\alpha)$, интеграл Лебега сводится к интегралу Стилтьеса $\int_a^b f\,dg$.

Обычно при рассмотрении этого вопроса ограничиваются монотонными g и приводят условия, по отдельности необходимые или достаточные, а попытки *дословно* перенести теорему Лебега на произвольные (неотрицательные) меры приводят к неточным формулировкам, которые можно обнаружить даже в квалифицированных (в целом) текстах.

Пусть μ–вариация (комплексной) меры ν. Правильная формулировка критерия такова: (комплексная) функция f должна быть непрерывной μ–почти всюду и ограниченной *в некоторой окрестности носителя* меры μ. Кроме того, существование комплексного интеграла эквивалентно существованию всех 4–х естественно возникающих интегралов от вещественных функций по неотрицательным мерам.

Второй из авторов обнаружил, что комплексные числа здесь можно заменить кватернионами. При этом возникает 32 вспомогательных интеграла и существование левого интеграла равносильно существованию правого. Одномерные интегралы возникают при изучении комплексных (кватернионных) потенциалов в банаховых пространствах.

Фрактальность интегративных связей при изучении дисциплин вероятностного цикла

С.Н. Дворяткина

(Елецкий гос. ун-т им. И.А. Бунина)

E-mail: *sobdvor@yelets.lipetsk.ru*

В современных условиях профессиональная подготовка будущего специалиста требует определенного пересмотра структуры научного знания, следовательно, содержания образования и его связи с характеристикой различных сторон личности, выработки новых подходов, организационных форм и технологий обучения. Интеграционные технологии обучения представляются наиболее оптимальными и результативными, они позволяют решать задачи целостной профессиональной подготовки. В настоящее время концепция интеграции дает возможность качественно изменить структуру содержания образования и становится мощным средством формирования всесторонне развитой личности с неограниченным потенциалом самообразования.

Теория вероятностей относится к наиболее сложным дисциплинам математического цикла, так как она представляет содержательную интеграцию в рамках понятийной, мировоззренческой, деятельностной и концептуальной форм. Традиционно дисциплина устанавливает содержательные связи между элементами теории меры, множеств, методами интегрального и дифференциального исчисления, отдельными разделами линейной алгебры, теории обобщенных функций и т.д..

Предлагается сформировать информационное пространство образовательного процесса с исходно задаваемыми интеграционными связями между содержательными компонентами, входящими в это пространство. Под содержательными компонентами информационного пространства понимаем составляющие теоретического материала вузовского курса теории вероятностей, представленные различными разделами, подразделами. В информационном пространстве возникают, формируются, растут и размножаются кластеры - группы взаимосвязанных содержательных компонент информационного пространства. Подобные системы, основанные на кластерном анализе, самостоятельно выявляют качественно новые признаки объектов и распределяют объекты по другим группам в пределах заданного образовательного процесса. Появление новых структурных множеств увеличивает размерность уже существующих кластеров и является причиной образования новых.

Как известно, фазовое пространство системы с хаотической динамикой имеет фрактальную структуру. В таком пространстве имеются области, куда востребованная траектория не может попасть. Таким образом, процесс управления подобным образовательным процессом сводится к принудительному установлению требуемых горизонтальных связей в ветвящемся и растущем фрактале.Реализуемая модель представлена на уровне интегративных связей при изучении дисциплин вероятностного цикла и предполагает количественное представление процесса получения надежного решения как результата работы ненадежных элементов системы.

Задача настоящей работы состояла не только в построении структурной педагогической модели на языке фракталов, но и в необходимости рассмотрения проблемы эффективности информационных потоков, в частности проблемы фильтрации информации и относительной задержки во времени срабатывания формирующихся связей.

О вступительных испытаниях в МГУ

М.И. Дьяченко, М.К. Потапов
(Мех-мат МГУ; МГУ)
E-mail: *dyach@mail.ru, mkpotapov@mail.ru*

В последние годы практически во всех высших учебных заведениях были отменены вступительные экзамены, и прием стал осуществляться исключительно по результатам ЕГЭ. Заявленные цели этого перехода – выравнивание возможностей для абитуриентов из больших городов и отдаленных районов, а также снижение уровня коррупции, вряд ли можно считать достигнутыми. По-прежнему, среди студентов ведущих ВУЗов мало выпускников сельских школ. Основными причинами этого являются невысокий, в среднем, уровень подготовки и отсутствие средств у родителей для обеспечения учебы вдали от дома. Что касается коррупции, то, на наш взгляд, в ведущих естественно-научных ВУЗах она никогда не носила массового характера, хотя бы потому, что учиться в таких институтах неподготовленный и немотивированный человек не в состоянии. С введением же ЕГЭ обнаружились странные феномены крайне успешной сдачи этих экзаменов в отдельных регионах, никак не коррелирующие со скромными знаниями обладателей высоких оценок.

Следует сказать, что введение ЕГЭ никогда не пользовалось особой популярностью ни среди вузовских преподавателей, ни, что еще более показательно, среди школьных учителей. Не прибавил сторонников ЕГЭ и опыт прошлого, 2009 года, когда приемные комиссии были задерганы потоком заявлений абитуриентов и последующими усилиями понять, кто из них действительно готов учиться в данном ВУЗе. Кроме того, по свидетельствам преподавателей, ведущих занятия у нынешних первокурсников, принятых по результатам ЕГЭ, уровень их подготовки существенно ниже, чем у студентов, сдававших экзамены (успешно выступивших на олимпиадах).

Все эти негативные явления в полной мере проявились и на различных факультетах МГУ. К счастью, с нынешнего года, на всех факультетах разрешено проводить дополнительный экзамен. Пусть его удельный вес относительно невелик (100 баллов против 300 по трем ЕГЭ), но он позволяет отсеять людей, которые заведомо не смогут учиться в Университете. На наш взгляд, следует тщательно продумать форму проведения такого экзамена на различных факультетах. Разумеется, большинство факультетов предпочтут экзамен по профилирующей специальности. Однако, стоит подумать над тем, чтобы проводить экзамен как комплексный по нескольким дисциплинам. При этом он может занять несколько дней (не обязательно подряд), и итоговая оценка будет складываться из оценок по отдельным дисциплинам. При этом основной вклад в оценку может вносить профилирующий предмет, а смысл экзаменов по остальным дисциплинам будет состоять в отсеивании абитуриентов, не обладающих необходимыми знаниями.

Определенный опыт такого экзамена есть на механико-математическом факультете, где в 2009 г. экзамен по математике был проведен вначале в письменной, а затем и в устной форме. Конечно, в организации этого экзамена было немало изъянов, но сама идея, на наш взгляд, заслуживает поддержки.

Исследования, описанные в данной заметке, были выполнены при финансовой поддержке РГНФ, проект 08-06-00144а.

Об изучении понятия функции в средней школе

М.А. Жайнибекова
(Евразийский Национальный Университет им.Л.Н.Гумилева)

Понятие функции относится к центральным понятиям математики вообще, в частности школьного курса математики.

История развития понятия функции пронизывает всю историю развития математики от античности до времен Дедекинда (1887г.), Н.И.Лобачевского (1834г.), Дирихле (1837г.), а по некоторым воззрениям (напр., А.Чёрч (1960г.), это понятие надлежит отнести к первоначальным или неопределяемым. Все это еще раз подчёркивает всю сложность обучения понятию функция, тем более в условиях средней школы.

Учителями средних школ и преподавателями вузов советских и постсоветских времен накоплен различный опыт в преподавании этой темы. Как нам представляется, распространенный способ определения функции в последовательности перменная как нечто меняющееся, независимая переменная, зависимая переменная и функция как определенная связь между переменными, по замыслу предназначенная для упрощения, на деле создает труднопеодолимые препятствиядля понимания.

С целью сделать более доступным пониманию учащихся это сложное понятие математики, остановимся на основных моментах, которые необходимо, по нашему мнению, учесть при изучении функций в средней школе:

1.При введении определения функции необходимо обсудить каждое ключевое понятие (аргумент x, правило f, значение функции $f(x)$, множество определения, множество допустимых значений), входящее в определение[1, стр. 24].

2.“Правило” – это то же самое, что и закон, и алгоритм, и соответствие.

3.Научить учащихся по аналитической записи функции формулировать правило, которым задана функция, а так же и наоборот, по словесной формулировке правила уметь записать его аналитически.

4.Алгоритмическое определение функции целесообразно использовать при задании изучаемых в школе числовых функций.

5.При правильном изучении понятия функции учащиеся свободно могут привести примеры функции из окружающей реальности.

6.Учащиеся должны распознавать среди соответствий те, которые являются и не являются функциями.

7.Наглядное представление функции- ее геометрическая интерпретация – дается более подробным изучением координатной системы в связке число - точка.

8.Необходимо развить у учащихся навыки работы с графиками функций, построение их с помощью преобразований.

Наша цель состоит в пояснении определения функции как правила, алгоритма, закона, примененного к аргументу хкак символическому обозначению произвольного элемента множества её задания. При этом воздерживаемся от понятия “зависимая переменная”, особое внимание уделяется умению четко указывать для каждого случая аргумент, правило задания функции, множество значений. Для закрепления понятий предлагается учащимся самим составить задачи. В ходе отработки навыков работы с определением функции у учащихся устанавливается четкое и правильное восприятие понятия функции.

Литература

1. Темиргалиев Н., Аубакир Б., Баилов Е., Потапов М. К., Шерниязов К. Алгебра и начала анализа, 10-11 классы. Алматы, “Жазушы”, 2002.

Проблемы преподавания математики в провинции

Н.Я. Захарова
(Березниковский филиал Пермского Гос. технического ун-та)
E-mail: *zakharova@bf.pstu.ac.ru*

Я преподаю математику 13 лет в техническом ВУЗе после окончания математико–механического факультета УрГУ. В своей статье мне бы хотелось рассказать о проблемах в преподавании математики в провинциальном ВУЗе.

Во–первых, это крайне низкий интеллектуальный уровень абитуриентов. Начиная, с 2004 года уровень студентов, обучающихся по специальности «Информатика и вычислительная техника» неуклонно снижается.

Причиной тому является, конечно же, демографический кризис, который в провинции определяется большим оттоком выпускников школ. Поступление на бюджетное отделение в столичных ВУЗах стало проще нежели в провинции из–за большего количество бюджетных мест.

В связи с введением в школах ЕГЭ поступление основывается на его результатах. Да, ВУЗы устанавливают свой минимальный порог результатов. Но опыт 2009 года показал, что в провинции не поднимают его выше установленного министерством, боясь потерять абитуриентов. В итоге, при поступлении в наш филиал оказалось достаточным написать ЕГЭ по математике на 21 балл, что соответствует 4 первичным баллам (в основном, части А). Наивно было бы предполагать, что выпускники с такими оценками будут обучаться в учреждениях средне специального образования. Нет, они не только подают документы в ВУЗы, они в них поступают. Потому что, в провинции бытует мнение: «пусть заплатят хотя бы за первый курс, а там посмотрим».

Ну и, конечно же, в наших школах перестали учить учиться. Можно много говорить о качестве школьного образования, но у части детей оно всё же соответствующего уровня. Однако уже на первом курсе сталкиваешься с их неумением читать литературу, усваивать материал. Да и равнодушное отношение к выполнению домашних заданий оставляет свой след в низком уровне усвоения материала.

Чтобы мои слова не звучали голословно, вот несколько примеров результатов первых контрольных работ.

Проблемой в преподавании является и отвлечение преподавателя от образовательного процесса на составление разного рода бумажных документов. Причём сейчас уже поднимается вопрос о написании рабочих программ по стандартам 3–его поколения, каковых ещё и не существует. Чиновничий беспредел в образовании такой же как и по всей стране. Не совсем понятна и позиция о замене контрольных работ тестовыми мероприятиями, в которых практически невозможно отличить уровень усвоения студентом материала от его «способности к угадыванию» ответов. Выходом из такого печального положения является, на мой взгляд, поднятие ВУЗом порогового уровня вступительных результатов. Не хотелось бы, чтобы низкий уровень студентов приводил к облегчению читаемого курса, сводя его до уровня формул и тестов. Возможно проведение мини подготовительных курсов в начале первого года обучения. А при проведении тестовых мероприятий не заменять, а дополнять ими выполнение контрольных работ.

Использование ошибочных решений задач для повторения школьного курса математики

А. С. Зеленский
(Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова)
E-mail: *asz@edunews.ru*

Описывается методический прием, связанный с использованием ошибочных решений задач, некорректных формулировок определений и теорем. Этот прием особенно эффективен для повторения материала (особенно в группах учащихся, которые ранее занимались в разных школах, по разным программам, у разных учителей).

Безусловно, с математическими ошибками нужно бороться. Но здесь делается попытка извлечь из них пользу – ошибка несет «обучающую функцию». Определения, теоремы, решения задач с ошибками или недочетами используются преподавателем для улучшения математической подготовки школьников.

Применяются две основные формы работы с ошибочными решениями.

Учитель может просто дать «решение» задачи на доске. При этом он должен, проявляя определенный артистизм, быть в «скользких» местах как можно более убедительным. Часто бывает, что ученики замечают подвох (это уже хорошо), но бывает, что решение завершено, все его «поняли», вопросов нет. И в таких случаях очень важно вывести аудиторию из «сонного» состояния, «взорвать» процесс, намекнуть на то, что в изложенном «решении» не всё в порядке. И дальнейший анализ задачи в этом случае обычно бывает гораздо полезнее для слушателей, чем «гладкое» решение.

Вторая форма состоит в том, что учитель раздает школьникам листочки с подборкой «решений» задач по данной теме (обычно в качестве домашнего задания). Задача учащихся – найти ошибки и исправить их. В процессе дальнейшего разбора в классе все ошибки тщательно анализируются. Кроме того, обсуждаются различные подходы к решению.

На примере таких «решений» ученики глубже понимают тот или иной метод решения, выявляют какие-то тонкие места и нюансы.

Данная методика повторения материала имеет ряд достоинств:

1. Интерес у ученика к излагаемому материалу сохраняется даже тогда, когда ему кажется, что «он это знает».

2. В результате подробного анализа какого-либо дефекта в определении или в теореме все учащиеся концентрируются на этом пункте, их знание становится осознанным. Если бы сразу была дана верная формулировка, часть школьников упустила бы важные нюансы.

3. Класс постоянно держится в «тонусе»: ученики привыкают не принимать «на веру» ни одну из фраз учителя.

4. Воспитывается необходимый самоконтроль и критическое отношение к излагаемому материалу.

5. У школьника вырабатываются необходимые навыки и алгоритмы поиска ошибок и недочетов в его собственных рассуждениях и выкладках.

6. Учащемуся предоставляется возможность учиться на чужих ошибках: гораздо лучше проанализировать и понять, что кто-то сделал плохо, и самому этого избежать, чем «наступать на те же грабли», на которые уже многие наступили.

7. Важную роль играет тренировка процедуры поиска ошибок и в подготовке будущих учителей. Во-первых, это просто повышает их математическую культуру. А, во-вторых, они вырабатывают навыки и алгоритмы проверки решений, что является одной из важных компонент их будущей профессиональной деятельности.

Система задач для раздела «Проблема коллективного выбора» дисциплины «Исследование операций»

С.В. Злобина

(Брянский гос. ун-т им. ак. И.Г. Петровского)

E-mail: *zsvv@rol.ru*

Включение раздела "Проблема коллективного выбора" в курс "Исследование операций" для студентов специальности "математика и информатика" решает две задачи: позволяет привести пример применения математических методов для анализа социальных процессов, а также познакомить студентов с интересными математическими результатами (теоремы К.Мэя и К.Эрроу [1]), имеющими как общеобразовательную, так и практическую значимость. Поскольку изучение данного раздела не требует использования сложного математического аппарата, то оно может быть организовано как процесс решения специальной системы задач (при подборе задач использовались материалы из [2]).

Первая группа задач предназначена для изучения правил голосования с двумя кандидатами: правила диктатора, навязанного выбора, большинства и меньшинства. Выделяются свойства, выполнения которых целесообразно потребовать от правила голосования (анонимность, нейтральность, монотонность). Вводится понятие правила голосования с квотой. Результатом рассмотрения этой группы задач является доказательство теоремы об правиле голосования с квотой и теоремы Мэя. При этом студенты "открывают" не только формулировки теорем, а и методы их доказательства.

Посредством задач второй группы изучаются избирательные системы с несколькими кандидатами. В качестве примеров рассматриваются правила относительного большинства, Борда, Кондорсе, последовательное попарное голосование, система единственного передаваемого голоса. Сравнительный анализ свойств данных систем завершается формализацией полученных результатов: формулировкой условий, которым должна удовлетворять любая избирательная система. Итогом решения задач этой группы является получение доказательства теоремы Эрроу.

Включение данного раздела в курс "Исследование операций" дает возможность показать студентам весь процесс математического исследования, начинающийся с построения математической модели и завершающийся получением теоретических результатов, описывающих свойства полученной модели, а также интерпретацией результатов применительно к исходной прикладной задаче. При этом на каждом этапе студенты являются активными участниками этого процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. - М.: Мир, 1991. - 464 с.

2. Клима Р.Э., Ходж Дж. К. Математика выборов. - М.: МЦНМО, 2007. - 224 с.

К вопросу о профессиональной направленности самостоятельной работы будущих учителей математики по курсу математического анализа

Л.Н. Ильинская
(Московский Педагогический Государственный Университет)
E-mail: *lubov-ilinskaya@yandex.ru*

В настоящее время в условиях изменений учебных планов и стандартов образования, связанных с сокращением аудиторных часов, роль самостоятельной работы студентов особенно возрастает. Отметим, что организация самостоятельной работы студентов, её формы и методы, отслеживание результатов является одним из наиболее слабых мест в практике вузовского образования. Самостоятельная работа особенно важна для будущего учителя математики: в силу особенностей профессии педагога, что учитель в ходе своей профессиональной деятельности должен постоянно самообучаться и саморазвиваться, творчески применять полученные знания. Таким образом, самостоятельная работа студентов, особенно студентов - будущих учителей, является не просто важной формой образовательного процесса, а должна стать его основой. Кроме того актуальной проблемой обучения математике в педагогическом вузе является реализация профессиональной направленности изучаемых будущим учителем математических курсов.

В центре внимания настоящего сообщения - профессиональная направленность самостоятельной работы будущих учителей математики по курсу математического анализа.

Известно, что курс математического анализа достаточно абстрактен, и студентам - будущим учителям математики не совсем понятно, зачем же изучать этот курс, если многие разделы его, например, теория рядов, кратные интегралы и т.п. совершенно не применимы в школьном курсе математики. Из-за этого у студентов возникает нежелание разбираться в данных разделах, пропадает интерес к изучаемым темам. Для решения данной проблемы мы предлагаем включить в самостоятельную работу следующие элементы: подбор задач, сформулированных на «школьном языке», но решаемых средствами классического анализа, например:
доказать, что система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^3 + y^3 + 2x^2y - 6 = 0; \end{cases}$$

имеет хотя бы два решения.
Решение. Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^3 + y^3 + 2x^2y - 6$. В точке A (5;0) окружности $x^2 + y^2 = 25$ её значение равно 119, а в точке B (-5, 0) той же окружности она принимает значение -131. Кроме того, функция $f(x, y)$непрерывна на заданной окружности и окружность является линейно связным множеством на плоскости. По теореме о промежуточных значениях для функций нескольких переменных, на окружности найдутся хотя бы две точки M и N, в которых эта функция равна нулю (одна на дуге ABC, а вторая на дуге ADB). Значит данная система уравнений имеет хотя бы два решения.

Решение такого рода задач способствует осознанию важности курса математического анализа, роли изучения всех его разделов в обосновании и осознании основ школьного курса алгебры и начал математического анализа.

Схематизация как методическое средство преподавания элементов математического анализа в средней школе

В.М. Имайкин
(НИИ Инновационных стратегий развития общего образования Департамента образования г. Москвы)
E-mail: *ivm61@mail.ru*

Рассмотрим вопрос о преподавании элементов математического анализа (ограничиваясь дифференциальным исчислением) в непрофильных классах общеобразовательной средней школы. С одной стороны, эти элементы являются обязательными и соответствующие задания входят в ЕГЭ, раздел В. С другой стороны, в рамках школьной программы отсутствует база в виде теории действительных чисел и теории пределов. Чтобы не превратить преподавание в освоение навыков формального дифференцирования и набора рецептов для исследования функций и решения ряда экстремальных задач, а также с целью добиться понимания, преподавателю следует привлекать (или, за их отсутствием, разрабатывать) определенный комплекс методических средств. Одним из таких полезных средств, на наш взгляд, является *схематизация*, т.е. фиксация определенного содержания при помощи наглядных графических средств — схем. При преподавании элементов математического анализа полезными оказываются схемы различных типов:

Различительные, которые фиксируют различения объектов или результатов. Например, производную функции в точке (число) отличаем от производной как новой функции.

Схемы *организации вычислительных процедур*. Они похожи на блок-схемы алгоритмов, но в ряде случаев, например, при предельном переходе, соответствующая процедура не является алгоритмизуемой, и схема устроена по-другому.

Классификационные, например, схема классификации возможных результатов предельного перехода при вычислении производной, сами эти случаи тоже фиксируются соответствующими схемами, отражающими по возможности простой и наглядный пример.

Схемы *логической структуры рассуждений*. Они, в частности, фиксируют, когда то или иное утверждение доказано, а когда мы предлагаем принять факт на веру, подкрепляя его примерами.

Комбинированные, включающие в себя в качестве подсхем схемы рассмотренных типов.

Опыт работы автора в старших классах общеобразовательной средней школы (более 10 лет) показывает, что схематизация является полезным методическим средством для преподавателя, а схемы охотно используются учащимися, помогая пониманию такого сложного раздела школьной программы, как элементы математического анализа.

Совершенствование алгебраической подготовки школьников посредством изменения и дополнения содержания обучения

О.А. Косино, А.Ю. Синельщиков

(МГГУ имени М.А. Шолохова, факультет точных наук и инновационных технологий; МГГУ имени М.А. Шолохова, факультет точных наук и инновационных технологий; ГОУ СОШ п. Столбовая)

E-mail: *kosino-oa@yandex.ru, tigrlove3009@yandex.ru*

Проведенный нами многофакторный анализ требований к алгебраической подготовке школьников (требования по государственному стандарту, действующим программам, учебникам, ЕГЭ) показывает нам несоответствие программ, учебников и ЕГЭ.

Первая причина несоответствия математической подготовки школьников - это несовершенство программы и учебника.

В отличие от многих других учебников, учебники Никольского С.М. по алгебре полностью отвечают стандартам. Учебники Никольского С.М. входят в серию учебников "МГУ - школе". Универсальные двухуровневые учебники содержат учебный материал как для общеобразовательных классов (первый уровень), так и для классов с углубленным изучением математики (второй уровень). Материал для углубленного изучения специально выделен, что способствует организации дифференцированного обучения.

Каждый учебник, и это важно, завершается разделом "Задания для повторения", содержащим задачи, как для текущего повторения, так и для подготовки к выпускным и конкурсным экзаменам. В конце учебников приведено "Послесловие для учителя", включающее тематическое планирование учебного материала в двух вариантах (для общеобразовательных классов и классов с углубленным изучением математики).

Следующей причиной несоответствия, является недооценка образовательных возможностей информационных технологий. Применение информационных технологий на уроках является эффективной образовательной технологией благодаря интерактивности, гибкости и интеграции различных типов учебной информации.

На наш взгляд, необходимо разрабатывать и внедрять в образовательный процесс новую структуру учебно-методического обеспечения посредством использования интеграции информационных и педагогических технологий, а именно:

а)учебно-методическое сопровождение для учителя и ученика (текстовое издание);

б)учебно-методическая поддержка для учащихся (неизменяемый электронный вариант), своего рода электронная энциклопедия;

в)учебно-методическая поддержка для учителя (изменяемый электронный вариант), позволяющая адаптировать данную методическую систему обучения под методический стиль учителя.

С внедрением новой структуры учебно-методического обеспечения появляются методические особенности современной алгебраической подготовки школьников, которые заключались в том, что учебно-методические средства распределяются на 3 группы:

а)методические особенности, базирующиеся на использовании результатов интеграции педагогических и информационных технологий, в том числе: свободный доступ к компьютеру на уроке и дома; возможность выбирать наиболее удобный режим работы; самостоятельное изучение и повторение изученного материала;

б)методические особенности, связанные с более четким выделением целевой составляющей алгебраической подготовки, задаваемой педагогической технологией в проекте учебного процесса по учебной теме - технологической карте (в виде конкретной микроцели, формулировка которой понятна учащимся);

в)методические особенности, вытекающие из новой структуры учебно-методического обеспечения алгебраической подготовки: учебно-методическое сопровождение для курса "Алгебра"; учебно-методическая поддержка, которая позволяет учителю по своему усмотрению изменять электронный вариант (систему задач и упражнений, менять последовательность изложения материала, исходя из своего собственного методического стиля); учебно-методическая поддержка для ученика, в виде простейшей электронной энциклопедии.

Современные информационные технологии открывают доступ к нетрадиционным источникам информации, дают совершенно новые возможности для творчества, закрепления различных профессиональных навыков.

Благодаря интеграции информационных и педагогических технологий можно достичь глобальной цели - целостности образования.

О НЕМОТИВИРОВАННОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ВТОРОЙ ТЕОРЕМЫ АБЕЛЯ ДЛЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

С.В. Костин
(МИРЭА, Каф. высшей математики)
E-mail: *kostinsv77@mail.ru*

Рассмотрим степенной ряд
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n, \tag{1}$$
где $c_n \in \mathbb{C}$ — коэффициенты, а $z_0 \in \mathbb{C}$ — центр степенного ряда (1).

Пусть $f(z)$ — сумма степенного ряда (1) (функция $f(z)$ определена во всех тех точках $z \in \mathbb{C}$, в которых степенной ряд (1) сходится).

Пусть $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_0$, и пусть $r = |z_1 - z_0|$ $(0 < r < +\infty)$.

Справедливы следующие две теоремы и следствия из них.

Теорема 1 (теорема о равномерной и абсолютной сходимости степенного ряда в замкнутом круге). Пусть степенной ряд (1) сходится абсолютно в точке z_1. Тогда степенной ряд (1) сходится равномерно и абсолютно в замкнутом круге $\overline{K} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leqslant r\}$.

Следствие. Пусть степенной ряд (1) сходится абсолютно в точке z_1. Тогда функция $f(z)$ определена и непрерывна в замкнутом круге $\overline{K}$.

Теорема 2 (вторая теорема Абеля для степенных рядов). Пусть степенной ряд (1) сходится в точке z_1. Тогда степенной ряд (1) сходится равномерно на отрезке $S = \{z_0 + t(z_1 - z_0) \mid t \in [0,\ 1]\}$ с концами в точках z_0 и z_1.

Следствие. Пусть степенной ряд (1) сходится в точке z_1. Тогда функция $f(z)$ определена и непрерывна на отрезке S.

Теорема 1 и следствие из нее доказываются очень просто и притом с использованием лишь тех теорем, которые изучаются в большинстве технических вузов. Для доказательства теоремы 1 достаточно заметить, что на замкнутом круге $\overline{K}$ функциональный ряд (1) мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |c_n|\,|z_1 - z_0|^n$, и воспользоваться признаком Вейерштрасса равномерной и абсолютной сходимости функционального ряда. Для доказательства следствия из теоремы 1 достаточно воспользоваться теоремой о непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда из непрерывных функций.

В то же время теорема 2 (вторая теорема Абеля) доказывается на основе достаточно сложного и не изучаемого во многих технических вузах признака Абеля равномерной сходимости функционального ряда.

Заметим, что если в точке z_1 степенной ряд (1) сходится абсолютно, то утверждение теоремы 2 является простым следствием утверждения теоремы 1. Действительно, отрезок S является подмножеством замкнутого круга $\overline{K}$ ($S \subset \overline{K}$). Поэтому из равномерной сходимости степенного ряда (1) в замкнутом круге $\overline{K}$ сразу следует равномерная сходимость степенного ряда (1) на отрезке S.

Теорема 2 содержательна, а ее утверждение не тривиально (то есть не сводится к утверждению теоремы 1) лишь в том случае, если в точке z_1 степенной ряд (1) сходится условно.

По нашему мнению, прибегать к использованию теоремы 2 следует лишь в тех случаях, когда без этой теоремы действительно нельзя обойтись, то есть когда степенной ряд (1) сходится в точке z_1 условно.

Использовать тонкую и достаточно сложно доказываемую теорему 2 в тех случаях, когда нужный результат можно получить с помощью практически очевидной теоремы 1 (то есть когда степенной ряд (1) сходится в точке z_1 абсолютно) — это, по нашему мнению, все равно что «стрелять из пушки по воробьям». Это неправильно как с содержательной точки зрения (теорема 2 известна далеко не всем студентам), так и с методической точки зрения (неоправданное использование теоремы 1 приводит к формированию у студентов неправильной математической интуиции и делает учебный материал сложным и непонятным для студентов).

По нашему мнению, достоин всяческого сожаления тот факт, что теорема 1 (ее мы предлагаем называть «теорема о равномерной и абсолютной сходимости степенного ряда в замкнутом круге») отсутствует в подавляющем большинстве учебников математического анализа.

А между тем из теоремы 1 вытекает также следующее важное следствие: если степенной ряд (1) имеет радиус сходимости R, $0 < R < +\infty$, и степенной ряд (1) сходится абсолютно хотя бы в одной точке на границе круга сходимости $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ (то есть на окружности $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = R\}$), то степенной ряд (1) сходится, и притом абсолютно, во всех точках окружности C. Таким образом, множество E_a абсолютной сходимости степенного ряда (1) устроено очень просто, а именно, оно совпадает либо с открытым кругом K, либо с замкнутым кругом $\overline{K} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leqslant R\}$. К сожалению, этот важный факт тоже не отмечается в большинстве учебников математического анализа.

В нашем докладе мы приведем конкретный пример, когда вполне можно обойтись без теоремы 2 (второй теоремы Абеля) и получить нужный результат с помощью значительно более простой теоремы 1 (теоремы о равномерной и абсолютной сходимости степенного ряда в замкнутом круге).

МОЖЕТ ЛИ НЕРАВНОМЕРНО СХОДИТЬСЯ СОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ?

С.В. Костин

(МИРЭА, Каф. высшей математики)

E-mail: *kostinsv77@mail.ru*

В подавляющем большинстве учебников математического анализа несобственными интегралами называют интегралы по неограниченным промежуткам и интегралы от неограниченных функций. Лишь для таких интегралов авторы вводят понятие равномерной сходимости.

Однако простые примеры показывают, что понятие равномерной сходимости на самом деле не является исключительной прерогативой несобственных интегралов. Это понятие носит более общий характер и может играть важную роль даже для самых обычных собственных (или определенных) интегралов.

Пусть функция $f(x,\ p)$ непрерывна на множестве $Y = (a,\ b) \times E = \{\langle x,\ p\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b,\ p \in E\} \subset \mathbb{R}^2$ (здесь $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, E — произвольный промежуток).

Рассмотрим интеграл

$$I(p) = \int\limits_a^b f(x,\ p)\,dx, \tag{1}$$

зависящий от параметра $p \in E$.

Если $a = -\infty$ или (и) $b = +\infty$, то интеграл (1) является несобственным интегралом при любом значении параметра $p \in E$. Если $a,\ b \in \mathbb{R}$, то интеграл (1) при одних значениях параметра p может быть собственным (при этих значениях параметра p функция $f(x,\ p)$ ограничена на интервале $(a,\ b)$), а при других значениях параметра p может быть несобственным (при этих значениях параметра p функция $f(x,\ p)$ не ограничена на интервале $(a,\ b)$).

Определение. Интеграл (1) называется *равномерно сходящимся* относительно параметра p на промежутке E в точке a, если:

1) при любом значении параметра $p \in E$ интеграл (1) является либо существующим собственным, либо сходящимся несобственным интегралом;

2) $(\forall\,\varepsilon > 0)\ (\exists\,a_1 \in (a,\ b))\ (\forall\,a_2 \in (a,\ a_1))\ (\forall\,p \in E)$: $\left|\int\limits_a^{a_2} f(x,\ p)\,dx\right| < \varepsilon.$

Аналогично определяется равномерная сходимость интеграла (1) относительно параметра p на промежутке E в точке b. Если интеграл (1) сходится равномерно относительно параметра p на промежутке E как в точке a, так и в точке b, то он называется равномерно сходящимся относительно параметра p на промежутке E.

Теорема (о непрерывности интеграла по параметру). Пусть интеграл (1) сходится равномерно относительно параметра p на промежутке E. Тогда функция $I(p)$ непрерывна на промежутке E.

Рассмотрим следующий пример:

$$I(p) = \int_0^1 \frac{2xp}{(x^2+p^2)^2}\,dx. \tag{2}$$

Подынтегральная функция $f(x,\ p)$ непрерывна на множестве $Y = (0,\ 1)\times\mathbb{R} = \{\langle x,\ p\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1,\ p \in \mathbb{R}\}$. При любом фиксированном $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$, функция $f(x,\ p)$ непрерывна на отрезке $[0,\ 1]$, а значит, интеграл (2) является существующим собственным интегралом. Если $p = 0$, то подынтегральная функция равна нулю и интеграл (2) тоже является существующим собственным интегралом.

При любом значении параметра $p \in \mathbb{R}$ легко найти значение интеграла (2):

$$I(p) = \begin{cases} \dfrac{1}{p(1+p^2)}, & \text{если} \quad p \neq 0; \\ 0, & \text{если} \quad p = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Мы видим, что функция $I(p)$ имеет разрыв в точке $p = 0$. Из теоремы о непрерывности интеграла по параметру следует, что интеграл (2) сходится неравномерно относительно параметра $p \in \mathbb{R}$. При этом интеграл (2) не является несобственным интегралом ни при одном значении параметра $p \in \mathbb{R}$.

Таким образом, хотя в большинстве книг по математическому анализу понятие равномерной сходимости рассматривается лишь применительно к несобственным интегралам, на самом деле это понятие играет важную роль и для самых обычных собственных интегралов.

Использование понятия равномерной сходимости лишь по отношению к несобственным интегралам и неиспользование этого понятия по отношению к собственным интегралам, по нашему мнению, является недоразумением и любопытным педагогическим курьезом.

Надо просто говорить о равномерной или неравномерной сходимости интеграла, зависящего от параметра. А какой это интеграл — собственный, несобственный или собственный при одних значениях параметра и несобственный при других значениях параметра — это принципиального значения не имеет и зависит от конкретной рассматриваемой задачи.

Методика идентификации ответов

Т.И. Кузнецова
(Центр международного обр. МГУ им. М.В. Ломоносова)
E-mail: *KUZ@topgen.net*

Когда одна задача решается несколькими способами, могут получиться ответы, не похожие друг на друга. Особенно это относится к тригонометрическим уравнениям. В таких случаях возникает проблема их идентификации.

Рассмотрим уравнение $5\sin x - \cos x = 5$. В учебных пособиях для подготовительных факультетов оно решается с помощью универсальной подстановки (I). Однако это уравнение можно решить методом введения вспомогательного угла (II), методом возведения обеих частей уравнения в квадрат (III). Будем считать отдельным способом перенесение $\cos x$ в правую часть и дальнейшее возведение в квадрат обеих частей уравнения в новом виде (IV). Наша задача заключается в сравнении полученных ответов:

I ответ (при I способе решения):

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} \\ x_2 = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{3}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \end{array}\right.$$

II ответ (при II способе решения):

$$x = \mathrm{arctg}\,\tfrac{1}{5} + (-1)^m \arcsin\tfrac{5}{\sqrt{26}} + \pi m, m \in \mathbf{Z}$$

III ответ (при III способе решения):

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} \\ x_2 = \mathrm{arctg}\,(-2,4) + \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \end{array}\right.$$

IV ответ (при IV способе решения):

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} \\ x_2 = \arccos(-\frac{5}{13}) + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \end{array}\right.$$

С первого взгляда эти ответы разные. Наша цель - доказать, что они определяют одно и то же множество чисел. Для начала можно построить эскизы с использованием тригонометрической окружности и осей синусов, косинусов и тангенсов - они покажут правдоподобность нашего предположения. Однако это нельзя считать доказательством. Следующий этап - более точный - сравнение ответов с помощью компьютера. Для такого метода сравнения выразим арксинус (во II ответе) и арккосинус (в IV ответе) через арктангенс. В результате III и IV ответы примут один вид. Далее, учтем то, что для решения поставленной задачи сравнения ответов достаточно ограничиться одним оборотом, т.е. в этих ответах можно отбросить периоды и рассмотреть только "главные" значения, которые для дальнейшего удобства мы обозначили разными буквами (X_1 и X_2 для I ответа, Y_1 и Y_2 для II ответа, Z_1 и Z_2 для III и IV ответов):

I $\left[\begin{array}{l} X_1 = \frac{\pi}{2} \\ X_2 = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{3}{2} \end{array}\right.$ II $\left[\begin{array}{l} Y_1 = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{5} + \mathrm{arctg}\,5 \\ Y_2 = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{5} - \mathrm{arctg}\,5 + \pi \end{array}\right.$ III-IV $\left[\begin{array}{l} Z_1 = \frac{\pi}{2} \\ Z_2 = \mathrm{arctg}\,(-2,4) + \pi \end{array}\right.$

Задав значение π с семью значащими цифрами и вычислив "главные" значения с помощью компьютера, получаем "компьютерное" подтверждение их равенства: $X_1 = Y_1 = Z_1 = 1,570796$ и $X_2 = Y_2 = Z_2 = 1,965587$. Эти результаты позволяют нам констатировать большую вероятность истинности следующих равенств: $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{5} + \mathrm{arctg}\,5 = \frac{\pi}{2}$; $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{5} - \mathrm{arctg}\,5 = 2\,\mathrm{arctg}\,1,5 - \pi = \mathrm{arctg}\,(-2,4)$, строго доказать которые - только дело "математической" техники.

Последние равенства сами по себе представляют особую ценность и могут рассматриваться как самостоятельный красивый результат проведенного исследования. Делается обобщение: исследование проводится и для уравнения $t \sin x - \cos x = t$.

Повышение качества математического теста с помощью дополняющей альтернативы

В.И. Мельников
(Москва , Ленинские горы)
E-mail: *vim1981@yandex.ru*

Тестовые задания в закрытой форме обладают как преимуществами, так и недостатками, связанными главным образом именно с избирательностью уже готовых ответов. Некоторые отрицательные моменты можно устранить, оставив при этом неизменной саму форму задания.

В мировой практике составления опросов на телевидении и в сети Интернет (так называемых TV polls и WEB polls — а любой опрос, по сути, является тестовым заданием без эталона правильного ответа) специалисты ведущих социологических центров используют ряд правил. Одно из них — так называемое «Правило полноты»: вопросы должны своей формулировкой полностью охватывать проблему, а формализованные ответы — полностью описывать все возможные варианты ее решения и оценок.

На примере заданий по математике рассматривается проблема полноты множества ответов на тестовое задание закрытого типа. В настоящей работе предлагается, наряду с правильными ответами и дистракторами, ввести в это множество так называемую дополняющую альтернативу, которая:

1) позволяет испытуемому указать любой полученный им вариант ответа, который может, вообще говоря, отличаться от исходного набора альтернатив;

2) снижает вероятность того, что испытуемый будет указывать ответ наугад (что автоматически произойдет, если его ответ будет отличаться от приведенных в задании);

3) убирает подсказку, заложенную самой формой предоставления задания (если ответ отсутствует среди нижеперечисленных, то он неправильный);

4) способствует более точной дифференциации испытуемой группы.

Также обсуждаются сопутствующие вопросы: специфические свойства дополняющей альтернативы, уместность ее использования и рекомендации по применению, отрицательные стороны ее применения и способы их устранения.

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ДВОЙСТВЕННОСТИ

К.Б. Нуртазина
(Гос. ун-т управления)
E-mail: *knurtazina@mail.ru*

Рассмотрим задачу (1)

$$p \to \min$$

$$a(x) \le p, a \in P \tag{1}$$

Пусть $A = \cup\{dom a : a \in P\}$. Положим, что $f(x) = \sup\{a(x) : a \in P\}$, для всякого $x \in A$. Назовем f верхней огибающей семейства функций P и обозначим за $\vee P$.

Предложение 1. Задача (1) эквивалентна задаче (1′):

Найти

$$\inf f = \inf \vee P. \tag{1′}$$

Эта задача (1′) называется задачей нахождения минимакса системы P. Рассмотрим задачу (2)

$$q \to \max$$

$$b(y) \geq q, b \in Q \tag{2}$$

Пусть $B = \cup\{domb : b \in Q\}$. Положим, что $f(x) = \sup\{b(y) : b \in Q\}$, для всякого $x \in B$.

Назовем f нижней огибающей семейства функций Q и обозначим за $\wedge Q$.

Предложение 2. Задача (2) эквивалентна задаче (2′):

Найти

$$\inf f = \inf \wedge Q. \tag{2′}$$

Эта задача (2′) называется задачей нахождения минимакса системы Q.

Предложение 3. Обе задачи (1), (2) имеют единственное решение.

Если $P = Q$, то задачи (1′) и (2′) назовем обобщенно двойственными. Обозначим $P = Q$ в этом случае Σ. Итак, в этом случае обе задачи таковы

$$\inf \vee\Sigma, \sup \wedge\Sigma$$

О курсе геометрии в средней школе

А. С. Зеленский, И. И. Панфилов

(Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова; Государственный университет – Высшая школа экономики)

E-mail: *asz@edunews.ru, panfilovi@list.ru*

Общение со школьниками, поступающими в профильные 10-е классы, отчетливо подтверждает тенденцию: уровень геометрической подготовки учащихся с каждым годом становится все более низким. Выпускник 9-го класса, изучавший математику в «обычной» школе, имеющий по геометрии «4» и «5», чаще всего «в совершенстве» знает лишь теорему Пифагора, а, например, уже подобие видит только в треугольниках с параллельными сторонами. Решение задач обычно ведется без какой-либо определенной стратегии, простым перебором формул в надежде на то, что какая-нибудь из них «выдаст» результат.

Между тем общепризнано, что планиметрия является предметом, очень хорошо развивающим аналитические способности учащегося, предметом, в котором небольшое число фактов имеет в задачах колоссальное количество различных сочетаний. Сильный ученик, разгадывая эти геометрические головоломки, получает мощный импульс к дальнейшему изучению как геометрии, так и математики в целом.

Прежде всего, в силу специфики математики как науки, авторы всех школьных учебников стараются сделать изложение материала максимально доказательным. Это, конечно, правильно, но красоту и стройность теории способны оценить лишь те немногие, кто почувствовал ее прелесть в каких-то других «нешкольных» проявлениях, участвуя, например, в математических олимпиадах, факультативах, матбоях и т.п. У остальных же эта тотальная доказательность как минимум отбивает интерес к обучению. Наиболее слабые ученики перестают воспринимать предмет очень скоро… Кроме того, время, отведенное на построение стройного курса планиметрии, почти заканчивается в тот момент, когда преподаватель должен начать самое интересное: использовать все эти факты, решая задачи различной степени сложности. Это крайне важно не только потому, что возможности теории необходимо демонстрировать. В решении задач есть определенный азарт. Только через этот процесс учитель, ведущий занятия, может удержать интерес к предмету в классе с различным уровнем учащихся.

Геометрический кругозор можно и нужно расширять не с первых дней знакомства с предметом, поражая ученика сложностями доказательств, а лишь тогда, когда в этом отчетливо появляется потребность. По нашему мнению, средняя школа в 6–9 классах должна формировать основные ориентиры у учащегося, аккуратно выясняя способности ученика к изучению различных дисциплин. При этом на примере планиметрии можно смело сказать: полный курс планиметрии в нынешнем виде не отвечает требованиям времени. Итогом зачастую бывает бездумная зубрежка и, как следствие, отвращение к изученному и быстро забытому. Разумеется, если это профильная школа, то преподавание должно вестись на совершенно ином, гораздо более глубоком уровне: серьезный теоретический курс с большим количеством примеров и задач здесь абсолютно необходим.

Изложенные выше соображения нами неоднократно проверены. В 10 и 11 классах, параллельно курсу стереометрии, мы даем курс углубленного изучения планиметрии (заметим, что вынуждены, нарушая программу, делать это в ущерб стереометрии). В основе этого курса, наряду с совершенствованием в области доказательств геометрических фактов (задача для будущих математиков чрезвычайно полезная), очень интенсивно идет процесс решения планиметрических задач, сложность которых подбирается в зависимости от стартового уровня учащихся и от скорости роста этого уровня.

Курс планиметрии требует увеличения нагрузки в части решения задач с разумным сокращением доказательной базы в 6–8 классах. Еще более логичным было бы изменение школьной программы и стандартов: перенесение изучения части разделов планиметрии на 10-11 класс (с одновременным переносом каких-то разделов стереометрии на 8–9-й класс). Тогда в старшей школе была бы возможность гораздо более эффективного углубленного изучения всего курса геометрии.

Лабораторные работы по дисциплине «Теоия игр и исследование операций»

Л.Н. Посицельская
(Московский автомобильно-дорожный гос. технический ун-т)
E-mail: *posicelskaja@i.home-edu.ru*

Включение лабораторных работ на компьютере в курс "Теория игр и исследование операций"для специальности "прикладная математика"преследует следующие цели:

- изучить основные методы и алгоритмы решения задач теории игр и исследования операций;
- научиться подбору алгоритма решения с учётом особенностей задачи; оценке сложности алгоритма, ожидаемой и достигнутой точности;
- приобрести опыт проведения математического эксперимента с использованием компьютера;
- научиться коллективно работать над большой задачей путём разбиения её на подзадачи с последующим сведением воедино полученных результатов.

В настоящее время разработан и опробован комплект лабораторных работ по теории игр, включающий следующие темы:

1. Решение матричных игр методом перебора квадратных подматриц.
2. Графо-аналитический метод решения матричных игр размерности $n \times 2$ и $2 \times m$.
3. Итеративные методы решения матричных игр: алгоритм Брауна и монотонный алгоритм [3].
4. Решение биматричных игр методом перебора подматриц.
5. Графо-аналитический метод решения биматричных игр размерности $2 \times m$.
6. Конечные многошаговые игры.

Часть заданий для лабораторных работы разработана на основе материалов книг [1,2,3], другие являются новыми.

Литература

1. Васин А.А., Краснощёков П.С., Морозов В.В. Исследование операций. — М.: Академия, 2008. 463 стр.
2. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Фёдоров В.В. Исследование операций в задах и упражнениях. — М.: КД Либроком, 2009, 287 стр.
3. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. — М.: Высшая школа, 1998. 300 стр.
4. Посицельская Л.Н., Злобина С.В. Система задач для дисциплины "Теория игр и исследование операций"// Математика в высшем образовании, номер 4, год 2006. Стр. 27-36.

Проблемы постановки и преподавания математических дисциплин в высшей школе

А.А. Пунтус
(МАИ)
E-mail: *artpuntus@yandex.ru*

Содержанием доклада является накопленный автором многолетний опыт преподавания отдельных разделов высшей математики на факультете прикладной математики и физики Московского авиационного института (МАИ). Успешная реализация цели усвоения материала курсов высшей математики достигается тремя путями: использование современных методов преподавания математических дисциплин, привлечение наиболее продвинутых студентов к активной научно-исследовательской работе, и, наконец, оправдавшая себя такая эффективная форма, как обучение студентов по индивидуальному учебному плану.

Примером современного метода преподавания математических дисциплин может служить преподавание автором курса обыкновенных дифференциальных уравнений путём достаточно строгого изложения теории и методов отдельных разделов данного курса в современной векторно-матричной и операторной форме. В этом случае даётся краткое и строгое доказательство теоремы существования и единственности решения начальной задачи для системы дифференциальных уравнений и её важнейших следствий, а также проводится исследование свойств гладкости этих решений и их зависимости от параметров, начальных данных и правой части системы. При изложении в данном курсе объединённого раздела линейных дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений даётся наглядное и строгое обоснование возможности сведения задачи интегрирования одного из данных объектов к задаче интегрирования другого из них. Излагаемые методы интегрирования иллюстрируются примерами, решаемыми с достаточно подробными комментариями.

Кажется, что привлечение студентов к научно-исследовательской работе меньше всего связано с усвоением материала различных математических курсов. Однако, целый ряд возможностей открывается при этом не только с точки зрения взаимодействия в этом случае научного и учебного процессов, но и появляется вероятность более глубокого усвоения традиционных учебных курсов, входящих в цикл фундаментальной подготовки. Здесь, прежде всего, используются самые широкие возможности для иллюстрации связи учебного процесса с практическим применением получаемых в учебном процессе знаний, используемых в практической научно-производственной деятельности. В данном случае, при преподавании фундаментальных математических дисциплин постоянно включаются примеры приложений методов данных дисциплин в прикладных задачах механики, физики и техники.

Индивидуальная форма учебного плана обучения студентов была введена в Московском авиационном институте в 1987 году. Это способствовало дальнейшему развитию существовавших к этому времени эффективных учебных и учебно-научных форм подготовки квалифицированных специалистов, в том числе и на реальной базе научно-исследовательских работ, а также отвечало требованиям времени по индивидуализации и интенсификации процесса обучения, органичному соединению в учебном процессе самостоятельной и научно-практической работы студентов. Реализация данной индивидуальной формы подготовки предполагает привлечение к этой форме обучения студентов как с первых шагов учебы в институте, так и с любого из последующих курсов. Эффективность реализации данной индивидуальной формы обучения студентов в Московском авиационном институте характеризуется следующим показателем. Только на одном факультете прикладной математики и физики в последние годы подавляющее большинство выпускников, поступивших в аспирантуру, будучи студентами, сочетали успешную учебу с научной работой на основе индивидуальной формы обучения.

Некоторые методические аспекты приема заданий по высшей математике

О.А. Пыркова
(ГОУ ВПО Московский физико-технический институт)
E-mail: *omukha@mail.ru*

Меняющиеся социальные условия, бурное развитие информационных технологий и ориентация на компетентностный подход требуют постоянной модернизации и учебно-методических материалов.

Студентам предлагаются индивидуальные контрольные работы. Темы заранее выложены на личном учебном Web-сайте http://pyrkova.fizteh.ru [1]. Каждая тема содержит теоретические вопросы и задачи двух уровней: тестовые (1-й уровень) и экзаменационные задачи (2-й уровень). Студентам предлагается выборочно решить несколько задач 2-го уровня за контрольное время. Учащимся, не справившимся с заданием, предлагается сделать весь вариант дома. Применение накопительно-рейтинговой системы оценки знаний для этой группы студентов способствует ликвидации пробелов в их знаниях.

Это помогает успешно освоить большой объем знаний студентами с различным уровнем подготовки и заинтересованности в получении предметных знаний, учитывая индивидуальные потребности и темп обучения, стимулирует соревновательный дух, активизирует самостоятельную познавательную деятельность.

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы"(проект 2.1.1/500) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"на 2009 – 2013 годы

Литература.

1. *Пыркова О. А.* Использование Интернета в процессе обучения.// Международная научная конференция "Образование, наука и экономика в ВУЗах. Интеграция в международное образовательное пространство", г. Плоцк, Польша, 2008. - С. 769-774.

О теории и методике обучения математике в высшей технической школе

С.А. Розанова

(Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет), Научно-методический Совет по математике Министерства образования и науки РФ)

E-mail: *srozanova@mail.ru*

Работая много лет в НМС по математике, Сергей Михайлович не только с большим энтузиазмом занимается своим любимым детищем - секцией средней школы, которую сам создал и возглавляет, но и значительное внимание уделяет проблемам математического образования в вузах инженерно - технического профиля. Он неоднократно высказывал мысль о том, что преподавать математику инженерам нужно иначе, чем будущим математикам в классических университетах, сохраняя при этом фундаментальность образования. Эта идея С.М. Никольского привела меня к рассмотрению поставленной проблемы. Показано, что

I. В настоящее время существует многообразие важных и нужных научных исследований в области методики преподавания математики в технических вузах, которые можно классифицировать по следующим направлениям: 1) обеспечение фундаментальности математического образования в технических вузах должны заниматься математические кафедры, прикладными аспектами - специальные и общепрофессиональные кафедры; 2) усиление профессиональной направленности обучения математике на математических кафедрах через содержательный компонент (математическое моделирование профессиональных задач, создание банка задач межпредметного характера), через методический компонент (проблемное, контекстное обучение, самостоятельная исследовательская деятельность, сочетание коллективных и индивидуальных форм обучения), через мотивационно-ценностный компонент; 3) оптимальное сочетание фундаментальности и профессиональной направленности математических курсов в технических вузах; 4) формирование математической культуры студентов технических вузов; 5) совершенствование содержания курса высшей математики; 6) компьютеризация обучения математики; 7) различные виды организации самостоятельной работы студентов, развитие познавательной самостоятельности с помощью WEB-технологий; 8) интенсификация учебного процесса по математике; 9) формирование математической элиты технического вуза, работа с одаренными студентами.

II. Пока нет как таковой общей теории обучения математике в высшей технической школе, нет методик которые были бы рекомендованы и использовались в вузах разного уровня (то есть с количеством часов по математике до 300 часов; более 300 часов до 600-700 часов; от 700 часов и выше).

III. Теория обучения математике в высшей технической школе необходима, так как без неё невозможно оценить эффективность обучения студентов и обучать психолого-педагогическим методам преподавателей математики с учетом специфики технических вузов.

Показано, что эта теория должна содержать следующие аспекты: исторический, философский, психологический, дидактический, логический. Предложены возможные элементы теории и обобщенная дидактическая модель обучения математике в техническом вузе.

Какой будет школьная математика в 2050 году?

Н.Х. Розов

(МГУ им. М.В.Ломоносова)

E-mail: *rozov@rozov.mccme.ru*

Наступивший 21-ый век ознаменован радикальным переосмыслением политических, экономических, социальных, общественных, культурных и др. аспектов нашего бытия. Мы стали свидетелями зарождения новой парадигмы образования, внедрения новой его структуризации, разработки новых методик передачи знаний и новых информационно-компьютерных технологий обучения. Сегодня мы с восхищением говорим о выдающихся успехах физики, химии, биологии, техники, об открытиях нанотехнологий, биотехнологий, генной инженерии, о принципиально новой концепции нелинейного мира.

Как же должны эволюционировать содержание программы средней школы и методика преподнесения информации «массовому ученику», чтобы в полной мере отвечать современным вызовам конкретной личности, общества в целом и быстротекущего времени? Несомненно, что школа должна знакомить учеников – пусть в простейшей форме, пусть описательно и фрагментарно – с новейшими достижениями естественных и гуманитарных наук.

За минувшее столетие математическая наука шагнула необычайно далеко вперед. Она породила новые понятия, обогатилась выдающимися результатами, разрешила важные проблемы. Она все увереннее превращается в мощный и надежный инструментарий для анализа и прогнозирования природных явлений, технических и технологических процессов, общественных ситуаций и гуманитарных вопросов. Сочетание с гигантскими возможностями компьютеров породило принципиально новое направление научного познания: математическое моделирование и математический эксперимент.

В математической науке содержательно изменилось почти все. Но почти ничего содержательно не изменилось в стандартной программе математики для общеобразовательной школы. Школьники попрежнему пребывают на рубеже 17-18 веков по алгебре и почти в Древней Греции по геометрии. Бесконечные упражнения в проведении формальных преобразований, не имеющих осязаемых реальных приложений, заполняют львиную долю учебного времени. А имеющие общеобразовательное и общекультурное значение фундаментальные математические понятия по-прежнему остаются неведомы учащимся.

Практически в полной неприкосновенности остается и методика преподавания математики в массовой школе, не смотря на все разговоры о привлечении информационно-компьютерных технологий, о внедрении дифференцированного обучения школьников, о необходимости личностно-ориентированного подхода к каждому учащемуся и проч.

Что же – все так и останется к 2050 году? Или нам, профессиональным математикам и педагогам, уместно уже сейчас поставить перед собой вопрос: как должна меняться программа курса математики общеобразовательной средней школы и методика его преподавания?

О понятии элементарной функции в курсе математического анализа

А.И. Саблин

(каф. высшей математики Московского Государственного Университета Природообустройства)

E-mail: *sablin@imail.ru*

В докладе анализируются предлагаемые различными авторами определения элементарной функции [1],[2],[3]. Рассматриваются их достоинства и недостатки. Предлагается ещё одно определение. В рамках этого определения справедливы следующие свойства элементарных функций:

1. Естественная область определения элементарной функции является открытым множеством.

2. Элементарная функция непрерывна, дифференцируема, вещественно аналитична в каждой точке области определения.

3. Все традиционные элементарные функции являются элементарными и в рамках нового определения за исключением некоторых точек.

Основная часть определения совпадает с определением [2]: это функции полученные из основных элементарных с помощью сложения, вычитания, умножения, деления и суперпозиции, применяемых конечное число раз. Меняется список основных элементарных функций. По новому определению в список основных элементарных функций включаются линейная, степенная с целым показателем, показательная, логарифмическая, синус, косинус, тангенс и арктангенс.

Литература

1. Н.С. Пискунов, Дифференциальное и интегральное исчисления, Москва, “Наука”, 1968, стр. 24.

2. Математический энциклопедический словарь, Москва, “Советская энциклопедия”, 1988, стр. 649.

3. Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков, Лекции по математическому анализу, Москва, “Высшая школа”, 1999, стр. 76.

Серия «Математики-педагоги России»: замысел и его воплощение

Ю.М. Колягин, О.А. Саввина, О.В. Тарасова
(Российская академия образования; Елецкий гос. ун-т им. И.А.Бунина; Орловский гос. ун-т)
E-mail: *oas5@mail.ru, TARASOVA@OREL.RU*

Развитие образования вообще, и развитие математического образования в частности, определяли и определяют конкретные люди - учёные-математики и педагоги-математики. Их мысли, работы, дела способствовали становлению системы математического образования, которой славилась Россия. Замысел создания серии книг о математиках-педагогах России начал зреть еще на рубеже XX-XXI вв. Как раз в это время начались интенсивные исследования по истории математического образования России в вузах Ельца, Калуги, Орла и Ростова. Появился замечательный задел, и оставалось только объединить усилия исследователей из разных вузов в рамках единого историко-педагогического проекта. После предварительных обсуждений с руководством ОГУ, ЕГУ им. И.А.Бунина и КГПУ им. К.Э.Циолковского (так случилось, что каждый их этих вузов возглавляет выпускник физико-математического факультета) и было принято решение о создании межвузовского издательского проекта "Математики-педагоги России. Забытые имена". В 2006 г. в ЕГУ им. И.А.Бунина была издана первая книга серии, посвященная Филиппу Васильевичу Филипповичу. В 2008 г. появились вторая и третья книги: об Осипе Ивановиче Сомове и Павле Алексеевиче Некрасове. В 2009 г. - третья и четвертая: о Николае Васильевиче Бугаеве и Александре Матвеевиче Астрябе. В настоящее время работа над серией продолжается. В истории нашей Отчизны, в отечественной педагогике математики еще много незаслуженно забытых имен, не получивших порой достойной оценки потомков. Их мысли и взгляды на преподавание различных разделов математики актуальны и сегодня, потому заслуживают внимания и детального изучения.

Участниками проекта исследуются новые персоналии отечественного математического образования - В.В.Бобынин, И.И.Жегалкин, Л.К.Лахтин и др. Надеемся, что книги об этих замечательных педагогах-математиках увидят свет в недалеком будущем.

Культура математического мышления как социально-значимое явление

В.С. Кузнецов, В.А. Кузнецова, В.С. Сенашенко
(Ярославский госуниверситет им. П.Г. Демидова; РУДН)
E-mail: *vskuzn@uniyar.ac.ru, vsenashenko@mail.ru*

Состояние системы образования в России в последние десятилетия не соответствует требованиям перехода страны на инновационный курс развития. Качество образования продолжает падать, резко снижается уровень образованности населения. Немаловажную роль в этом процессе играет ситуация с математикой как наукой и как составляющей образования.

Культура математического мышления начинает воспитываться с детских лет и ею в определённой степени должен обладать каждый выпускник средней школы независимо от профиля его будущей деятельности.

Между тем и из высшей (не считая отдельных специальных факультетов), и из средней школы, по существу, исчез в качестве работающего термин "понимание"как интегрирующий инструмент в сфере образования и необходимая база для создания новшеств в любой сфере деятельности. Именно математика в первую очередь формирует понимание как один из процессов мышления, устанавливающий причинно-следственную связь, соответствия и сложные многообразные отношения между предметами различной природы. Однако понимание всё чаще подменяется дословным воспроизведением определений, формул без осознания их смысла, узнаванием знакомой информации, умением её применять к решению конкретных задач. Многие студенты не умеют думать, предпочитая осмыслению прочитанного его механическое заучивание. В студенческой среде и в обществе в целом потеряна мотивация на повышение интеллекта, чему в значительной степени способствуют СМИ и, иногда, даже сами работники сферы образования. Культ интеллекта в обществе подменяется культом финансового благополучия.

Всё большее распространение получает идея, согласно которой задачи высшей школы сводятся к задачам подготовки исполнителей, пользователей чьими-то результатами без знания того, почему их надо применять и каковы могут быть последствия.

Подчеркнём, что отсутствие элементарной математической культуры и неумение мыслить опасно не только для будущих специалистов естественнонаучных и технических профилей, не меньшую негативную роль оно может сыграть и для гуманитариев, в деятельности которых не редко требуется умение анализировать информацию, вычленять сущность вопроса, владеть логикой рассуждений, обобщать обширный статистический материал, правильно интерпретировать политическую ситуацию. В докладе будет рассмотрен ряд задачи, решение которых могло бы способствовать повышению математической культуры учащейся молодежи.

О влиянии ЕГЭ на математическое образование

П.И. Пасиченко, И.Н. Сергеев
(МГУ; мех.-мат. ф-т МГУ, проф.)
E-mail: *in_serg@mail.ru*

Единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике, ввиду принятия его в законодательном порядке обязательным для всех выпускников средней школы в государственном масштабе, постепенно приобретает все большее значение для математического образования в стране. Какие же социальные изменения в нашем обществе уже наметились и еще могут произойти в будущем вследствие принятия этого закона?

1. Современная программа ЕГЭ по математике (представленная в демоверсии, в подготовительных и методических материалах) имеет положительную динамику. Однако она ориентирует школу на некий минимум знаний на выходе — минимум, без усвоения которого выпускник не считается овладевшим предметом. К сожалению, некоторые школы стали ограничиваться именно этим минимумом, который для них фактически превратился в максимум.

2. Органы народного образования порой судят о качестве работы школы и ее учителей лишь по результатам выступлений ее выпускников на ЕГЭ. Как следствие, в школах начинается откровенная муштра по подготовке к ЕГЭ: математику начинают изучать не как предмет, а лишь как средство для показательного выпуска ученика из средней школы. Учителя фактически снимают с себя ответственность за глубину подготовки учеников по математике, оправдываясь тем, что к поступлению в вузы они вообще не обязаны готовить.

3. Наряду с полезными для учащихся и высококачественными пособиями для подготовки к ЕГЭ по математике, издательства нередко публикуют откровенно низкопробные подделки, возникающие на волне сиюминутного и поверхностного овладения типичными методами решений задач, с целью натаскивания учащихся на заданные темы. Отмечается активизация репетиторов и подготовительных курсов всех мастей, освободившихся от привычной работы в силу отмены вступительных экзаменов в вузы.

Таким образом, для предотвращения возможных негативных последствий ЕГЭ необходим тщательный и всесторонний анализ его программы и статуса — анализ публичный, с широким привлечением математической общественности.

Работа поддержана РГНФ, проект 08-06-00144а

О формировании графической компетенции учащихся основной школы на уроках математики

Т.В. Сергеева
(ЯрГУ им. П.Г.Демидова, каф. общей математики, МОУ СОШ №58 г. Ярославля)
E-mail: *tsergeeva1968@yandex.ru*

Работа с графиками зависимостей, таблицами, диаграммами и схемами является важной составляющей математической грамотности учащихся. Перенос способов деятельности, приобретаемых на уроках математики, не должен иметь стихийный характер при использовании на других учебных предметах самими учащимися. Также нецелесообразно и постоянное дублирование учителями физики, географии и другими предметниками одних и тех же универсальных способов работы с учебным материалом. Поэтому формирование графической учебной компетенции, которая, по нашему мнению, включает обобщенные способы действий с перечисленными выше объектами, готовность школьника к самостоятельному переносу этих действий в новые условия, должно идти преимущественно на уроках математики. Однако, содержание образования по математике в основной школе для формирования общепредметной графической компетенции ограниченно. Задания в учебных пособиях для 5 ? 9 классах включают, в основном, работу с графиками функций и чтение графиков различных процессов. Составление и анализ диаграмм, таблиц менее представлены в учебных пособиях, хотя имеют выход на государственную итоговую аттестацию (ГИА) и единый государственный экзамен (ЕГЭ) в настоящее время.

В докладе будут представлены возможности использования материалов учебных пособий по разным предметам школьной программы для составления задач. Например, материалы на основе данных из учебников географии для 6 ? 9 классов. Составленные таким образом задачи отвечают условию межпредметности и носят практический характер. Особенность в подходе к составлению задач на географическом материале состоит, во-первых, в том, что целесообразно в ряде случаев брать не всю таблицу, а ее часть, чтобы задание не было загромождено излишними данными. Во-вторых, формулировки вопросов к данным таблиц и диаграмм нужно делать более ?математическими?, так как в школьном курсе экономической географии подавляющее число заданий на анализ приводимых сведений не требует вычислений.

Применение системы компьютерной алгебры maxima в преподавании алгебры

Ф.С. Сиразов
(Набережночелнинский гос. пединститут)
E-mail: *fssirazov@rambler.ru*

В настоящее время мы не можем представить преподавание математики без применения новых информационных технологий. При этом нет необходимости писать сложные процедуры на языках высокого уровня. Современные математические пакеты доступны широкому кругу пользователей, так как они удобны для применения и позволяют формулировать и решать задачи в виде, максимально приближенном к традиционному обучению. Наиболее распространены системы компьютерной алгебры (СКА), которые являются мощным инструментом для ученого или преподавателя, аспиранта или студента. СКА позволяют автоматизировать наиболее рутинную и требующую повышенного внимания часть вычислений, и оперируют при этом аналитической записью данных, т.е. фактически математическими формулами. Система компьютерной алгебры Maxima, выбранная нами для исследования, имеет аналогичные принципы работы и обладает широкими возможностями для решения примеров школьного курса алгебры. Мы считаем ее перспективной с точки зрения применения в обучении математике в школе и вузе, в частности в математической подготовке будущих учителей. Для этого необходимо научить студентов пользоваться данной программой. С этой целью нами были разработаны этапы обучения решению примеров с помощью Maxima, которые мы применяем при проведении практических занятий со студентами факультета математики и информатики. Поэтому на базе самой системы нами был разработан учебник по применению Maxima. Учебник рассчитан на самостоятельную работу во время лабораторных занятий. Знакомить студентов с возможностями Maxima и научить использовать при решении примеров целесообразно в рамках курса «Элементы абстрактной и компьютерной алгебры». Однако данный курс предназначен только для студентов II курса педвуза, обучающихся по специальности "информатика". Мы считаем, что необходимо ввести аналогичный курс и по специальности "математика".

Какие неклассические логики нужны бакалавру информационных технологий?

В.А. Соколов
(Ярославский гос. ун-т им. П.Г. Демидова)
E-mail: *valery-sokolov@yandex.ru*

В своём докладе «Принципы разработки государственного образовательного стандарта бакалавра по направлению 010400 - Информационные технологии» (Открытая всероссийская конференция, 15-16 мая 2006 года «Преподавание Информационных Технологий в России») профессор МГУ им. М.В. Ломоносова В.А. Сухомлин отмечал, что «центральную роль в математической подготовке бакалавров ИТ играют дискретная математика, математическая логика, теория алгоритмов, математическая статистика.»

Как известно, образовательный стандарт бакалавриата направления «Информационные технологии» действительно предполагает солидную подготовку по циклу логико-алгоритмических дисциплин и, в частности, включает в себя дисциплину «Неклассические логики». В качестве одного из примеров программы этой дисциплины можно привести ту, которая реализуется в Санкт-Петербургском государственном университете. Она содержит следующие разделы: модальная логика, язык и аксиомы, семантика возможных миров, реляционные семантики Крипке, окрестностные семантики Монтегю-Скотта, введение в лямбда-исчисление, комбинаторная полнота, непротиворечивость, нормальные формы, теория возможностей: нечеткие множества и функции принадлежности, нечеткие отношения и меры, нечеткая логика и приближенные рассуждения, нечеткие языки, нечеткие алгоритмы.

Однако, в своей статье «Применение рекомендаций Computing Curricula: Software Engineering к российским образовательным стандартам» А.А. Терехов (к.ф.-м.н., Microsoft, Россия) и А. Н. Терехов (профессор, д.ф.-м.н., С.-Петербургский государственный университет, ЛАНИТ-ТЕРКОМ) пишут, что у них «вызвало недоумение включение в обязательную программу курса "Неклассические логики"(4 часа в неделю в 6 семестре). По нашему мнению, такой предмет может быть прочитан в каком-нибудь спецкурсе по выбору студента».

Если иметь в виду приведённый выше вариант программы обсуждаемой дисциплины, то с таким взглядом на предмет, пожалуй, можно согласиться. Однако, нам представляется весьма продуктивным тот способ изложения темы неклассических логик, когда устанавливается их связь с задачами верификации программ, что естественным образом приводит к необходимости переноса акцента на темпоральные логики. Интересным и поучительным вариантом изложения темы «Неклассические логики» является, на наш взгляд, соответствующий раздел программы дисциплины «Математическая логика и логическое программирование» (доцент В.А. Захаров, факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова): «Интуиционистская логика. Модели Крипке для интуиционистской логики. Примеры интуиционистски общезначимых и необщезначимых формул. Модальные логики. Модели Крипке для модальных логик. Эпистемические логики. Темпоральные логики. Проблема верификации последовательных программ. Операционная семантика типовых программных конструкций. Предусловие и постусловие. Частичная корректность программ. Тройки Хоара и их содержательный смысл. Правила вывода в логике Хоара для доказательства частичной корректности последовательных программ. Моделирование программ системами переходов. Темпоральная логика высказываний линейного времени (LTL): синтаксис и семантика. Применение темпоральных логик для спецификации поведения реагирующих программных систем. Задача проверки выполнимости формул LTL на конечной модели. Равносильные преобразования формул LTL. Табличный алгоритм проверки выполнимости формул LTL на конечной модели: основные этапы».

Специфика преподавания высшей математики и информатики в православных университетах

Н.В. Соколов
(Свято-Тихоновский гуманитарный университет)
E-mail: *uminosi@rambler.ru*

В настоящее время в связи с существенным падением среднего уровня школьной подготовки по математике студентов гуманитарных специальностей (да и других специальностей тоже), изучающих элементы высшей математики, приходится вносить существенные изменения в методику преподавания. В докладе на примере ПСТГУ будет рассказано об некоторых особенностях работы в этом направлении. При этом мы в основном ориентируемся на студентов, хотя и имеющих значительные изъяны в предварительной подготовке, но все же стремящихся повысить свой уровень и занимающихся достаточно прилежно. Как и во многих других высших учебных заведениях, в ПСТГУ принято решение повторять некоторые важные элементы школьной программы, которые прежде считались базовыми знаниями, необходимыми при поступлении в институт. Как показывает практика последних лет, уже отнюдь не все первокурсники умеют свободно обращаться с дробями и буквенными выражениями, еще слабее их знания по геометрии. Важной проблемой является выяснение точной картины незнания и установление того минимума, который предстоит восполнить. Это объясняется невозможностью полностью повторять школьный курс, даже и в убыстренном темпе. Видимо, в ближайшем будущем придется создавать специальные пособия для повышения уровня первокурсников. В этой связи особое значение приобретает забота о мотивированности студентов, поскольку их слабый уровень в значительной мере объясняется не только упавшим уровнем школьного преподавания и неудачными реформами в области контроля знаний, но и ощутимой потерей мотивированности учащимися. В этом направлении в ПСТГУ в курсах математики для гуманитариев анализируются философские проблемы, связанные с математической логикой, теорией вероятностей и математической статистикой, подробно обсуждаются математические проблемы, связанные с построением календаря и старым и новым стилями, различиями в нескольких древних и современных календарях, значительное внимание уделяется компьютерным расчетам для вычисления даты православной Пасхи и других переходящих праздников и памятных дат. Большой интерес проявляют учащиеся и при обсуждении древних систем исчисления, в частности, вавилонской.

КАК БЫТЬ С ПЕРЕМЕСТИТЕЛЬНЫМ И СОЧЕТАТЕЛЬНЫМИ ЗАКОНАМИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ?

Н.Т. Темиргалиев
(национальный университет имени Л.Н.Гумилева)
E-mail: *ntmath29@mail.ru*

Казалось бы, что может быть проблемного для школьной математики во всем известных законах арифметики

- Переместительный закон (от перемены мест слагаемых сумма не меняется): $a + b = b + a$
- Сочетательный закон: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Но если в эту ситуацию вникнуть глубже, то получится иная картина.

Для ребенка 6-8 лет, уже научившегося складывать, само собой разумеется, что, к примеру, 2+3 = 3+2. Действительно, он в одну руку возьмет 2 конфеты, в другую - 3, вытянет пред собой руки сначала параллельно, затем накрест и скажет: "Ничего не изменилось, здесь всего 5 конфет".

А взрослые будут его учить ("*Злобный дух скудных умов*!"): $2 + 3 = 3 + 2$, и, вообще $a + b = b + a$ и это есть закон, закон переместительный. И, тем самым, совершат ошибку наподобие библейского Иуды поцелуем совершающим предательство: из добрых намерений обучить математике на деле отлучают от нее.

В математике все должно быть объяснено, в школьной математике тем более, - там, где это в связи с возрастными особенностями невозможно, должны быть приведены так называемые "правдоподобные"объяснения.

Что же здесь происходит? Ребенку навязывается какое-то формальное необъяснимое правило об ему понятном и само собой разумеющемся.

Этим внедряется в сознание недопустимое: есть знания, которые безо всякого объяснения надо заучить и воспроизвести.

Обратимся к самой математике, чтобы понять откуда появились эти самые законы и почему они недоступны пониманию в начальной школе.

Здесь речь идет об определении группы J (точнее абелевой группы), элементы которой будем называть числами.

Аксиома 1. Всякой упорядоченной паре чисел a и b (т.е. чисел, относительно которых установлен порядок: первое число а и второе число b) ставится в соответствие одно третье число, называемое их суммой и обозначаемое $a + b$.

Аксиома 2 (переместительный закон). Всегда $a + b = b + a$.

Аксиома 3 (сочетательный закон). Всегда $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Другие аксиомы (их еще две) приводить и обсуждать не будем, поскольку они выходят за пределы наших целей.

Аксиомы принимаются без каких-либо доказательств, что не исключает их мотивировки.

Мотив принятия Аксиомы 2 следующий. Имеются два числа a и b. Их можно упорядочить двумя способами: первое число a, второе - b с суммой $a + b$ и, наоборот, первое число b, второе - a с суммой $b + a$. Однако, в Аксиоме 1 ничего не говорится об их равенстве, так вот в Аксиоме 2 устанавливается их свойство $a + b = b + a$, называемое переместительным законом.

Теперь мотив к принятию Аксиомы 3. Аксиома 1 определяет действие над числами - действие сложения, причем сложения двух чисел. Возникает вопрос: Что делать, если чисел больше двух? Вводить новые аксиомы для сложения трех, четырех и более чисел? Аксиома 3 отвечает на этот вопрос, сводя вопрос о сложении трех и более чисел к сложению двух чисел, обеспеченного Аксиомой 1. Сложение трех чисел a, b и c можно свести к сложению двух чисел двумя способами: одно из них $(a + b) + c$ - сначала сложить a и b, это будет число $(a+b)$, которое затем складывается с c, другое $a+(b+c)$ - сначала сложить b и c, это будет число $(b + c)$, затем складывается два числа a и $(b + c)$.

Возникает опасение - не будет ли результат зависеть от способов сложения?

Аксиома 3 снимает этот вопрос - независимо от способа сложения результат будет один и тот же, что дает возможность определить сумму $a + b + c$ трех чисел a, b и c.

Подведем итоги нашего экскурса в серьезную теоретическую математику.

Без Аксиомы 1 последующие переместительный (Аксиома 2) и сочетательный (Аксиома 3) законы необъяснимы (даже в самой теоретической математике), введение Аксиомы 1 в школьном курсе выходит за пределы разумности.

Тем самым, уже в начале пути приходим к серьезной методической проблеме. Получается как у Антуана де Сент-Экзюпери: "*Уж такой народ эти взрослые. Не стоит на них сердиться. Дети должны быть снисходительны к взрослым*".

Психолого-педагогические условия реализации личностно ориентированного подхода при обучении решению сюжетных задач

Е.Ф. Фефилова

(ГОУ ВПО «Поморский гос. ун-т им. М.В. Ломоносова)

E-mail: *fefilova.helen@pomorsu.ru*

В реализации личностно-ориентированного подхода обеспечивается согласование двух основных источников познания — *обучения и учения.* Сущность его состоит в создании психолого-педагогических условий для проявления и обогащения субъектного опыта ученика, его "окультуривания"в ходе социально организованного обучения. Выражаясь фигурально, можно сказать, что процесс познания организуется в направлении "с детьми к предмету", а не "с предметом к детям"[1, С.10]. Центральным звеном в изучении математики, несомненно, являются задачи. Особое место в основной школе занимают сюжетные задачи, функции которых в обучении школьника многогранны и значительны. Важным условием реализации личностно ориентированного подхода при обучении решению сюжетных задач выступает целесообразным образом организованная деятельность учащихся, направленная на проявление инициативности, активности и личностного становления, основанные на самостоятельном выборе ценностей самосовершенствования и саморазвития и позволяющие создавать жизненно-практические ситуации и положительный эмоциональный настрой на получение качественного математического образования. А это требует от учителя умения [1]:

- строить работу по выявлению субъектного опыта ученика, использованию его на всех этапах обучения, в том числе и на всех этапах обучения решению сюжетных задач;
- организовывать, поддерживать рефлексию ученика на оценку не только результата, но и процесса его достижения;
- поощрять работу не только с образцами, но и с предлагаемыми учениками способами работы (их выявлять, обсуждать, оценивать в ходе урока);
- разнообразить дидактический материал с учетом индивидуальной избирательности учащихся содержанию, виду сюжетных задач, приема поиска их решения, а также способам и методам решения задач, различающихся: уровнем сложности задач, характером используемых логических операций, требованием к активизации сенсорных каналов, креативностью предлагаемых заданий, сочетанием различных психических процессов для успешного решения задач; что и создает условия для осознания учеником личностной значимости решения задачи "узнать что-то новое для себя"
- давать позитивную оценку познавательным усилиям ученика.

При реализации личностно ориентированного подхода в обучении математике целесообразно опираться на психолого-педагогические закономерности, требования и принципы, обеспечивающие ее единство и целостность. Важная задача такого подхода в обучении решению задач — возбудить в ученике "интерес к самому себе, как мыслящей личности"[2, С.3].

Литература

[1] Психолого-педагогические условия становления индивидуальных стратегий обучения школьников /Под научн. ред. И.С. Якиманской.— М., 2007.

[2] Тихомиров В. О значении математики и целях математического образования //Математика. Приложение ИД "Первое сентября".— М., 2007, №4.— С.2-6.

Работа по учебникам серии «МГУ-школе» в средней школе.

Е.В. Черникова
(МОУ СОШ№ 2 г. Пятигорска)
E-mail: *chernikova.j@mail.ru*

С 1997 по 2004 г. я, работая в МОУ СОШ № 8, участвовала в эксперименте по апробированию учебников серии «МГУ – школе» «Арифметика», «Алгебра 7-9», «Алгебра и начала анализа 10-11» (авторы С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин). Учащиеся из экспериментального класса (все со средним уровнем развития) с интересом работали в школе и дома, на уроках безразличных детей не было. Результаты итоговой аттестации показали, что все учащиеся справились с экзаменационной работой, причём многие ребята решали задачи различными способами. Так как эксперимент с самого начала дал положительные результаты, то все учителя школы 8 перешли на работу по выше названным учебникам и продолжают работать по ним и сейчас.

С 2006 года я стала работать в другой школе и сразу перешла на обучение по моим любимым учебникам. Сейчас уже 5, 6, и 7 классы изучают математику по этим учебникам.

Что же привлекает меня в них?

Прежде всего то, что весь материал расположен в естественной логической последовательности. Так обыкновенные дроби и целые числа в 5 и 6 классах изучаются раньше, чем десятичные дроби. В учебниках алгебры сначала изучаются все преобразования с алгебраическими выражениями и только с 8 класса изучаются функции, когда ученики уже способны понять их. В 10-11 классах сначала изучаются показательные и логарифмические функции и уравнения, а элементы высшей математики (производная и интеграл)- в 11 классе. Во второй половине учебника «Алгебра и начала анализа – 11» решаются уравнения, неравенства и системы,. Они классифицируются не по типам (логарифмические, тригонометрические и т.п.), а по способам действий, которые надо предпринять для их решения (возведение уравнения в степень, логарифмирование, и т.п.), причём материал излагается так понятно и подробно, что я сейчас постоянно использую его при подготовке к ЕГЭ в 11 классе (хотя обучение велось по другому учебнику)

Все учебники двухуровневые (предназначены как для общеобразовательных классов, так и для учащихся, заинтересованных в боле глубоком изучении математики.

В учебниках имеются нестандартные развивающие задачи, старинные задачи, что позволяет значительно расширить возможности для развития мышления и речи учащихся, расширить представление детей о способах решения задач в далёкие времена, способствовать формированию у них интереса к решению задач и к самой математике. Учащиеся проявляют повышенный интерес к историческому материалу.

Учебники постоянно совершенствуются. Они нацелены на повышение уровня математического образования, рекомендованы Министерством образования РФ, входят в Федеральный комплект учебников. Несмотря на то, что Министерство образования Ставропольского края не включило учебники МГУ в перечень учебных изданий, рекомендованных на 2009-2010 учебный год, многие учителя города выбирают их для своей работы. В этом учебном году по выше названным учебникам работают учителя в семи школах города (более 30 классов). Учебники нравятся учащимся и педагогам, поэтому мы рекомендуем всем учителям работать по этим замечательным учебникам.

Большое спасибо авторам!

Нестандартные задачи и взаимосвязи между ними

П.В. Чулков
(МПГУ)
E-mail: *chulkov@logic.ru*

То, что взаимосвязано, легче
изучается и легче удерживается
Г. Фрейденталь

Правильно организованная система задач может помочь школьнику, проявляющему интерес к математике научиться видеть взаимосвязи между задачами, а выявление взаимосвязей позволяет лучше усваивать материал (неявное повторение).

Система взаимосвязей строится, как правило, вокруг одной задачи (базисная задача), имеющей многочисленные продолжения в других задачах («окрестность» задачи по Д.Пойа).

Наличие нескольких решений позволяет обобщать задачу «в разных направлениях», устанавливая взаимосвязи между различными областями школьной математики.

Задача 1. Докажите, что $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

Такая задача вполне может быть решена в 8 классе – для ее решения достаточно знать определение косинуса острого угла и простейшие свойства равнобедренного треугольника. Величина угла α на рисунке равна $\frac{\pi}{7}$, длины отрезков BE, ED, AD и AC равны 1, а треугольник ABC равнобедренный. Требуемый результат легко получается из соотношений:

$$BC = 2\cos\frac{\pi}{7} + 2\cos\frac{3\pi}{7}, AB = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{7}.$$

Построив аналогичную конструкцию из нескольких равнобедренных треугольников можно получить **обобщение 1**:

$$\cos\frac{\pi}{2n+1} - \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \ldots + (-1)^{n+1}\cos\frac{\pi n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

Задача 2 Докажите, что $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$ (эквивалентна предыдущей).

Решение 1 следует из рассмотрения правильного семиугольника с центром в начале координат, одна из вершин которого расположена в точке с координатой $(1; 0)$. Сумма радиус-векторов вершин семиугольника равна нулю, поскольку при повороте на угол $\frac{2\pi}{7}$ система векторов (и их сумма) переходит в себя.

Откуда: $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \ldots + \cos\frac{14\pi}{7} = 0$, $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.

Такое решение доступно девятикласснику.

Рассмотрев правильный многоугольник с большим числом сторон можно получить **обобщение 2**:

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1}+\cos\frac{4\pi}{2n+1}+\ldots+\cos\frac{2\pi n}{2n+1}=-\frac{1}{2}$$

Известно, что сумму $a_1+a_2+\ldots+a_n$ часто считают следующим образом.

Слагаемые суммы представляют в виде:

$$a_1=b_1-b_2, a_2=b_2-b_3,\cdots,a_n=b_n-b_{n+1}, \text{ тогда}$$

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=(b_1-b_2)+(b_2-b_3)+\ldots+(b_n-b_{n+1})=b_1-b_{n+1}$$

Следующее решение реализует эту идею.

Решение 2

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}$$

Далее, раскроем скобки и применим формулу $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\beta-\alpha)$.

Получим:

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$\frac{\left(\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\right)+\left(\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}\right)+\left(\sin\frac{7\pi}{7}-\sin\frac{5\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{2}.$$

Аналогично можно доказать более общие утверждения:

Если n – натуральное число, большее 1, то

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Возможны и другие решения задачи (см. электронный журнал «Полином» www.mathedu.ru/e-journal).

Разработка систем нестандартных задач (базисная задача + взаимосвязанные с ней задачи из различных разделов школьного курса) представляет большой интерес для организации преподавания, особенно в профильных классах и классах с углубленным изучением математики, а также во внеклассной работе.

О МЕТОДИЧЕСКОМ ОБЕСПЕЧЕНИИ УЧЕБНИКОВ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ 5-11 КЛАССОВ СЕРИИ «МГУ-ШКОЛЕ»

М.К. Потапов, А.В. Шевкин

(МГУ; ФМШ 2007)

E-mail: *mkpotapov@mail.ru, avshevkin@mail.ru*

Издательство "Просвещение"в серии "МГУ-школе"выпускает семь учебников "Математика, 5-6", "Алгебра, 7-9", "Алгебра и начала математического анализа, 10-11"(авторы С.М.Никольский, М.К.Потапов, Н.Н.Решетников, А.В.Шевкин). Эти учебники полностью отвечают стандартам, утвержденным Министерством образования и науки РФ. Они рекомендованы министерством в качестве учебников для любых типов общеобразовательных учреждений и входят в перечень учебников, рекомендованных им к использованию в средних школах, причём учебники для 10-11 класса рекомендованы как для общеобразовательных классов, так и для классов с углублённым изучением математики. Издание этих учебников является составной частью программы "МГУ-школе", разработанной по инициативе ректора Московского университета академика В.А. Садовничего и нацеленной на сохранение и развитие лучших традиций отечественного математического образования.

Для методического обеспечения этих учебников Издательство "Просвещение"выпускает рабочие тетради, дидактические материалы, книги для учителя (авторы М.К.Потапов, А.В.Шевкин). Дидактические материалы для 8-11 классов являются пособиями нового типа, так как в них имеются материалы для подготовки к самостоятельным работам, содержащие подробно разобранные решения заданий, аналогичных заданиям самостоятельных работ. Эти дидактические материалы можно использовать и в классе и дома, по ним можно работать и обучаясь по другим учебникам.

В книгах для учителя изложена концепция учебников математики серии "МГУ - школе", дано примерное тематическое планирование, методические рекомендации по изучению учебного материала из учебника. В них обсуждаются наиболее сложные методические вопросы, нацеленные на повышение квалификации учителя, так как учитель должен быть готов отвечать на вопросы наиболее любознательных учащихся, а также разбор заданий из ГИА, ЕГЭ и других экзаменов по изучаемой теме. Методической поддержке учебников и другим вопросам посвящен сайт "Математика. Школа. Будущее"(www.shevkin.ru).

Работа поддержана РГНФ (проект № 08-06-00-144а)

Об особенностях математической подготовки управленческих кадров

Г.М. Агаян, Е.В. Шикин, Г.Е. Шикина
(МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет госуправления)
E-mail: *agagal@rambler.ru, shikin@spa.msu.ru, guzel.shikina@mail.ru*

В настоящее время необходимость математической составляющей при обучении по управленческим направлениям и специальностям особых сомнений не вызывает. Правда, её доля в общем наборе преподаваемых дисциплин выглядит достаточно скромно. Одной из причин этого является, по-видимому, отнесение управления к гуманитарной сфере знания со сложившимися традициями преподавания, ставящими курсы с математическим наполнением в несколько изолированное положение. Тем не менее, при известных усилиях это не мешает созданию пусть и простого, но достаточно действенного математического инструментария, позволяющего студентам получать ответы на вопросы, поставленные преподавателем.

Вместе с тем, студенты управленческих направлений и специальностей, будь то бакалавры или магистры, должны научиться формулировать вопросы самостоятельно, ориентируясь на реальные проблемы, требующие управленческих решений. Опыт показывает. что даже в простых ситуациях это оказывается трудной задачей. Возникающие сложности можно объяснить тем, что в довузовской математической подготовке внимание учащихся целиком сосредоточено на отыскании решений уже поставленных задач, а до постановки задачи дело просто не доходит.

Однако студентов управленческого профиля научить этому совершенно необходимо, пройдя вместе с ними тернистый путь от вербального осознания проблемы до её упрощения и схематизации.

"Надо прямо смотреть в глаза фактам и признать, что применение математических методов не полезно, а вредно до тех пор, пока явление не осознано на доматематичском, гуманитарном уровне"Е.С. Вентцель.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Вентцель Е.С. Методологические особенности прикладной математики на современном этапе. – В сб. "Математики о математике". – М.: Знание, 1982. СС. 37-54.

Модель методической системы обучения стохастике в профильных классах общеобразовательной школы

С.В. Щербатых
(Елецкий гос. ун-т им. И.А. Бунина)
E-mail: *shcherserg@mail.ru*

Профилизация средней школы повлекла за собой пересмотр содержания учебных дисциплин. Коренным новообразованием в школьном курсе математики является включение содержательного компонента – стохастики, представленного симбиозом элементов комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики. В настоящий момент практика обучения стохастике в профильных классах общеобразовательной школы носит накопительный характер, поэтому вопрос создания теории и методики обучения новой содержательной линии школьного курса математики пока остаётся открытым.

В этой связи нами было проведено исследование с целью проектирования и реализации модели методической системы обучения стохастике старшеклассников, широко апробированной в ряде школ Липецкой области.

Для проектирования модели использовались следующие методологические подходы: системный, интегративный, личностно-деятельностный. Системный подход позволил представить всё содержание стохастики, изучаемой в профильных классах, как сложную методическую систему, направленную на его усвоение в деятельности. Личностно-деятельностный подход предполагает то, что каждый блок основного содержания авторского видения школьной стохастики охватывает определённый состав действий, как учителя, так и учеников. Он предусматривает включение в содержание стохастики активного и творческого его изучения, внедрение элементов исследовательской работы, ориентацию на проблемное и эвристическое раскрытие учебного материала. Это определило усиление методологической составляющей содержания, а также разработку методического аппарата его усвоения. Применение интегративного подхода значительно увеличивает объём содержания обучения, что не может не входить в противоречие с ограниченностью учебного времени, отводимого на изучение стохастики в 10-11 классах. Поэтому при конструировании содержания мы стремились к его минимизации.

С учётом выше сказанного, модель методической система была представлена в виде следующих взаимосвязанных компонентов: а) целевого, регламентирующего цель обучения стохастике в профильных классах, которая должна состоять в показе иллюстраций многогранных связей науки о случайном с естествознанием, техникой, гуманитарными дисциплинами, будущей профессиональной деятельностью старшеклассников, что создаёт предпосылки для более фундаментального изложения основных курсов традиционных школьных дисциплин; б) мотивационного, согласно которому формирование и развитие познавательных интересов старшеклассников в рамках профильного обучения стохастике должно стать источником формирования у них склонностей к занятию в будущем соответствующей профессиональной деятельностью; в) содержательного, включающего в себя два компонента: «ядро» – инвариантную часть и «оболочку» – вариативную часть; г) процессуального, включающего в себя научно-обоснованные формы, методы и средства обучения стохастике в профильных классах; д) контрольно-диагностирующего, отражающего требования к качеству стохастической подготовки старшеклассников, определённые ГОС и нормативными документами; е) результативного, заключающегося в анализе эффективности обучения стохастике по авторской системе.

В ходе опытно-экспериментальной работы подтверждена гипотеза об эффективности методической системы обучения стохастике в профильных классах общеобразовательной школы, а, следовательно и созданной на её базе модели. Авторская методика способствует формированию стохастических умений и навыков у старшеклассников, познавательного интереса к математике и развивает у них критичность мышления.

Курс интегральных уравнений для студентов физического факультета МГУ

В.Т. Волков, А.Г. Ягола
(физический факультет МГУ)
E-mail: *volkovvt@migmail.ru, yagola@physics.msu.ru*

Курс интегральных уравнений на физическом факультете МГУ читается в 4-ом семестре, одна лекция в неделю, и сопровождается семинарскими занятиями. Подготовлен учебно-методический комплекс, состоящий из учебника, содержащего тексты лекций, и задачника. Учебно-методический комплекс получил гриф Научно-методического совета по математике Министерства образования и науки РФ и выдержал уже два издания. В докладе будет рассмотрены методические основы изложения курса интегральных уравнений и организации работы студентов.

1. В.Т.Волков, А.Г.Ягола. *Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. Курс лекций. – 2-е изд. исправленное.*. М.: Изд-во КДУ, 2009.
2. В.Т.Волков, А.Г.Ягола. *Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. Методы решения задач. – 2-е изд. исправленное.* . М.: Изд-во КДУ, 2009.

Список авторов

1. Теория функций и теория приближений

2. Функциональный анализ

3. Смежные вопросы математического анализа

4. Преподавание математики

Научное издание

Современные проблемы анализа и преподавания математики

Международная конференция, посвященная 105-летию академика Сергея Михайловича Никольского

Москва, Россия, 17—19 мая 2010 года

Издание подготовлено с использованием:
MiKTeX 2.7, Theses Management System (© www.adrutsa.ru)

Подготовка оригинал–макета: А.В.Друца

Подписано в печать 28.04.2010
Формат 60×90 1/8. Объем 0,9375 п.л.
Заказ 5 Тираж 150 экз.

Издательство ЦПИ при механико–математическом факультете МГУ
г. Москва, Воробьевы горы.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета