АДЫГЕЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ОСЕННИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЧТЕНИЯ В АДЫГЕЕ

Материалы I Международной научной конференции, посвященной памяти профессора Казбека Сагидовича Мамия

8 – 10 октября 2015 г.

Майкоп – 2015

УДК 51 (063)
ББК 22.1л0
О – 72

Материалы I Международной научной конференции «Осенние математические чтения в Адыгее». Майкоп: Изд-во АГУ, 2015. 244с.

Настоящее издание включает материалы I Международной научной конференции «Осенние математические чтения в Адыгее». Конференция проходила с 8 по 10 октября 2015 года в г. Майкопе в Адыгейском государственном университете и была посвящена памяти профессора К.С. Мамия. К участию в «Осенних математических чтениях в Адыгее» были приглашены отечественные и зарубежные ученые, аспиранты, магистранты и студенты.

Тезисы докладов публикуются в соответствии с оригиналами в том виде, как были представлены авторами Программному комитету конференции. Они не проходили научное и литературное редактирование, а только приведены к единому формату.

ISBN 978-5-85108-278-8

ADYGHE STATE UNIVERSITY

AUTUMN MATHEMATICAL READINGS IN ADYGHEA

Abstracts of the 1st International Scientific Conference dedicated to memory of Professor Kazbek Sagidovich Mamiy

October 8-10, 2015

Maikop – 2015

Abstracts of the I st International Scientific Conference "Autumn Mathematical Readings in Adyghea". Maikop, ASU, 2015. 244p.

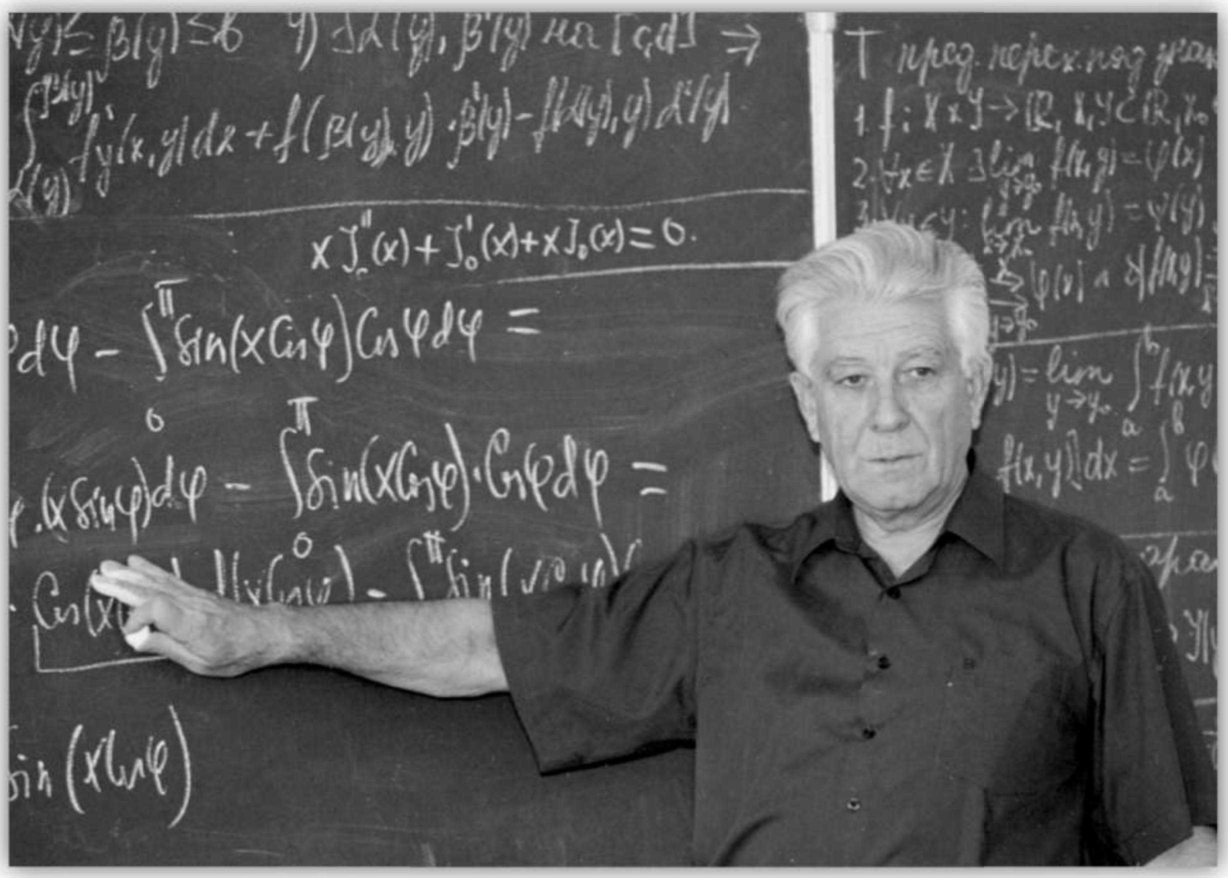
The present edition comprises abstracts of the I st International Scientific Conference "Autumn Mathematical Readings in Adyghea" held on October 8-10, 2015, in the Adyghe State University. The conference was dedicated to memory of Professor K.S. Mamiy. The Autumn Mathematical Readings assembled researchers, international experts, mathematics teaching specialists, post-graduate students, undergraduates and students to discuss the state and problems concerning mathematical competence development in higher education.

The abstracts are published according to the originals in that form as were presented by authors to Conference Program Committee. They are not subjected to scientific and literary editing, but are only put in order to a uniform format.

ISBN 978-5-85108-278-8

СОДЕРЖАНИЕ

ПАМЯТИ ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО УЧЕНОГО И ПЕДАГОГА, ПРОФЕССОРА КАЗБЕКА САГИДОВИЧА МАМИЯ



В Адыгейском государственном университете 8-10 октября 2015 года состоялась первая международная научная конференция «Осенние математические чтения в Адыгее», посвященная памяти профессора Казбека Сагидовича Мамия - яркого математика, замечательного педагога, организатора и популяризатора науки, внесшего большой вклад в развитие математического образования в Адыгее и Краснодарском крае.

Вся многолетняя плодотворная деятельность (1957 - 2014 гг.) профессора К.С Мамия прошла в Адыгейском государственном университете на факультете математики и компьютерных наук и была направлена на подготовку научно-педагогических кадров высшей квалификации.

Выпускник механико-математического факультета Ростовского государственного университета, он прошел путь от ассистента до профессора, заведующего кафедрой математического анализа и методики преподавания математики. Работая на протяжении многих лет в должности заместителя декана факультета, он приложил большие усилия для поднятия авторитета и имиджа факультета в системе математического образования.

Казбек Сагидович Мамий родился 12 апреля 1935 года в адыгском (черкесском) ауле Шабанохабль Теучежского района Адыгейской автономной области Краснодарского края. В 1952 году он поступил в Ростовский государственный университет и окончил его в 1957 году. Еще на третьем курсе под руководством известного математика Ю.Ф. Коробейника началась его научная деятельность. Дипломная работа К.С Мамия была посвящена решению методом Фурье задачи Коши для операторного уравнения третьего порядка в гильбертовом пространстве. Работа была высоко оценена государственной экзаменационной комиссией, и Казбек Сагидович был рекомендован в аспирантуру Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. Однако, осознавая острую потребность в квалифицированных научных кадрах для родной Адыгеи, он вернулся работать на физико-математический факультет Адыгейского государственного педагогического института (с 1993 – Адыгейский государственный университет). С 1957г. по1962г. он работал ассистентом кафедры математики института.

С 1962 года по 1965 год К.С Мамий – аспирант механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Его научным руководителем был выдающийся математик, основатель Московской школы качественной теории дифференциальных уравнений профессор В.В. Немыцкий.

В 1966 г. Казбек Сагидович защитил кандидатскую диссертацию «Априорные оценки решений операторных дифференциональных уравнений второго порядка на полуоси и их приложения» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. В диссертации были решены важные задачи, имеющие приложения в математической физике. Результаты диссертации были опубликованы в ведущих научных журналах, имеющих высокий рейтинг.

После защиты диссертации и возвращения в родной институт К.С Мамий начинает активную научно-педагогическую деятельность – читает лекции и проводит семинарские занятия на высоком научном и методическом уровне. Впервые в Адыгее он организует научно-исследовательский семинар по качественной теории дифференциальных уравнений, воспитавший под его «крылом» целую плеяду учеников.

Семинар К.С Мамия стал «стартовой площадкой» в науку для многих из его учеников, которые впоследствии, благодаря его руководству, поступили в аспирантуры ведущих научных центров Тбилиси, Минска, Санкт-Петербурга и Москвы. Все они, после успешных защит диссертаций, в настоящее время работают в вузах Республики Адыгея и Краснодарского края, воплощая в жизнь идеи соего учителя и продолжая дело, которому он посвятил всю свою жизнь. К.С. Мамий в разные годы периодически выступал с научными докладами на Всесоюзных и региональных научных конференциях, проводимых в различных городах бывшего Советского Союза.

Казбек Сагидович был неутомимым тружеником на математическом поприще. Он внес огромный вклад в становление и развитие физико-математического факультета (с 1988 г. – математический факультет, а с 2000 года – факультет математики и компьютерных наук), который является в настоящее время одним из ведущих в университете.

К.С. Мамий основал в 1969 году на факультете кафедру математического анализа, был ее первым заведующим и возглавлял ее на протяжении 20 лет. Много сил и энергии К.С. Мамий отдал становлению кафедры и воспитанию для нее научно-педагогических кадров.

Казбек Сагидович Мамий был педагогом с большой буквы. Он учил студентов самостоятельно мыслить, творчески работать, придавал исключительно большое значение качеству подготовки специалистов. К.С Мамий уделял также большое внимание подготовке высококвалифицированных учителей математики. Он активно работал с учителями средних школ, регулярно читал им лекции в Институте усовершенствования учителей. Будучи заведующим кафедрой естественно-математических дисциплин института он неоднократно выступал с лекциями по математике перед широкой аудиторией учителей и учащихся средних школ Республики Адыгея, а также Сочи, Армавира, Краснодара, Ставрополя, Ростова-на-Дону, Ульяновска. Его лекции пользовались большой популярностью.

К.С. Мамий является автором более чем 50 публикаций, в том числе научных статей в ведущих журналах, учебных и учебно-методических пособий. Особенно большой популярностью пользуются его учебные пособия по основам современной математики и элементам математического анализа в школьном курсе математики, которые оказывают неоценимую методическую помощь преподователям, студентам и учителям средних школ.

В 1996 году К.С. Мамию было присвоено ученое звание профессора по кафедре математического анализа и методики преподавания математики. За научно-педагогические заслуги К.С. Мамий был избран действительным членом Адыгской (Черкесской) Международной Академии Наук (АМАН). Ему было присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки Республики Адыгея».

Высокий профессионализм, честность, принципиальность, порядочность и скромность снискали Казбеку Сагидовичу глубокое уважение и любовь не только его коллег, но и широких слоев научной общественности, а также работников народного образования Республики Адыгея и Краснодарского края.

Светлая память о выдающемся ученом, педагоге останется в сердцах тех людей, кто его знал.

К международной конференции, посвященной памяти профессора К.С Мамия, проведенной в Адыгейском государственном университете, подготовлены материалы, содержащие тексты научных докладов ученых, работающих в разных областях математики. Это дань памяти замечательному ученому и прекрасному человеку.

Редакционная коллегия

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТИХОНОВА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Абазоков М.Б.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Институт прикладной математики и автоматизации», Нальчик, Россия

Аннотация

Доказывается устойчивость решения задачи Тихонова для уравнения параболического типа.

ON STABILITY OF SOLUTION OF THE TIKHONOV'S PROBLEM FOR EQUATION OF PARABOLIC TYPE WITH CONSTANT COEFFICIENTS

Abazokov M.B.

Institute of Applied Mathematics and Automation, Nalchik, Russia.

В работе А.Н. Тихонова [1] изучается решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t},\ 0 \le x < \infty,\ t \ge 0,$$

удовлетворяющее краевому условию

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k \frac{\partial^k u(0,t)}{\partial x^k} = f(t),\ \ \alpha_k = const,$$

начальному условию $u(x,0) = 0$ и ограниченное на бесконечности.

Автор отмечает, что работа возникла в связи с развитием одного прибора для определения термических констант.

В данной работе рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + bu = \frac{\partial u}{\partial t},\ 0 \le x < \infty,\ t \ge 0,$$

где a, b - произвольные действительные константы. Ищется решение уравнения, ограниченное на бесконечности и удовлетворяющее следующим условиям

$$u(x,0) = 0,$$

и

$$\alpha_0 u(0,t) + \alpha_1 \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} = f(t),$$

где α_i - заданные константы, $i = 0,1,2$.

Литература

1. Тихонов А.Н. О краевых условиях, содержащих производные порядка, превышающего порядок уравнения // Математический сборник. 1950. Т. 26, (68) №1. С. 35-56.

Сведения об авторах

Абазоков Мухаммед Борисович, младший научный сотрудник, Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Институт прикладной математики и автоматизации», E-mail: abazokov.mukhammed@yandex.ru, область научных интересов: задача Тихонова, дифференциальные уравнения в частных производных параболического типа, математическое моделирование.

ГИПОТЕЗА РИМАНА: XX - XXI ВЕК

Авдеева Т.К.

Орловский государственный университет, Орел, Россия.

Авдеев И.Ф.

Орловский государственный университет, Орел, Россия.

Аннотация

В статье описываются различные подходы к исследованию гипотезы Римана о расположении нетривиальных нулей дзета-функции Римана в их исторической ретроспективе.

RIEMANN'S HYPOTHESIS DURING XX - XXI CENTURY

Avdeeva T.K.

Orel State University, Orel, Russia,

Avdeev I.F.

Orel State University, Orel, Russia

Как нас убеждает история математики, развитие науки во многом определяется и стимулируется математическими проблемами. Впервые математические проблемы перед мировым сообществом были озвучены на II Международном конгрессе математиков в 1900 году в докладе Д. Гильберта, их было 23. Часть проблем были успешно разрешены, другие до сих пор остаются неразрешенными, среди них и 8-я проблема Гильберта, связанная с распределением простых чисел на числовой прямой.

Определяя направления развития математики в третьем тысячелетии, St. Smale в своем докладе «Математические проблемы следующего века» [с.419-452,3] сформулировал эту проблему так: «Гипотеза Римана: Расположены ли все те нули дзета-функции Римана, получающиеся при аналитическом продолжении функции $\zeta(s)=\sum_{n\le x}\frac{1}{n^s}$ $\zeta(s)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, $Re(s) > 1$, которые лежат в критической полосе $0 \le Re(s) \le 1$, на прямой $Re(s) = \frac{1}{2}$?».

Эта проблема связана с поисками закономерности, описывающей распределение простых чисел среди натуральных. В своей работе «О количестве простых чисел, не превышающих данной величины» (1859)

Бернхард Риман установил, что закон распределения простых чисел выражается через распределение так называемых «нетривиальных нулей» определенной им функции $\zeta(x)$, $\zeta(x)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots$, где $s \in C$ - множество комплексных чисел. Функция $\zeta(x)$ носит теперь название дзета-функции Римана.

В этой работе Риман указал и явную формулу, связывающую функцию π(x) – количество простых чисел, не превосходящих x – с некоторой суммой по нулям дзета-функции. Как отметил В.Н. Чубариков «Это открытие Римана сделало эпоху в теории простых чисел». [5] Решение этой проблемы имеет широкое приложение: получено много важных следствий в теории чисел, криптографии, квантовой механике и др.

В истории математики исследование Гипотезы Римана шло так.

Еще в 1896 г. Ж. Адамар и Ш. Валле-Пуссен независимо друг от друга доказали, что ζ(s) не имеет нулей на прямых σ=1 и σ=0.

В 1914 г. Г. Харди установил, что на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$ лежит бесконечно много нулей $\zeta(s)$.

В этом же году Идензор Литтлвуд доказал следующую теорему:

Существует бесконечно много x таких, что

$$\pi(x)>\mathrm{Li}\,(x). \tag{1}$$

Ученик Литтлвуда Стенли Скьюз в 1933 г. опубликовал следующую оценку на наименьшее *x,* удовлетворяющему неравенству (1)

$$x < 10^{10^{10^{34}}} \tag{2}$$

Правая часть неравенства (2) получила название числа Скьюзи. Впоследствии этот результат усиливался, однако точное значение такого наименьшего числа Скьюзи неизвестно, в 2012 г. установлено, что оно не превосходит 10^{317}.

В 1955 году была опубликована работа Скьюза, в которой была доказана теорема:

Если гипотеза Римана неверна, то существует число x такое, что выполнено неравенство (1) и $x < 10^{10^{10^{10^3}}}$ (3).

В 1932 году Альберт Эдвард Ингам в работе «Распределение простых чисел» дал новое доказательство теоремы Литтвулда, состоящее из рассмотрения двух случаев – справедливости и ложности гипотезы Римана. Математики же не теряли надежды опровергнуть ее. Этот труд отражен в таблице 1.

В связи с исследованием Гипотезы Римана, следует упомянуть Алана Тьюринга, который в 1939 г. подал заявку на Грант Королевского общества Великобритании, где просил средства для изготовления «аппарата» для вычисления значений дзета-функции, грант был получен. Разработанная техника стала новым инструментом для вычисления дзета-функции, но впоследствии эта работа Тьюринга была превзойдена (Эндрю

Михаэль Одлызко, Арнольд Шёнхаге предложили новый метод, он особенно эффективен когда надо найти значение $\zeta(s)$ не для одного, а для многих близких значений аргумента). [с.120, 4]

Таблица 1. Проверка Гипотезы Римана [4]

Год	Количество нулей	Автор
1903	15	J.P. Gram
1914	79	R.J Backlund
1925	138	J.I. Hutchinson
1936	1041	E.C.Titchmarsh
1953	1104	A.M. Turing
1956	25000	D.H.Lehner
1958	35337	N.A. Meller
1966	250000	R.S. Lehman
1968	3500000	J.B. Rosser, J.M.Yohe, L. Schoenfeld
1977	40000000	R.P. Brent
1979	81000001	R.P. Brent
1982	200000001	R.P. Brent, J. van de Lune, H.J.J.te Riele, D.T. Winter
1983	300000001	J. van de Lune, H.J.J. te Riele
1986	1500000001	J. van de Lune, H.J.J. te Riele, D.T. Winter
2004	900000000000	S.Wedeniwski
2004	10000000000000	X. Gourdon

Победитель десятой проблемы Гильберта Ю.В. Матиясевич в своей работе [7] задался вопросом: можно ли построить рекуррентную формулу, позволяющую по известным *N*-нулям, то есть точкам, где значение дзета-функции равно нулю, построить *N*+1 ноль? Оказалось подходящий алгоритм существует, и он, по мнению Матиясевича, дает хорошие приближения, по крайней мере, для вычисления нулей, при полном отсутствии математического обоснования этой точности.

Отметим еще одно направление в исследовании гипотезы Римана.

Тщетность попыток найти нули дзета-функции вне прямой $\sigma = \frac{1}{2}$, привела математиков к мысли – в критической полосе расширить область, не содержащую нулей $\zeta(s)$. В настоящее время доказать, что $\zeta(s)$ для $0 \le \sigma \le 1$ не содержит нулей в области $\sigma > 1 - \frac{c}{(\ln|t|)^{\gamma}}$, и в области симметричной с ней относительно $\sigma = \frac{1}{2}$ (рис. 1)

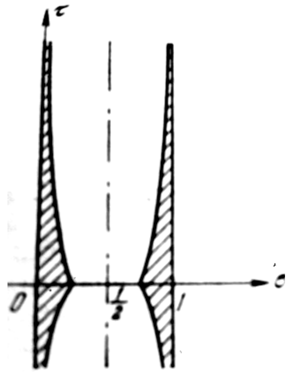


Рис. 1 Критическая полоса.

Показатель γ улучшался различными авторами, и в зависимости от его значений были получены следующие оценки для $R(x)$ $|R(x)| < Cxe^{-a(\ln x)\mu}$, $\pi(x) = \mathrm{li}x + R(x)$.

μ=$\frac{1}{2}$ (Ш. Валле-Пуссен, 1896);

μ= $\frac{11}{21}$+ε , ε>0 (Н.Г. Чудаков, 1936);

μ= $\frac{3}{5}$+ε , ε>0 (И.М. Виноградов, 1958)

μ= $\frac{7}{12}$− ε , ε>0 (Н.М. Коробов, 1958). [с.101, 2]

Вычисление нетривиальных нулей дзета-функции Римана после 1958 года проводились на быстродействующих вычислительных машинах. Эти результаты приведены нами в таблице, расположенной выше. Кроме того, эти вычисления показали, что нули в полосе $0 < \sigma < 1$ с положительной мнимой частью < 35337 лежат на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$.

Мы перечислили отдельные направления в исследовании гипотезы Римана, и хотя проблема не решена, математика обогатилась новыми методами и идеями.

Так Д. Гильберт в своем докладе отмечал «… существо математической науки таково, что каждый действительный успех в ней идет рука об руку с нахождением более сильных вспомогательных средств и более простых методов, которые одновременно облегчают понимание более ранних теорий и устраняют затруднительные старые рассуждения» [с. XV, 3].

Литература

1. Арсланов М. Знаменитые математические проблемы. - Казань: Казанский федеральный университет, 2012.-25с.
2. Демидов С.С. К истории проблем Гильберта // ИМИ Вып. XVII под ред. Т.Ф. Рыбкина и А.П. Юшкевича.- М.: Наука, 1966.- С. 91-122.
3. Математика: границы и перспективы. Перевод с англ. Под ред. Д.В. Аносова и А.Н. Паршина.- М.: ФАЗИС, 2005.- 624 с.
4. Матиясевич Ю.В. Алан Тьюринг и теория чисел //Математика в высшем образовании. № 10, 2012.- С. 111-134.
5. Чубариков В.Н. Простые числа, дзета-функция Римана и тригонометрические суммы. //Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, М., 2011.
6. Ежегодная мемориальная конференция памяти члена-корреспондента РАН А. Н. Тюрина [Электронный ресурс] / Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук - Режим доступа: http://www.mi.ras.ru/
7. "Победитель" проблемы Гильберта заинтересовался задачей тысячелетия [Электронный ресурс] - Режим доступа: http://lenta.ru/news/2012/11/07/hilbert/

Сведения об авторах

Авдеева Татьяна Константиновна, доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры геометрии и методики преподавания математики, Орловский государственный университет, ivan_avd@mail.ru, область научных интересов : история математики и математического образования, методика преподавания математики.

Авдеев Иван Федорович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математических и компьютерных методов анализа экономических процессов, Орловский государственный университет, ivan_avd@mail.ru, область научных интересов: аналитическая теория чисел, гипотеза Римана, плотностные теоремы.

РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ПЛОТНОСТНЫХ ТЕОРЕМ

Авдеев И.Ф.

Орловский государственный университет, Орел, Россия.

Аннотация

В статье описываются различные подходы к исследованию гипотезы Римана о расположении нетривиальных нулей дзета-функции Римана в их исторической ретроспективе.

DIFFERNT WAYS TO APPROACHES TO THE PROOF OF DENSITY THEOREMS

Avdeev I.F.

Orel State University, Orel, Russia

Важную роль в решении Гипотезы Римана играют теоремы о плотности распределения нулей дзета-функции в критической полосе. Такие оценки обычно называются плотностными теоремами – общее название теорем, которые дают оценку сверху для числа $N(\sigma, T, \chi)$ нулей $\rho = \beta + i\gamma$ L-функций Дирихле, где $s = \sigma + it,\ \ \chi(n,k)$– характер Дирихле по модулю k, в прямоугольнике $\frac{1}{2} < \sigma \le \beta < 1,\ \ |\gamma| \le T.$ В случае k=1 получается плотностная теорема для числа нулей $N(\sigma, T)$ дзета-функции Римана $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$

Первые существенные результаты в доказательстве плотностных теорем об оценке нулей дзета-функции Римана получены в начале XX века в работах Г. Бора и Э. Ландау [12], Ф. Карлсона [13]. В дальнейшем оценкой величины $N(\sigma, T)$ занимались Дж. Литтлвуд [14] , А.Э. Ингам [3], [4], Е.К. Титчмарш [5], А. Сельберг [15], Ю.В. Линник, Э. Бомбьери [16] и другие математики.

В 1930 году Г. Гогейзель [11] установил связь плотностных теорем с проблемой оценки распределения между соседними простыми числами, что еще больше повысило их значимость. В последние десятилетия вопросам, связанным с оценкой $N(\sigma, T)$, были посвящены работы М.Н. Хаксли [19], Г. Монтгомери [12], А. Ивича [6], М. Ютилы [21], Д.Р. Хиз-Брауна [22], А.А. Карацубы [8], К. Рамачандры [19] и других известных специалистов.

Изложение доказательств теорем об оценках величины $N(\sigma,T)$ содержится во многих известных монографиях и учебниках по аналитической теории чисел, включая книги Е.К. Титчмарша [5], А. Прахара [17], Э. Дэвенпорта [9], Г. Монтгомери [10], А.А. Карацубы [8], С.М. Воронина [7], А. Ивича [6] и др.

Современная постановка проблемы оценки количества плотности нулей дзета-функции Римана правее критической прямой, то есть оценка величины $N(\sigma,T)$, обычно формулируется как задача нахождения новых значений показателя $A(\sigma)$, для которого выполняется оценка

$$N(\sigma,T) \ll_{\varepsilon} T^{A(\sigma)(1-\sigma)+\varepsilon}, \quad \forall\varepsilon > 0. \tag{1}$$

В 1937 году А.Э. Ингам получил оценку (1) с значением $A(\sigma) = A_1(\sigma) = \dfrac{3}{2-\sigma}$. Несколько позднее эту оценку он уточнил, заменив в ней величину T^{ε} на множитель L^{c}, где $L = \ln T$ и $c > 0$ некоторая постоянная. Но новых степенных понижений в оценке (1), справедливой при всех $\sigma > 0,5$, не было получено до настоящего времени. Наилучшее значение параметра $c = 5$ указано в монографии А. Ивича.[6]

Утверждение о том, что оценка (1) справедлива при всех $\sigma > 0,5$ с значением $A(\sigma) = 2$ называют плотностной гипотезой. Из неё следует, что для количества $\pi(x+h)-\pi(x)$ простых чисел на промежутке $(x,x+h)$ при $h \gg_{\varepsilon} x^{0,5+\varepsilon}$ справедлива асимптотическая формула $\pi(x+h)-\pi(x) \sim \dfrac{h}{\ln x}$, $x \to \infty$. Если же использовать значение $A(\sigma) = \alpha > 2$, то указанная асимптотика будет выполняться лишь при $h \gg_{\varepsilon} x^{1-1/\alpha+\varepsilon}$.

В 1972 году М.Н. Хаксли получил плотностное неравенство (1) с значением $A(\sigma) = A_2(\sigma) = \dfrac{3}{3\sigma-1}$, $\sigma > 0,5$. Вместе с результатом Ингама для величины $A(\sigma)$ это дало значение $A(\sigma) = 2,4 = A_1(0,75) = A_2(0,75)$.

Заметим, что нахождение новых значений $\alpha = \sup\limits_{\sigma \ge 0,5} A(\sigma)$ прежде всего связано с получением новых оценок сверху для величины $A(\sigma)$ в окрестности $\sigma = 0,75$. Но до настоящего времени это удалось сделать только в правой полуокрестности этой точки, то есть для значений $\sigma > 0,75$.

Последний результат в этом направлении был получен А. Ивичем. Он может быть сформулирован в следующем виде

$$A(\sigma) = \frac{3}{7\sigma-4} \text{ при } \sigma \in \left[\frac{13}{17}, \frac{3}{4}\right].$$

В 2007 году нами получена на промежутке $\Delta = \left(\frac{77}{101}, \frac{13}{17}\right)$ новая оценка

$$N(\sigma, T) \ll_{\varepsilon} T^{A(\sigma)(1-\sigma)+\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

которая выполняется для значений $A(\sigma) = \frac{51}{23}$. $A(\sigma) = \frac{51}{23}$. [2]

Поскольку при $\sigma \in \Delta$ выполняется неравенство $\frac{51}{23} < \frac{3}{7\sigma - 4}$, то данный результат является улучшением соответствующей оценки, полученной А. Ивичем $\forall \sigma \in \Delta$.[6]

Отметим, что ряд работ известных математиков – Г. Монтгомери [10], М.Н. Хаксли [18], К. Рамачандры [19], Ф. Форти и С. Виолы [20], М. Ютилы [21], Д.Р. Хиз-Брауна [22] – был посвящен вопросу расширения границ при $\Delta_0 = (\sigma_1, 1]$, $\sigma < 0,75$, для которых выполняется оценка $A(\sigma) \le 2$. Наилучший результат $\sigma_1 = \frac{11}{14}$, получен М. Ютилой [21].

Что же касается значений σ, лежащих в левой окрестности точки $\sigma_0 = 0,75$, то здесь наилучшей оценкой остается теорема Ингама в том смысле, что к настоящему времени удалось лишь уменьшить значение показателя степени в логарифмическом множителе L^c в этой оценке, доведя его, как уже было отмечено, до значения $c = 5$.

Следует сказать, что за время, прошедшее после первого опубликования результата А.Э. Ингама, предложено много других схем доказательства, которые очень различаются.

Нами предложена новая модификация доказательства теоремы А.Э. Ингама.[1] Её существенным моментом является вывод нижней оценки суммы модуля очень короткого начального отрезка ряда Дирихле, распространенной на все нули $\rho = \beta + i\gamma$ дзета-функции Римана $\zeta(s)$, лежащих в прямоугольнике $\beta \ge \sigma$, $|\gamma| \le T$. При этом нами в прямом виде не используется идея Г. Бора в модификации Ф. Карлсона, состоящая в рассмотрении произведения $M_x(s)\zeta(s)$, где $M_x(s)\sum_{n \le x} \mu(n) n^{-s}$ представляет собой «короткую» частичную сумму формального ряда Дирихле для функции $\zeta(s)^{-1}$.

Литература

1. Авдеев, И.Ф. О плотности распределения нулей дзета-функции Римана в критической полосе [Текст]/ И.Ф. Авдеев// Вестник Московского университета. – Серия 1, Математика. Механика. – 2007. – №6. – С.3–5.
2. Авдеев, И.Ф. Об оценках количества нетривиальных нулей дзета-функции Римана [Текст]. – Орел: Издательство Орловского государственного университета, 2007. – 57 с.

3. Ingham, A.E. On the difference between consecutive primes [Текст]/ A.E. Ingham// Quart. J. Math., 8 (1937), P. 255-266.
4. Ingham, A.E. On the estimation of $N(\sigma,T)$ [Текст]/ A.E. Ingham// Quart. J. Math., 11 (1940), P. 291-292.
5. Титчмарш, Е.К. Теория дзета-функций Римана [Текст]/ Е.К.Титчмарш — М.: Издательство иностранной литературы. 1953.
6. Ivić, A. The Riemann zeta-function. The theory of the Riemann zeta-function with applications [Текст]/ Aleksandar Ivić. University of Belgrade. — Yugoslavia, 1985.
7. Воронин, С.М. Дзета-функция Римана [Текст]/ С.М.Воронин, А.А.Карацуба — М.: Физ-мат. лит., 1994. — 376 с.
8. Карацуба, А.А. Основы аналитической теории чисел [Текст]/ А.А. Карацуба — М.: Наука, 1983. — 240 с.
9. Дэвенпорт, Г. Мультипликативная теория чисел [Текст]/Г. Дэвенпорт -М.: Наука. 1971. - 200 с.
10. Монтгомери, Г. Мультипликативная теория чисел [Текст]/ Г. Монтгомери — М.: МИР, 1974.-160 с.
11. Hoheisel, G. Primzahl probleme in der Analysis [Текст]/ G. Hoheisel// Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss. - 1930. -P.580-588.
12. Bor, H. Sur les zeros de la function $\zeta(s)$ de Riemann [Текст]/ H. Bor, E. Landau//C.R. Acad. Sci., 158, 106-110, 1914.
13. Carlson, F. Ūber die Nullstellen der Dirichletschen Reihen und der Riemannschen ζ-Funktion [Текст]/ F. Carlson — Arkiv för Mat. Astr. och Fysik, 15(№20) 1920.
14. Littlewood, J.E. On the zeros of the Riemann zeta-function [Текст]/ J.E. Littlewood// Proc. Cambr. Phil. Soc., 22, 295-318, 1924.
15. Selberg, A. Contributions to the theory of the Riemann zeta-function [Текст]/ A. Selberg// Arch. for Math. og Naturv. B, 48 (№5), 1946.
16. Bombieri, E., Density theorems for the zeta function [Текст]/ E. Bombieri// Proceedings of the Stony Brook Number Theory Conference, 1969, American Mathematical Society, Providence, to appear.
17. Прахар, К. Распределение простых чисел [Текст]/ К. Прахар — М.: МИР, 1967.
18. Huxley, M.N. Large values of Dirichlet polynomials [Текст]/ M.N. Huxley// Acta. Arith. 26, 435-444, 1975
19. Ramachandra, K Some new density estimates for the zeros of the Riemann zeta-function [Текст]/ K. Ramachandra// Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 1, 177-182, 1975.
20. Forti, F.Density estimates for the zeros of L-functions [Текст]/ F. Forti, C. Viola// Acta Arith. 23, 379-391, 1973.
21. Jutila M. Zero-density estimates for L-functions [Текст]/ M. Jutila// Acta. Arith. 32, 52-62, 1977.
22. Heath-Brown, D.R. Zero-density estimates for the Riemann zeta-function and Dirichlet L-functions [Текст]/ D.R. Heath-Brown // J. London Math. Soc. 19(2), 221-232, 1979.

Сведения об авторах

Авдеев Иван Федорович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математических и компьютерных методов анализа экономических процессов, Орловский государственный университет, ivan_avd@mail.ru, область научных интересов: аналитическая теория чисел, гипотеза Римана, плотностные теоремы.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИЦА ЧЕЛОВЕКА ПО ЗАДАННОМУ ПРИМИТИВУ

Алиев М.В.

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия

Шовгенов Д.А.

Аспирант Ярославского государственного университета имени П. Г. Демидова, Ярославль.

Аннотация

Описывается реализованный гибридный алгоритм поиска лиц на изображении, на основе алгоритмов Виолы-Джонса и выделения кожи.

HUMAN FACE DETECTION BY DEFINED PRIMITIVE

Aliev M.V.

Adygeya State University, Maikop, Russia.

Shovgenov Dz.A.

Postgraduate of P. G. Demidov Yaroslavl State University (YarSU)

С ростом систем видеонаблюдения поиск и обнаружение объектов на изображении и в видеопотоке является одной из актуальнейших задач в последнее время.

Обнаружению лиц и поиску примитивов посвящены следующие подходы:

1. Алгоритм обнаружения лиц на изображении с помощью признаков Хаара и бустинга[1];
2. Алгоритм выделения лиц на основе цветовой информации изображения[2];
3. Алгоритм поиска заданного примитива на изображении [3].

Также существуют и другие подходы к обнаружению лица человека на изображении. Они отражены в статье [4].

Была поставлена задача разработать комбинированный алгоритм, позволяющий с большей точностью обнаруживать лица на изображении, а также проводить поиск по базе имеющихся примитивов.

В результате предложен гибридный алгоритм нахождения лиц на изображении, использующий алгоритм Виолы-Джонса и кластер обнаружения кожи на изображении, а также алгоритм поиска лица человека по заданному примитиву с помощью алгоритма SURF. Гибридный алгоритм позволяет находить лица людей, стоящих в профиль, чего не делает стандартный алгоритм Виолы-Джонса. Алгоритм поиска лица по заданному примитиву позволяет обнаруживать лица, содержащиеся в базе, даже если примитивы заданы частично.

В таблице 1 приведены результаты сравнения точности изображения лица человека алгоритмом Виолы-Джонса, реализованного в Emgu CV, и гибридного алгоритма с использованием кластера кожи. Было использовано 300 изображений различного разрешения. На 200 из них лица были расположены фронтально, на 100 – фронтально и в профиль.

Таблица 1.Сравнение точности работы гибридного алгоритма и алгоритма Виолы-Джонса

Алгоритм	Правильные обнаружения	Ложные обнаружения
EmguCV алгоритм Виолы-Джонса	72%	8
Гибридный алгоритм	81%	10

В таблице 2 приведены результаты сравнения скорости работы базового алгоритма Виолы-Джонса, реализованного в Emgu CV, с гибридным алгоритмом.

Таблица 2. Сравнение скорости работы гибридного алгоритма и алгоритма Виолы-Джонса

Алгоритм	Мелкие	Средние	Крупные
Средний размер фото, пиксели	~400x300	640x480	800x640
Количество фото	100	100	100
Поиск алгоритмом Виолы-Джонса, с	120	512	1237
Поиск гибридным алгоритмом, с	213	934	1849

В результате была разработана программа, позволяющая осуществлять как поиск лиц на изображениях, так и осуществлять поиск лица по базе имеющихся примитивов, примитив может задает лицо как полностью так и частично.

Литература

1. Viola P., Jones M.J. Rapid Object Detection using a Boosted Cascade of Simple Features // Proceedings IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR 2001). 2001. 30 p
2. Голубев М.Н., Шмаглит Л.А. Использование информации о цвете в алгоритме выделения лиц на изображениях // ГрафиКон – 2010: мате риалы Двадцатой междунар. конф. по компьютерной графике и зрению. URL: http://www.graphicon.ru/proceedings/2010/conference/School/053.pdf
3. Bay H., Tuytelaars T., Van Gool L. SURF: Speeded Up Robust Features // Proceedings of the 6th European Conference on Computer Vision, Springer LNCS. 2006. P. 404-417.
4. Обнаружение и локализация лица на изображении. URL: http://194.226.214.115/ft/002403/num2face.pdf

Сведения об авторах

Алиев Марат Вячеславович, доцент, к. физ.-мат. н., зав. каф. прикладной математики, информационных технологий и информационной безопасности, Адыгейского государственного университета, e-mail: alievmarat@mail.ru, область научных интересов: обработка изображений, программирование, дискретный анализ.

Шовгенов Джамболет Азаматович, аспирант Ярославского государственного университета имени П. Г. Демидова. Email: djsh92@mail.ru, область научных интересов: теория распознавания, дискретный анализ, многогранники задач комбинаторной оптимизации.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА И РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ИХ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

Алиханов А.А.

ФГБНУ Институт Прикладной Математики и Автоматизации, Нальчик, Россия

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE DIFFUSION EQUATION OF FRACTIONAL ORDER AND DIFFERENCE METHODS OF THEIR NUMERICAL IMPLEMENTATION

Alikhanov A.A.

Research Institute for Applied Mathematics and Automation, Nalchik, Russia

В последнее время наблюдается заметный рост внимания исследователей к дифференциальным уравнения дробного порядка. Это вызвано многочисленными эффективными приложениями дробного исчисления во многих областях науки [1-6]. Например, описание физических процессов переноса во фрактальных (сильно пористых) средах, как известно, приводит к уравнению диффузии дробного порядка [7,8]. Уравнения диффузии дробного порядка представляет собой линейное интегро-дифференциальное уравнение. В случае переменных коэффициентов его решение получить аналитически не всегда удается, поэтому необходимо использовать численные методы. Однако в отличие от классического случая, для того чтобы найти решение на некотором временном слое приходится использовать информацию во всех предыдущих временных слоях. По этому, алгоритмы численного решения уравнения диффузии дробного порядка являются достаточно ресурсоемкими даже в одномерном случае. А при переходе к двумерным и трехмерным задачам их сложность значительно возрастает. В связи с этим, построение устойчивых разностных схем повышенного порядка аппроксимации является очень важной и востребованной задачей.

Метод энергетических неравенств, как для дифференциальных, так и для разностных краевых задач уравнения диффузии дробного, переменного и распределенного порядков разработан в работах [9-11].

Работа посвящена разностным схемам повышенного порядка аппроксимации для уравнения диффузии дробного порядка [12]. Методом энергетических неравенств доказана устойчивость и сходимость предложенных разностных схем. Продемонстрированы численные расчеты тестовых задач.

1. Первая краевая задача. В прямоугольнике $\overline{Q}_T = \{(x,t): 0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$ рассмотрим первую краевую задачу

$$\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right)-q(x,t)u(x,t)+f(x,t),\ 0<x<1,\ 0<t\le T,\qquad (1)$$

$$u(0,t)=0,\ u(1,t)=0,\ 0\le t\le T,\ u(x,0)=u_0(x),\ 0\le x\le 1,\qquad (2)$$

где $\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t(t-\eta)^{-\alpha}\frac{\partial}{\partial\eta}u(x,\eta)d\eta$ – дробная производная Капуто порядка $\alpha,\ 0<\alpha<1,\ k(x,t),\ q(x,t)$ и $f(x,t)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем $k(x,t)\ge c_1>0,\ q(x,t)\ge 0.$

В прямоугольнике $\overline{Q}_T$ введем сетку $\overline{\omega}_{h\tau}=\overline{\omega}_h\times\overline{\omega}_\tau$, $\overline{\omega}_h=\{x_i=ih,\ i=0,1,\dots,N,\ Nh=1\}$, $\overline{\omega}_\tau=\{t_j=j\tau,\ j=0,1,\dots,j_0,\ j_0\tau=T\}$.

Дифференциальной задаче поставим в соответствие следующую разностную схему

$$\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_i=\left(a^{j+\sigma}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\right)_{x,i}-d_i^{j+\sigma}y_i^{(\sigma)}+\varphi_i^{j+\sigma},\ i=1,\dots,N-1,\ j=0,\dots,j_0-1,\qquad (3)$$

$$y(0,t)=0,\ y(1,t)=0,\ t\in\overline{\omega}_\tau,\ y(x,0)=u_0(x),\ x\in\overline{\omega}_h,\qquad (4)$$

где $\sigma=1-\frac{\alpha}{2}$, $\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y=\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j}c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)}y_t^s$ – разностный аналог повышенного порядка аппроксимации производной Капуто [12], где $c_0^{(\alpha,\sigma)}=a_0^{(\alpha,\sigma)}$ при $j=0$; а при $j\ge 1$

$$c_s^{(\alpha,\sigma)}=\begin{cases}a_0^{(\alpha,\sigma)}+b_1^{(\alpha,\sigma)},\ s=0,\\ a_s^{(\alpha,\sigma)}+b_{s+1}^{(\alpha,\sigma)}-b_s^{(\alpha,\sigma)},\ 1\le s\le j-1,\\ a_s^{(\alpha,\sigma)}-b_s^{(\alpha,\sigma)},\ s=j,\end{cases}$$

$$a_0^{(\alpha,\sigma)}=\sigma^{1-\alpha},\ a_l^{(\alpha,\sigma)}=(l+\sigma)^{1-\alpha}-(l-1+\sigma)^{1-\alpha},$$

$$b_l^{(\alpha,\sigma)}=\frac{1}{2-\alpha}\left[(l+\sigma)^{2-\alpha}-(l-1+\sigma)^{2-\alpha}\right]-\frac{1}{2}\left[(l+\sigma)^{2-\alpha}+(l-1+\sigma)^{2-\alpha}\right],\ l\ge 1,$$

$$y^{(\sigma)}=\sigma y^{j+1}+(1-\sigma)y^j,\ a_i^{j+\sigma}=k(x_{i-1/2},t_{j+\sigma}),\ d_i^{j+\sigma}=q(x_i,t_{j+\sigma}),\ \varphi_i^{j+\sigma}=f(x_i,t_{j+\sigma}).$$

Разностная схема (3)-(4) аппроксимирует дифференциальную задачу (1)-(2) с порядком аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$. Интересно также отметить, что при $\alpha\to 1$ разностная схема (3)-(4) переходит в хорошо известную схему Кранка-Николсон для классического уравнения диффузии.

Теорема. *Разностная схема (3)-(4) абсолютно устойчива и для ее решения справедлива следующая априорная оценка*

$$\|y^{j+1}\|_0^2\le\|y^0\|_0^2+\frac{T^{\alpha}\Gamma(1-\alpha)}{4c_1}\max_{0\le j\le j_0-1}\|\varphi^{j+\sigma}\|_0^2,\qquad (5)$$

где

$$\|y\|_0=\sum_{i=1}^{N-1}y_i^2h.$$

Из априорной оценки (5) следует сходимость решения разностной схемы (3)-(4) к решению дифференциальной задачи (1)-(2) со скоростью равной порядку погрешности аппроксимации.

2. Численные расчеты. Вычисления проводились для тестовой задачи, когда функция $u(x,t)=\sin(\pi x)(t^3+3t^2+1)$ является решением задачи (1)-(2) с коэффициентами $k(x,t)=2-\sin(xt),\quad q(x,t)=1-\cos(xt)$ и $T=1$.

В **Таблице 1** приводятся погрешности ($z=y-u$) и порядок сходимости в нормах $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$ при сгущении точек сетки по правилу $h=\tau$.

Таблица 1.

α	h	$\max\limits_{0\le j\le j_0}\|z\|_0$	Порядок сходимости в норме $\|\cdot\|_0$	$\|z\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$	Порядок сходимости в норме $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$
0.10	1/160	1.0224e−4		1.4518e−4	
	1/320	2.5558e−5	2.0001	3.6294e−5	2.0000
	1/640	6.3894e−6	2.0000	9.0733e−6	2.0000
0.50	1/160	7.8417e−5		1.1153e−4	
	1/320	1.9604e−5	2.0000	2.7882e−5	2.0000
	1/640	4.9009e−6	2.0000	6.9705e−6	2.0000
0.90	1/160	6.6666e−5		9.4949e−5	
	1/320	1.6669e−5	1.9998	2.3740e−5	1.9999
	1/640	4.1678e−6	1.9998	5.9360e−6	1.9998
0.99	1/160	6.5660e−5		9.3532e−5	
	1/320	1.6415e−5	2.0000	2.3384e−5	1.9999
	1/640	4.1039e−6	1.9999	5.8460e−6	2.0000

Аналогичные результаты получены для решения уравнения (1) с краевыми условиями третьего рода, а также нелокальной краевой задачи Стеклова второго класса.

Работа выполнена по гранту Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-3360.2015.1.

Литература

1. А.М. Нахушев, Дробное исчисление и его применение, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.-272с.
2. K.B. Oldham, J. Spanier, The Fractional Calculus, Academic Press, New York, 1974.
3. I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999.
4. R. Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore, 2000.
5. A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equation, Elsevier, Amsterdam, 2006.
6. В.В. Учайкин, Метод дробных производных, Издательство «Артишок», 2008. –512с.
7. R.R. Nigmatullin, Realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry, Phys. Status Solidi, B Basic Res. 133(1) (1986) 425–430.
8. K.V. Chukbar, Stochastic transport and fractional derivatives, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 108 (1995) 1875–1884.

9. А.А. Алиханов, Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка, Дифференциальные уравнения, 2010, Т. 46, №5, с. 658-664
10. A.A. Alikhanov, Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order
11. in differential and difference settings, Applied Mathematics and Computation 219 (2012) 3938–3946.
12. A.A. Alikhanov, Numerical methods of solutions of boundary value problems for the multi-term variable-distributed order diffusion equation, Applied Mathematics and Computation 268 (2015) 12–22.
13. A.A. Alikhanov, A new difference scheme for the time fractional diffusion equation, Journal of Computational Physics 280 (2015) 424–438.

СИЛЬНО ИЗОХРОННЫЕ ГОЛОМОРФНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Амелькин В.В.
Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

Аннотация
Указан максимальный порядок общей и частной с начальным полярным углом сильной высших порядков изохронности двумерных динамических систем с полиномиальными возмущениями линейного центра.

STRONGLY ISOCHRONOUS HOLOMORPHIC DYNAMICAL SYSTEMS

Amel'kin V.V.
Belorussian State University, Minsk, Belarus

Рассмотрим вещественную динамическую систему вида
$$\dot{x} = \lambda x - y - P(x, y), \quad \dot{y} = x + \lambda y + Q(x, y), \tag{1}$$
где λ – некоторая постоянная (которая может быть и равной нулю), а $P, Q : G \to \mathbf{R}$ – голоморфные в окрестности $G = \{(x, y) \| x| < r, |y| < r\}$, $r \in \mathbf{R}^+$, начала координат $O(0, 0)$ фазовой плоскости функции, которые не содержат в своих разложениях в степенные ряды по переменным x и y свободных и линейных членов, т. е.
$$P(x, y) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n(x, y), \; Q(x, y) = \sum_{n=2}^{\infty} q_n(x, y),$$
где $p_n(x, y)$ и $q_n(x, y)$ – однородные полиномы степени n относительно переменным x и y.

Точка $O(0, 0)$ является для системы (1) особой точкой. При $\lambda \neq 0$ – это грубый фокус, а при $\lambda = 0$ – или центр, или негрубый фокус.

Определение 1 [1]. Центр или фокус $O(0,0)$ системы (1) называется изохронным (изохронным первого порядка), если все изображающие точки, лежащие на некотором луче OA, начиная двигаться в момент времени $t=t_0$ по траекториям центра или фокуса, совершают каждый полный оборот за одно и то же время $T=2\pi$.

Пусть $\varphi_0+\dfrac{2\pi q}{n}$, $q=\overline{0,n-1}$, – полярные углы $n\geq 2$ лучей l_ν, $\nu=\overline{1,n}$, с началом в точке $O(0,0)$.

Определение 2 [2]. Центр или фокус $O(0,0)$ системы (1) называется сильно изохронным порядка n, если все изображающие точки, лежащие на n лучах l_ν, $\nu=\overline{1,n}$, начиная двигаться в момент времени $t=t_0$ по траекториям центра или фокуса, переходят последовательно с одного из указанных n лучей на другой за одно и то же время $T=\dfrac{2\pi}{n}$.

Обычно систему (1), имеющую изохронный или сильно изохронный порядка n центр или фокус в особой точке $O(0,0)$, называют соответственно изохронной или сильно изохронной порядка n в особой точке $O(0,0)$.

При этом если центр или фокус системы (1) является сильно изохронным порядка n при любом начальном положении луча OA, то говорят, что для системы (1) имеет место общая сильная изохронность порядка n.

Если же центр или фокус системы (1) оказывается сильно изохронным порядка n лишь только при некоторых начальных положениях луча OA, то говорят, что для системы (1) имеет место частная сильная изохронность порядка n.

Замечание 1. Для изохронной первого порядка системы (1) в случае центра $O(0,0)$ всегда имеет место общая изохронность.

Ниже дается обзор практически всех известных автору результатов, касающихся сильной изохронности полиномиальных центров с указанием максимального порядка сильной изохронности.

Одним из основных подходов к решению вопроса о сильной изохронности центра является критерий сильной изохронности порядка n, который формулируется следующим образом.

Теорема 1 [3, с. 45]. Для того чтобы центр $O(0,0)$ системы (1) (при $\lambda=0$) был сильно изохронным порядка n, необходимо и достаточно существование хотя бы одного значения $\varphi=\varphi_0$ такого, чтобы для функций ω_k – решений дифференциальных уравнений

$$\omega_k'=-\sum_{i=1}^{k}\left(\omega_{k-i}'v_i+(k-i)\omega_{k-i}u_i\right),\ \omega_0'=1,\quad '=\frac{d}{d\varphi},$$

с начальными условиями $\omega_k(\varphi_0) = 0, \ \ k = 1, 2, 3, \ldots,$ где

$$u_k(\varphi) = q_{k+1}(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi - p_{k+1}(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi,$$

$$v_k(\varphi) = q_{k+1}(\cos\varphi, \sin\varphi)\cos\varphi + p_{k+1}(\cos\varphi, \sin\varphi)\sin\varphi,$$

выполнялись равенства

$$\omega_k\left(\varphi_0 + \frac{2\pi l}{n}\right) = 0, \ \ l = \overline{1, n}, \ \ \ k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Переходя к обзору результатов, касающихся сильной изохронности полиномиальных центров, примем следующее соглашение: $P_s(x, y)$ и $Q_s(x, y)$ – это однородные относительно x и y полиномы степени s.

Итак, обратимся сначала к системе

$$\dot{x} = -y - P_2(x, y), \ \ \dot{y} = x + Q_2(x, y). \tag{2}$$

В работе [4] доказано, что, исключая тривиальный случай $xQ_2(x, y) + {}$ ${} + yP_2(x, y) = 0,$ когда движение всех изображающих точек происходит по кривым центра с одной и той же угловой скоростью $\dot{\varphi} = 1,$ для нелинейной системы (2) в точке $O(0, 0)$ может иметь место только частная сильная изохронность центра 2-го порядка. При этом указаны необходимые и достаточные условия, при выполнении которых имеет место частная сильная изохронность центра 2-го порядка. Указаны также и начальные полярные углы частной изохронности.

Далее рассмотрим систему

$$\dot{x} = -y - \sqrt{x^2 + y^2} P_2(x, y), \ \ \dot{y} = x + \sqrt{x^2 + y^2} Q_2(x, y). \tag{3}$$

Система (3) рассмотрена в [5], где получены результаты, аналогичные результатам, касающимся системы (2).

Замечание 2. Всюду ниже, чтобы каждый раз не повторяться, при формулировке результатов по умолчанию исключается тривиальный случай $\dot{\varphi} = 1.$

Обратимся к системе

$$\dot{x} = -y - P_3(x, y), \ \ \dot{y} = x + Q_3(x, y). \tag{4}$$

В [6] доказывается, что система (4) имеет в точке $O(0, 0)$ общую сильную изохронность центра 2-го порядка и частную сильную изохронность центра 4-го порядка. В случае частной изохронности указаны начальные полярные углы.

В статье [7] исследуется система

$$\dot{x} = -y - P_2(x, y), \ \ \dot{y} = x + Q_3(x, y). \tag{5}$$

Доказано, что для системы (5) имеет место только частная сильная изохронность центра 2-го порядка с $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}.$ При этом необходимо и достаточно, чтобы система (5) имела вид

$$\dot{x} = -y + Ax^2, \ \ \dot{y} = x + \frac{4}{9}A^2x^3.$$

Исследуя обратимую систему

$$\dot{x} = -y - P_2(x, y) - P_3(x, y), \ \ \dot{y} = x + Q_2(x, y) + Q_3(x, y), \tag{6}$$

т. е. систему, которая инвариантна при симметрии относительно прямой, проходящей через начало координат, и замене времени t на $-t$, в [8] доказано, что для системы (6) имеет место общая изохронность центра 2-го порядка и частная сильная изохронность как 2-го, так и 4-го порядков.

Рассмотрим теперь систему

$$\dot{x} = -y - P_2(x, y) - P_3(x, y), \ \ \dot{y} = x + Q_2(x, y) + Q_3(x, y) \tag{7}$$

с вырожденной бесконечностью, т. е. систему с условием $xQ_3(x, y) + yP_3(x, y) = 0.$

В [9] показано, что для системы (7) имеет место только частная сильная изохронность центра порядка 2.

Далее, пусть дана система

$$\dot{x} = -y, \ \ \dot{y} = x + Q_2(x, y) + Q_3(x, y). \tag{8}$$

Исследования показали [5], что для системы (8) имеет место только частная сильная изохронность центра 2-го порядка с $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}.$ Система (8) при этом принимает вид

$$\dot{x} = -y, \ \ \dot{y} = x + 3Axy + A^2x^3.$$

Обращаясь к гамильтоновой системе

$$\dot{x} = -y - P_2(x, y) - P_3(x, y) - P_4(x, y), \ \ \dot{y} = x + Q_2(x, y) + Q_3(x, y) + Q_4(x, y),$$

в [5] было доказано, что изохронность центра здесь возможна лишь только при $P_4(x, y) = Q_4(x, y) = 0.$ Что же касается сильной изохронности, то при указанном условии она является частной и имеет порядок 2.

Исследование обратимых систем

$$\dot{x} = -y - P_4(x, y), \ \ \dot{y} = x + Q_4(x, y)$$

показали [10], что для таких систем имеет место частная сильная изохронность центра как 2-го с $\varphi_0 = \frac{\pi}{2},$ так и 4-го с $\varphi_0 = 0$ порядков.

В статье [5] изучалась и система

$$\dot{x} = -y, \ \ \dot{y} = x + Q_4(x, y). \tag{9}$$

Оказалось, что для системы (9) в точке $O(0, 0)$ имеет место только частная сильная изохронность центра 2-го порядка при $\varphi_0 = \frac{\pi}{2},$ При этом единственной искомой системой здесь является система

$$\dot{x} = -y, \ \ \dot{y} = x + Ax^3y + Axy^3.$$

Полиномиальная система

$$\dot{x} = -y - P_5(x, y), \quad \dot{y} = x + Q_5(x, y)$$

рассматривалась в работе [11]. Для такой системы в случае центра $O(0, 0)$ сильная изохронность может быть как общей порядка 4, так и частной порядков 4 и 8 с различными полярными углами.

Следующая система – это система

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x + Q_5(x, y).$$

В статье [12] показано, что такая система имеет изохронный центр $O(0, 0)$ только в линейном случае.

В заключение рассмотрим систему

$$\dot{x} = -y - P_m(x, y), \quad \dot{y} = x + Q_m(x, y), \quad m \in \mathbf{N}, \quad m \geq 2, \qquad (10)$$

удовлетворяющую условиям Коши – Римана

$$\frac{\partial P_m(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q_m(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial P_m(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial Q_m(x, y)}{\partial y}.$$

Система (10), всегда имеющая в точке $O(0, 0)$ изохронный центр, такова, что для этого центра имеет место общая сильная изохронность максимального порядка $m-1$ и частная сильная изохронность максимального порядка $2(m-1)$ [13].

Литература

1. Абдуллаев Н.А. Об изохронности при нелинейных колебаниях // Тр. Тадж. учит. ин-та им. С.С. Айни. 1955. Вып. 3. С. 129-155.
2. Амелькин В.В., Чинь Зань Данг. О сильной изохронности дифференциальных систем Коши – Римана // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1993. №2. С. 26-30.
3. Амелькин В.В. Калитин Б.С. Нелинейные изохронные и импульсные колебания в динамических системах второго порядка. – Изд-во БГУ, Минск, 2008. – 147 с.
4. Амелькин В.В., Чинь Зань Данг. Сильная изохронность центра динамических систем с полиномами второй степени // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. №5. С. 739-743.
5. Амелькин В.В., Касим Мухамед Аль-Хайдер. Сильная изохронность полиномиальных дифференциальных систем с центром // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. №7. С. 867-873.
6. Амелькин В.В., Чинь Зань Данг. Сильная изохронность центра динамических систем с неполными полиномами третьей степени // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. №6. С. 1057-1060.
7. Корсантия О.Б. О сильной изохронности центра одной полиномиальной системы // Вестник Белорусского государственного университета. Сер. 1. Физ. Мат. Инф. 2005. №1. С. 82-85.
8. Доличанин-Джекич Д. Сильная изохронность обратимых кубических систем // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. №5. С. 753-757.
9. Доличанин-Джекич Д. Сильно изохронные центры кубических систем с вырожденной бесконечностью // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. №7. С. 979-983.
10. Амелькин В.В., Доличанин-Джекич Д. Сильная изохронность полиномиальных обратимых плоских динамических систем с однородными нелинейностями четвертой степени // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. №3. С. 442-446.

11. Доличанин Д., Корсантия О.Б. Сильная изохронность центра плоских динамических систем с однородными нелинейностями пятой степени // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. №10. С. 1433-1436.
12. Плешкан И.И. Об условиях изохронности систем двух дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. №11. С. 1991-1993.
13. Амелькин В.В., Доличанин-Джекич Д. О сильной изохронности высших порядков систем Коши – Римана с однородными полиномиальными возмущениями линейного центра // Дифференц. уравнения (в печати).

Сведения об авторах

Амелькин Владимир Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа, Белорусский государственный университет, vamlkn@mail.ru, качественная и аналитическая теория дифференциальных уравнений, теория колебаний и теория устойчивости движения.

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД В ПРОБЛЕМЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ-БЛИЗНЕЦОВ В НАТУРАЛЬНОМ РЯДЕ

Андрухаев Х.М.
Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия.

Аннотация

Содержание доклада является продолжением статьи, опубликованной в [4]. Получены все простые числа и простые числа-близнецы в начальном отрезке натурального ряда до 1450000000 (программа pbotdo.bas).В таблицах близнецы выделены чёрточками между ними. Кроме того в каждом файле подсчитаны количество простых чисел и близнецов а также соответствующие относительные частоты. Используя полученные табличные данные и теоретико-вероятностные методы, выведена приближённая формула для средней плотности простых чисел-близнецов в промежутке от 1 до 1450000000.

A PROBABILISTIC APPROACH TO THE PROBLEM OF THE DISTRIBUTION OF PRIME NUMBERS TWINS IN NATURAL NUMBERS

Andrukhaev Kh.M.
Adygeya State University, Maikop, Russia

Давно известно, что простых чисел в натуральном ряде бесконечно (Евклид, 3-й век до н.э.).

Однако до настоящего времени неизвестно о конечности или бесконечности множества простых-близнецов (предполагается, оно бесконечно).

Проблема распределения простых чисел в различных последовательностях изучается элементарными и аналитическими методами. Применяются и вероятностные методы.

Для изучения законов распределения простых-близнецов кроме детерминированных методов также можно применить вероятностные методы. Настоящий доклад посвящен этому вопросу. При этом получаются приближенные формулы, выражающие число простых-близнецов до x (где x>5).

Литература

1. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1965. 615 с.
2. Кац М. Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 156 с.
3. Бухштаб А.А. Теория чисел. М.: Просвещение, 1966. 378 с.
4. Андрухаев Х.М. Вероятностный подход к изучению распределения простых чисел и простых чисел-близнецов в натуральном ряде до x=1040000000 // Вестник Адыгейского государственного университета Сер. Естественно-математические и технические науки. 2014. Вып. 4 (147). С. 34-41.

Сведения об авторах

Андрухаев Хазерталь Махмудович, к.ф.-м. наук, доцент, профессор кафедры алгебры и геометрии, Адыгейский государственный университет, andrukhaev1934@mail.ru, аддитивная теория чисел, теория вероятностей, математическая статистика, теоретико-числовые методы в криптографии.

МЕТОД ШКАЛ РЕГРЕССИИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УРОВНЯ ОБЩЕГО ФИЗИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ ДЕТЕЙ И ПОДРОСТКОВ РА (ПРОГРАММНОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ OCFRD.BAS)

Андрухаев Х.М.

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия.

Аннотация

Предлагается программная реализация метода шкал регрессии без использования таблиц.

SCALE REGRESSION METHOD FOR DETERMINING THE LEVEL OF GENERAL PHYSICAL DEVELOPMENT OF CHILDREN AND ADOLESCENTS RA (SOFTWARE APPLICATION OCFRD.BAS)

Andrukhaev Kh.M.

Adygeya State University, Maikop, Russia

Собраны статистические данные по РА, содержащие значения параметров общего физического развития более чем 6000 детей и подростков, распределенных возрастно-половым группам от 2-х до 16 лет.

Разработано программное приложение, исследующее уровень общего физического развития конкретного лица на основе собранных статистических данных.

Программа апробирована и применяется в детских учреждениях и на факультете естествознания.

Алгоритм работы программы использует, так называемый, метод шкал регрессии, который успешно используется в нашей стране с начала 20-го века.

Табличный вариант содержания доклада опубликован.

Доклад посвящен электронному варианту (без использования таблиц).

Литература

1. Марков А.М., Поляков Л.Е. Санитарная статистика. – Л.: Медицина, 1974.
2. Андрухаев Х.М., Чамокова А.Я. Новые оценочные таблицы общего физического развития детей дошкольного возраста Республики Адыгея // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. 1999. №3. С. 65-78.

Сведения об авторах

Андрухаев Хазерталь Махмудович, к.ф.-м. наук, доцент, профессор кафедры алгебры и геометрии, Адыгейский государственный университет, andrukhaev1934@mail.ru, аддитивная теория чисел, теория вероятностей, математическая статистика, теоретико-числовые методы в криптографии.

АКАДЕМИЯ CISCO В СИСТЕМЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ ИНЖЕНЕРОВ

Аракелов А.В.

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия

Алиева М.Ф.

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия

Плисенко О.А.

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия

Аннотация

В статье рассмотрена роль Академии Cisco в системе профессиональной подготовки бакалавров-инженеров в рамках направлений подготовки «Информатика и вычислительная техника» и «Управление в технических системах»

CISCO ACADEMY IN SYSTEM OF ENGINEER PROFESSIONAL TRAINING

Arakelov A.V.
Adygeya State University, Maikop, Russia

Alieva M.F.
Adygeya State University, Maikop, Russia

Plisenko O.A.
Adygeya State University, Maikop, Russia

С 2013 года на инженерно-физическом факультете Адыгейского государственного университета открыта Академия сетевых технологий Cisco, где студенты инженерных направлений подготовки «Информатика и вычислительная техника» и «Управление в технических системах» получают необходимые профессиональные навыки в области проектирования и администрирования компьютерных сетей и телекоммуникаций. Учебный курс Cisco интегрирован в учебный процесс подготовки студентов.

Курс обеспечивает качественную подготовку в области теории и практики проектирования, создания и технического сопровождения сетей любого уровня: от домашних до масштаба крупных предприятий. Всесторонний обзор современных сетевых технологий ведётся, начиная с самых основ, что позволяет студентам, только приступающим к изучению сетевых технологий, эффективно воспринимать материал.

Преподаваемый курс CCNA Discovery является официальным курсом подготовки к профессиональной сертификации Cisco Certified Network Associate (CCNA), которая является одним из наиболее признаваемых международных «знаков качества» специалиста в сфере информационных технологий.

Выпускники курса получают международные сертификаты Cisco и скидки на профессиональную сертификацию CCNA.

На первом этапе два базовых модуля CCNA Discovery были интегрированы в курс «Сети и телекоммуникации», являющийся базовым в общепрофессиональной подготовке студентов перечисленных специальностей. В силу появления новых технологических возможностей в области телекоммуникаций инструкторами академии в сентябре 2015 года произведен переход с курса CCNA Discovery на курс CCNA Routing and Switching (коммутация и маршрутизация), что позволило обеспечить актуальность и преемственность теоретического и практического материала университетского курса. Интеграция перечисленных курсов в образовательную программу позволяет реализовать компетентностный подход и обеспечивает овладение студентами такими основными профессиональными компетенциями как практические навыки в настройке и наладке программно-аппаратных комплексов и в разработке моделей компонентов информационных систем.

Включение материалов курсов CCNA Академии CISCO позволяет студентам приобрести знания и навыки в области сетевых технологий, теоретических основ, настройки телекоммуникационного оборудования производства компании Cisco Systems. Данный курс готовит к получению международной сертификации CCNA и позволяет в дальнейшем работать сетевыми техниками, администраторами или инженерами.

Обучение осуществляется квалифицированными инструкторами, преподавателями факультета, прошедшими специализированный курс подготовки, на реальном оборудовании производства компании Cisco Systems. Кроме того, слушатели курса получают доступ к официальным материалам на английском языке, а также к версии курса CCNA Discovery на русском языке.

Полный курс состоит из 4-х последовательных модулей:

1. Сети для домашних пользователей и малых предприятий
2. Работа на малых и средних предприятиях или у поставщиков услуг Интернета
3. Введение в маршрутизацию и коммутацию на предприятии
4. Проектирование и поддержка компьютерных сетей

В рамках обучения студенты изучают:

– технологию осуществления связи в компьютерных сетях и Интернет;

– модели сетевого взаимодействия OSI и TCP/IP;

– применения механизма масок подсети для разбиения адресного пространства сетей;

– вопросы создания локальных сетей по технологии Ethernet при помощи маршрутизаторов и коммутаторов;

– вопросы использования интерфейса командной строки (CLI) для настройки сетевых устройств Cisco;

– технологию диагностики работы сети при помощи сетевых утилит и анализаторов трафика;

– технологию настройки протоколов маршрутизации RIP, EIGRP и OSPF, а также статических маршрутов для IPv4 и IPv6;

– вопросы проектирования IP-адресации и управления адресным пространством в сетях;

– технологии коммутации в локальных сетях Ethernet;

– технологии построения виртуальных сетей (VLAN);

– технологию предотвращения широковещательного шторма в сети с помощью протокола Spanning Tree (STP);

– технологию настройки протокола передачи информации о VLAN по сети VLAN Trunking Protocol (VTP);

– основы управления операционной системой Cisco IOS;

– настройку DHCP сервера на коммутаторах и маршрутизаторах Cisco;

– технологию фильтрации сетевого трафика при помощи списков контроля доступа (ACL);

– технологию настройки сетевой трансляции адресов NAT;

– протоколы глобальных сетей (WAN), такими как PPP и Frame Relay;

– технологии создания защищенных соединений (VPN) между различными сетями.

Преподаваемый курс имеет существенную практическую направленность. В его рамках студентам необходимо выполнить более 30 лабораторных работ на реальном оборудовании. Следует отметить хорошую проработку, последовательность и логичность материала лабораторных работ, предоставляемых Академией CISCO. Например, уже после окончания второго модуля студенты должны уметь выполнять настройку коммутаторов и маршрутизаторов для работы в сети по протоколам IPv4,IPv6, настройку VLAN, а также различных средств безопасности сети. Особое внимание в курсе уделяется приобретению практических навыков по поиску неисправностей и работе с клиентами, а также оформлению различного вида документации.

Полученные знания и практические навыки студенты активно применяют при написании курсовых проектов, а также выполнении выпускных квалификационных работ, в рамках которых решаются вопросы современного проектирования сетей на уровне предприятий. Также пройденный студентами курс на базе Академии Cisco позволяет им уверенно чувствовать себя при прохождении производственных практик на различных предприятиях и в организациях.

Включение курсов в академическую программу улучшает интеграцию выпускников университета в профессиональное сообщество. Несмотря на небольшой срок внедрения программ CISCO на факультете, существенно улучшились результаты в освоении студентами дисциплины учебного плана “Сети и телекоммуникации”. В 2014-2015 учебном году 7 студентов участвовали во всероссийской олимпиаде по сетевым технологиям Cisco. Один из участников вышел в финальную часть соревнований, где показал достаточно неплохой результат. Инструкторы Академии Cisco систематически проходят курсы повышения квалификации, участвуют в ежегодных конференциях и форумах, что позволяет отслеживать все новые направления развития телекоммуникационных технологий и поддерживать уровень профессиональной компетенции преподавателей инженерных направлений подготовки.

За период функционирования на факультете Академии Cisco прошли обучение и получили квалификацию сетевого техника 92 человека, из них

36 человек получили ваучеры на льготную сдачу сертификационного экзамена в независимом международном центре сетевой сертификации, что увеличивает их конкурентную способность на рынке труда в сфере ИТ.

Некоторые выпускники использовали полученные сертификаты при устройстве на работу на такие предприятия (флагманы отрасли) как «Южная телекоммуникационная компания». Повысилась самооценка обучающихся и улучшилась мотивация получения практических знаний по работе с оборудованием. В большинстве анкет студенты указывают полную удовлетворенность включением данного курса в академическую программу по реализуемым на факультете направлениям подготовки инженеров, оставляют положительные отзывы об оборудовании классов и уровнем проведения занятий инструкторами.

На сегодняшний день среди студентов инженерных направлений подготовки «Информатика и вычислительная техника» и «Управление в технических системах» существует запрос на проведение курсов Cisco на подтверждение квалификации сетевого инженера по CCNA Routing and Switching (оставшиеся два модуля).

В настоящее время в России остро стоит вопрос подготовки высокопрофессиональных инженерных кадров для современных отраслей жизнедеятельности человека. Инженерное образование всегда считалось одним из лидирующих, а также приоритетным направлением развития техники и технологий в России.

«Подготовка высококвалифицированных рабочих, инженерных кадров для реальной экономики – это не чья-то корпоративная, частная задача, это общенациональная необходимость, одно из главных условий существенного повышения производительности труда, а это … одна из ключевых задач развития», - подчеркивал на заседании Госсовета в декабре 2013 года президент России В.В. Путин. [1]

Теоретическая и практическая подготовка современного инженера, особенно в областях автоматизации, телекоммуникаций, сетевых технологий, технических системах, должна быть на высоком профессиональном уровне, ведь научно-технический прогресс не стоит на месте. С каждым днем появляются все новые технологические и программные решения, разобраться в которых возможно лишь при наличии крепкого фундамента – базовых, классических и прочных знаниях, и, конечно, хорошего практического навыка. Получить один из широко востребованных практических навыков в области сетевых технологий и телекоммуникаций позволяет учебный курс по дисциплине Сети и телекоммуникации, реализуемый на базе оборудования Академии Cisco в рамках учебных планов направлений подготовки, реализуемых на факультете.

Литература

1. Выступление Президента РФ В.В. Путина на совместном заседании Государственного совета и Комиссии при Президенте по мониторингу достижения целевых показателей социально-экономического развития России [электронный ресурс] //http://state.kremlin.ru/face/19882

Сведения об авторах

Аракелов Александр Владимирович, кандидат педагогических наук, доцент, декан инженерно-физического факультета АГУ, доцент кафедры теоретической физики АГУ, эл. почта: oss12@rambler.ru, область научных интересов: теория и методика преподавания физики, олимпиадная физика, информационные технологии, теоретическая механика.

Алиева Маргарита Федоровна, кандидат социологических наук, доцент, доцент кафедры АСОИУ инженерно-физического факультета АГУ, эл. почта: aliyevamargarita@mail.ru, область научных интересов: сетевые и информационные технологии.

Плисенко Ольга Анатольевна, ст. преподаватель кафедры АСОИУ инженерно-физического факультета АГУ, заведующая сектором интеллектуальных геоинформационных технологий Центра интеллектуальных геоинформационных технологий АГУ, эл. почта: plisenko_olji@fromru.com, область научных интересов: геоинформатика, интеллектуальные информационные системы, сетевые технологии.

ЗАДАЧА ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Аттаев А.Х.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Институт прикладной математики и автоматизации», Нальчик, Россия

Аннотация

В работе исследуется задача граничного управления на двух концах для модельных нелокальных гиперболических уравнений.

THE BOUNDARY CONTROL PROBLEM FOR NONLOCAL HYPERBOLIC EQUATIONS

Attaev A.Kh.

Institute of Applied Mathematics and Automation, Nalchik, Russia

Теория граничного управления процессами, описываемыми уравнениями с частными производными, посвящено большое число работ, достаточно полная библиография которых приведена в монографии [1]. Активный интерес к задаче граничного управления гиперболическими системами возобновился в конце прошлого и начале нынешнего столетия в связи с появлением цикла работ В.А. Ильина, Е.И. Моисеева и их учеников, посвященных аналитическим решениям граничных задач в различных постановках для волнового и телеграфного уравнения [2-4]. Задаче граничного управления нелокальным уравнением колебания струны посвящена работа [5].

В области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l, 0 < y < T\}$ рассматривается нелокальные гиперболические уравнения вида

$$Lu = \lambda u(x_0, y), \tag{1}$$

$$Lu = \lambda u_y(x_0, y), \tag{2}$$

$$Lu = \lambda u_{yy}(x_0, y), \tag{3}$$

где $Lu = u_{xx} - u_{yy}$, λ, x_0 - заданные произвольные константы, причем $0 < x_0 < l$.

Задача граничного управления процессами, описываемыми уравнениями (1) - (3), состоит в нахождении таких граничных управлений при $x = 0$ и $x = l$, которые обеспечивают перевод процесса из произвольного начального состояния $u(x,0) = \varphi_0(x)$, $u_y(x,0) = \psi_0(x)$ в произвольное финальное состояние $u(x,T) = \varphi_1(x)$, $u_y(x,T) = \psi_1(x)$.

В докладе будут обсуждаться вопросы существования таких необходимых и достаточных условий на начальные и финальные функции, позволяющие однозначно определить граничные управления и выписать их в явном аналитическом виде.

Литература

1. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М. 1965.
2. Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний на одном конце при закрепленном втором конце в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 12. С. 1670-1686.
3. Ильин В.А., Моисеев Е.А. Оптимальное граничное управление смещением на одном конце при закрепленном втором конце и отвечающее ему распределение полной энергией струны // Доклады РАН. 2004. Т. 399, № 6. С. 727-731.
4. Ильин В.А., Моисеев Е.А. Граничное управление на двух концах процессом, описываемым интегральным уравнением // Доклады РАН. 2004. Т. 394, № 2. С. 154-158.
5. Аттаев А.Х. Задача граничного управления для существенно нагруженного уравнения колебания струны // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2011. Т. 13., № 1. С. 30-35.

Сведения об авторе

Аттаев Анатолий Хусеевич, к.ф.-м.н., доцент, заведующий отделом САПР смешанных систем и управления, Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Институт прикладной математики и автоматизации», E-mail: attaev.anatoly@yandex.ru, область научных интересов: дифференциальные уравнения в частных производных гиперболического типа.

О ПОСТРОЕНИИ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ В КОЛЬЦЕ ЦЕЛЫХ ДВОЙНЫХ ЧИСЕЛ

Богданов П.С.

Институт систем обработки изображений Российской академии наук, Самара, Россия.

Аннотация

В работе рассмотрена возможность применения некоторых результатов, полученных для квадратичных полей и квазиканонических систем счисления, для построения систем счисления в кольце целых двойных чисел.

ON THE CONSTRUCTION OF NUMBER SYSTEMS IN THE RING OF DOUBLE NUMBERS

Bogdanov P.S.

Russian academy of sciences image processing systems institute, Samara, Russia.

1. Введение

Изучению позиционных систем счисления известны посвящены работы многих ученых, однако исследованы далеко не все возможные классы систем счисления.

Наиболее изученными системами счисления являются канонические системы счисления, которые являются естественным обобщением степенного представления обычных целых чисел [1] на случай алгебраических целых чисел. Основанная на наблюдениях Кнута [2] теория канонических систем счисления разрабатывалась И. Катаи и Я. Сабо [3], Б. Ковачем [4], И. Катаи и Б. Ковачем ([5, 6]), У. Дж. Гильбертом [7] и другими учеными.

Системы счисления, в которых вместо целых рациональных чисел, образующих алфавит канонических систем счисления, рассматриваются целые квадратичные числа, полностью классифицированы для случая мнимых квадратичных полей. Однако для других «квадратичных» структур, аналоги канонических и квазиканонических [8-10] систем счисления практически не изучены.

В настоящей работе рассматривается возможность построения систем счисления для кольца целых двойных чисел.

1. Основные определения

Множество $Q(e)=\{z=a+be;\ a,b\in Q\}$, где $e^2=1, e\neq\pm1$, называется кольцом двойных чисел. Основным отличием этой структуры от квадратичных полей [11] является наличие в этом кольце делителей нуля. Однако, многие понятия и утверждения из теории квазиканонических систем счисления можно применять и в данном случае, что позволяет получать новые системы счисления. Введем некоторые определения.

Если для элемента $z = a + be \in Q(e)$ его норма $\mathrm{Norm}(z) = (a+be)(a-be) = a^2 - b^2$ и след $\mathrm{Tr}(z) = (a+be)+(a-be) = 2a$ есть целые числа, то этот элемент называется целым алгебраическим числом кольца $Q(e)$ [12].

Целые алгебраические числа кольца $Q(e)$ имеют вид $z = \dfrac{a+be}{2}$, где $a \equiv b \pmod 2$, и образуют кольцо, которое будем обозначать $S(e)$. В таблице 1 приведем все целые алгебраические числа $z = \dfrac{a+be}{2} \in S(e)$ с нормой меньшей 3 по модулю.

Говорят, что в кольце D имеет место алгоритм деления с остатком [9], если на отличных от нуля элементах $\beta \in \mathrm{D}$ определена функция $\|\beta\|$, принимающая целые неотрицательные значения, так, что выполняются следующие условия:

1) если $\beta \neq 0$ делится на α, то $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$;

2) для любых элементов β и $\alpha \neq 0$ в D существуют такие γ и r, что $\beta = \gamma\alpha + r$, причем либо $r = 0$, либо $\|r\| < \|\alpha\|$.

Для кольца $S(e)$ существует лишь аналог алгоритма деления с остатком. На основе алгоритма деления с остатком можно получить представление произвольного целого алгебраического числа в некоторой системе счисления. Однако системой счисления может быть не всякая совокупность чисел - основания и множества цифр системы счисления:

Целое алгебраическое число α называется основанием системы счисления в кольце $S(e)$, если любой элемент этого кольца (целое алгебраическое число) однозначно представим в форме конечной суммы $z = \sum\limits_{j=0}^{k(z)} a_j \alpha^j$, $a_j \in I$.

Пара $\{\alpha; I\}$ называется системой счисления в кольце $S(e)$, а I – алфавитом этой системы (множеством цифр).

Чтобы показать, что пара $\{\alpha; I\}$ является системой счисления необходимо и достаточно доказать, что процесс деления с остатком:

$$\gamma_0 = \gamma_1 \cdot \alpha + r_0,$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 \cdot \alpha + r_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\gamma_l = \gamma_{l+1} \cdot \alpha + r_l,$$

конечен, и каждое из представлений $\gamma_k = \gamma_{k+1} \cdot \alpha + r_k$ - однозначно.

Множество двойных чисел является двумерным векторным пространством с базисом $\{1, e\}$. Перейдем в этом пространстве к базису $\left\{E_1 = \frac{1+e}{2}, \quad E_2 = \frac{1-e}{2}\right\}$. Произведение базисных векторов в этом случае определяется равенствами $E_m E_n = \delta_{mn} E_n$, где δ_{mn} - символы Кронекера, $m, n = 1, 2$. Норма двойного числа $z = a_1 E_1 + a_2 E_2$ в новом базисе имеет вид $\mathrm{Norm}(z) = a_1 a_2$.

Табл. 1. Целые двойные числа с нормами 1, 2 и 3

Модуль нормы	Числа соответствующие модулю нормы	Числа соответствующие модулю нормы в базисе $\{E_1, E_2\}$
0	$\frac{a}{2} \cdot (1 \pm e)$	aE_1; aE_2
1	$\pm 1; \pm e$	$\pm(E_1 \pm E_2)$
2	$\frac{\pm(3 \pm e)}{2}; \frac{\pm(1 \pm 3e)}{2}$	$\pm(E_1 \pm 2E_2); \pm(2E_1 \pm E_2)$

Стоит отметить, что кольцо $S(e)$ целых двойных алгебраических чисел в базисе $\{E_1, E_2\}$ совпадает с множеством $S' = \{aE_1 + bE_2, a, b \in Z\}$.

2. Построение систем счисления

Рассмотрим основание системы счисления $\alpha = \frac{-1+3e}{2} = E_1 - 2E_2$. Для этого случая доказаны следующие утверждения:

Лемма 1. Пусть $\gamma_k = a_{k,1} E_1 + a_{k,2} E_2, \quad a_{k,1}, a_{k,2} \in Z$, $|a_{k,2}| \geq 2$. Тогда существуют числа $\gamma_{k+1} = a_{k+1,1} E_1 + a_{k+1,2} E_2$ и $r_k = r_{k,1} E_1 + r_{k,2} E_2$ из кольца $S(e)$, где $|r_{k,2}| \leq 1$, такие, что $|a_{k+1,2}| < |a_{k,2}|$ и $\gamma_k = \gamma_{k+1} \cdot \alpha + r_k$.

Лемма 2. Пусть $\gamma_k = a_{k,1} E_1 + a_{k,2} E_2, \quad a_{k,1}, a_{k,2} \in Z$ и $a_{k,1} \neq 0$. Тогда существуют числа $\gamma_{k+1} = a_{k+1,1} E_1 + a_{k+1,2} E_2$ и $r_k = r_{k,1} E_1 + r_{k,2} E_2$ из кольца $S(e)$, где $r_{k,1} = \pm 1$, такие, что $|a_{k+1,1}| < |a_{k,1}|$ и $\gamma_k = \gamma_{k+1} \cdot \alpha + r_k$.

Теорема 1. Любое целое двойное число допускает конечное представление в системе счисления с основанием $\alpha = \frac{-1+3e}{2} = E_1 - 2E_2$ и алфавитом $I = \{E_1; -E_1; 1\}$.

Леммы 1 и 2 показывают, что процесс деления с остатком будет конечен, а однозначность представления чисел в выбранной системе счисления следует из доказательства теоремы 1.

В этом случае выбор остатка r_k в представлении $\gamma_k = \gamma_{k+1} \cdot \alpha + r_k$ осуществляется в соответствии с таблицей 2, а координаты частного $\gamma_{k+1} = a_{k+1,1}E_1 + a_{k+1,2}E_2$ в базисе $\{E_1, E_2\}$ вычисляются по формулам

$$a_{k+1,1} = a_{k,1} - r_{k,1}, \quad a_{k+1,2} = \frac{r_{k,2} - a_{k,2}}{2}.$$

Табл. 2. Выбор остатка при представлении целого алгебраического числа в троичной системе счисления

$a_{k,2}$	$a_{k,1}$	$r_{k,1}$	$r_{k,2}$	r_k
нечетное	любое	1	1	**1**
четное	неотрицательное	1	0	E_1
	отрицательное	-1	0	$-E_1$

Из теоремы 1 следует, что при использовании трех остатков для записи любого целого двойного алгебраического числа сначала уменьшаем до нуля по абсолютной величине вторую координату частного, а затем первую. В результате, представление числа может быть слишком длинным. Сократить длину записи числа можно за счет введения дополнительного остатка. При этом имеется возможность уменьшать по абсолютной величине сразу обе координаты частного.

С помощью лемм 1 и 2 несложно обосновать справедливость следующей леммы.

Лемма 3. Пусть $\gamma_k = a_{k,1}E_1 + a_{k,2}E_2, \quad a_{k,1}, a_{k,2} \in Z$. Тогда существуют числа $\gamma_{k+1} = a_{k+1,1}E_1 + a_{k+1,2}E_2$ и $r_k = r_{k,1}E_1 + r_{k,2}E_2$ из кольца $S(e)$ такие, что $|a_{k+1,1}| < |a_{k,1}|$ при $a_{k,1} \neq 0$, $|a_{k+1,2}| < |a_{k,2}|$ при $a_{k,2} \neq 0$, $|r_{k,1}| \leq 1$, $|r_{k,2}| \leq 1$ и $\gamma_k = \gamma_{k+1} \cdot \alpha + r_k$.

Теорема 2: Любое целое двойное алгебраическое число допускает конечное представление в системе счисления с основанием $\alpha = \dfrac{-1+3e}{2} = E_1 - 2E_2$ и алфавитом $I = \{E_1; -E_1; 1; -1\}$.

Табл. 3. Выбор остатка при представлении целого алгебраического числа в кватернарной системе счисления

$a_{k,1}$	$a_{k,2}$	$r_{k,1}$	$r_{k,2}$	r_k
Положительное	четное	1	0	E_1
	нечетное		1	**1**
0	Положительное, четное	1	0	E_1
	Положительное нечетное		1	**1**
	Отрицательное четное	-1	0	$-E_1$
	Отрицательное нечетное		-1	**-1**
Отрицательное	четное	-1	0	$-E_1$
	нечетное		-1	**-1**

Выбор остатка r_k в представлении $\gamma_k = \gamma_{k+1} \cdot \alpha + r_k$ осуществляется в соответствии с таблицей 3, а координаты частного $\gamma_{k+1} = a_{k+1,1}E_1 + a_{k+1,2}E_2$ в базисе $\{E_1, E_2\}$ вычисляются по формулам

$$a_{k+1,1} = a_{k,1} - r_{k,1}, \quad a_{k+1,2} = \frac{r_{k,2} - a_{k,2}}{2}.$$

Для этих систем счисления разработаны алгоритмы представления чисел в них и алгоритмы основных арифметических операций.

Таким образом, системы счисления можно исследовать не только в квадратичных полях, но и других структурах, при этом для этих структур возникают аналоги понятий и утверждений из теорий канонических и квазиканонических систем счисления.

Литература

1. Grunwald V. Intorno all'aritmetica dei sistemi numerici a base negativa con particolare riguardo al sistema numerico a base negativo-decimale per lo studio delle sue analogie coll'aritmetica ordinaria (decimale) / Grunvald V. // Giornale di matematiche di Battaglini. – 1885 – N 23 – P. 203-221.
2. Knuth D. E. The Art of Computer Programming. Vol. 2 Semi-numerical Algorithms. – 3rd edition. – London: Addison Wesley, 1998.
3. Katai I. Canonical number systems for complex integers / Katai I., Szabo J. // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1975. – Vol. 37 – P. 255-260.
4. Kovacs B. Canonical number systems in algebraic number fields / Kovacs B. // Acta Math. Hungar. – 1981. – Vol. 37. – P. 405-407.
5. Katai I. Kanonische Zahlensysteme in der Theorie der Quadratischen Zahlen / Katai I., Kovacs B. // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1980. – Vol. 42 – P. 99-107.
6. Katai I. Canonical number systems in imaginary quadratic fields / Katai I., Kovacs B. // Acta Math. Hungar. – 1981. – Vol. 37 – P. 159-164.
7. Gilbert W.J. Radix representations of quadratic fields / Gilbert W.J. // J. Math. Anal. Appl. – 1981. – Vol. 83 – P. 264-274.
8. Богданов П.С., Чернов В.М. Классификация бинарных квазиканонических систем счисления в мнимых квадратичных полях // Компьютерная оптика. 2013. Т. 37, № 3. С. 391-400.
9. Богданов П.С., Чернов В.М. Классификация тернарных квазиканонических систем счисления в мнимых квадратичных полях и их приложение // Компьютерная оптика. 2014. Т. 38, № 1. С. 139- 147.
10. Богданов П.С., Чернов В.М. О размерности границ некоторых фрактальных множеств на гексагональных решётках // Компьютерная оптика. 2014. Т. 38, № 2. С. 330-334.
11. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. – М.: Наука, 1985. – 504 с.
12. Чернов В.М. Арифметические методы синтеза быстрых алгоритмов дискретных ортогональных преобразований. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007 – 264 с

Сведения об авторах

Богданов Павел Сергеевич, стажер-исследователь Института систем обработки изображений Российской академии наук (ИСОИ РАН), e-mail: poulsmb@rambler.ru, область научных интересов: обработка изображений, программирование, прикладная математика.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ НЕАВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ СТЕПЕННОЙ MIN-ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ С ЧЁТНЫМИ ПРОПУСКАМИ

Бугаевская А.Н.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия

Аннотация

Рассмотрено численное решение задачи быстродействия для линейной неавтономной системы. Алгоритм основан на сведении задачи быстродействия к степенной min-проблеме моментов с чётными пропусками.

THE NUMERICAL SOLUTION OF TIME-OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR A LINEAR NON-AUTONOMOUS SYSTEM BASED ON POWER MOMENT MIN-PROBLEM WITH EVEN GAPS

Bugaevskaya A.N.

Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

Abstract

The numerical solution of time-optimal control problem for a linear non-autonomous system is considered. This algorithm is based on the reduction of time-optimal control problem to the power moment min-problem with even gaps.

В современной теории оптимального управления одно из центральных мест занимает проблема быстродействия, в частности линейная задача быстродействия. Поскольку время быстродействия есть наиболее естественный критерий оптимальности, задача быстродействия является одним из наиболее распространенных объектов применения различных методов оптимального управления. Решение задач линейного быстродействия важно и с точки зрения нелинейных систем, поскольку решение таких задач может быть сведено к решению линейных систем.

Важным звеном, связывающим теоретические исследования с практикой, является разработка для решения задач быстродействия численных методов, ориентированных на компьютерное применение. Большой интерес представляет решение задач быстродействия для систем большой размерности. Трудность решения таких задач состоит в том, что в процессе вычислений приходится иметь дело с плохо обусловленными матрицами.

Таким образом, разработка численных методов и компьютерных программ для решения задач быстродействия является актуальной.

Рассмотрим задачу быстродействия для линейной неавтономной системы

$$\begin{gathered}\dot{x} = Atx + bu, \quad |u| \le 1, \quad x \in E^n, \\ x(0) = x^0, \quad x(\Theta) = 0, \quad \Theta \to \min,\end{gathered} \tag{1}$$

где A – произвольная матрица размерности $n \times n$, b – n-мерный вектор-столбец, $u \in R$ – управление, Θ – время движения из точки x^0 в начало координат. Элементы матрицы A и вектора b являются действительными числами. Функция $u(t)$ в решении задачи быстродействия кусочно-постоянная и принимает значения ± 1 [1]. Пусть спектр матрицы A вещественный, тогда функция $u(t)$ имеет не более $n-1$ точек разрыва [1], [2], которые называются моментами переключения управления.

Пусть ранг матрицы $Q = (b, Ab, A^2 b, \ldots, A^{n-1} b)$ равен n, т.е. система (1) полностью управляема [2], и можно попасть из произвольной точки x^0 в начало координат.

Траектория системы (1), отвечающая управлению $u(t)$, определяется равенством

$$x(t) = e^{\frac{At^2}{2}} \left(x^0 + \int_0^t e^{-\frac{A\tau^2}{2}} b u(\tau) \, d\tau \right). \tag{2}$$

Из (2) при $t = \Theta$ получим соотношение

$$x^0 + \int_0^\Theta e^{-\frac{A\tau^2}{2}} b u(\tau) \, d\tau = 0. \tag{3}$$

Будем рассматривать начальные точки x^0, для которых управление $u(t)$ имеет ровно $n-1$ моментов переключения $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$.

Обозначим через $\widetilde{u}$ управление на последнем промежутке $[T_{n-1}; \Theta]$. Если $\widetilde{u} = -1$, то управление $u(t)$ будем называть управлением первого рода, если $\widetilde{u} = +1$, то управлением второго рода.

Таким образом, решение задачи быстродействия (1) сводится к нахождению времени быстродействия Θ, рода управления $\widetilde{u}$ и моментов переключения $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$.

Пусть матрица A и вектор b имеют вид

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&\dots&0&0\\1&0&0&\dots&0&0\\0&1&0&\dots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\dots&1&0\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},$$

тогда задача быстродействия (1) принимает вид

$$\begin{gathered}\dot{x}=u,\quad |u|\le 1,\quad x\in E^n,\\ \dot{x}_k=tx_{k-1},\quad k=2,\dots,n,\\ x(0)=x^0,\quad x(\Theta)=0,\quad \Theta\to\min.\end{gathered}\tag{4}$$

Задачу (4) будем называть задачей быстродействия для неавтономной канонической системы. В этом случае

$$e^{-\frac{A\tau^2}{2}}b=\begin{pmatrix}1\\ -\dfrac{\tau^2}{2}\\ \dots\\ (-1)^{n-1}\dfrac{\tau^{2n-2}}{2^{n-1}(n-1)!}\end{pmatrix},$$

и из равенства (3) получим

$$x_k^0=\frac{(-1)^k}{2^{k-1}(k-1)!}\int_0^\Theta \tau^{2k-2}u(\tau)\,d\tau,\quad k=1,\dots,n,\quad |u(t)|\le 1,\quad \Theta\to\min.\tag{5}$$

Таким образом, решение задачи быстродействия для неавтономной канонической системы (4) сводится к решению степенной min-проблемы моментов с чётными пропусками (5). Решение min-проблемы моментов (5) подробно изложено в работах [3], [4], [5], [6], в которых получены уравнения для нахождения времени быстродействия и моментов переключения (точек разрыва) управления.

Для задачи быстродействия (1) предлагается численный метод ее решения. Для реализации численного решения задачи быстродействия для линейной неавтономной системы (1) составлена программа на встроенном в математический пакет Waterloo Maple 9 языке программирования высокого уровня. Для произвольного порядка n системы (1) с заданной точностью определяется время быстродействия и управление, которое является кусочно-постоянной функцией, имеющей $n-1$ точек разрыва (моментов переключения). На каждой итерации решается min-проблема моментов с чётными пропусками вида (5), которая эквивалентна задаче быстродействия для неавтономной канонической системы (4). При этом проводилась проверка точности попадания в начало координат с помощью полученного управления, т.е. проверялось равенство (3).

Подробное описание алгоритма программы (в виде последовательности шагов), реализующей численный метод решения задачи быстродействия для линейной неавтономной системы (1), подробно приведено в работе [7]. Этот алгоритм основан на существовании неподвижной точки отображения.

Приведём результаты численного решения задачи быстродействия (1). Точность вычислений выбрана равной 10^{-90}.

Пример 1. Пусть размерность системы (1) $n = 2$, матрица A и вектор b имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

начальная точка $x^0 = (0.01, 0)$.

Приведём результаты первых шести итераций для времени быстродействия:

$$\Theta_1 = 0.434324747331766118067388138079\ldots,$$

$$\Theta_2 = 0.402984688932949976298171997725\ldots,$$

$$\Theta_3 = 0.413634185296559428336548917966\ldots,$$

$$\Theta_4 = 0.4104513489641855575837925228540\ldots,$$

$$\Theta_5 = 0.411445295907444937134516731682\ldots,$$

$$\Theta_6 = 0.411138939637566716982704881930\ldots.$$

Данным методом было выполнено 176 итераций, получены следующие результаты: управление $\widetilde{u}$ на последнем промежутке $[T_1; \Theta]$ равно $+1$ (управление второго рода), время быстродействия

$$\Theta = 0.411211368101634102111692987050\ldots,$$

момент переключения (точка разрыва) управления

$$T_1 = 0.210300886154757942393076145450\ldots.$$

Пример 2. Пусть $n = 5$, матрица A и вектор b имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

начальная точка $x^0 = (0.0000001, 0, 0, 0, 0)$.

Здесь выполнено 248 итераций, в результате получено, что управление $\widetilde{u}$ на последнем промежутке $[T_4; \Theta]$ равно -1 (управление первого рода), время быстродействия

$$\Theta = 0.295442288057051069501093895584\ldots,$$

моменты переключения (точки разрыва) управления

$$T_1 = 0.05216006460005830960105630407 5\ldots,$$

$$T_2 = 0.14961253929927438194355251451 0\ldots,$$

$$T_3 = 0.22789698365562944044433479213 5\ldots,$$

$$T_4 = 0.27816564244166668386905919219 5\ldots$$

Литература

1. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1976. – 392 с.
2. Ли Э.Б. Основы теории оптимального управления: пер. с англ. / Э.Б. Ли, Л. Маркус. – М.: Наука, 1971. – 574 с.
3. Коробов В.И. Метод порождающей функции в проблеме моментов с периодическими пропусками / В.И. Коробов, Г.М. Скляр // Докл. Акад. наук СССР. – 1991. – Т. 318, № 1. – С. 32–35.
4. Korobov V.I. Markov Power Min-Moment Problem with Periodic Gaps / V.I. Korobov, G.M. Sklyar // Journal of Mathematical Sciences. – 1996. – Vol. 80, No. 1. – P. 1559-1581.
5. Korobov V.I. The Solution of One Time-Optimal Problem on the Basis of the Markov Moment Min-Problem with Even Gaps / V.I. Korobov, A.N. Bugaevskaya // Matematicheskaya Fizika, Analiz, Geometriya. – 2003. – Vol. 10, No. 4. – P. 505-523.
6. Бугаевская А.Н. Решение задачи быстродействия на основе степенной min-проблемы моментов Маркова с чётными пропусками / А.Н. Бугаевская // Современные методы исследования в математике и механике. Труды XXIII Конференции молодых учёных механико-математического факультета МГУ / под ред. Д.В. Георгиевского, А.Н. Якивчик. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2001. – С. 60–63.
7. Бугаевская А.Н. Компьютерное моделирование задачи быстродействия для неавтономной канонической системы / А.Н. Бугаевская // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И. Вернадского. – 2013. – № 2(46). – С. 47-53.

Сведения об авторах

Бугаевская Анна Николаевна; кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет E-mail: bugaevskaya@bsu.edu.ru область научных интересов: математическая теория оптимального управления, домашний адрес: Россия, г.Белгород, ул.Губкина 24, корп.1, кв.207.

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ СРЕДСТВАМИ MAXIMA

Букушева А.В.

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия

Аннотация

Рассматривается пример использования свободной распространяемой программы Maxima в решении задач дифференциальной геометрии.

VISUALIZATION OF CURVES AND SURFACES IN MAXIMA

Bukusheva A.V.
Saratov State University, Saratov, Russia

В настоящее время распространёнными системами компьютерной математики являются Maple, Mathematica, MatLAB, MathCAD. Эти системы реализуют множество математических операций, снабжены мощными графическими средствами и обладают собственными языками программирования. Всё это предоставляет широкие возможности для применения математических пакетов в научных исследованиях и преподавании, в частности, для визуализации математических объектов и понятий. Однако все названные программы являются лицензионными. Для организации самостоятельной внеаудиторной работы студентов удобно использовать свободное программное обеспечение. Среди свободно распространяемых программ популярными являются Maxima, Axiom, Scilab.

Основными преимуществами программы Maxima являются: возможность функционирования под управлением различных операционных систем, широкий класс решаемых задач, интерфейс программы на русском языке, наличие справки и инструкций по работе с программой. Недостатком программы можно считать отсутствие справки на русском языке, но на официальном сайте Maxima, на многих образовательных порталах можно найти статьи и пособия с примерами использования программы при решении различных задач , например [4].

Среди возможностей системы Maxima – большая библиотека функций для решения задач линейной алгебры, построение двумерных и трёхмерных графиков, использование широкого спектра математических функций, дифференцирование и интегрирование функций и многое другое.

Для построения графиков используют две базовых функции: plot2d (построение двумерных графиков) и plot3d (построение трехмерных графиков) (эти команды строят график в отдельном окне). При использовании wxMaxima используются ещё две аналогичные команды: wxplot2d и wxplot3d (эти команды встраивают график в листе вычислений).

Для построения графиков функций, заданных параметрически, используется опция parametric. Maxima может рисовать графики функций, заданных таблично, заданных неявно.

Для построения графиков поверхностей и кривых в пространстве предназначена функция plot3d. Функция plot3d имеет два варианта вызова: один для явного задания функции и один для параметрического.

В Maxima имеется несколько альтернативных библиотек для отображения графиков функций, наборов точек, трехмерных тел, градиентов и т.д. По умолчанию используется библиотека plot, но для решения некоторых задач может оказаться удобнее библиотека draw. Перед использованием draw необходимо загрузить командой load("draw").

Рассмотрим пример. Построим кривую Вивиана: $x = \frac{R}{2}(1+\cos t)$, $y = \frac{R}{2}\sin t$, $z = \pm R\sin\frac{t}{2}$. Это кривая, образ которой есть пересечение сферы радиуса R и кругового цилиндра диаметра R, одна из образующих которого проходит через центр сферы [3, С. 55]. Построение кривой в Maxima:

```
(%i1) R:2$
(%i2) curve:parametric(R/2*(1+cos(t)), R/2*sin(t), R*sin(t/2),t,0,4*%pi);
(%i3) sphere:implicit(R^2=x^2+y^2+z^2,x,-2,2,y,-2,2,z,-2,2);
(%i4) cylinder:implicit(0=x^2+y^2-R*x, x,-2,2,y,-2,2,z,-2,2);
(%i5) scene1: gr3d(nticks=200,color=green,sphere,
color=red,cylinder,
line_width=2,color=blue,curve)$
(%i6) scene2: gr3d(nticks=200,
line_width=2,color=blue,curve)$
(%i7) load(draw)$
draw(scene1, scene2, columns = 2)$
```

Результат выполнения программы представлен на рисунке 1.

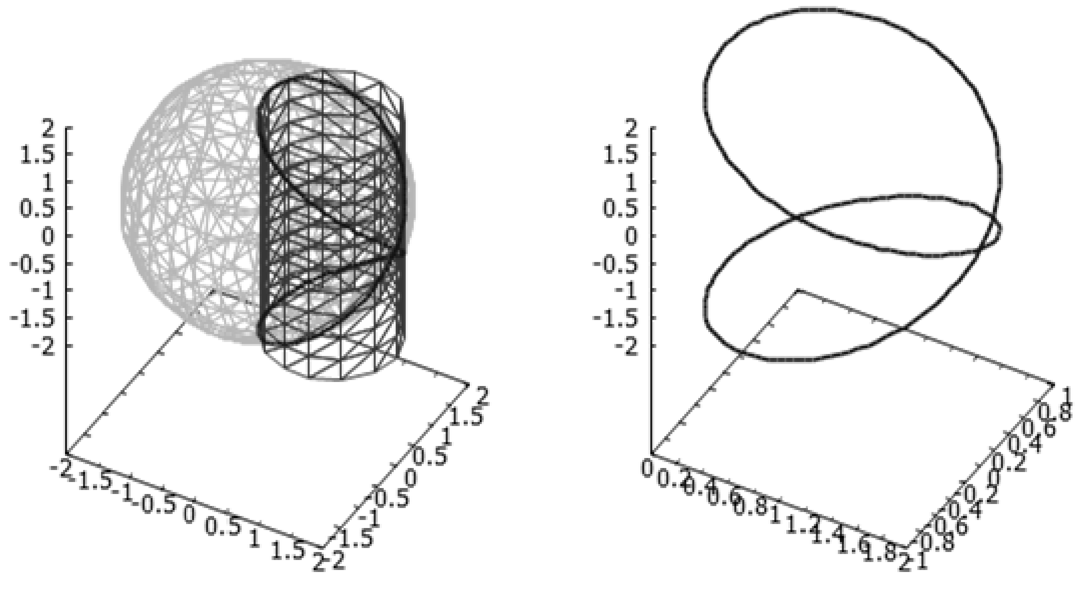


Рис. 1. Кривая Вивиана

Вычислительные возможности Maxima можно использовать для вычисления кривизны и кручения кривой, нахождение первой и второй квадратичных форм поверхностей, геодезической, нормальной, главных кривизн поверхностей и др. Например, вектор задается в виде списка: u:[u1,u1,u3]. Скалярное произведение векторов задается точкой: u.v. Для вычисления векторного произведения векторов загружается пакет load("vect") и используется команда express(u~v). Пример использования Maxima в тензорных расчетах приведен в работе [1]. В работе [2] показано применение Maxima для автоматизации символьных вычислений в документах системы LaTeX.

Литература

1. Korol'kova A.V. Tensor computations in computer algebra systems [Электронный ресурс] / A.V. Korol'kova, D.S. Kulyabov, L.A. Sevast'yanov // arXiv:1402.6635 [cs.SC] [v1] Sat, 22 Feb 2014. 18 p. – Режим доступа: http://arxiv.org/abs/1402.6635 (дата обращения: 01.10.2015)
2. Полищук Ю.В. Автоматизация символьных вычислений в документах LaTeX на основе Maxima [Электронный ресурс] / Ю.В. Полищук, Д.В. Пономарев // Открытый архив электронных изданий Оренбургского государственного университета – Режим доступа: http://elib.osu.ru/handle/123456789/327 (дата обращения: 01.10.2015)
3. Сборник задач по дифференциальной геометрии: учебное пособие для студентов / под ред. А. С. Феденко. – М.: Наука, 1979. – 272 с.
4. Чичкарёв Е. А. Компьютерная математика с Maxima [Электронный ресурс] / Е.А. Чичкарёв // ИНТУИТ – Режим доступа: http://www.intuit.ru/studies/courses/3484/726/info (дата обращения: 01.10.2015)

Сведения об авторе

Букушева Алия Владимировна, кандидат педагогических наук, доцент кафедры геометрии, Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, bukusheva@list.ru, структуры на гладких многообразиях, компьютерная геометрия.

ВИДЫ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ В ПРОЦЕССЕ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Бучацкая В.В.

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия.

Теплоухов С.В.

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия.

Аннотация

В данной статье представлено понятие неопределенности, указана её классификация. Приведены основные особенности видов неопределенности. Определена необходимость учета неопределенности при принятии решений.

TYPES OF UNCERTAINTY OF INITIAL INFORMATION IN DECISION–MAKING

Buchatskaya V.V.

Adygeya State University, Maikop, Russia.

Teploukhov S.V.

Adygeya State University, Maikop, Russia.

В настоящее время большое число систем (экономических, социальных, производственных и т.д.) являются сложными, состоящими из взаимосвязанных подсистем, функционирование которых направлено на достижение общих целей.

Целью анализа любого набора данных является принятие решений. По этой причине важным является наличие достоверной и необходимой информации, описывающей состояние системы. Её отсутствие приводит к тому, что фактические показатели отличаются от планируемых значений, т.е. неверному принятию решений. Следовательно, важной характеристикой исходных данных является неопределенность. Существует большое количество определений данного термина.

В широком смысле, неопределённость — отсутствие или недостаток определения или информации о чём-либо. Среди причин возникновения неопределенности назовем следующие [1]:

– сложность объекта и недостаточная изученность процессов протекающих в нем;

– стохастическая природа основных параметров, описывающих функционирования объекта;

– наличие большого количества возмущающих воздействий и помех на производстве, зашумленность информации;

– недостаточная достоверность исходной статистической информации и др.

Существует некоторое количество классификаций неопределенности [1, 2]. В общем виде они представлены на рисунке 1.

Распространенной является классификация основанная на возможности устранения имеющейся неопределенности. Неустранимая неопределенность, имеющая место при принятии решений, приводит к тому, что риск никогда не бывает нулевым. Следствием этого является неуверенность в достижимости поставленной цели, и в результате реализации выбранного решения намеченная цель в большей или меньшей степени не достигается.

По характеру выделяют следующие основные типы неопределенностей. Параметрическая неопределенность означает, что неизвестными являются постоянные параметры объекта, процесса или явления [3]. Во многих практических случаях реальные значения параметров могут существенно отличаться от принятых номинальных. Структурная неопределенность означает, что структура модели является неточно известной [3]. Как правило, структурная неопределенность выражается в том, что сложность реального объекта оказывается существенно выше его модели. Ситуационная неопределенность характеризуется непредсказуемыми действиями неконтролируемых факторов различного происхождения (деятельность человека, стихийные бедствия, воздействия ноосферы и т.п.), вызывающие непредсказуемое поведение исследуемой системы.

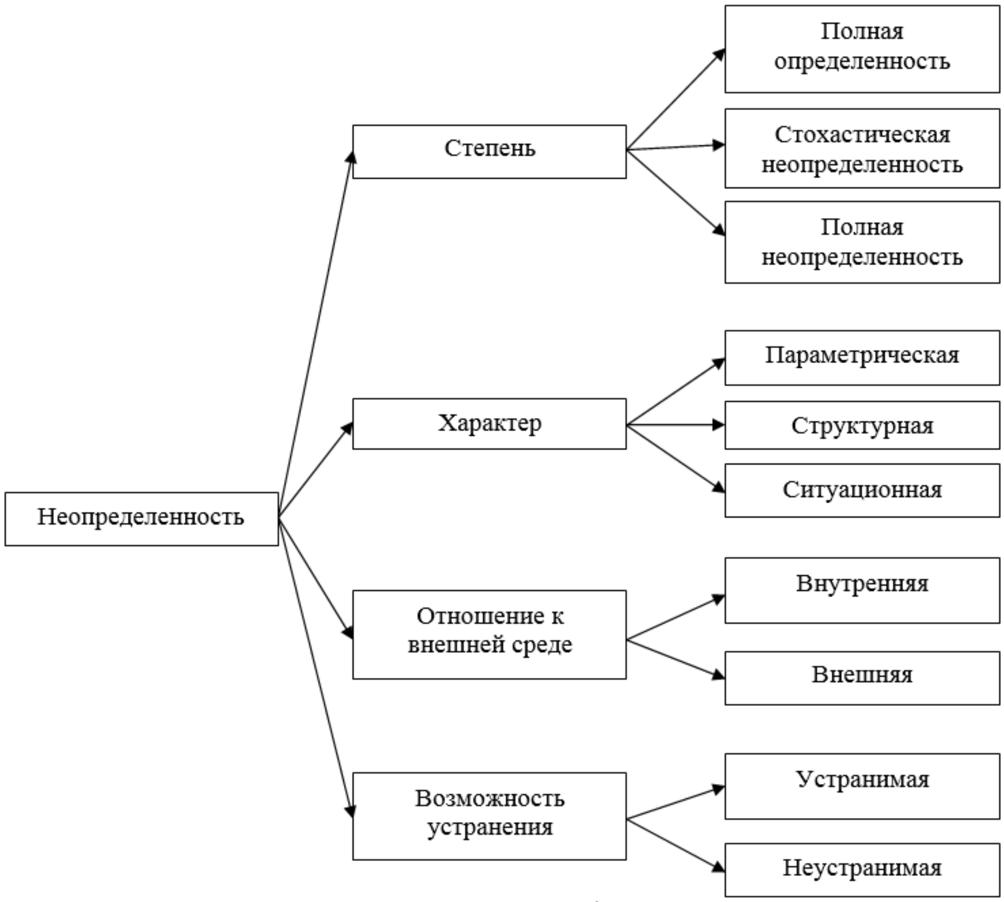


Рис.1. Классификация неопределенности

Кроме того, неопределенность может быть как внутренней, так и внешней [2]. Неопределенность внешняя – особенность внешней среды, которые не всегда возможно контролировать. Внутренняя связана с неточностью внутренней структуры процесса, объекта или явления, например, нерегулярность этого процесса, быстро меняющихся условий протекания этого явления и т.д.

Также очень важно отметить такое понятие, как неопределенность информации. Информационная энтропия – мера неопределённости или непредсказуемости информации. Основоположник теории информации Клод Шеннон определил информацию, как снятую неопределенность. В процессе принятия решений неопределенность можно рассматривать, как наличие нескольких возможных исходов каждой альтернативы.

Последний подход является очень известным и в основе лежит расчет энтропии (величина, характеризующая количество неопределенности).

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{n} p(i)\log_2 p(i),$$

где x – независимые случайные события с n возможными состояниями (от 1 до *n, p* – функция вероятности).

Величина энтропии может служить косвенной оценкой неопределенности системы, однако, не позволяет сделать вывод о применимости тех или иных методов анализа данных.

Классификация по степени неопределенности, выделяет три вида неопределённости. В основе данного деления лежит предположение о том, какие данные имеются в системе и их особенностях.

В условиях полной определенности имеется полная информация о системе. Входные и выходные переменные - детерминированы, а также известны внутренние связи в системе. Самый изученный тип неопределенности. Лицо принимающее решение, выбирает действие, которое даёт наибольшее значение функции полезности.

При стохастической или интервальной неопределенности известен интервал значений некоторого параметра или известно распределение вероятностей изучаемого параметра или оно вычислимо. То есть имеется статистическая информация в условиях большой выборки. Выходные переменные тоже имеют вероятностную природу.

При полной неопределенности каждой альтернативе могут соответствовать несколько исходов, имеющих нечеткие оценки. Может отсутствовать вообще какая-либо информация о факторах, влияющих на принятие решения. В случае такого типа неопределенности часто присутствуют неформализованные данных, а также знания экспертов. Данный тип неопределенности является наиболее трудным для изучения.

В последней классификации большое внимание уделено особенностям набора данных, который имеется при описании и функционировании системы и который используется в дальнейшем анализе с целью принятия решения.

Данное деление позволяет сделать вывод о том, что неопределенность – неотъемлемое свойство наборов данных, которое требуется учитывать при любых способах обработки и при решении любых задач принятия решений. С другой стороны, многообразные средства и способы её устранения должны быть адаптированы к её различным видам с целью принятия наиболее эффективного решения.

Литература

1. Бойко И. А., Гурьянов Р. А. Математические модели технических систем в условиях неопределенности // Ежемесячный научный журнал «Молодой ученый». Серия: Технические науки . 2013. №6. С.30-33.
2. Тычинский А.В. Управление инновационной деятельностью компаний: современные подходы, алгоритмы, опыт. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2006.– 108с.
3. Никифоров В.О., Слита О.В., Ушаков А.В. Интеллектуальное управление в условиях неопределенности: учебное пособие. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 232с.

Сведения об авторах

Бучацкая Виктория Викторовна, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики, информационных технологий и информационной безопасности, buch_vic@mail.ru, ФГБОУ ВПО «Адыгейский государственный университет», системный анализ и обработка информации.

Теплоухов Семён Васильевич, ассистент кафедры АСОИУ Адыгейского государственного университета, аспирант Кубанского государственного технологического университета. mentory@mail.ru Принятие решений, ситуационный центр, методы прогнозирования, неопределенность данных.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В СТРУКТУРЕ МЕТОДОВ АНАЛИЗА ДАННЫХ

Бучацкая В.В.

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия

Аннотация

Существующие на сегодняшний день большие массивы данных требуют развития специализированных методов их обработки. Такими инструментами становятся методы анализа данных. Проанализирована роль и место математических моделей в структуре методов анализа данных. Рассмотрена классификация методов анализа данных по способу обучения математических моделей.

MATHEMATICAL MODELS IN THE STRUCTURE OF DATA ANALYSIS METHODS.

Buchatskay V.V.

Adygeya State University, Maikop, Russia

Стремительное развитие информационных технологий, в частности, прогресс в методах сбора, хранения и обработки данных позволил собирать огромные массивы данных в различных областях практической деятельности человека, которые необходимо анализировать. Объемы этих данных настолько велики, что возможностей традиционных методов обработки уже не хватает. На сегодняшний день интенсивно развивается направление, связанное с интеллектуализацией методов обработки и анализа данных. Появляющиеся интеллектуальные системы анализа данных (ИСАД) призваны минимизировать усилия лица, принимающего решения (ЛПР), в процессе анализа данных, а также в настройке алгоритмов анализа. Многие ИСАД позволяют не только решать классические задачи принятия решения, но и способны выявлять причинно-следственные связи, скрытые закономерности в системе, подвергаемой анализу.

Большинство аналитических методов, используемые в технологии анализа данных – это известные математические алгоритмы и методы. Новым в их применении является возможность использования при решении тех или иных конкретных проблем, обусловленная появившимися возможностями технических и программных средств.

Существуют различные подходы к разбиению методов анализа данных на группы, одним из которых является классификация на основании подходов к обучению математических моделей. Остановимся на ней более подробно.

В этой классификации различают две группы методов (рис.1) [1].

• статистические методы, основанные на использовании усредненного накопленного опыта, который отражен в ретроспективных данных;

• кибернетические методы, включающие множество разнородных математических подходов.

Статистические методы в рамках рассматриваемой классификации представляют собой четыре взаимосвязанных раздела:

• предварительный анализ природы статистических данных (проверка гипотез стационарности, нормальности, независимости, однородности, оценка вида функции распределения, ее параметров и т.п.);

• выявление связей и закономерностей (линейный и нелинейный регрессионный анализ, корреляционный анализ и др.);

• многомерный статистический анализ (линейный и нелинейный дискриминантный анализ, кластерный анализ, компонентный анализ, факторный анализ и др.);

• динамические модели и прогноз на основе временных рядов.

Необходимо отметить, что к статистическим методам в этом случае возможен двоякий подход. С одной стороны, классические статистические методы можно считать отдельным направлением анализа данных. С другой стороны, они являются частью математического инструментария анализа данных. Большинство источников литературы придерживается второго подхода [2].

К группе кибернетических методов относятся следующие:

- искусственные нейронные сети (распознавание, кластеризация, прогноз);
- эволюционное программирование (в т.ч. алгоритмы метода группового учета аргументов);
- генетические алгоритмы (оптимизация);
- ассоциативная память (поиск аналогов, прототипов);
- нечеткая логика;
- деревья решений;
- системы обработки экспертных знаний.

Рис. 1. Классификация методов анализа данных на основании подходов к обучению математических моделей.

Это множество подходов, объединенных идеями классической, а также компьютерной математики и использования теории искусственного интеллекта.

Недостаток такой классификации методов анализа данных состоит в том, что и статистические, и кибернетические алгоритмы тем или иным образом опираются на сопоставление статистического опыта с результатами мониторинга текущей ситуации. Преимуществом же такой классификации является ее удобство для интерпретации - она используется при описании математических средств современного подхода к извлечению знаний из массивов исходных наблюдений (оперативных и ретроспективных), т.е. в задачах анализа данных.

Из сказанного можно сделать вывод, что анализ данных является мультидисциплинарной областью, возникшей и развивающейся на базе достижений прикладной статистики, распознавания образов, методов искусственного интеллекта, теории баз данных и др. Основная особенность Data Mining - это сочетание широкого математического инструментария (от классического статистического анализа до новых кибернетических методов) и последних достижений в сфере информационных технологий. В технологии Data Mining гармонично объединились строго формализованные методы и методы неформального анализа, т.е. количественный и качественный анализ данных.

Литература

1. Симанков В.С., Бучацкая В.В. Обзор методов прогнозирования Деп. в ВИНИТИ, №9, 2012, б/о.
2. Чубукова И.А. Data Mining: Учеб. пособие – М.: Инернет-Университет Информационных технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.

Сведения об авторах

Бучацкая Виктория Викторовна, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики, информационных технологий и информационной безопасности, buch_vic@mail.ru, ФГБОУ ВПО «Адыгейский государственный университет», системный анализ и обработка информации.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭНЕРГИИ ВЕТРОВОГО ПОТОКА ДЛЯ ОЦЕНКИ ЕГО ПОТЕНЦИАЛА

Бучацкий П.Ю.

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия.

Аннотация

Ветровая энергия является одним из основных видов возобновляемой энергии, использование которой является актуальным. В связи с этим рассмотрены модели энергии ветрового потока для оценки его потенциала. Модели ветровой активности достаточно точно аппроксимируют реальные метеорологические наблюдения и могут быть использованы для моделирования ветровых источников энергии.

MODELING OF POWER OF THE WIND FLOW FOR THE ASSESSING ITS POTENTIAL.

Buchatsky P.Yu.

Adygeya State University, Maikop, Russia.

Моделирование системы поступления возобновляемой энергии для оценки ее потенциала в заданном районе представляет собой синтез математических моделей, описывающих процессы поступления энергии от различных источников, и параметров технологии ее преобразования.

Естественные потоки возобновляемой энергии, как непрерывные физические процессы, могут быть представлены в виде универсальных аналитических моделей с переменными параметрами, зависящими от специфики природных и техногенных условий исследуемой местности.

Моделирование энергии ветрового потока чаще всего производят на основании данных скоростного режима и характеристик распределения (повторяемости) скорости ветра во времени. Основной задачей моделирования ветровой активности является прогнозирование скорости ветрового потока. Используемую для моделирования ветровой активности климатологическую информацию принято разделять на три группы [1]:

1) климатические характеристики, используемые для оценки ветроэнергетического потенциала: средние многолетние скорости ветра в целом за год, по месяцам и сезонам; суточный ход ветра в различные сезоны; распределение повторяемости скорости ветра по градациям в разные сезоны и месяцы года; вертикальный профиль ветра (изменение скорости ветра с высотой);

2) данные о динамике изменения скорости ветра;

3) климатические характеристики, необходимые для конструирования ВЭУ (расчета элементов конструкции на прочность и надежность): максимальная скорость ветра, возможная 1 раз в определенное количество лет; интегральная повторяемость (обеспеченность) скорости ветра выше определенного предела; характеристики порывистости ветра.

При использовании ветровой энергии общим методическим подходом является исследование закономерной и стохастической изменчивости во времени на основе, прежде всего натурных наблюдений за ветром. Как и для любого стохастического процесса относительных вариаций во времени, для скорости ветра исходной характеристикой является распределение этих вариаций, что при соответствующем усреднении соответствует режиму повторяемости рабочих скоростей. В ветроэнергетике очень велико влияние местных особенностей формирования ветрового режима, поэтому попытки создать универсальные модели распределения не обеспечивают требуемой точности, хотя и имеют достаточно широкую практику применения, чаще всего из-за недостатка фактических данных наблюдений. В этой области работали и предложили свои распределения М.С.Поморцев, М.В. Колодин, Гуллен, Вейбулл, Гудрич и др. Г.А. Гриневич предложил общий вид уравнения кривой распределения в виде:

$$F(v,\bar{v},\Delta v)=\frac{\Delta v}{v}a\left(\frac{\Delta v}{\bar{v}}\right)e^{-k\left(\frac{v_n}{v}\right)} \qquad (1)$$

где *F(v)* - повторяемость скорости v; $\bar{v}$ - средняя скорость за расчетный промежуток; v - скорость, относительная повторяемость которой определяется в интервале от $(v-\Delta v/2)$ до $(v+\Delta v/2)$; Δv - значение выбранной градации скорости ветра. Значения коэффициента a и показателей степеней p и n характеризуют местные особенности ветрового режима и могут меняться в достаточно широких пределах.

Функция *F(v)* часто, особенно в зарубежной практике аппроксимируется распределением Вейбулла-Гудрича:

$$F(v) = k\frac{v^{k-1}}{A^k}e^{-\left(\frac{v}{A}\right)^k} \qquad (2)$$

где k – параметр формы (зависит от района местности), А – параметр масштаба (зависит от средней скорости ветра, $A \sim 1{,}13\ v$)

Распределение Вейбулла-Гудрича в различных источниках литературы признано наиболее универсальным [2,3]. Указанными методами выполнено много разработок по районированию потенциальных ветроэнергетических ресурсов территории России и отдельных регионов.

Однако, знание закона распределения и наличие высоких средних значений скоростей ветра еще не гарантирует его эффективного использования. В ветроэнергетике большое значение имеет знание возможной длительности затиший, вероятностная оценка которых служит основным критерием эффективности использования ветровой энергии.

Можно считать установленным, что структурные свойства ветрового режима слабо зависят от общего уровня интенсивности, т.е. в местностях со значительными по интенсивности ветрами могут наблюдаться длительные затишья, которые делают использование ветра неэффективным. Затишьем считается период так называемых неактивных скоростей ветра, которые не могут быть использованы для производства энергии. Эта характеристика, являющаяся необходимой составной частью ветроэнергетического кадастра, считается одной из наиболее важных при оценке перспектив использования ветра.

Для моделирования прихода ветровой энергии в заданном районе необходимо знать распределение скоростей ветра во времени, по градациям и по высоте. Эта информация может быть определена по данным метеорологических наблюдений, фиксируемых на метеостанциях.

Распределение скорости ветра по высоте при высоких скоростях и достаточно однородной поверхностью может быть аппроксимировано степенной функцией вида:

$$U(H) = U_{\Phi}\left(\frac{H}{h}\right)^m \qquad (3)$$

где: $U(H)$ *и* U_{Φ} – скорости ветра на высоте H и высоте флюгера h; $m = f(U)$ – показатель степени, в общем случае зависит от скорости ветра, рельефа местности и шероховатости поверхности;

Наиболее часто используется вероятностное описание скорости ветра с помощью распределения Вейбулла [4]:

$$\varphi_v(v) = \frac{K}{A}\left(\frac{V}{A}\right)^{k-1}\exp\left[-\left(\frac{V}{A}\right)^k\right], \qquad (4)$$

где А – коэффициент масштаба; K – коэффициент формы.

Зная $\varphi_v(V)$, вычислить среднюю скорость можно по формуле

$$\overline{V} = \int_0^{\infty} V \varphi_V(V) dV = A\Gamma(1 + \frac{1}{k}), \qquad (5)$$

где Г – гамма-функция.

Постоянная k (параметр формы) лежит, как правило, в интервале 1≤ k≤ 2, и, поскольку Г(2)=1, Г(1,5)=$\sqrt{\pi}/2$, формула (5) принимает вид:

$$\overline{V} \approx (1{,}0 \div 0{,}9) A,$$

т.е. параметр A распределения Вейбулла близок к средней скорости.

Из (2.30) следует также зависимость для накопленной вероятности (вероятности того, что скорость находится в интервале от 0 до V):

$$F(V) = \int_0^{V} \varphi_V(V) dV = 1 - \exp\left[-\left(\frac{V}{A} \right)^K \right]. \qquad (6)$$

Использование распределения Вейбулла для прогнозирования скорости ветрового потока рекомендуется как в зарубежной, так и в отечественной литературе [4]. Другие известные формы описания распределения скорости ветра (Гриневича, Колодина) имеют ограниченное применение.

При проведении ветроэнергетических расчетов большое значение имеет описание вертикального профиля скорости ветра (зависимости скорости ветра от высоты). При этом наибольшее распространение находят аппроксимации в виде степенной и логарифмической функции [4].

Степенная аппроксимация имеет вид:

$$V(Z) = V(Z_1) \left(\frac{Z}{Z_1} \right)^m, \qquad (7)$$

где V(Z) – скорость ветра на высоте Z; V(Z_1) - скорость ветра на исходной высоте, для которой произведена обработка статистики; m – показатель, характеризующий вертикальный профиль и рельеф местности, является либо константой, либо переменной величиной [5].

Описание вертикального профиля ветра в виде логарифмической функции имеет вид:

$$V(Z) = V(Z_1) \frac{\ln\left(Z_1 / Z_0 \right)}{\ln\left(Z_1 / Z_0 \right)} \qquad (8)$$

где Z_0 – шероховатость подстилающей поверхности, значения которой классифицированы в зависимости от характеристик местности [4].

Для скорости ветра характерны годовые, сезонные и суточные вариации для одной и той же местности, причем могут существовать и долговременные тенденции таких изменений. Для решения поставленной задачи наиболее важно определить суточные изменения скорости ветра в среднем за месяц или сезон. Для этого используют данные многолетних наблюдений по статистическим характеристикам ветра из аэроклиматического справочника пограничного слоя атмосферы [6 - 8].

На рисунках 1, 2 приведены данные верификации приведенных моделей ветровой активности с данными метеопостов, расположены к г. Майкопе и в г. Сочи.

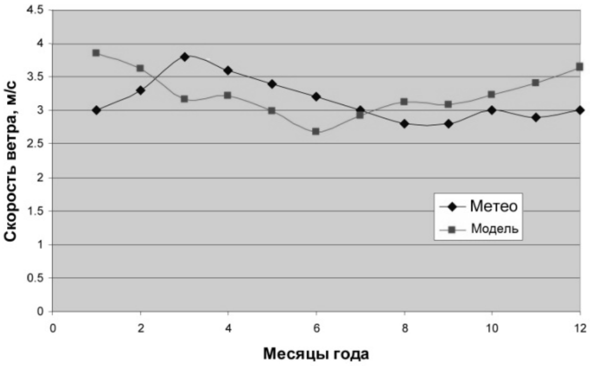


Рис. 1 – Верификация моделей ветровой активности: среднемесячная скорость ветра на высоте флюгера для г. Майкопа.

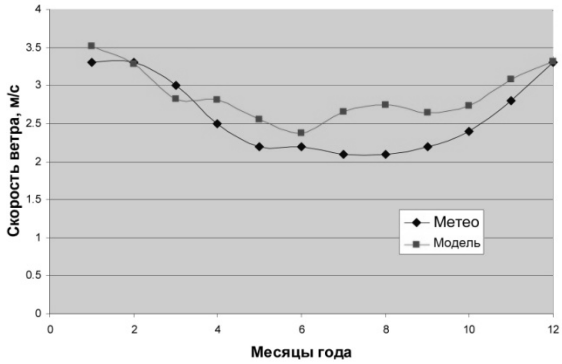


Рис. 2 Верификация моделей ветровой активности: среднемесячная скорость ветра на высоте флюгера для г. Сочи.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что рассмотренные модели ветровой активности достаточно точно аппроксимируют реальные метеорологические наблюдения и могут быть использованы для моделирования ветровых источников энергии.

Литература

1. Кундас, С.П. Возобновляемые источники энергии: монография / С.П. Кундас, С.С. Позняк, Л.В Шенец; МГЭУ им. А.Д. Сахарова. – Минск: МГЭУ им. А.Д. Сахарова, 2009. – 315 с.
2. Беляев, Ю.М. Формирование механизмов устойчивого развития экономики энергетической отрасли на основе стратегии альтернативной энергетики: дис. … докт. экон. Наук / Ю.М. Беляев. - Краснодар, 2004.
3. Елистратов, В.В. Использование возобновляемой энергии: учеб. пособие / В.В. Елистратов. – СПб.: Изд-во Политех. ун-та, 2008. – 224 с.
4. Симанков, В.С. Моделирующий комплекс поступления энергии для оперативного управления автономными фотоветроэнергетическими системами / В.С. Симанков, П.Ю. Бучацкий, А.В. Шопин // Труды физического общества Республики Адыгея. – Майкоп, 2002. – № 7. – С. 13-21.
5. Атлас Республики Адыгея / Центр геоинформационных технолоигий Адыг. гос. ун-та. – Майкоп, 2005.

6. Госкомстат России. Статический ежегодник Российской Федерации. – М., 2010.
7. Госкомстат России. Статический ежегодник Российской Федерации. – М., 2011.
8. Госкомстат России. Статический ежегодник Российской Федерации. – М., 2012.

Сведения об авторе

Бучацкий Павел Юрьевич, кандидат технических наук, заведующий кафедрой автоматизированных систем обработки информации и управления, ФГБОУ ВПО «Адыгейский государственный университет», butch_p99@mail.ru, системный анализ, обработка информации, управление, математическое моделирование, информационные системы.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА РЕГУЛЯРНОГО ТИПА С ДВУМЯ ЧЕТЫРЕХКРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Вагабов А.И.

Дагестанский государственный университет, Махачкала

Аннотация

В случае двойных характеристических особенностей четвертых порядков для дифференциального оператора восьмого порядка, устанавливается формула восьмикратного разложения функций по корневым элементам соответствующей спектральной задачи.

SPECTRAL PROBLEM OF REGULAR TYPE WITH TWO FOURFOLD CHARACTERISTICS

Vagabov A.I.

Dagestan State University, Makhachkala

Annotation

In the case of the double characteristic features of the fourth-order differential operator of order eight, set formula eightfold expansion of the functions of the root elements of the corresponding spectral problem.

Рассматривается краевая задача с параметром λ:

$$l(y) \equiv \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right)^4 y(x), \quad 0 < x < 1 \tag{1}$$

при условиях

$$y(1) = 0, \quad \left. \frac{d^{s-1} y}{dx^{s-1}} \right|_{x=0} = 0, \quad s = \overline{1,7} \tag{2}$$

Характеристическое уравнение: $(\varphi^2 - 1)^4 = 0$ имеет два четырехкратных корня $\varphi = \pm 1$. Непосредственно проверяется, что

$x^s e^{\pm\lambda x}$, $s=\overline{0,3}$ есть фундаментальная система решений уравнения $l(y)=0$.

Используя данную систему, построим характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (1), (2):

$$[720]\lambda^{12}e^{-\lambda}+\ldots+[720]\lambda^{12}e^{\lambda}=0 \qquad (3)$$

где точками обозначены подчиненные по росту степени λ слагаемые. Из уравнения (3) усматривается асимптотика собственных значений $\lambda_k \sim k\pi i$ при больших k, $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$.

При конструировании функции Грина задачи удобно использовать функции Коши уравнения $l(y)=0$ в двух видах:

$$g(x,\xi,\lambda)=\begin{cases} 0 & при \quad 0\le\xi\le x\le 1 \\ -\dfrac{(x-\xi)^3}{3!}e^{\pm\lambda(x-\xi)} & при \quad 0\le x\le\xi\le 1 \end{cases} \operatorname{Re}\pm\lambda>0 \qquad (4)$$

$$g(x,\xi,\lambda)=\begin{cases} -\dfrac{(x-\xi)^3}{3!}e^{\pm\lambda(x-\xi)} & при \quad 0\le\xi\le x\le 1 \\ 0 & при \quad 0\le x\le\xi\le 1 \end{cases} \operatorname{Re}\pm\lambda<0 \qquad (5)$$

Обращаясь к широко известной конструкции функции Грина [1], (она не однозначна по форме), имеем

$$G(x,\xi,\lambda)=\frac{\Delta(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}=g(x,\xi,\lambda)+\frac{E(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \qquad (6)$$

где $E(x,\xi,\lambda)$, получено из числителя функции Грина заменой в нем нулем функции $g(x,\xi,\lambda)$.

Интегрированием по частям устанавливаются леммы.

Лемма 1. Пусть $f(x)$ непрерывно дифференцируема шесть раз и $f^{(k)}(x)\big|_{0,1}=0, \quad k=\overline{0,6}$, тогда на окружностях $C_\nu : |\lambda|=\left(\nu+\dfrac{1}{2}\right)\pi, \quad \nu\in N, \quad |\nu|>>1$, справедлива оценка

$$\int_0^1 \frac{E(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}f(\xi)d\xi\Big|_{C_\nu}=\frac{\varepsilon(x,\lambda)}{\lambda^4},$$

$$\int_0^1 \frac{E(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}f(\xi)d\xi\Big|_{C_\nu}=\frac{\varepsilon(x,\lambda)}{\lambda^4}, \quad \varepsilon(x,\lambda)\to 0 \text{ при } \lambda\to\infty.$$

Лемма 2. Если $f(x)$ четырежды непрерывно дифференцируема на [0,1] и $f^{(k)}(x)\big|_{0,1}=0, \quad k=\overline{0,4}$, тогда при $\operatorname{Re}\lambda>0$ справедлива формула

$$\int_0^1 g(x,\xi,\lambda) f(\xi) d\xi = \frac{f(x)}{\lambda^4} + \frac{\varepsilon(x,\lambda)}{\lambda^4},$$

Введем в рассмотрение выражение

$$F(\xi, f, \lambda) = \lambda^6 f_0(\xi) - 4\lambda^4 f_0''(\xi) + 6\lambda^2 f_0^{IV}(\xi) +$$
$$+ \lambda^4 f_1(\xi) - 4\lambda^2 f_1''(\xi) + 6 f_1^{IV}(\xi) + \lambda^2 f_2(\xi) - 4 f_2''(\xi) - f_3(\xi),$$

относящееся к четырем функциям.

Теорема. Пусть $f_i(x), \varphi_j(x), i, j = \overline{0,3}$ функции, удовлетворяющие условиям леммы 2. Справедлива формула восьмикратного разложения по собственным элементам задачи (1) – (2):

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{-1}{2\pi i} \int_{C_\nu} \lambda^s d\lambda \int_0^1 G(x,\xi,\lambda) F(\xi, f, \lambda) d\xi = f_s(x),\ s = \overline{0,3} \qquad (7)$$

и аналогичная формула с заменой f на φ, а λ на $-\lambda$, где сходимость в (7) равномерна на (0,1).

Доказательство формулы (7) в основном повторяет суждение из [2].

Литература

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.
2. Вагабов А.И. Разложение в ряды Фурье, связанные с ОДУ четвертого порядка с двукратными характеристиками // Вестник Дагестанского государственного университета. 1998. Вып. 1. – С. 95-98.
3. Печенцов А.С. Краевые задачи для дифференциальных уравнений, содержащих параметр, с кратными корнями характеристического уравнения // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 2. – С. 263-273.

Сведения об авторе

Вагабов Абдулвагаб Исмаилович, д.физ.-мат.наук, профессор, Дагестанский государственный университет, algebra-dgu@mail.ru, спектральная теория дифференциальных операторов.

ПРИМЕНЕНИЕ ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Вершинина С.В.

Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия

Аннотация

В статье рассматривается построение математической модели поставок с применением метода имитационного моделирования.

THE USE OF SIMULATION MODELS FOR OPTIMIZATION OF MANAGEMENT DECISIONS

Vershinina S.V.
Tyumen state University, Tyumen, Russia

С помощью математической модели можно изобразить практически любой процесс. Чтобы такая модель наиболее точно описывала объект, необходимо предварительное глубокое теоретическое исследование сущности процесса. И только тогда полученная математическая модель будет объективно отражать его.

Один из наиболее распространенных математических методов моделирования – это имитационное моделирование. С помощью него решается целый класс задач, среди которых основное место занимает принятие управленческих решений. Имитационное моделирование используют в тех случаях, когда необходимо принять управленческое решение в условиях обширной информации, которая при этом может быть достаточно легко формализована и представима в удобном формате. Широкое использование математических моделей позволяет дать количественную характеристику проблемы и найти оптимальный вариант ее решения.

Данная тема была использована автором на факультативе по математике в 10 классе. Полученный опыт показал, что математическое моделирование с элементами управленческих задач вызывает большой интерес у школьников, и оказывает влияние на выбор будущей профессии.

Рассмотрим моделирование сложной проблемы методом Монте-Карло, когда спрос и срок поставки – неопределенны. В таких случаях должна быть собрана информация, на основе которой можно построить распределение вероятностей для соответствующих переменных.

Суть задачи заключается в том, что есть некая корпорация, занимающаяся производством легковых автомобилей, которая закупает аккумуляторы у некоего поставщика. При этом, специалисты компании смогли оценить спрос на аккумуляторы (начальный запас – 2000 шт), который, как оказалось, за неделю аппроксимируется нормальным распределением: среднее значение 496 и стандартное отклонение 10 для промежутка от 470 до 532. Подача заказов на поставку аккумуляторов осуществляется в размере 2500 шт. всякий раз, когда запас аккумляторов будет менее 1500 штук. Интервалы времени между подачей заявки на заказ и осуществлением поставок происходят со следующей вероятностью: 1 неделя – 0,2; 2 неделя – 0,5; 3 неделя – 0,25; 4 неделя – 0,05, при стоимости хранения запасов – 500 ден. ед. в неделю. Стоимость заказа – 50 тыс. ден. ед., а его отсутствие – 20 тыс. ден. ед. в неделю.

Используя имитационную модель для периода более чем в 20 недель, необходимо оценить среднюю стоимость данного управленческого решения.

Переменными в данном случае будут являться спрос и время поставки заказа. Для моделирования спроса используем шаг в 5 единиц.

Рассчитаем: средний размер запаса на конец недели – 1143,25 шт; среднее значение спроса – 502,5 шт/неделю; средний размер дефицита – 51 шт/неделю.

Получаем, что число заказов, поданных в течении всего периода (20 недель), равно 4, значит среднее число заказов в неделю – 0,2. Рассчитаем ожидаемую стоимость в неделю 1602 тыс. ден.ед.

Но процесс моделирования на этом не закончен. Необходимо понять, что данные условия действительно описывают стационарное состояние модели. Для этого составим ряд распределения интервалов случайных чисел для времени поставки заказа.

Табл. 1. Интервалы случайных чисел для времени поставки заказа.

Время поставки, недель	**Частота (вероятность)**	**Накопленная частота**	**Случайные числа**
1	0,2	0,2	0-19
2	0,5	0,7	20-69
3	0,25	0,95	70-94
4	0,05	1	95-99

Теперь составим распределения интервалов случайных чисел для спроса за неделю. Шаг по условию = 5.

Табл. 2. Распределение интервалов случайных чисел для спроса за неделю.

Недельный спрос	**Частота (вероятность)**	**Накопленная частота**	**Случайные числа**
470	0,003	0,003	0-2
475	0,009	0,012	3-11
480	0,028	0,04	12-39
485	0,066	0,106	40-105
490	0,121	0,227	106-226
495	0,175	0,402	227-401
500	0,197	0,599	402-598
505	0,175	0,774	599-773
510	0,121	0,895	774-894
515	0,066	0,961	895-960
520	0,028	0,989	961-988
525	0,009	0,998	989-997
530	0,003*	1	998-999*

* Небольшие отклонения допустимы (округление).

Теперь перейдем непосредственно к процессу моделирования.

Табл. 3. Моделирование управления запасами

неделя	Запас на начало недели	Спрос		Запас на конец недели	Необходимость повторного заказа (да/нет)	Время поставки		дефицит
		Случайное число	Объем			Случайное число	недели	
1	2000	034	480	1520				
2	520	743	505	1015				
3	1015	738	505	510	да	95	4	
4	510	636	505	5				
5	5	964	520	0				515
6	0	736	505	0				505
7	2500	614	505	1995				
8	1995	698	505	1490				
9	1490	637	505	985	да	73	3	
10	985	162	490	495				
11	495	332	495	0				
12	2500	616	505	1995				
13	1995	804	50	1485				
14	1485	560	500	985	да	10	1	
15	3485	111	490	2995				
16	2995	959	515	1980				
17	2595	959	515	1980				
18	1980	774	510	1470				
19	1470	246	495	975	да	76	3	
20	975	762	505	470				
		Итого 10050		22865				1020

Как мы видим, данный метод дает основание для экономической интерпретации числовых значений, что позволит руководству данной корпорации принять более оптимальное и правильное решение. А это в свою очередь существенно поможет сэкономить средства компании. Применение данного метода может быть весьма эффективным и при решении других производственных задач.

Литература

1. Управленческие решения [Текст] : учебное пособие / О. Е. Мезенцева ; М-во образования и науки Российской Федерации, Федеральное гос. бюджетное образовательное учреждение высш. проф. образования "Тюменский гос нефтегазовый ун-т". - Тюмень : ТюмГНГУ, 2014. - 199 с.
2. Зуб, А. Т. Принятие управленческих решений. Теория и практика : Учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям "Менеджмент" и "Государственное управление" / Анатолий Тимофеевич Зуб. - Москва: ФОРУМ : ИНФРА-М, 2013. - 400 с. : ил. - (Высшее образование). - Рекомендовано Ученым Советом факультета государственного МГУ им. М.В. Ломоносова.

3. Лопатников Л. И. Экономико-математический словарь: Словарь современной экономической науки. -5-е изд., перераб. и доп. -М.: Дело, 2008. -520 с.
4. «Экономика и управление: теоретические и практические аспекты»: материалы международной заочной научно-практической конференции. .- URL:http://sibac.info/index.php/2009-07-01-10-21-16/7200-2013-04-05-14-03-50

Сведения об авторах

Вершинина Светлана Валерьевна, к.э.н., доцент кафедры алгебры и математической логики Тюменского государственного университета, sversh1978@yandex.ru, область научных интересов: математика, педагогика и психология, методика преподавания математики, эономика.

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЫ ТЯЖЕЛЫХ ИДЕАЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ ПРИ ПЕРЕНОСНОМ ВЕРТИКАЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

Георгиевский Д.В.
МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.

Тлюстангелов Г.С.
МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия.

Аннотация

Исследуется развитие малых колебаний в системе, состоящей из тяжелого слоя идеальной несжимаемой жидкости, покрывающего полупространство идеальной жидкости с другой плотностью. Вся система как жесткое целое движется в вертикальном направлении по некоторому заданному закону. Осуществляется техника линеаризации уравнений и граничных условий. Анализ характеристических уравнений показывает, что гравитационная устойчивость зависит от условия на верхней границе слоя – наличия свободной поверхности либо непротекания сквозь прямолинейную границу. Аналитически представлены количественные оценки роста или затухания начальных возмущений.

STABILITY OF LOW OSCILLATIONS IN A TWO-LAYER INVISCID FLUID

Georgievskii D.V.
Lomonosov Moscow State University, Russia,

Tlyustangelov G.S.
Lomonosov Moscow State University, Russia

В одном из первых изданий учебника “Hydrodynamics” H. Lamb рассмотрел задачу о распространении поверхностных волн вдоль границы раздела двух несжимаемых идеальных жидкостей разных плотностей в поле силы тяжести [1, с. 385-393]. Автор получил вполне ожидаемое решение: амплитуды малых начальных отклонений всех величин экспоненциально нарастают со временем, если верхняя жидкость тяжелее нижней, и остаются неизменными, если легче. Приведено также обобщение этого результата на случай, когда обе жидкости, каждая со своей постоянной скоростью, движутся поступательно в горизонтальном направлении.

Данная задача, приведенная в [1] в качестве примера применения общей теории поверхностных волн, положила начало большому направлению в гидродинамике, механике деформируемого твердого тела и особенно в геофизике и тектонике – гравитационной устойчивости тяжелых структур. В дальнейшем задачи в этом направлении усложнялись. Учитывались вязкость, неизотермичность, нелинейность свойств жидкостей, многослойность и другие особенности геометрии, нестационарность невозмущенного движения [2-5].

С появлением в конце XX века современных компьютеров и соответствующих им методов вычислений стало возможным не только отвечать на вопрос, устойчиво или нет то или иное невозмущенное состояние, но и численно моделировать развитие неустойчивости, прорыв вверх легких пластов и перемешивание.

В данной работе основной акцент делается на учете вертикального переносного (вообще говоря, неравноускоренного) движения системы двух тяжелых идеальных жидкостей, происходящего по некоторому заданному закону, а также вопросах стабилизации либо дестабилизации с помощью этого движения гравитационно неустойчивого либо устойчивого состояния.

Исследуется развитие со временем малых колебаний вблизи невозмущенного состояния, определяемого вертикальным поступательным движением тяжелого слоя идеальной жидкости, покрывающего полупространство другой идеальной жидкости. Основной механический параметр, влияющий на гравитационную устойчивость системы – разуплотнение $\delta = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$ (относительная разность плотностей жидкостей).

Решаются задачи с двумя типами граничных условий на верхней поверхности слоя – условием непротекания сквозь плоскую границу ($\eta^+(x_1, t) \equiv 0$, $v_2^{\{1\}} = 0, x_2 = x_2^0$) и условием свободной поверхности ($x_2 = x_2^0 + \eta^+$).

В каждом из случаев получены аналитические зависимости частот колебаний (комплексных) α от волнового числа s вдоль оси перпендикулярной силе тяжести.

В первом случае: $\alpha^2 = -\frac{s\delta ths}{1+(1+\delta)ths}(1-\dot{V})$.

Во втором случае значение частоты находится из решения биквадратного характеристического уравнения:

$$\alpha_1^2 = -s\left(1-\dot{V}\right),\ \alpha_1^2 = -\frac{s\delta ths}{1+(1+\delta)ths}(1-\dot{V})\ .$$

Литература

1. H.Lamb, Hydrodynamics (Cambridge Univ. Press, 1895).
2. H. Ramberg, Gravity, Deformation and the Earth Crust (Acad.Press, London – N.Y., 1981).
3. E.V. Artyushkov, Physical Tectonics (Nauka, Moscow, 1993).
4. D.V. Georgievskii, "Stability of the Boundary of two Heavy Viscoelastic Layers," Vestnik Moskov.Univ. Ser. I Mat. Mekh (2), 94-97 (1989).
5. A.A. Il'yushin, "Deformation of a Visco-Plastic Solid," Uch. Zapiski Moskov. Gos. Univ. Mat. 39, 1-81 (1940).

Сведения об авторах

Георгиевский Дмитрий Владимирович, профессор, д.ф.-м.н., и.о. заведующего кафедрой теории упругости механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова, georgiev@mech.math.msu.su, устойчивость процессов деформирования в механике деформируемого твёрдого тела и механике композитов, теория определяющих соотношений в механике сплошной среды, механика многомерного твердого тела и многомерной сплошной среды.

Тлюстангелов Галим Султанович, аспирант кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова, gs_angelov@mail.ru, устойчивость слоистых структур, теория упругости и пластичности.

ТЕОРЕМЫ ТИПА ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ НА КВАЗИМОДЕЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ[1]

Вихарев С.С.

Волгоградский государственный университет

Аннотация

В работе получены условия тривиальности пространства положительных ограниченных решений стационарного уравнения Гинзбурга-Ландау на квазимодельных римановых многообразиях и аналогичный результат для эллиптического неравенства специального вида.

[1] - работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 15-41-02479-р_поволжье_а)

LIOUVILLE-TYPE THEOREMS FOR POSITIVE BOUNDED SOLUTIONS OF STATIONARY GINSBURG-LANDAU EQUATION ON QUASI-MODEL RIEMANNIAN MANIFOLDS

Vikharev S.S.

Volgograd state university, Volgograd, Russia,

Данная работа посвящена изучению решений уравнения

$$-\Delta u = c(x)f(u) \tag{1}$$

на, так называемых, квазимодельных римановых многообразиях M. Здесь Δ - оператор Лапласа-Бельтрами на M, $c(x)>0$ на M, а f – локально-липшецева функция на $[0,\ a]$, такая что

$$f(0)=f(a)=0, \quad f(u)>0 \text{ на } (0,a).$$

Всюду ниже будем предполагать существование положительных констант c_1, c_2, чтобы $0<c_1<c(x)<c_2$.

Данное уравнение является аналогом стационарного уравнения Гинзбурга-Ландау:

$$-\Delta u = \alpha u - \beta u^3,$$

где $\alpha>0$ и $\beta>0$.

В работе решения уравнения (1) рассматриваются на некомпактных римановых многообразиях M, изометричных прямому произведению $R_+ \times S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_k$, где $S_i, i=1,\ldots k$ - некоторые компакты, с метрикой

$$ds^2 = dr^2 + g_1^{\,2}(r)d\theta_1^{\,2} + g_2^{\,2}(r)d\theta_2^{\,2} + \ldots + g_k^{\,2}(r)d\theta_k^{\,2}.$$

Здесь $g_i(r), i=1,\ldots,k$ – положительные, гладкие на R_+ функции, а $d\theta_i^{\,2}, i=1,\ldots,k$ – метрика на S_i. Обозначим $n_i=\dim S_i$, $G(r)=g_1^{\,n_1}(r)\cdot g_2^{\,n_2}(r)\cdot\ldots g_k^{\,n_k}(r).$ Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть многообразие M такое, что для некоторой константы q>1 выполняется условие*

$$\limsup_{\rho\to\infty} \rho^{\frac{2}{q-1}} \frac{\int_{\rho/2}^{\rho} G(r)dr}{\int_{\rho/4}^{2\rho} G(r)dr} \int_{2\rho}^{\infty} \frac{ds}{G(s)} = +\infty.$$

Тогда любое неотрицательное решение неравенства $-\Delta u \ge u^q, q>1$ на внешней области M, а именно на множестве: $\{x=(r,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)\in M : r>1\}$ - является тождественным нулём.

Замечание 1. При выполнении условия

$$V(x_0,r) \le C r^{\frac{2q}{q-1}} \ln^{\frac{1}{q-1}} r,$$

для некоторого $x_0 \in M$ и всех достаточно больших r, где V(x,r) – объём соответствующего геодезического шара на M, - всякое неотрицательное решение неравенства $-\Delta u \ge u^q, q>1$ является тождественным нулём. Данный результат был получен в работе [1]. Нами построены примеры, показывающие, что теорема 1 не является его следствием и, наоборот, этот результат не является следствием теоремы 1.

Теорема 1 использовалась нами при доказательстве следующего утверждения, являющегося обобщением результата, полученного в работе [2] для решений уравнения (1) на пространстве R^n:

Теорема 2. *Пусть* $\int_1^\infty \frac{ds}{G(s)} < +\infty$ *и существует* $q \in (1, \infty)$, *такая что*

$$\limsup_{\rho\to\infty} \rho^{\frac{2}{q-1}} \frac{\int_{\rho/2}^{\rho} G(r)dr}{\int_{\rho/4}^{2\rho} G(r)dr} \int_{2\rho}^{\infty} \frac{ds}{G(s)} = +\infty.$$

Если при этом существует $\delta(q) > 0$ и $\sigma(q,\delta) > 0$ такие что для всех $s \in (0,\delta)$

$$f(s) \geq \sigma s^q,$$

то любое решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $0 \le u \le a$, *является тождественной константой.*

Замечание 2. *Если*

$$\int_1^\infty \frac{ds}{G(s)} = +\infty$$

то M имеет, так называемый, параболический тип и на нём всякое решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $0 \le u \le a$, является тождественной константой.

Литература

1. A. Grigor'yan and Y.Sun On non-negative solutions of the inequality $\Delta u + u^\sigma \le 0$ on Riemannian manifolds, Comm. Pure Appl. Math. 67 (2014) 1336-1352.
2. E.N.Dancer, Yihong Du Some remarks on Liouville type results for quasilinear elliptic equations// Proc. of the American mathematical society, vol.131, N6, 2002, p.1891-1899.

Сведения об авторах

Вихарев Сергей Сергеевич, ассистент Волгоградского государственного университета, vhr1987@mail.ru, область научных интересов: эллиптические уравнения в частных производных на римановых многообразиях.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ.

Гишларкаев В И.

Чеченский государственный университет, Грозный, Россия.

Аннотация

В работе предлагается новый метод решения задачи Коши для некоторых типов линейных уравнений в частных производных. Рассмотренные задачи представляют также прикладной интерес.

A METHOD FOR REPRESENTATION OF SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS.

Gishlarkaev V.I.

Chechen State University, Grozny, Russia.

1. Введение. Работа посвящена исследованию задачи Коши для уравнений вида

$$\partial_t u(t,x)+\sum_{|\alpha|\le m}\varepsilon_\alpha a_\alpha(t)\partial_x^\alpha u(t,x)=f(t,x), \tag{1}$$

где $\varepsilon_\alpha = x_i$ или 1. Уравнения такого типа встречаются во многих прикладных вопросах: диффузионных процессах при наличии сноса в каком-то направлении ([1, с.378-383]), при описании роста популяций ([1, с.385]), в различных случаях теории тепло-и-массообмена с тепловыделением или другими дополнительными условиями ([2]).

Заметим, что если все $\varepsilon_\alpha = 1$, то задача Коши для уравнения (1) решается прямым применением преобразования Фурье к уравнению (1) и взятием обратного преобразования Фурье от решения получаемого обыкновенного дифференциального уравнения. При наличии коэффициентов, зависящих от x, как в случае (1), указанный стандартный прием не проходит. Но, оказывается, для уравнения (1) преобразование Фурье, примененное соответствующим образом, позволяет решить задачу Коши для него.

2. Уравнение (1) в случае одной пространственной переменной и $\varepsilon_\alpha = x$ для любых α.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)+x\sum_{k=0}^{n}a_k(t)\frac{\partial^k u}{\partial x^k}=0,\ (t,x)\in R_+\times R,\ u\big|_{t=0}=\varphi(x) \tag{2}$$

где $a_k \in C(R_+)$, $\varphi(x)\in C^A(R)$. Пространство начальных данных $C^A(R^n)$ определяется равенством

$$C^A(R^n)=\{\Phi\big|_{R^n} : (\Phi : C^n \to C \text{ целая функция:}$$
$$((\operatorname{Im}\Phi(x)=0\,\forall x\in R^n)\wedge(\exists c,m,r\in R : |\Phi(z)|<c(1+\|z\|_{C^n})^m e^{r\|\operatorname{Im} z\|_{R^n}}\ \ \forall z\in C)))\} \tag{3}$$

Далее для $C^A(R)$ будем пользоваться обозначением C^A.

Для исследования задачи (2) рассмотрим следующую начальную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d\xi(t)}{dt}=\sum_{k=0}^{n} i^{k+1}a_k(t)\xi^k(t),\quad \xi\big|_{t=0}=\xi_0, \tag{4}$$

где $\xi(t)$ комплекснозначная функция от действительной переменной t; $\xi_0 \in R$; будем рассматривать решения (4), получаемые изменением ξ_0.

Условия на коэффициенты a_j из (2) обеспечивают существование и единственность решения задачи (4). Уравнение (4) можно записать как систему нелинейных уравнений, где неизвестные функции будут действительнозначными. Пусть $\xi(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t)$. Тогда (4) запишется в виде

$$\frac{d\xi_1(t)}{dt} + i\frac{d\xi_2(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{n} i^{k+1} a_k(t)(\xi_1(t) + i\xi_2(t))^k, \quad \xi_1\big|_{t=0} = x_0, \quad \xi_2\big|_{t=0} = 0 \tag{5}$$

Приравняв действительные и мнимые части в уравнении, получим в общем случае нелинейную систему относительно неизвестных функций $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$.

Введем оператор S(t), ставящий начальному значению ξ_0 значение в t решения задачи Коши для системы, соответствующей (5), т.е. оператор сдвига по траекториям этой системы; $S(t): R \to R^2$. Через $S_1(t),\ S_2(t)$ обозначены операторы из R в R, определяемые равенством $S(t;\xi_0) = (S_1(t;\xi_0), S_2(t;\xi_0))$.

Строить решения задачи (2) будем при помощи преобразования Фурье обобщенных функций с компактным носителем. Напомним некоторые факты. Пусть $\mu(\xi)$ - обобщенная функция с компактным носителем, $\chi(x)$ -ее преобразование Фурье. Тогда $<\chi(x),\varphi(x)> = <\mu(\xi),\hat{\varphi}(\xi)> = <\mu(\xi),\int\varphi(x)e^{i(x,\xi)}dx> = \int\varphi(x)<\mu(\xi),e^{i(x,\xi)}>dx =$ $<<\mu(\xi),e^{i(x,\xi)}>,\varphi(x)>$, т.е. $\chi(x) = <\mu(\cdot),e^{i(\cdot,x)}>$, напомним, что символ «^» над функцией означает преобразование Фурье этой функции, тот же символ в перевернутом виде – обратное преобразование Фурье . Прямым дифференцированием последнего равенства получается бесконечная дифференцируемость $\chi(x)$. Более того, $\chi(x)$- аналитическая функция. Точнее, имеет место следующий результат (см., например, [3, с.27-28]):

Обобщенная функция умеренного роста $\mu \in S'(R^n)$ имеет компактный носитель $\Leftrightarrow$ $\hat{\mu}$ допускает аналитическое продолжение до целой аналитической функции $\hat{\mu}(\zeta)$ от n переменных, удовлетворяющей условию

$$\exists c,m,r \in R: \quad |\hat{\mu}(\zeta)| < c(1+|\zeta|)^m e^{r|\mathrm{Im}\,\zeta|} \quad \forall\zeta \in C^n \tag{6}$$

Следовательно, $\chi(x)$, $x \in R^n$,- аналитическая на всем R^n функция и $\exists c,m \in R: |\chi(x)| \le c(1+|x|)^m$. Тогда $\mathrm{Re}\,\chi(x)$ также аналитическая функция, оцениваемая сверху $c(1+|x|)^m$. Обратно, если $\varphi(x)$- вещественная аналитическая на всем R^n функция, то она очевидным образом (согласно теореме Абеля о сходимости степенного ряда) продолжается до целой функции, но продолженная функция может не удовлетворять (6), даже когда исходная функция ограничена выражением $c(1+|x|)^m$. Если же $\varphi(x) \in C^A(R^n)$, то существует обобщенная функция ψ с компактным носителем такая, что $\varphi(x) = \hat{\psi}(x)$.

Пусть

$$u(t,x) = <\mu_0(w), e^{ix(S_1(t;w)+iS_2(t;w))}> \tag{7}$$

где $\mu_0(x)$ - обобщенная функция с компактным носителем, определяемая равенством

$$\mu_0(x) = \breve{\varphi}(x) \tag{8}$$

$\varphi \in C^A$ – начальная функция задачи (2). В силу компактности μ_0 можно дифференцировать по x выражение в (7).

Теорема1. При сделанных предположениях функции

$$u(t,x) =< \mu_0(w), e^{ix(S_1(t;w)+iS_2(t;w))} >,\ \operatorname{Re} u(t,x)$$

являются соответственно комплексным и действительным решениями задачи (2).

Замечание. Задача (4) (или (5)) при любом ξ_0 разрешима, вообще говоря, при достаточно малых t, зависящих в общем случае от ξ_0. Более точно, константа Липшица для правой части (4) зависит от $\max \xi_0$, возрастая неограниченно при возрастании ξ_0. Если $|\xi_0| < M$, то можно подобрать временной интервал, не зависящий от выбора ξ_0, на котором существует и единственно решение задачи(4), т.е. существует T>0 такое, что на (0,T) определен оператор $S(t;\xi_0)$. Поэтому требование компактности носителя μ_0, а значит, и требование принадлежности начальной функции $\varphi(x)$ в задаче (2) пространству C^A необходимо для корректности равенства (7).

Доказательство теоремы 1 получается дифференцированием по t равенства (7) в силу уравнения (4).

3. Частные случаи. Во всех приводимых в этом пункте задачах начальная функция принадлежит C^A.

3.1. $$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + x\sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}(t)\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}} = 0\ ,\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \tag{9}$$

Здесь можно обойтись без введения дифференциальных уравнений в поле комплексных чисел. Вместо (4) рассматривается следующая вспомогательная задача:

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} a_{2k+1}(t)\xi^{2k+1}(t), \quad \xi\big|_{t=0} = \xi_0\ ,$$

Её разрешающий оператор S(t) действует из R в R; μ_0-обобщенная функция с компактным носителем, определяемая равенством (8). Также как в п.2. доказывается, что функция $\chi(t,x) =< \mu_0(w), e^{ixS(t;w)} >$ является решением (вообще говоря, комплекснозначным) задачи (9).

Функция u(t,x)=Re $\chi(t,x)$ - действительное решение задачи (9), Im $\chi(t,x)$-действительное решение уравнения (9) с нулевым начальным условием. В силу единственности решений задачи (9) (см. теорему3 ниже) Im $\chi(t,x) \equiv 0$. Таким образом, $\chi(t,x)$- действительное решение задачи (9), единственное в $C_T^{1,A}$ (см. теорему3).

3.2. $$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + xa_{2k+1}(t)\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}} = 0\ , u\big|_{t=0} = \chi_0\ . \tag{10}$$

Вспомогательная задача для (10) :

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = (-1)^{k+1} a_{2k+1}(t)\xi^{2k+1}(t), \quad \xi\big|_{t=0} = \xi_0 .$$

Единственное решение этой задачи дается следующей формулой:

$$\xi(t) = \xi_0 (1 - (A_{2k+1}(t) - A_{2k+1}(0))\xi_0^{2k}\, 2k(-1)^{k+1})^{\frac{-1}{2k}},$$

где $A_{2k+1}(t)$ -какая-то первообразная функции $a_{2k+1}(t)$. Комплексное решение задачи (12) при начальной функции из C^A дается функцией :

$$\chi(t,x) = < \mu_0(w), e^{ixS(t;w)} > \; = < \mu_0(w), e^{ixw(1\text{-}(\mathrm{A}_{2k+1}(t) - A_{2k+1}(0))w^{2k}\, 2k(-1)^{k+1})^{\frac{-1}{2k}}} > . \qquad (11)$$

где μ_0 определяется равенством (8); действительным решением задачи (10) является функция: $u(t,x) = \operatorname{Re}\chi(t,x)$.

Согласно п.3.1. $\operatorname{Im}\chi(t,x) \equiv 0$ и формула (11) дает действительное решение, обозначим его через $u(t,x)$. Воспользовавшись формулой Эйлера, получим

$$u(t,x) = \int_R \cos x\theta (1\text{-}(\mathrm{A}_{2k+1}(t,\tau) - A_{2k+1}(0,\tau))\theta^{2k}\, 2k(-1)^{k+1})^{\frac{-1}{2k}} \mu_0(d\theta)$$

3.3. $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + x a_{2k}(t)\dfrac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} = 0$, $u\big|_{t=0} = \chi_0$, $k \ge 1$ (12)

Вспомогательная задача для (12) : $\dfrac{d\xi(t)}{dt} = i(-1)^k a_{2k}(t)\xi^{2k}(t), \quad \xi\big|_{t=0} = \xi_0$.

Единственное решение этой задачи получается соответствующим начальному значению выбором ветви следующей многозначной функции: $\xi(t) = \xi_0 (1 - (A_{2k}(t) - A_{2k}(0))\xi_0^{2k-1}(2k-1)(-1)^k i)^{\frac{-1}{2k-1}}$, где $A_{2k}(t)$ -какая-то первообразная функции $a_{2k+1}(t)$, точнее $\xi(t) = \dfrac{\xi_0}{\gamma_1}(\cos\dfrac{\varphi}{2k-1} - i\sin\dfrac{\varphi}{2k-1})$, где

$$\alpha = \alpha(t,\xi_0,k) = -(A_{2k}(t) - A_{2k}(0))\xi_0^{2k-1}(2k-1)(-1)^k, \quad \gamma_1 = (1+\alpha^2)^{\frac{1}{2(2k-1)}}, \quad \varphi = arctg\alpha .$$

Отсюда в соответствии с теоремой1 комплекснозначное решение задачи (12) дается формулой: $w(t,x) = < \mu_0(\theta), e^{ixS(t)\theta} > =$
$< \mu_0(\xi_0), e^{(x\frac{\xi_0}{\gamma_1}\sin\frac{\varphi}{2k-1})}(\cos(x\dfrac{\xi_0}{\gamma_2}\cos\dfrac{\varphi}{2k-1}) + i\sin(x\dfrac{\xi_0}{\gamma_2}\cos\dfrac{\varphi}{2k-1})) >$, где $\gamma_2 = (1+\alpha^2)^{\frac{1}{2(2k+1)}}$.

Действительное решение задачи (12): $u(t,x) = \operatorname{Re} w(t,x)$. Если μ_0– симметричная мера на $(R, \mathrm{B}(R))$ с компактным носителем, то

$$u(t,x) = \int_R e^{(x\frac{\xi_0}{\gamma_1}\sin\frac{\varphi}{2k-1})}\cos(x\frac{\xi_0}{\gamma_2}\cos\frac{\varphi}{2k-1})\mu_0(d\xi_0)$$

4. Задача с произвольным числом пространственных переменных.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + x_j \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(t)\partial_x^\alpha u = 0, \; (t,x) \in R \times R^n; \; u\big|_{t=0} = \varphi(x) \in C^A(R^n); \quad (13)$$

Ниже для краткости записи возьмем j=1. Здесь в отличие от предыдущих случаев можно использовать различные вспомогательные задачи, получая в разной форме решение задачи (13). В частности, мы воспользуемся следующей системой:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi_1(t)}{dt} = \sum\limits_{|\alpha|\le m} i^{|\alpha|+1} a_\alpha(t)\xi^\alpha(t) \\ \dfrac{d\xi_l(t)}{dt} = 0,\ l = 2,...,n; \\ \xi_i\big|_{t=0} = \xi_i^0, \qquad i = 1,2,...n; \end{cases} \tag{14}$$

где $x = (x_1,...,x_n)$, $\xi(t) := (\xi_1(t),...\xi_n(t))$ - искомая вектор-функция, при этом $\xi_1(t)$ - комплекснозначная функция, $\xi_2(t),...,\xi_n(t)$- действительнозначные функции, $\xi^0 := (\xi_1^0, \xi_2^0,...,\xi_0^n)$- вектор начальных данных. Очевидно, $\xi_i(t) \equiv \xi_i^0$ при $i = 2,3,...n$ и система (14) сразу же сводится к системе из 2-х нелинейных уравнений 1-го порядка с неизвестными функциями $\xi_1^1(t),\ \xi_1^2(t)$, где $\xi_1(t) = \ \xi_1^1(t) + i\xi_1^2(t)$. Разрешающий оператор системы (14):

$S(t): R^n \to R^{n+1};\quad S(t): (\xi_1^0, \xi_2^0,...\xi_n^0) \mapsto (\xi_1^1(t), \xi_1^2(t), \xi_2^0,...\xi_n^0)$. Определим операторы $s(t): R \to R^2$, $s_1(t): R \to R$, $s_2(t): R \to R$ формулой $s(t;\xi_1^0) := (\xi_1^1(t), \xi_1^2(t))(\xi_1^0) =: (s_1(t;\xi_1^0),\ s_2(t;\xi_1^0))$; отметим, что $s(0;\xi_1^0) = (\xi_1^0, 0)$.

Пусть μ_0 - обобщенная функция, определяемая по начальной функции равенством (8); μ_0 имеет компактный носитель. Тогда функция

$$u(t,x) =< \mu_0(w), e^{ix_1(s_1(t;w_1)+is_2(t;w_1))+\sum\limits_{k=2}^n x_k w_k} >$$

является, комплекснозначным решением задачи (13), $\mathrm{Re}\,u(t,x)$ действительное решение задачи (13).

5. Случай псевдодифференциальных уравнений. В качестве иллюстрации рассмотрим простейшее такое уравнение.

$$\partial_t u(t,x) + xa(t)(Pu)(t,x) = 0, \qquad u\big|_{t=0} = \chi_0(x) \tag{15}$$

где $(Pu)(t,x) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{R_y}(\int\limits_{R_\xi} e^{i(y-x)\xi}\varphi(\xi)d\xi)u(t,y)dy$ – псевдодифференциальный оператор (по x), условия на символ $\varphi(\xi) = i\psi(\xi)$, $\psi: R \to R,$ накладываются в зависимости от класса функций, к которым применяется оператор P. В частности, если брать начальные функции из C^A, то с учетом свойств множества функций, среди которых ищутся решения задачи (17), символы должны быть из $C^\infty(R)$. Соответствующий класс псевдодифференциальных операторов включает в себя дифференциальные операторы (когда $\psi(\xi)$- многочлен). При этом этот класс не включает в себя, например, операторы дробного дифференцирования, которым соответствует случай $\psi(\xi) = c\xi^r$, r -рациональное неотрицательное нецелое число. Если же начальную функцию в (15) брать из $C_F^A := \{\chi(x) \in C^A : \breve{\chi} \in C(R)\}$, то для символа φ достаточно потребовать условие непрерывности и соответствующий класс псевдодифференциальных операторов будет содержать в себе и операторы дробного дифференцирования.

Рассмотрим этот случай. Вспомогательная задача для (15):

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = -a(t)\psi(-\xi(t)), \quad \xi\big|_{t=0} = \xi_0. \tag{16}$$

Оператор сдвига по траекториям уравнения (16): $S(t): R \to R$, $\xi_0 \overset{S(t)}{\mapsto} \xi(t)$, $\xi(t)$ - значение в t решения задачи (16). Так как $\chi_0(x) \in C_F^A$, то $\exists \rho(\cdot) \in C(R):$supp $\rho \subset\subset R$, $\chi_0(x) = \hat{\rho}(x)$.

Теорема2. При сделанных предположениях функции

$$\chi(t,x) =< \rho(w), e^{ixS(t;w)} > , \; u(t,x) = \operatorname{Re}\chi(t,x)$$

являются соответственно комплексным и действительным решениями задачи (15).

6. Единственность решений. В качестве пространства начальных данных рассматривается пространство C^A, определенное в (3). Как отмечалось, $\varphi \in C^A \Leftrightarrow (\exists \mu_0 \in \mathcal{E}^{|}: \varphi = \hat{\mu}_0)$, $\mathcal{E}^{/}$ - пространство обобщенных функций с компактным носителем. Пусть $T > 0$. Введем пространство решений рассматриваемых задач:

$$C_T^{1,A} = \{\Phi\big|_{[0,T]\times R} \mid (\Phi(\cdot,z) \in C^1(0,T)\forall z \in C) \wedge (\Phi(t,\cdot): C \to C \text{ целая функция}:$$

$$((\operatorname{Im}\Phi(t,x) = 0\,\forall (t,x) \in [0,T]\times R) \wedge (\exists c,m,r \in R : |\Phi(z)| < c(1+|z|)^m e^{r|\operatorname{Im} z|} \;\; \forall (t,z) \in [0,T]\times C))\}$$

То есть, если $u(t,x) \in C_T^{1,A}$, то $u(\cdot,x) \in C^1, u(t,\cdot) \in C^A$ и оценка из определения C^A выполняется равномерно по t.

Теорема3. Рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + x\sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}(t)\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}} = 0, \; (t,x) \in (R_+ \times R), \; u\big|_{t=0} = u_0$$

где $u_0 \in C^A$. Тогда существует $T > 0$ такое, что в $C_T^{1,A}$ существует решение и оно единственно в нем.

7. Распространение метода на другие типы уравнений. Простой модификацией приведенного выше метода решаются следующие начальные задачи:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - l(-1)^{\frac{l}{2}}\sum_{k=0}^{m} a_k(t)\frac{\partial^{k+l-1}u}{\partial x^{k+l-1}} + x\sum_{k=0}^{m} a_k(t)\frac{\partial^k u}{\partial x^k} = 0, \; (t,x) \in R_+ \times R, \; u\big|_{t=0} = u_0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f'(t)(-1)^{\frac{l}{2}}\frac{\partial^l u}{\partial x^l} - l(-1)^{\frac{l}{2}} f(t)\sum_{k=0}^{m} a_k(t)\frac{\partial^{k+l-1}u}{\partial x^{k+l-1}} - x\sum_{k=0}^{m} a_k(t)\frac{\partial^k u}{\partial x^k}, \; (t,x) \in R_+ \times R, \; u\big|_{t=0} = u_0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{N} f_k'(t)(-1)^{\frac{l_k}{2}}\frac{\partial^{l_k}u}{\partial x^{l_k}} - a(t)\sum_{k=1}^{N} l_k(-1)^{\frac{l_k}{2}} f_k(t)\frac{\partial^{m+l_k-1}u}{\partial x^{m+l_k-1}} - xa(t)\frac{\partial^m u}{\partial x^m}, (t,x) \in R_+ \times R, u\big|_{t=0} = u_0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + x\sum_{i=0}^{m} a_i(t)\frac{\partial^i u}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{k} b_i(t)\frac{\partial^{i+1}}{\partial t\partial x^i} = 0, \; (t,x) \in R_+ \times R, \; u\big|_{t=0} = \chi_0 ,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\sum_{k=0}^{m}a_k(t)\frac{\partial^k(xw)}{\partial x^k},\quad (t,x)\in R_+\times R,\quad w\big|_{t=0}=w_0(x),$$

где $u_0\in C^A$; $a,a_l,f,f_l,b_l\in C(R)$; $1+\sum_{l=1}^{k}i^l b_l(0)\xi_0^l\neq 0$;

l-четное натуральное число; m, l_k - целые неотрицательные числа, $m+l_k>0$.

Литература

1. В.Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.-М.:Мир,1967.-т.2.
2. А.Д. Полянин. Справочник по линейным уравнениям математической физики.-М.: Физико-математическая литература, 2001.
3. М.Рид, Б.Саймон. Методы современной математической физики, т.2-М.: Мир, 1978.

Сведения об авторе

Гишларкаев Ваха Исаевич, к.ф.-м.н., доц., заведующий кафедрой дифференциальных уравнений Чеченского государственного университета, vakhag@mail.ru; область научных интересов: общая теория краевых задач для уравнений с частными производными, статистическая гидромеханика, уравнения Навье-Стокса.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ АРИФМЕТИЧЕСКИХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ НА КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

Гриценко С.А.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана,
Финансовый университет при Правительстве РФ,
Москва, Россия

Аннотация

В докладе обсуждается ряд вопросов, относящихся к аналитической теории чисел. В частности, представляется новая теорема о распределен нулей дзета-функции Римана на очень коротких промежутках критической прямой.

DISTRIBUTION OF ZEROS OF ARITHMETICAL DIRICHLET SERIES ON THE CRITICAL LINE

Gritsenko S.A.

Lomonosov Moscow State University,
Financial University under the Government of the Russian Federation,
Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russia

Abstract

Several problems of Analytic Number Theory are discussed in the talk. In particular, a new theorem on the distribution of zeroes of Riemann Zeta-function on very short intervals of critical line is represented.

Арифметическими рядами Дирихле называются ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

где a_n – арифметические функции, $s = \sigma + it$, $\sigma \geq \sigma_0$, а σ_0 – столь большая константа, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_0}}$$

сходится.

Самыми известными арифметическими рядами Дирихле являются дзета-функция Римана и L-функции Дирихле.

В 1989 г. в докладе на конференции в Амальфи норвежский математик А. Сельберг [1] определил класс арифметических рядов Дирихле, получивший впоследствии название класс Сельберга.

Основными свойствами рядов Дирихле из класса Сельберга является наличие у них функционального уравнения риманова типа и эйлерова произведения, то есть тождества вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{a_p}{p^s} + \frac{a_{p^2}}{p^{2s}} + \ldots \right),$$

где $\mathrm{Re}\, s > 1$.

Сельберг высказал для функций из своего класса ряд гипотез, включая аналог гипотезы Римана. Он состоит в том, что все их нетривиальные нули лежат на прямой $\mathrm{Re}\, s = 1/2$, которая называется критической.

В докладе будет представлен ряд классических результатов, определивших современное состояние теории арифметических рядов Дирихле. В частности, будет рассказано о постановке и решении задачи А.А. Карацубы о нулях линейных комбинаций аналогов функции Харди. Будут обсуждены не доказанные и не опровергнутые в настоящее время гипотезы А.А. Карацубы, Э. Бомбьери и Д. Хейчала о нулях арифметических рядов Дирихле.

Кроме того, в докладе будет затронут еще один аспект рассматриваемой теории, касающийся распределения нулей дзета-функции Римана на очень коротких промежутках критической прямой, и обсуждены некоторые результаты, полученные в этом направлении.

Литература

1. Selberg A. Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series // Proc. of the Amalfi conference on Analytic Number Theory. Univ. di. Salerno. – 1992. – P. 365‑387.

Сведения об авторе

Гриценко Сергей Александрович, доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета МГУ, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, e-mail: s.gritsenko@gmail.com, область научных интересов: аналитическая теория чисел.

ОПТИМАЛЬНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ ЭКСПЛУАТИРУЕМЫХ ПОПУЛЯЦИЙ

Давыдов А.А.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия.

Платов А.С.

Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г.Столетовых, Владимир, Россия

Аннотация

Для нелинейных моделей динамики структурированных популяций дан анализ существования стационарных и стационарных оптимальных состояний при симметричной и асимметричной формах внутривидовой конкуренции.

OPTIMAL STATIONARY STATES OF THE EXPLOITED POPULATIONS.

Davydov A.A.

Lomonosov Moscow state university, Moscow, Russia

Platov A.S.

Vladimir state university, Vladimir, Russia

Мы рассматриваем модель динамики популяции, доставляемой уравнением в частных производных

$$\partial x / \partial t + \partial [g(x, E)x] / \partial l = -m(l, E)x - u(l)x,$$

где $x = x(l,t)$ - плотность индивидуумов размера l в момент времени t; функции g и m характеризуют их рост и смертность, соответственно, при имеющемся уровне внутривидовой конкуренции E, а стационарное (то есть не зависящее от времени) управление u определяет интенсивность эксплуатации изучаемой популяции. Форма эксплуатации взята здесь с учётом текущего состояния системы. Эта модель динамики хорошо известна (см., например, [1], [2]). Значение функции E вычисляется по формуле $\int_l^L \chi(s)x(s,t)ds$, где χ – непрерывная функция, а её значение

$\chi(s)$ характеризует вклад индивидуумов размера s в эту конкуренцию. Таким образом, конкуренция ассиметрична, поскольку более крупные индивидуумы оказывают влияние на меньших, но не наоборот. Если нижний предел в последнем интеграле равен нулю, то мы получаем симметричную форму конкуренции [2]-[4]. При достижении размера L индивидуумы из популяции изымаются.

Приток индивидуумов наименьшего размера задаётся граничным условием

$$x(0,t)=\int_0^L r(l,E(l,t))\,x(l,t)^{\beta}dl+p,$$

в котором интеграл в правой части отвечает за естественное воспроизводство, а неотрицательная величина p - за постоянный приток извне индивидуумов нулевого размера. Здесь функция r характеризует репродуктивность индивидуумов размера l при уровне конкуренции E. Показатель $\beta\in(0,1)$ отражает нелинейный характер влияния плотности индивидуумов на воспроизводство.

При естественных предположениях на коэффициенты модели мы показываем существование положительных стационарных решений, существование оптимальных среди них по критерию максимума выгоды в единицу времени, а также предлагаем конструктивные алгоритмы поиска этих оптимальных решений.

Частично исследования выполнены при поддержке гранта РФФИ 13-01-12446 –офи_м2.

Литература

1. Murphy L.F., A nonlinear growth mechanism in size structured population dynamics.- J. Theor. Biol. 104 (1983), 493-506.
2. Hritonenko N., Yatsenko Y., Goetz RU., Xabadia A., Optimal harvesting in forestry: steady-state analysis and climate change impact. - Journal of biological dynamics, v.7, Issue 1, 41-58
3. Davydov A.A., Platov A.S.. Optimal Stationary Solution in Forest Management Model by Accounting Intra-Species Competition.- Mosc. Math. J. 12, No. 2, 269--273 (2012)
4. Panesh A.A., Platov A.S. - Optimization of size-structured population with interacting species.- Journal of Mathematical Sciences, January 2013, Volume 188, Issue 3, pp 293-298.
5. Давыдов А.А., Нассар А.Ф., - О стационарном состоянии в динамике популяции с иерархической конкуренцией.- УМН, 69:6(420) (2014), 179–180.

Сведения об авторах

Давыдов Алексей Александрович, д.ф.-м.н., профессор, зав. кафедрой, МГУ, davydov@vlsu.ru; теория дифференциальных уравнений, теория особенностей, параметрическая оптимизация.

Платов Антон Сергеевич, старший преподаватель, Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г.Столетовых, platovmm@mail.ru, теория дифференциальных уравнений, оптимальное управление.

ЗАДАЧИ АВТОМАТИЧЕСКОГО ОТБОРА ФОТОГРАФИЙ НЕНАДЛЕЖАЩЕГО КАЧЕСТВА

Демяненко Я.М., Раскин А.В.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия.

Аннотация
В работе предложен оптимальный метод отсеивания изображений ненадлежащего качества и реализован алгоритм автоматизирующий процесс такого отсеивания с помощью анализа гистограмм направленный градиентов.

TASKS OF AUTOMATIC RECOGNITION OF INADEQUATE QUALITY PHOTOS

Demyanenko Ya. M., Raskin A.V.
Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia.

Введение. Задача определения смазанности, расфокусировки и размытости (критериев искаженности) изображений не теряет актуальности на протяжении двух последних десятилетий и становится все более востребованной из-за появления большого количества разнообразных мобильных устройств. Детектирование такого рода искажений является частью более обшей задачи – восстановления размытия и смазанности. В связи с этим решение поставленной задачи позволяет совершать дальнейшие действия по обработке исследуемых изображений или предоставляет информацию о качестве полученных снимков.

Исследование по определению критерия размытия. В рамках данной работы было выполнено исследование по определению степени размытости изображения на основе сравнения гистограмм направленных градиентов и выявления критериев размытости. В основу данного исследования было положено сравнение внешнего вида функций, заданных на участке построения гистограммы, кривыми, описывающими значения интенсивностей градиентов.

В результате построения и изучения гистограмм около 200 изображений различного качества и разрешения, был выведен общий признак наличия размытия на изображении – характер выпуклости или вогнутости функции значений интенсивностей градиентов. Данный критерий обусловливается количеством резких или плавных переходов, а впоследствии, – различными значениями интенсивности градиентов, что, в свою очередь, определяет характер выпуклости вышеупомянутой функции [1].

Чем резче изображение – тем оно содержит больше резких тоновых переходов, и, следовательно, – в распределении интенсивностей градиентов на гистограмме будут преобладать средние значения. В результате, функция, описывающая данные интенсивности, будет выпуклой вверх или приближаться к линейной функции (рис. 1).

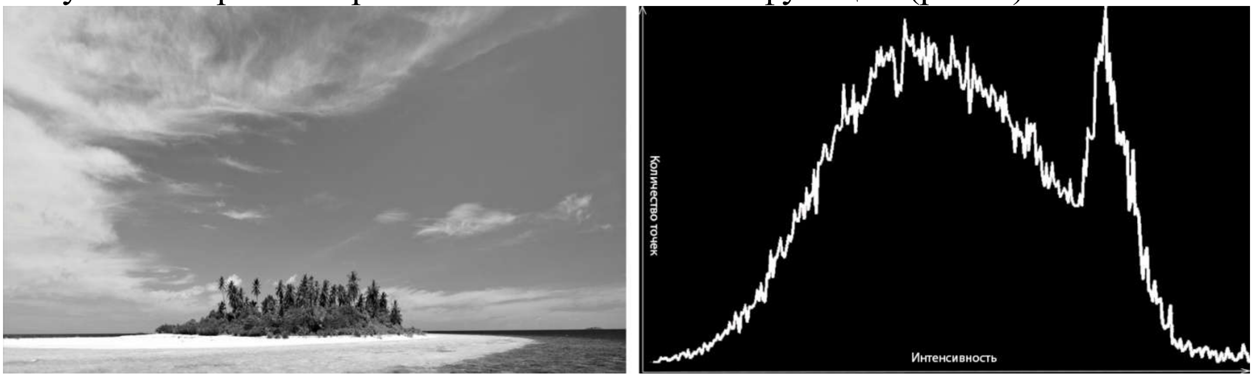


Рис.1. Пример резкого изображения и его гистограммы

Если же изображение в некоторой степени размыто, то значения интенсивностей градиентов будут достаточно малы на протяжении всего снимка или некоторой его части. Вышеупомянутая функция, ввиду локализации данных значений в окрестностях нуля, будет «вытягиваться» вверх, тем самым меняя характер выпуклости от линейной функции к вогнутой. Следовательно, при увеличении или уменьшении размытия, рассматриваемая функция будет менять характер вогнутости прямопропорционально размытию (рис. 2).

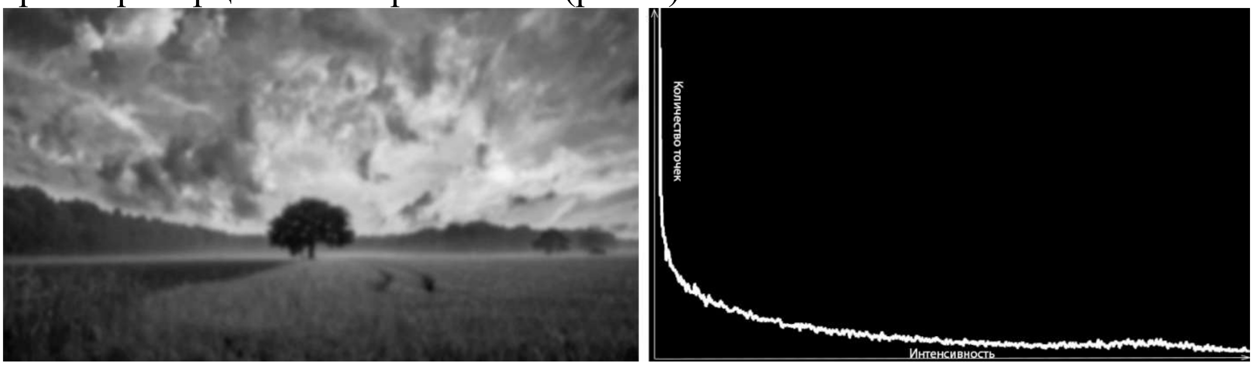


Рис.2. Пример размытого изображения и его гистограммы

Не менее важную роль в анализе играет расположение пика гистограммы. Размещение пика в правой ее части, свидетельствует о наличии большого количества резких перемен в тоновой характеристике изображения. В данном случае, функция, описываемая такой гистограммой, будет заведомо выпуклой вверх. Это свидетельствует об отсутствии размытия и о резкости рассматриваемого изображения.

Описание метода распознавания характера выпуклости функции интенсивностей градиентов. В более сложной ситуации: а именно, наличия как размытых, так и резких участков на изображении (к примеру – расфокусированные в некоторых частях снимки (рис. 3)), функция интенсивности градиентов может вести себя неоднозначно и иметь участки как выпуклые, так и вогнутые. На основе сравнения гистограмм таких изображений, было выявлено, что данные изменения происходят строго относительно линейной функции, заданной на промежутке от пика гистограммы с отступом вниз на величину допускаемого размытия R, до первого нулевого значения гистограммы с отступом влево на аналогичную величину R (рис. 3).

Ориентироваться на информативность такой линейной функции можно ввиду плавного распределения интенсивностей градиентов при наличии резкого перехода на локальном участке, содержащем данный переход.

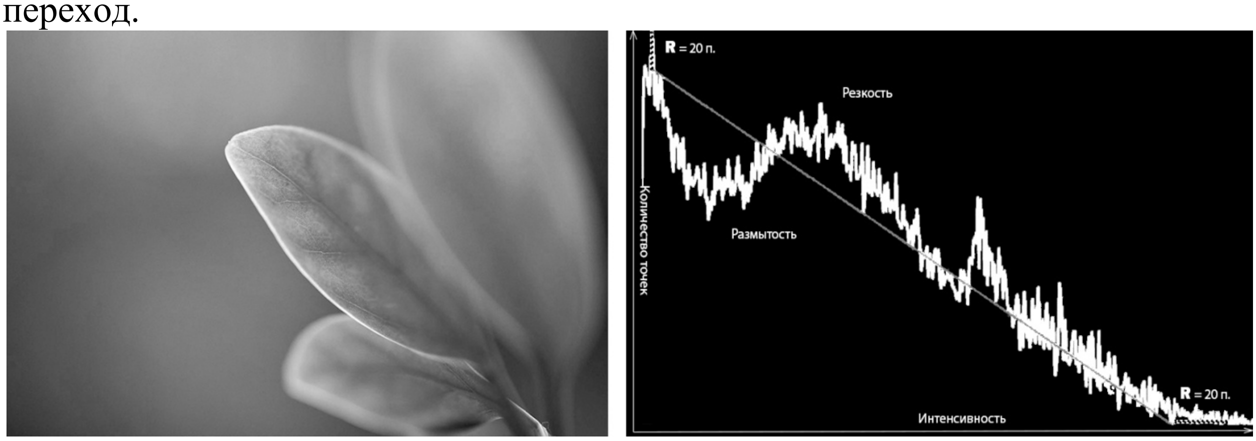


Рис.3. Пример гистограммы частично размытого изображения с построенной относительно пика гистограммы и первого ее нулевого значения, линейной функцией с отступом R = 20 пикселей

Наличие отступа R при построении линейной функции обусловлено неоднозначным типом искажения изображения – смазанности, размытости или расфокусировки [2-3].

Такой подход в детектировании размытия на отдельных участках изображения с помощью линейной функции, построенной вышеописанным способом, позволяет определять характер выпуклости функции интенсивностей и в однозначном случае полного размытия, и полной резкости изображения. Единственное исключение – полностью резкое изображение. В этом случае необходимо, в первую очередь, ориентироваться на расположение пика гистограммы градиентов. Так, если пик расположен во второй ее части (рис. 1), последующий анализ выпуклости функции интенсивности градиентов не нужен – изображение заведомо не размыто.

Выводы. В рамках проделанной работы было проведено исследование по определению критериев размытости, смазанности и расфокусировки изображения. В основе данного исследования заложена зависимость между видом гистограмм направленных градиентов и характера размытости изображения. На основе полученных результатов, были описаны методы отсеивания и составлен алгоритм фильтрации изображений с учетом регулирования необходимой степени присутствия признаков искаженности на отсеянных изображениях.

Данный алгоритм был протестирован на более чем 200 изображениях разного качества и разрешения, в результате чего было выяснено, что вероятность ошибки (неверного определения качества изображения) составила 2 процента.

Предлагаемый алгоритм обладает несколькими важными свойствами, а именно: высоким быстродействием, гибкостью, универсальностью по отношению к входным параметрам и широким спектром дальнейших модификаций.

Литература

1. Ming-Jun Chen and Alan C Bovik. No-reference image blur assessment using multiscale gradient. // EURASIP Journal on Image and Video Processing. – 2011 – №1.
2. M. Cannon. Blind Deconvolution of Spatially Invariant Image Blurs with Phase. // ASSP-24. – 1996.
3. Костюков М. В. Статья: Детектор смазанности и расфокусировки на основе модели текста // Abi production. – 2013. URL http://www.science-education.ru/110-9812 (дата обр. 20.05.2015)

Сведения об авторах

Демяненко Яна Михайловна, к.т.н. доцент, доцент, Институт математики, механики и компьютерных наук, Южный федеральный университет, dem@math.sfedu.ru. Обработка изображений.

Раскин Антон Владимирович, студент, Институт математики, механики и компьютерных наук, Южный федеральный университет, raskin.anton.v@gmail.com. Обработка изображений.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НУЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ L – ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ, ЛЕЖАЩИХ НА ПОЧТИ ВСЕХ КОРОТКИХ ПРОМЕЖУТКАХ КРИТИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ

До Дык Там

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, ул. Студенческая, 14, г. Белгород, 308007, Россия.

Аннотация

В работе рассматривается распределение нулей линейных комбинаций аналогов функции Харди, соответствующих L- функций Дирихле, лежащих на

критической прямой. Проведен перенос результатов А. А. Карацубы для дзета-функции Римана на линейные комбинации аналогов функции Харди, соответствующих L- функций Дирихле.

ON DISTRIBUTION OF THE ZEROS OF LINEAR COMBINATIONS OF $L-$ DIRICHLET FUNCTIONS LYING ON THE CRITICAL LINE

Do Duc Tam

Belgorod State University, Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia.

1. Введение

Пусть

$$Z(t,\chi)=e^{i\theta(t,\chi)}L\left(0,5+it,\chi\right),$$

где функция $\theta(t,\chi)$ подобрана так, что $Z(t,\chi)$ вещественна при вещественных t [1, с. 485]. Пусть далее

$$G(t)=a_1Z(t,\chi_1)+a_2Z(t,\chi_1)+\cdots+a_lZ(t,\chi_l), \tag{1.1}$$

где $a_1,a_2,\cdots,a_l-$ произвольные вещественные числа, $\chi_1,\cdots,\chi_l-$ примитивные характеры Дирихле по модулям, соответственно, $k_1,k_2,\cdots,k_l$. $Z(t,\chi)$ представляет собой аналог функции Харди [2, гл. 2]. Через $[k_1,k_2,\cdots,k_l]$ обозначим наименьшее общее кратное натуральных чисел $k_1,\cdots,k_l$.

В 1991 году А.А. Карацуба [1] стал изучать задачу о нижней оценке числа нулей нечетного порядка функции $G(t)$ на отрезке $(T,T+H)$, где $H=T^{27/82+\varepsilon}$, $\varepsilon-$ произвольное малое положительное число. Он доказал, что при $K\ge 3$, $\varepsilon,\varepsilon_1-$произвольно малых фиксированных положительных числах, не превосходящих 0,01, $T\ge T_0(\varepsilon,\varepsilon_1)>0$ и $H=T^{27/82+\varepsilon_1}$:

$$N_0(T+H,G)-N_0(T,G)\ge cH\left(\ln T\right)^{\beta-\varepsilon},$$

где $N_0(T,G)-$число нулей нечетного порядка функции $G(t)$, лежащих в промежутке $(0,T)$, $\beta=\dfrac{1}{\varphi(K)}$, $\varphi-$ функция Эйлера.

В настоящей работе получены оценки для числа нулей функции $G(t)$ на почти всех промежутках вида $(T,T+H)$, где $H=X^{\varepsilon_1}$, $X\le T\le 2X$, ε_1- сколь угодно малое фиксированное положительное число.

2. Основные теоремы

Теорема 1. Пусть $\varepsilon,\varepsilon_1>0-$ произвольно малые фиксированные положительные числа и пусть $K=\left[k_1,k_2,\cdots,k_l\right]..3$, $\beta=\dfrac{1}{\varphi(K)}$, $X..X_0(\varepsilon,\varepsilon_1)$, $H=X^{\varepsilon_1}$, $X„\,T„\,2X$. Если E_1- множество тех T из промежутка $[X,2X]$, для которых не выполняется неравенство

$$N_0(T+H,G)-N_0(T,G)\geq c_1H\left(\ln T\right)^{\beta-\varepsilon}, \qquad (1.2)$$

то для меры множества E_1 справедлива оценка $\mu(E_1)\ll X^{1-0,5\varepsilon_1}$.

Теорема 2. Пусть $\varepsilon,\varepsilon_1>0-$ произвольно малые фиксированные положительные числа и пусть $K=\left[k_1,k_2,\cdots,k_l\right]\geq 3$, $X\geq X_0(\varepsilon,\varepsilon_1)$, $H=X^{\varepsilon_1}$, $M=[XH^{-1}]$. При $m=M+1,M+2,\cdots,2M$ рассмотрим интервалы вида $[mH,mH+H]$. Тогда в каждом из указанных интервалов, за исключением не более $M^{1-0,5\varepsilon_1}$ из них, содержится более чем $c_2H(\ln X)^{\beta-\varepsilon}$ нулей нечётного порядка функции $G(t)$.

Для доказательств основных теорем нам понадобятся леммы. Эти леммы близки к известным леммам [3, с. 1215].

Пусть $\varepsilon_1,\varepsilon_2,h_1-$ положительные числа с условиями $\varepsilon_1<0,01$, $\varepsilon_2<1$, $h_1<1$, $r-$ натуральное число, $H=X^{\varepsilon_1}$, $Y=H^{0,01}$, $P=\sqrt{\dfrac{kT}{2\pi}}$, $P_0=\sqrt{\dfrac{kX}{\pi}}$. Пусть далее

$$a(\lambda)=\sum_{n\nu_1=\lambda\nu_2}\frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\chi(n)}{\nu_2},$$

$\lambda-$ рациональные числа, знаменатель которых не превосходит Y, $0<\nu_1,\nu_2<Y-$натуральные числа, $\beta(\nu)-$ вещественные числа, причем $|\beta(\nu)|\leq 1$ при $\nu\leq Y$, $\beta(\nu)=0$ при $\nu>Y$, $\beta(\nu)=0$ при $\nu\not\equiv 1 \pmod{k}$. Суммы $W_j(T)$, $j=0,1,2$ определяются равенствами:

$$W_0(T)=\sum_{\lambda_1<\lambda_2\leq P}\frac{a(\lambda_1)\overline{a(\lambda_2)}}{\sqrt{\lambda_2\lambda_1}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT}e^{-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2},$$

$$W_1(T)=\sum_{\lambda_1<\lambda_2\leq P_0^{1-\varepsilon_2}}\frac{a(\lambda_1)\overline{a(\lambda_2)}}{\sqrt{\lambda_2\lambda_1}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT}B(\lambda_1)\overline{B(\lambda_2)}e^{-\left(\frac{H+1}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2},$$

$$W_2(T)=\sum_{P_0^{1-\varepsilon_2}<\lambda_1<\lambda_2\leq P}\frac{a(\lambda_1)\overline{a(\lambda_2)}}{\sqrt{\lambda_2\lambda_1}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{iT}e^{-\left(\frac{H}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)^2},$$

где $B(\lambda)=\left((P/\lambda)^{ih_1}-1\right)^r/\left(\ln(P/\lambda)\right)^r$.

Лемма 1. Имеет место неравенство:

$$\sum_{j=0}^{2}\int_X^{2X}W_j^2(T)\ll r^4(1+8\varepsilon_2^{-1}L^{-1})^{4r}h_1^2(\varepsilon_2^{-1}+8\varepsilon_2^{-2}L^{-1}h_1^{-1})^4XH^{-1}Y^{12}L^7,$$

где $L=\ln X$.

Следствие 1. Пусть $\delta-$произвольное положительное число, не превосходящее 1, E_1- множество таких T из интервала $[X,2X]$, для которых

$$\sum_{j=0}^{2}W_j^2(T)\geq r^4(1+8\varepsilon_2^{-1}L^{-1})^{4r}h_1^2(\varepsilon_2^{-1}+8\varepsilon_2^{-2}L^{-1}h_1^{-1})^4X^{1-\delta}H^{-1}Y^{12}L^7. \qquad (1.3)$$

Тогда для меры множества E_1 справедлива оценка $\mu(E_1)\ll X^{\delta}$.

Лемма 2. При обозначениях теоремы 2 справедливо неравенство

$$\sum_{j=0}^{2}\sum_{m=M}^{2M} W_j^2(mH) \ll r^4(1+8\varepsilon_2^{-1}L^{-1})^{4r} h_1^2(\varepsilon_2^{-1}+8\varepsilon_2^{-2}L^{-1}h_1^{-1})^4 MH^{-1}Y^{12}L^8. \qquad (1.4)$$

Следствие 2. Пусть δ – произвольное положительное число, не превосходящее 1, E_1 – множество таких $M \le m \le 2M$, для которых

$$\sum_{j=0}^{2} W_j^2(mH) \ge r^4(1+8\varepsilon_2^{-1}L^{-1})^{4r} h_1^2(\varepsilon_2^{-1}+8\varepsilon_2^{-2}L^{-1}h_1^{-1})^4 M^{1-\delta}H^{-1}Y^{12}L^8. \qquad (1.5)$$

Тогда для количества элементов этого множества $\mu(E_1)$ справедлива оценка $\mu(E_1) \ll M^{\delta}$.

Доказательства основных теорем приводятся по схеме работы А. А. Крацубы [1] с учетом лемм 1 и 2.

3. Заключение

В работе автор пользуется методами А.А. Карацубы 1) получения оценки “сельберговского типа” для числа нулей ζ(s) на “почти всех” коротких промежутках критической прямой и 2) исследования нулей функций, являющихся линейными комбинациями рядов Дирихле и не имеющих эйлеровского произведения.

В работе автор получает нижнюю оценку для числа нулей функции $G(t)$ вида

$$G(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n Z(t, \chi_n),$$

где $N \ge 2$ – произвольное фиксированное целое число, a_n произвольные фиксированные вещественные числа, χ_n характеры Дирихле по модулям k_n , $n = 1, \cdots, N$, $Z(t, \chi_n)$ – аналоги функции Харди $Z(t)$. Случай когда количество слагаемых в линейной комбинации рядов Дирихле растёт вместе с t представляет собой трудность и требует дальнейшего исследования.

Литература

1. Карацуба А.А. О нулях специального вида функций, связанных с рядами Дирихле // Известия АН СССР. Серия Математическая. 1991. 55;3, С.483 – 514.
2. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета – функция Римана // М.: Физматлит, 1994 . 376 с.
3. Карацуба А.А. Распределение нулей функции $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ // Известия АН СССР. Серия Математическая. 1984. 48; 6. С.1214 – 1224.
4. Карацуба А.А. О нулях функции Дэвенпорта – Хейльброна, лежащих на критической прямой // Известия АН СССР. Серия Математическая. 1990. 54;2, С.303 – 315.

Сведения об авторах

До Дык Там, аспирант, e-mail: doductam140189@gmail.com, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород. Область научных интересов: аналитическая теория чисел.

НЕРАВЕНСТВО ПУАНКАРЕ НА ТРИАНГУЛЯЦИЯХ РАЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Докучаев Р.П.

Волгоградский государственный университет, Волгоград, Россия

Аннотация

Работа посвящена вопросу нахождения постоянной в аналоге неравенства Пуанкаре на заданных триангуляциях, от которой в частности зависит скорость сходимости численного метода решения уравнения минимальной поверхности.

POINCARE’S INEQUALITY ON TRIANGULATIONS OF DIFFERENT AREAS

Dokuchaev R.P.

Volgograd state university, Volgograd. Russia

Abstract

The work is devoted to the question of finding the constant in the analogue of the poincaré inequality on the given triangulations, which in particular affects the speed of convergence of the numerical method for solving the minimal surface equation.

При решении уравнения минимальной поверхности итерационным методом, основанном на градиентном спуске для функционала площади, возникает вопрос о скорости сходимости данного способа. Оказывается, что скорость сходимости численного метода зависит от постоянной в аналоге неравенства Пуанкаре на триангуляциях.

В данной работе мы займемся вопросом нахождения константы в аналоге неравенства Пуанкаре для триангуляций некоторых частных случаев для дальнейшего возможного отыскивания константы неравенства для триангуляции общего вида.

Рассмотрим область $\Omega_1 = \{(x,y): a \le x \le b, \phi(x) \le y \le \psi(x)\}$, где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ - разбиение $[a;b]$ отрезка , а $\phi(x)$ и $\psi(x)$ – некоторые липшицевы функции, заданные на отрезке $[a;b]$, то есть $\left|\frac{\psi(x_{i+1}) - \psi(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right| \le L_1$ и $\left|\frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right| \le L_2$, $(L_1, L_2 - const)$. Пусть $f_\tau(x) = \tau\psi(x) + (1-\tau)\phi(x)$ и разобьем отрезок [0;1] точками τ_i, т.е. $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m = 1$. Рассмотрим сетку в данной области, задаваемую точками $A_{ij} = A_{ij}\left(x_i; f_{\tau_j}(x_i)\right)$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$. Разбивая одной из диагоналей все трапеции $A_{ij}A_{i+1\,j}A_{ij+1}A_{i+1\,j+1}$, где $i=\overline{0,n-1}$, $j=\overline{0,m-1}$, получим триангуляцию области. Пусть u_{ij} - значение в точке $A_{ij}\left(x_i; f_{\tau_j}(x_i)\right)$, причем необязательно нулевое.

Теорема 1. Для произвольного набора значений u_{ij} справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}u_{kl}^2 \le C\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{\alpha=0}^{m-1}\left(\tilde{a}_{k\alpha}^2+\tilde{b}_{k\alpha}^2\right)+\sum_{k=0}^{n}\sum_{\alpha=0}^{m-1}\left(\frac{u_{\beta+1\,j}-u_{\beta j}}{x_{\beta+1}-x_\beta}\right)^2\right),$$

где $C=\max\left(\max\left(\psi(x_j)-\phi(x_j)\right)^2; (b-a)^2\cdot\max\left(2; 2\max^2(L_1,L_2)+1\right)\right)$, $\tilde{a}_{ij},\tilde{b}_{ij}$ – частные производные кусочно-гладкой функции в треугольнике T_{ij}.

Допустим область Ω_2 в полярных координатах имеет следующий вид $\Omega_2=\left\{(r,\varphi): a\le r\le b, \alpha\le\varphi\le\beta\right\}$. Пусть $a=r_0<r_1<...<r_n=b$, $\alpha=\varphi_0<\varphi_1<...<\varphi_m=\beta$ и пусть во всех точках $A_{ij}=A_{ij}\left(r_i;\varphi_j\right)$ задано некоторое значение u_{ij}, причем $u_{0j}=u_{nj}=u_{i0}=u_{im}=0$. Триангуляция области получается путем построения одной из диагоналей во всех трапециях $A_{ij}A_{i+1\,j}A_{ij+1}A_{i+1\,j+1}$.

Теорема 2. В области Ω_2 справедливо неравенство: $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}u_{ij}^2\le(b-a)^2\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left(a_{kj}^2+b_{kj}^2\right)$, где $\tilde{a}_{ij},\tilde{b}_{ij}$- частные производные кусочно-гладкой функции в треугольнике T_{ij}.

В случае, когда в граничных точках области Ω_2 ненулевые значения, неравенство будет иметь следующий вид:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}u_{kl}^2\le C\left(\sum_{j=0}^{m}\sum_{\beta=0}^{k-1}\left(\frac{u_{\beta+1\,j}-u_{\beta j}}{r_{\beta+1}-r_\beta}\right)^2+\sum_{k=0}^{n}\left(r_k^2\sum_{\alpha=0}^{m-1}\left(\tilde{a}_{k\alpha}^2+\tilde{b}_{k\alpha}^2\right)\right)\right),$$

где $C=\max\left((b-a)^2;(\beta-\alpha)^2\right)$, $\tilde{a}_{ij},\tilde{b}_{ij}$ – частные производные кусочно-гладкой функции в треугольнике T_{ij}.

Литература

1. В.Е. Михайленко, С.Н. Ковалев. Конструирование форм современных архитектурных сооружений.-Киев:Будівельник, 1978. - 138 с.
2. А.А. Самарский, Е.С. Николаев. Методы решения сеточных уравнений.- Москва, "Наука", 1978, 592 с.
3. В.Е. Попов. Геометрическое моделирование тентовых тканевых конструкций с помощью метода натянутых сеток. GraphiCon'2001, с. 140-144.
4. Н.К. Галимов, И.Х. Мифтахутдинов, Р.Г. Нуруллин. Об одном приближенном способе построения точечного каркаса минимальных поверхностей, Энергетика Татарстана, 2007, № 4(8), с. 69-76.

Сведения об авторе

Докучаев Ростислав Петрович, аспирант, ассистент кафедры математического анализа и теории функции, Волгоградский государственный университет, e-mail: dokuch90@mail.ru

О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ СРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА С НЕСКОЛЬКИМИ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Дохов Р. А.

Кабардино-Балкарский государственный университет, Нальчик, Россия.

Аннотация

Для числа решений сравнений специального вида с несколькими неизвестными получена точная формула, которая дает дополнительную информацию к теореме Варнинга о сравнениях.

ON THE NUMBER OF SOLUTIONS OF CONGRUENCES OF THE SPECIAL FORM WITH SEVERAL UNKNOWN

Dokhov R. A.

Kabardin-Balkar State University, Nalchik, Russia.

Для числа решений сравнений некоторых специальных видов с несколькими неизвестными по простому модулю удается получить точное значение. Лагранжем установлена разрешимость сравнения

$$\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + 1 \equiv 0 (mod p)$$

по простому модулю $p > 2$ (см.[1]).

В дальнейшем для количества решения N_p этого сравнения была получена точная формула

$$N_p = p - 1 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} \text{ (см. [1]).}$$

Мы рассматриваем вопрос о числе решений сравнения с несколькими неизвестными следующего вида

$$y^2 \equiv x^3 + xz_1 \dots z_n \ (mod p)$$

имеющего третью степень относительно одного из неизвестных.

Вводим в рассмотрение следующую сумму символов Лежандра

$$S(k) = \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{x(x^2+k)}{p} \right),$$

где k-целое число, -простое число вида $p \equiv 1 (mod 4)$.

Лемма 1. Для $S(k)$ справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{p-1} S(k) = 0.$$

Заметим, что другие свойства этой функции в качестве задачи приводятся в [2].

Лемма 2. Число решений сравнения

$x^2 \equiv a(modp)$ равно 1+$\left(\frac{a}{p}\right)$, где $\left(\frac{a}{p}\right)$-символ Лежандра.

С помощью лемм 1 и 2 получаем следующий результат.

Теорема. Число решений $N_p(n)$ сравнения $y^2 \equiv x^3 + xz_1 \dots z_n \ (modp)$ по простому модулю $p \equiv 1(4)$ определяется формулой

$$N_p(n) = p^{n+1}.$$

Полученный результат дает дополнительную информацию к теореме Варнинга о том, что число решений делится на простое число р (см. [3]).

Литература

1. Степанов С.А. Сравнения.М.:Знание.1975.62с.
2. Виноградов И.М. Основы теории чисел.-СПб-М:Лань, 2004.-167с.
3. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985.

Сведения об авторах

Дохов Резуан Ауесович, аспирант КБГУ, rezuan.dokhov@yandex.ru, теория чисел.

ОБНАРУЖЕНИЕ РЕЗКИХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХААРА

Евдокимова А.Ю.

ООО «Электронная медицина», г. Ростов-на-Дону, Россия

Кряквин В.Д.

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия

Аннотация.

Description of numerical experiments and their results to identify the defective areas such as scratches in images is given in the article. The basis of the used algorithm is the discrete Haar transformation.

DETECTION OF SHARP IMAGE INHOMOGENEITIESUSING DISCRETE HAAR TRANSFORM

Evdokimova A.U.

Ltd "Electronic medicine", Rostov-na-Donu, Russia,

Kryakvin V.D.

Southern Federal University, Rostov-na-Donu, Russia

В докладе обсуждаются возможности по применению дискретного преобразования Хаара по автоматическому выявлению дефектов изображений, имеющих вид небольших вкраплений и линий (царапин) в сравнении с ортогональным дискретным вейвлет-преобразованием. Выбор в качестве инструмента этих преобразований связан с тем, что для выявления данных объектов важны их микролокальные свойства, а также тем, что исследования в теории всплесков (и, в частности, преобразований Хаара) и их применение за последние несколько десятилетий привели к огромным достижениям и результатам, написаны книги по теории всплесков и их применению (см. [2], [4], [6]), создан инструментарий, включенный в пакеты Matlab, Mathematica, Maple и др.(см. напр. [5]), разрабатываются методы и методики по применению в прикладных областях (см. напр. [1]), в том числе и по обнаружению дефектов (см. напр. [3]).

Предлагается следующий алгоритм обнаружения и устранения дефектов изображений:

1. Вычисление первого уровня дискретного двумерного вейвлет-преобразования (в частности, преобразования Хаара). Двумерное дискретное вейвлет-преобразование реализовано в соответствии с пирамидальным алгоритмом: сначала одномерное преобразование применяется к строкам загруженного изображения, а затем к столбцам полученного. В результате получаются четыре компоненты вейвлет-преобразования. Производится один уровень разложения, остальные уровни нет необходимости находить, так как высокочастотные составляющие уже вычислены. Такое преобразование применяется отдельно к каждому из трех составляющих цветного изображения (использовалась цветовоя модель RGB).

2. Локализация среди выскочастотных компонент разложения (а именно, среди «горизонтальной» и «вертикальной» детализирующих компонент с учетом «диагональной» компоненты достаточно больших по модулю значений.

3. Определение по соседним значениям на исходном изображении, являются ли найденные на предыдущем шаге пиксели дефектными, либо они суть граница разных объектов.

4. Локализация дефекта. Найденные на третьем шаге дефектные значения являются границей дефекта. С помощью одного из параметров задаётся неоднородность дефекта, т.е. насколько могут отличаться друг от друга значения дефекта внутри его границ. Таким образом определяется дефектная область.

Для экспериментов использовались ортонормированные вейвлет-базисы Добеши. Выбор данных базисов обусловлен хорошей локализацией в пространстве (локализация по частоте в данной задаче менее важна в виду поиска резких неоднородностей). Как показали численные эксперименты, базис Хаара в большинстве случаев давал лучшие результаты в решении поставленной задачи.

Поиск дефектов производился автоматически по всему изображению, хотя, конечно, несложно реализовать его и в указанной области. Второй вариант более предпочтительный, так как у большинства изображений наблюдается «краевой эффект». Это значит, что при обработке всего изображения обнаруживается, что дефектными зачастую признаются отдельно стоящие пиксели, расположенные на границе объектов, либо небольшие области изображения, резко выделяющиеся по цвету, но визуально не являющиеся дефектными.

Для адаптации алгоритма к тем или иным видам дефектов в численных экспериментах использовались несколько параметров. Первый параметр относится к вайвлет-преобразованию и характеризует порог яркости границы дефекта в высокочастотных компонентах. Именно этот параметр ответственен за локализацию дефектов, остальные два параметра тестируют уже найденные участки изображения по дополнительным характеристикам. Второй параметр устанавливает уровень отличия дефекта от соседних к нему недефектных значений сигнала, а третий параметр определяет порог неоднородности самого дефекта, т.е. насколько сильно могут изменяться цвета внутри дефекта. Таким образом, алгоритм нацелен на распознавание дефекта любого цвета (достаточно выделяющегося), толщины, формы и местоположения в зависимости от настроек указанных параметров пользователем.

В докладе представлены результаты применения описанного выше метода нахождения резких неоднородностей и дефектов и их устранения.

Список литературы

1. Akay M. Wavelet applications in medicine / Akay M. // IEEE Spectrum. – 1997. – 34, №5. – P. 50-56.
2. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
3. Игнатьев С.А. Применение вейвлет-преобразований при автоматизированном контроле качества колец подшипников // Автоматизация и управление в машино- и приборостроение Сб. науч. тр. – Саратов: СГТУ, 2008. – С.97–101.
4. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. – М.: Мир, 2005. – 671 с.
5. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. – Кемерово: Кемеровский госуниверситет, 2003. – 200 с.
6. Фрейзер М. Введение в вэйвлеты в свете линейной агебры. – М.: Бином, 2008.–487с.

Сведения об авторах

Евдокимова Анастасия Юрьевна, ведущий программист ООО «Электронная медицина».

Кряквин Вадим Донатович, кандидат физико-математических наук, доцент, заместитель директора, институт математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, vadkr@math.sfedu.ru, математика и ее применение.

О НЕКОТОРЫХ БИНАРНЫХ АДДИТИВНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Зинченко Н.А.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия

Аннотация

Рассмотрены две бинарные аддитивные задачи с полупростыми числами специального вида. Асимптотические формулы для числа решений диофантовых уравнений получены с помощью метода тригонометрических сумм И.М. Виноградова.

SOME BINARY ADDITIVE PROBLEMS NUMBER THEORY

Zinhcenko N.A.

Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

В двадцатых и тридцатых годах XX века Г. Харди, Дж. Литтлвуд и И.М. Виноградов развили общий метод в аналитической теории чисел, позволяющий вывести асимптотические формулы для числа решений многих аддитивных задач. С его помощью были решены тернарная проблема Гольдбаха, проблема Варинга, проблема Варинга с простыми числами и ряд других. Все эти проблемы были решены по схеме решения тернарной задачи, открытой И.М.Виноградовым.

В пятидесятых и шестидесятых годах XX века Ю.В. Линник разработал дисперсионный метод, с помощью которого ему удалось решить ряд бинарных аддитивных задач с простыми и полупростыми числами, которые не могут быть решены по схеме решения тернарной задачи. В частности, Ю.В. Линник дисперсионным методом решил проблему Харди-Литтлвуда с простыми [1] и с полупростыми [2] числами, и проблему делителей Титчмарша [3]. Как отмечал Ю.В. Линник, для некоторых из этих задач полученные дисперсионным методом результаты можно вывести из расширенной гипотезы Римана, но асимптотическая формула для числа решений диофантова уравнения $n=\xi^2+\eta^2+p_1p_2^a$, где $a\geq 2$ – заданное целое число и p_1,p_2 – простые числа из некоторых промежутков, непосредственно из гипотезы Римана не выводится.

Один из аналогов проблемы делителей Титчмарша с полупростыми числами был получен дисперсионным методом М.Б. Барбаном [4].

Заметим, что после появления в 1965 году теоремы Бомбьери-Виноградова [5, 6] для решения многих аддитивных бинарных задач вместо дисперсионного метода стала применяться эта теорема.

С работы И.М. Виноградова 1940 года [7] возник интерес к решению аддитивных задач с простыми числами из, так называемых, коротких или «виноградовских» промежутков:

$$\left[(2m)^c,(2m+1)^c\right), m\in N, c\in(1,2]. \qquad (1)$$

В работах [8-10] и некоторых других были решены тернарные аддитивные задачи или задачи, решаемые по схеме тернарной задачи, с простыми числами из промежутков вида (1).

При решении бинарных аддитивных задач с простыми числами из «виноградовских» промежутков возникают трудности, связанные с отсутствием вариантов теоремы Бомбьери-Виноградова, сопоставимых по силе с классическим образцом. Существующие аналоги этой теоремы [11,12] пока не позволяют применить ее для решения подобных задач.

Нами был решен ряд бинарных аддитивных задач [13-15] с, так называемыми, полупростыми числами вида p_1p_2 и $p_1p_2^a$, удовлетворяющими дополнительным условиям, из промежутков (1).

Одной из бинарных аддитивных задач с полупростыми числами из коротких промежутков является аналог проблемы делителей Титчмарша, то есть задача о получении асимптотической формулы для числа решений уравнения $p_1p_2-1=xy$, где p_1p_2 берутся из промежутков (1).

Теорема 1. Пусть T(n) – число решений уравнения $p_1p_2-1=xy$, где $p_1p_2\le n$, xy – натуральные числа и простые числа p_1 и p_2 больше, чем $\exp(\sqrt{\log n})$, а T$_1$(n) – число решений этого же уравнения с полупростыми числами p_1p_2 из промежутков (1).

Тогда

$$T_1(n)=\frac{1}{2}T(n)+O(n\log\log\log n), \tag{2}$$

где

$$T(n)\sim c_0 n\log\log n,\ \ c_0=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\mu^2(r)}{r\varphi(r)},$$

$\mu(n)$ – функция Мёбиуса, $\varphi(n)$ – функции Эйлера.

Доказательство этой теоремы проводится методом тригонометрических сумм И.М. Виноградова.

Формула (2) содержит в себе следующий эффект. Длина промежутка $\left[(2m)^c,(2m+1)^c\right)$ по порядку равна $m^{1-1/c}$ и, если с близко к 1, то эти промежутки очень коротки. Ни про один из них не известно, содержит ли он хотя бы одно полупростое число, и, тем не менее, из (2) следует, что число решений уравнения $p_1p_2-1=xy$ (с указанными условиями) на таких промежутках равно примерно половине числа решений этого уравнения на всей числовой прямой.

Также можно рассмотреть аналог проблемы Титчмарша с полупростыми числами вида $p_1p_2^a$ из промежутков вида (1).

Теорема 2. Пусть G(n) – число решений уравнения $p_1p_2^a-1=xy$, где $p_1p_2^a\le n$, $a\ge 2$, xy – натуральные числа и $p_1\in\left[1,\exp(-\sqrt{\log n})\right]=A_1$ и $p_2\in A_2=$ $\left[1,\exp(-\sqrt{\log n})\right]$, а G$_1$($n$) – число решений этого же уравнения с полупростыми числами $p_1p_2^a$ из промежутков (1).

Тогда

$$G_1(n)=\tfrac{1}{2}G_1(n)\left(1+O\left(Q^{-\eta}\right)\right),$$

где $Q = \exp(\sqrt{\log n})$ и

$$\mathrm{G}(n) = c_0 Li(\frac{n}{Q})\pi(Q^{\frac{1}{a}})\log n(1 + O(\frac{1}{\sqrt{\log n}})),\quad \eta > 0\,,$$

$Li(x)$ – интегральный логарифм и $\pi(x)$ – число простых чисел, не превосходящих x.

Доказательство теоремы проводится методом тригонометрических сумм И.М. Виноградова с использованием как теоремы о среднем, так и оценок ванн дер Корпута по s-й производной.

Особенность второй задачи состоит в том, что при $a \geq 2$ последовательность $p_1 p_2^a$ является более редкой, чем последовательность $p_1 p_2$ (при больших a она «близка» к последовательности простых чисел).

Литература

1. Линник Ю.В. Асимптотическая формула в аддитивной проблеме Гарди-Литтльвуда // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1960. – 24, № 5. С. 629-706.
2. Линник Ю.В. О некоторых аддитивных задачах // Математический сборник. – 1960. – 2. – С. 129-154.
3. Линник Ю.В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах /Ю.В. Линник. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1961. – 208 с.
4. Барбан М.Б. Об аналогах проблемы делителей Титчмарша // Вестник Ленинградского ун-та. – 1963 – №19. – С. 5-13.
5. Виноградов А.И. О плотностной гипотезе для L-рядов Дирихле // Известия АН СССР, серия Математическая. – 1965. – 29, №4. – С. 903-934.
6. Bombieri E. On the large sieve // Mathematica. – 1965. – 12. – P. 201-225.
7. Виноградов И.М. Некоторое общее свойство распределения простых чисел // Математический сборник. – 1940. – № 7. – С. 365 - 372.
8. Гриценко С.А. Тернарная проблема Гольдбаха и проблема Гольдбаха-Варинга с простыми числами, лежащими в промежутках специального вида // УМН. – 1988. – 43, 4 (262). – С. 203-204.
9. Гриценко С.А. Три аддитивные задачи // Известия РАН. Серия математическая. – 1992. – 56, №6. – С. 1198-1216.
10. Balog A., Friedlander K.J.. A hybrid of theorems of Vinogradov and Piatetski-Shapiro // Pacific. J. Math. – 1992. – 156. – P. 45-62.
11. Tolev D. I. On a theorem of Bombieri-Vinogradov type for prime numbers from a thin set // Acta Arithmetica. – 1997. – 81, 1 – P. 57-68.
12. Гриценко С.,А., Зинченко Н.,А. Об оценке одной тригонометрической суммы по простым числам // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия Математика. Физика. – 2013. №5(148). – С. 48-52.
13. Зинченко Н.А. Бинарная аддитивная задача с полупростыми числами специального вида. // Чебышевский сборник. – 2005. – 6, №2 (14). – С. 145-162.
14. Зинченко Н.А. Об одной аддитивной бинарной задаче. // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика, информатика. – 2007. – 7, №1. – С. 9-13.
15. Зинченко Н.А. Об одном варианте проблемы делителей Титчмарша с полупростыми числами специального вида // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия Математика. Физика. – 2015 – №5(202). – С. 53-70.

Сведения об авторах

Зинченко Наталья Алексеевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, e-mail: zinchenko@bsu.edu.ru, область научных интересов: аддитивная теория чисел.

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ХАРАКТЕРИСТИК РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ В ПОЛЕ ААРОНОВА-БОМА

Зудинова Е.В., Тлячев В.Б.

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия

SOME MATHEMATICAL ASPECTS OF THE CHARACTERISTICS OF RELATIVISTIC PARTICLES IN THE AHARONOV-BOHM FIELD

Zudinova E.V., Tlyachev V.B.

Adygeya State University, Maikop, Russia.

Как известно плотность тока вероятности и плотность потока вероятности играют фундаментальную роль в квантовой электродинамике. При этом эти величины определяются, как правило, видом волновой функции. Так как зависимость фазы волновой функции от потенциалов поля может приводить к интерференционным эффектам даже в отсутствие прямого силового воздействия, то представляет интерес изучения плотности тока и потока вероятности для этих эффектов [1-3]. К таким эффектам относится хорошо известный эффект Аронова-Бома. В частности, в работах [1, 3] доказано, что дифференциальная система, описывающая для нерелятивистского случая плотность тока вероятности в поле Ааронова-Бома на плоскости является гамильтоновой системой с гамильтонианом определенного вида. Показано, что семейство определенных комплексных аналитических функций представляет собой семейство квантовых комплексных потенциалов плотности тока вероятности. В нашем случае, рассмотрена задача адекватного математического описания, по аналогичной схеме, как и в [1-3], с помощью уравнения непрерывности и его компонент квантово-механического эффекта Ааронова-Бома в релятивисткой области значений энергии заряженной частицы. Такое рассмотрение основано на точных решениях 3+1- и 2+1-мерных релятивистских волновых уравнений Клейна-Гордона и Дирака во внешних электромагнитных полях специальной формы [4, 5]. Поля представляют собой комбинацию соленоидального поля Ааронова-Бома и дополнительных (внешних) электромагнитных полей: продольных электрического и магнитного полей и перпендикулярных неоднородных электрического и магнитных полей.

Через представление тока вероятности в форме дифференциальных систем методами качественной теории исследован релятивистский эффект Ааронова-Бома. Построенные картины фазовых портретов существенным образом зависят от мантиссы магнитного потока. Указаны математические трудности возникающие при построении соответствующих комплексных потенциалов и гамильтоновой системы для релятивистского эффекта Аронова-Бома. Проанализировано поведение плотности и тока вероятности в нерелятивистском и ультрарелятивистских случаях. Показано, что в нерелятивистском случае при выключении внешнего магнитного поля получаются известные результаты [1, 3].

Литература

1. Moreira E.S., Jr. Aspects of classical and quantum motion on a flux cone // Phys. Rev. A. 1998. Vol. 58. 1678–1686.
2. Olariu S., Popescu I.I. The quantum effects of electromagnetic fluxes // Rev. Mod. Phys. 1985. Vol. 57. P. 339–436.
3. Mello L.F. The Aharonov-Bohm Effect: Mathematical Aspects of the Quantum Flow // Applied Mathematical Sciences. 2007. Vol. 1. No. 8. P. 383–394.
4. Bagrov V.G., Gitman D.M., Tlyachev V.B. Solutions of relativistic wave equations in superpositions of Aharonov-Bohm, magnetic, and electric fields // Journal of Mathematical Physics. 2001. Vol. 42. No 5. P. 1933-1959.
5. Багров В. Г., Гитман Д. М., Тлячев В. Б. Точные решения релятивистских волновых уравнений для поля Ааронова-Бома в комбинации с другими полями // Труды ФОРА. 2001. № 6. С. 11-40.

Данные об авторах

Зудинова Е.В., аспирант АГУ, кафедра теоретической физики, область научных интересов: квантовая электродинамика

Тлячев В.Б., зав. кафедрой теоретической физики, АГУ, e-mail: tlyachev@adygnet.ru, область научных интересов: квантовая электродинамика

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НИКОЛЕТТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОДУ С СИНГУЛЯРНОСТЯМИ ПО ВСЕМ ПЕРЕМЕННЫМ

Исраилов С.А.

Чеченский государственный университет, г.Грозный, Россия.

Танкиев И.А.

Ингушский государственный университет, г.Магас, Россия

Мальсагов М.Х.

Ингушский государственный университет, г.Магас, Россия

Аннотация

Рассматривается специальная система ОДУ с сингулярностью, и условиями Николетти. Приведены

условия существования и единственности решения поставленной задачи

THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF NICOLETTI PROBLEM FOR SYSTEM OF ODES WITH SINGULARITIES IN ALL VARIABLES

Israilov S. A.
Chechen State University, Grozny, Russia.

Tankiev I. A.
Ingush State University, Magas, Russia

Malsagov H. M.
Ingush State University, Magas, Russia

Рассматривается специальная система

$$y_{i=}^{'}\frac{f_i\,(x_1 y_1 y_2 .. y_n)\Delta_i .(x)}{B_i(y_i)}, \quad i=\overline{1,n} \tag{1}$$

с условиями задачи Николетти [1,2]

$$y_i(x_i)=0, i=\overline{1,n} \tag{2}$$

с области $D:\{x_{i,} x\epsilon[a,b], |y_i|\le d_i\}$ $b-a<1$, когда функции $f_i(x,y_1,y_2,\dots,y_n)$, $i=\overline{1,n}$ непрерывны, функции $\Delta_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ определены и непрерывны при $x\epsilon[a,x_i)\cup(x_{i,}b]$, функции $B_i(y_i)$ непрерывны при $|y_i|\le d_{i,}$ $B_i(0)=0,\ i=\ \overline{1,n}$.

Кроме того выполняются ещё условия:

$$0<m\le|f_i(x,y_1,y_2,\dots y_n)|,\le M, \quad i=\overline{1,n}$$

существуют N > 0 и α , $0\le\alpha<1$, такие, что если промежуток $[y_i^{'},y_i^{''}]$ не содержит нуля, то справедливы неравенства

$$|f_i(x,y_1^{'}y_2^{'}\dots,y_n^{'})-f_i(x,y_1^{''}y_2^{''}\dots,y_n^{''}|\le N\sum_{i=1}^{n}\frac{|y_i^{'}-y_i^{''}|}{\min\left(\left|ó_i^{'}\right|^{\alpha}\left|ó_i^{''}\right|^{\alpha}\right)}$$

3) $\tau\left|\ x-x_i\right|^{\gamma_i}\le\Delta_i(x)\le R\left|x-x_{1\cdot,}\right|^{\gamma_i}$, $\tau>0,\ \ R>0,\ \ \gamma_i>-1$

4) $\ell\left|ó_i\right|^{\beta i}\le B_i(y_i)\le \mathrm{L}\left|ó_i\right|^{\beta i}$, $\mathrm{L}>0,\quad \ell>0,\quad \beta_i\ge0$

При перечисленных ограничениях доказывается существование и единственность задачи (1) , (2). Аналогичные результаты получены и при наличии у функций $f_{i,}$ $i=\overline{1,n}$, и более сильных сингулярностей

Литература

1. Петропавловская Р.В. О существовании решения дифференциальных уравнений некоторого класса. Математический сборник, т.36, №1, 1959.

2. Исраилов С.В. Юшаев С.С. Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Издательский центр «Эльфа», Нальчик, 2004, 449с.

Сведения об авторах

Исраилов Саид Вахидович. Кандидат физико-математических наук, профессор, Чеченский государственный университет. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью, tank551711@jandex.ru.

Танкиев Исмаил Аюпович. Кандидат физико-математических наук, профессор, Ингушский государственный университет, tank551711@jandex.ru. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью.

Мальсагов Мухарбек Хасанович. Кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой Математики и ИВТ Ингушского государственного университета. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью, tank551711@jandex.ru.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ ОДУ ПО НЕЗАВИСИМОЙ И ФАЗОВЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

Исраилов С.А.

Чеченский государственный университет, г.Грозный, Россия.

Танкиев И.А.

Ингушский государственный университет, г.Магас, Россия

Мальсагов М.Х.

Ингушский государственный университет, г.Магас, Россия

Аннотация

Рассматривается задача Коши для системы ОДУ с сингулярностями по независимой и фазовым переменным. Приведены условия существования хотя бы одного решения.

THE CAUCHY PROBLEM DI ONE SINGULAR SYSTEM WITH ONE INDEPENDENT VARIABLE AND PHASE

Israilov S.A.

Chechen State University, Grozny, Russia.

Tankiev I.A.

Ingush State University, Magas, Russia

Malsagov H.M.

Ingush State University, Magas, Russia

Изучается система вида

$$y_i' = F_i\left(x, y_1, y_2, \dots, y_n\right), \quad i = \overline{1,k} \tag{1}$$

с условиями задачи Коши

$$y_i(x_0) = 0, i = \overline{1,k} \tag{2}$$

относительно точек области $D_i\colon\left\{x\epsilon[a,b], \left|ó_i\right|^i \le d_{i,}\ \ i = \overline{1,k}\right\}$ в предположении наличия у функций $F_i\left(x_1, y_1, y_{2,} \dots, y_n\right), i = \overline{1,k}$ сингулярностей пр $x = x_0, y_i = 0$ в смысле работ $[1-3]$.

Допускается возможность представления функций $F_{i,}\ i = \overline{1,k}$ в виде

$$F_i\left(x, y_1, y_{2,} \dots., y_n\right) = B_i^{-1}(y_i)[\Phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \int_0^{y_i} B_i(t)dt] +$$

$$+f_i(x_1, y_1, y_2, \dots., y_n), \quad i = \overline{1,k} \tag{3}$$

где функции $\hat{O}_{1,}$ $i = \overline{1,k}$ в точке x_0 имеют сингулярности, по $y_1, y_2, \dots y_n$непрерывны, функции $B_i\left(ó_i\right),\ \ i = \overline{1,k},$ непрерывны по $ó_{i,}, B_i\ (0) = 0, B_i\ (ó_i) > 0$ при $ó_i \ne 0, i = \overline{1,k}$; функции f_i, $i = \overline{1,k}$ непрерывны по всем переменным $x, ó_1, ó_{2,\dots} ó_n$.

Считается, что выполнены одно из групп условий

$$\hat{O}_i\left(x, ó_1, ó_2, \dots ó_n\right) Sign\left(x - x_0\right) \le \psi_i(x), \quad i = \overline{1,n} \quad x \in [a_1, x_0) \cup\ (x_0, b] \tag{4}$$

$$\Phi_i(x, y_1, y_2, \dots y_1) \ge \begin{cases} -\Psi_i(x), x\epsilon[a_1, x_0) \\ \ \overline{\Psi}_\iota(x), x\epsilon\ (x_0 b] \end{cases} \tag{5}$$

$$\Phi_i(x_1, y_1, y_2, \dots, y_n) \le \begin{cases} -\overline{\Psi}_i.(x), x\epsilon[a_1 x_0) \\ \ \Psi_1(x), x\epsilon(x_0 b] \end{cases} \tag{6}$$

$$\Phi_i\left(x, y_1, y_2, \dots., y_n\right) Sign(x - x_0) \ge \overline{\Psi_\iota},\ x\epsilon[a, x_0) \cup (x_0, b], \tag{7}$$

где функции Ψ_i $i = \overline{1,k}$ интегрируемы на соответствующих интервалах, $\overline{\Psi}_i$ $i = \overline{1,k}$, для любого δ>0 интегрируемые на интервалах $[a, x_0 - \delta], [x_0 +, \delta, \mathrm{b}]$, но

$$\int_{x_0 - \delta}^{x_0} \overline{\Psi_i}(t)at = \int_{x_0}^{x_0 + \delta} \overline{\Psi_i}\ (t)at = +\infty \tag{8}$$

В отношении функций $f_{i,}$ $i = \overline{1,n}$, справедливы неравенства

$$|f_i(x_1, y_1, y_2 \dots, y_n)| \le \varphi_i(x), \quad i = \overline{1,k} \tag{9}$$

где функции $\varphi_i(x)$ интересуемы на $[a, b]$.

Тогда, при определённых ограничениях на числа $d_{i,}$ $i = \overline{1,k}$ задача (1), (2) имеет по крайней мере одно решение.

Полученные результаты более общие, чем известные выводы по сингулярным краевым задачам.

Литература

1. Петропавловская Р.В. О существование решения дифференциальных уравнений класса, Математический сборник, т.36 №1, 1955.
2. Чечик В.А. Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью. Труды московского матем. общества, 1959. Т.8. –С.155-198.

3. Исраилов С.В., Юшаев С.С. Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Издательский центр «Эльфа», Нальчик, 2004, С. 445.

Сведения об авторах

Исраилов Саид Вахидович. Кандидат физико-математических наук, профессор, Чеченский государственный университет. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью, tank551711@jandex.ru.

Танкиев Исмаил Аюпович. Кандидат физико-математических наук, профессор, Ингушский государственный университет, tank551711@jandex.ru. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью.

Мальсагов Мухарбек Хасанович. Кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой Математики и ИВТ Ингушского государственного университета. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью, tank551711@jandex.ru.

СИНГУЛЯРНАЯ СИСТЕМА ОДУ С ДВУКРАТНЫМИ, КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ КОШИ

Исраилов С.В., Сагитов А.А.

Чеченский государственный университет, г Грозный, Россия

Аннотация

Всем известны теоремы о существовании решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений и теоремы существования и единственности этой же задачи с непрерывными правыми частями и когда правые части имеют по независимой переменной особенности различных характеров. В последние годы в публикациях Исраилова С.В. и его учеников рассматриваются различные краевые задачи с переопределенными условиями при присутствии в уравнениях сильных сингулярностей . В данном сообщении говорится о существования решений двукратной задачи Коши. Доказывается теорема существования и единственности двукратной задачи

SINGULAR SYSTEM OF ODE WITH TWO BOUNDARY CONDITIONS CAUCHY

Israilov S. V., Sagitov A.A.

Chechen State University, Grozny, Russia

Изучается система

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \dots y_n), i = \overline{1,n} \tag{1}$$

с условиями типа Коши

$$y_i(a) = y_{1i}, \; y_i(в) = y_{2i}, \; i = \overline{1,n}, \tag{2}$$

в области D:$\{x \in (a, в), |y_i| \leq d_i, i = \overline{1,n}\}$ Здесь $y_{1i}, y_{2i}, d_i, i = \overline{1,n},$ данные числа. Функции $f_i, i = \overline{1,n},$ непрерывны по совокупности аргументов или удовлетворяют условиям Каратеодори в области D, имеют частные производные f_{iy_i} с такими же свойствами. Концы сегмента $[a, в]$ являются точками сингулярностей [1,2] для f_i и f'_{iy_i}.Допускается выполнение следующих неравенств в области D:

$$|f_i(x, y_1, y_2, \dots y_{i-1}, y_{0i}, y_{i+1}, \dots y_n)| \leq \psi_i(x), i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

$$y_{0i} = \begin{cases} y_{1i}, x \in [a, c], \\ y_{2i}, x \in [c, в], c \in (a, в), i = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{4}$$

$$\mathrm{f'}_{\mathrm{iy_i}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \dots \mathrm{y_n})\mathrm{sign}(\mathrm{x} - \mathrm{c}) \overset{\geq}{\leq} \begin{cases} -\bar{\psi}_i(x), i = \overline{1,n}, x \in (a, c], \\ -\bar{\psi}_i^{\,*}(x), i = \overline{1,n}, x \in [c, в), \end{cases} \tag{5}$$

$\bar{\psi}_i(x), i = \overline{1,n}\,,$ интегрируемы или суммируемы на $(a, c]$ $\bar{\psi}_i^{\,*}(x), i = \overline{1,n},$ такие же для любого $\delta > 0$ на$[c, b - \delta]$, но

$$\int_{\mathrm{b}-\delta}^{\mathrm{b}} \bar{\psi}^*(x)dt = +\infty, i = \overline{1,n}, \tag{6}$$

$$\mathrm{M}_i^* = \{|y_{1i}| + K_i M_i, |y_{2i}| + |y_{1i} - y_{12}| + K_i M_i\} \leq d_i, i = \overline{1,n}, \tag{7}$$

$$\mathrm{M}_i = \int_a^c \psi_i(x)dt\,, K_i = \exp\left(\int_a^c \bar{\psi}_i(x)dt\right), i = \overline{1,n}, \tag{8}$$

Т Е О Р Е М А. При выполнении условий (3)-(8) переопределенная сингулярная краевая задача (1), (2) с двукратными условиями типа Коши имеет по крайней мере одно решение в области D.

Литература

1. Кигурадзе И. Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси, Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. С. 352.
2. Исраилов С.В., Юшаев С.С. Многоточечная и функциональные краевые задачи для обыкновенных и дифференциальных уравнений. Издательский центр «Эльфа», Нальчик, 2004, С. 445.

Сведения об авторах

Исраилов Сейдахмед Вахидович, доцент кафедры алгебры и геометрии Чеченского государственного университета, телефон: 8928-476-64-02, e-mail: segitov@mail.ru

Сагитов Адам Аюпович, ст.преподаватель кафедры алгебры и геометрии Чеченского государственного университета, телефон: 8928-736-06-69, e-mail: segitov@mail.ru

ТРЁХКРАТНАЯ СИНГУЛЯРНАЯ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОДУ

Исраилов С.В., Сагитов А.А.

Чеченский государственный университет, г. Грозный, Россия

Аннотация
В сообщении рассматривается трёхкратная краевая задача Коши, порожденная присутствием двух точек сингулярности в системе ОДУ. Доказывается теорема существования решения этой задачи.

THREE SINGULAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS CAUCHY PROBLEM FOR THE ODE SYSTEM

Israilov S.V., Sagitov A.A.
Chechen State University, Grozny, Russia

Для системы

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \dots y_n), i = \overline{1,n} \tag{1}$$

с правыми частями $f_i, i = \overline{1,n}$,непрерывными или удовлетворяющими условиям Каратеодари по всем аргументам в области D:$\{x \in (a, \text{в}), |y_i| \leq d_i, i = \overline{1,n}\}$ изучаются задача о существовании решения $y_i(x), i = \overline{1,n}$, удовлетворяющего трехкратным равенствам типа Коши

$$y_i(a) = y_{1i}, y_i(\text{c}) = y_{2i} y_i(\text{в}) = y_{3i}\ i = \overline{1,n}, \tag{2}$$

где $c \in (a, \text{b})$, $y_{1i}, y_{2i}, y_{3i}, i = \overline{1,n}$, данные числа из области D. Разрешимость задачи (1), (2) будет иметь место только при наличии сингулярностей у функции $f_i, i = \overline{1,n}$,на концах сегмента$[a, \text{в}]$, как в работах [1,2]. Считается, что существуют частные производные $f_{iy_i}, i = \overline{1,n}$, и выполнены следующие неравенства в области D:

$$|f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_{0i}, y_{i+1}, \dots y_n)| \leq \psi_i(x), i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

где

$$y_{0i} = \begin{cases} y_{1i}, x \in [a, c], \\ y_{2i}, x \in [c, b]. \end{cases} \tag{4}$$

$\psi_i(x), i = \overline{1,n}$,интегрируемы или суммируемые на $[a, b]$.
Далее,

$$f_{i,y_i'}(x, y_1, y_2, \dots y_n) sign(x - c) \leq -\bar{\psi}_i(x), i = \overline{1,n}, \tag{5}$$

$\bar{\psi}_i(x), i = \overline{1,n}$, для любого $\delta > 0$ интегрируемы или суммируемы на сегментах $[a + \delta, c], [c, b - \delta]$, но:

$$\int_a^{a+\delta} \bar{\psi}_i(t)dt = \int_{\text{b}-\delta}^{\text{b}} \bar{\psi}_i(t)dt = +\infty, i = \overline{1,n}, \tag{6}$$

$$|y_{1i}| + |y_{2i} - y_{1i}| + M_i \leq d_i, i = \overline{1,n}, \tag{7}$$

$$\text{M}_i = max\left(\int_a^c \psi_i(t)dt\,, \int_c^b \psi_i(t)dt\right), i = \overline{1,n}, \tag{8}$$

Т Е О Р Е М А. При выполнении условий (3)-(8) краевая задача (1), (2) имеет по крайней мере одно решение.

Литература

1. Кигурадзе И. Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси, изд-во Тбилисского ун-та, 1975, с. 352.

2. Исраилов С.В., Юшаев С.С. Многоточечная и функциональные краевые задачи для обыкновенных и дифференциальных уравнений. Нальчик, Издательский центр «Эльфа» 2004г. с. 445.

Сведения об авторах

Исраилов Сейдахмед Вахидович,доцент кафедры алгебры и геометрии Чеченского государственного университета ,телефон: 8928-476-64-02, e-mail: segitov@mail.ru

Сагитов Адам Аюпович, ст.преподаватель кафедры алгебры и геометрии Чеченского государственного университета, телефон: 8928-736-06-69,e-mail: segitov@mail.ru

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА С ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ И РАЗНОСТНОЙ ТРАКТОВКАХ.

Карова Ф.А.

Кабардино-Балкарский государственный университет, Нальчик, Россия.

Аннотация

В данной работе рассматривается первая краевая задача для уравнения Аллера с операторами дробного дифференцирования в дифференциальной и разностной трактовках. Методом энергетических неравенств, как для дифференциальной, так и для разностной задачи получены априорные оценки.

NUMERICAL METHODS FOR SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE ALLER'S EQUATION WITH THE OPERATORS OF FRACTIONAL DIFFERENTIATION IN THE DIFFERENTIAL AND DIFFERENCE SETTINGS.

Karova F.A.

Kabardin-Balkar State University, Nalchik, Russia.

Движение влаги в капиллярно-пористых средах описывается уравнением Аллера [1]. В данной работе рассматривается первая краевая задача для обобщенного уравнения Аллера с операторами дробного дифференцирования.

Метод энергетических неравенств для уравнений диффузии дробного, переменного и распределенного порядка предложен в работах [2] – [4]. Разностная схема повышенного порядка аппроксимации для уравнения диффузии дробного порядка получена в работе [5].

1. Первая краевая задача. В прямоугольнике $\overline{Q_T} = \{(x,t): 0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ рассмотрим задачу

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = u_{xx} + \partial_{0t}^{\beta} u_{xx} + f(x,t), \qquad (1)$$

$$u(0,t)=0,u(l,t)=0,0\le t\le T, \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),0\le x\le l, \tag{3}$$

где $0<\alpha,\beta<1$,

$$\partial_{0t}^{\gamma}u(x,t)=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^t u_s(x,s)(t-s)^{-\gamma}ds -$$

дробная производная Капуто порядка $\gamma, 0<\gamma<1$.

В дальнейшем будем предполагать существование решения $u(x,t)\in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ задачи (1) – (3), где $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ - класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными порядка *m* по *x* и порядка *n* по *t* на $(\overline{Q}_T)$.

Теорема 1. Для решения $u(x,t)$ задачи (1) – (3) справедлива априорная оценка

$$D_{0t}^{\alpha-1}\|u(\cdot,t)\|_0^2+D_{0t}^{\beta-1}\|u_x(\cdot,t)\|_0^2+\int_0^t\|u_x(\cdot,\eta)\|_0^2d\eta\le M\left(\int_0^t\|f(\cdot,\eta)\|_0^2d\eta+\|u_0\|_{W_2^1(o,l)}^2\right), \tag{4}$$

где M>0 – известная постоянная.

Из априорной оценки (4) следует единственность и непрерывная зависимость решения задачи (1) – (3) от входных данных.

2. Разностные схемы для первой краевой задачи. Устойчивость и сходимость.

В прямоугольнике $\overline{Q}_T$ введем сетку $\overline{\omega}_{h\tau}=\overline{\omega}_h\times\overline{\omega}_\tau$, где $\overline{\omega}_h=\{x_i=ih,i=0,1,...,N,hN=l\},\overline{\omega}_\tau=\{t_j=jt,j=0,1,...,j_0,\tau j_0=T\}$.

Задаче (1) – (3) поставим в соответствие разностную схему:

$$\Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha}y=y_{\bar{x}x}+\Delta_{0t_{j+1}}^{\beta}y_{\bar{x}x}+\varphi, \tag{5}$$

$$1\le i\le N-1,1\le j\le j_0-1,$$

$$y(0,t)=0,y(l,t)=0,0\le t\le T, \tag{6}$$

$$y(x,0)=u_0(x),0\le x\le l, \tag{7}$$

где $\varphi=f(x_i,t_{j+1}),\Delta_{0t_{j+1}}^{\gamma}y=\frac{1}{\Gamma(2-\gamma)}\sum_{s=0}^{j}(t_{j-s+1}^{1-\gamma}-t_{j-s}^{1-\gamma})y_t^s -$ разностный аналог дробной производной Капуто порядка *γ*, 0<*γ*<1 [6].

Погрешность аппроксимации разностной схемы (5) – (7) имеет порядок $O(\tau^{2-\max\{\alpha,\beta\}}+h^2)$ [4].

Теорема 2. Разностная схема абсолютно устойчива и для ее решения справедлива априорная оценка

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j}(t_{j-s+1}^{1-\alpha}-t_{j-s}^{1-\alpha})\|y^{s+1}\|_0^2+\frac{1}{\Gamma(2-\beta)}\sum_{s=0}^{j}(t_{j-s+1}^{1-\beta}-t_{j-s}^{1-\beta})\|y_{\bar{x}}^{s+1}]|_0^2+ \tag{8}$$

$$+\sum_{j'=0}^{j}\|y_{\bar{x}}^{j+1}]|_0^2\tau\le\frac{l^2}{2}\sum_{j'=0}^{j}\|\varphi^{j'}\|_0^2\tau+\frac{t_{j+1}^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\|y^0\|_0^2+\frac{t_{j+1}^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\|y_{\bar{x}}^0\|_0^2.$$

Устойчивость и сходимость разностной схемы (5) – (7) следует из априорной оценки (8).

Работа выполнена при финансовой поддержки Российского Фонда Фундаментальных Исследований проект № 14-01-31246.

Литература

1. Чудновский А. Ф. Теплофизика почв. – Москва: Наука, 1976.– 137 с.
2. Алиханов А. А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка. // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, №5. С.658-664.
3. Alikhanov A. A. Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings. // Appl.Math.Comput. – 2012. – 219. – P. 3938-3946.
4. Alikhanov A. A. Numerical methods of solutions of boundary value problems for the multi-term variable –distributed order diffusion equation. // Appl.Math.Comput. – 2015. – 268. – P. 12-22.
5. Alikhanov A. A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation. // Journal of Computational Physics. – 2015. – 280. – P. 424-438.
6. Шхануков-Лафишев М.Х., Таукенова Ф.И. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, №10. С.1871-1881.

Сведения об авторах

Карова Фатимат Асланбиевна, аспирант, Кабардино-Балкарский государственный университет, _timka_86_86@mail.ru.

ДИСКРЕТНЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИГНАЛОВ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА САМОПОДОБНЫХ ОБЛАСТЯХ

Каспарьян М.С.

Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия.
Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва(национальный исследовательский университет) (СГАУ), Самара, Россия.

Аннотация

Представлены новые дискретные ортогональные преобразования на областях, ассоциированных с фундаментальными областями канонических систем счисления.

DISCRETE ORTHOGONAL TRANSFORMS OF SIGNALS DEFINED ON SELF-SIMILAR DOMAINS

Kasparyan M.S.

Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences, Samara, Russia. S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (National Research University), Samara, Russia.

Канонические системы счисления.

Разрозненные результаты в области «нестандартных» систем счисления были объединены венгерскими математиками под руководством Катаи. В данном разделе рассматриваются результаты, которые были получены в работах [1-4]. Приведём краткие сведения о канонических системах счисления (КСС) в мнимых квадратичных поля [26,34-35].

Определение 1. Пусть $\mathrm{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ есть квадратичное поле:

$$\mathrm{Q}\left(\sqrt{d}\right)=\left\{z=a+b\sqrt{d};a,b\in \mathrm{Q}\right\}$$

d – целое число, свободное от квадратов. Если для элемента $z=a+b\sqrt{d}\in \mathrm{Q}\left(\sqrt{d}\right)$ норма и след есть целые числа,

$$Norm(z)=\left(a+b\sqrt{d}\right)\left(a-b\sqrt{d}\right), \quad (1)$$

$$Tr(z)=\left(a+b\sqrt{d}\right)+\left(a-b\sqrt{d}\right), \quad (2)$$

то элемент называется целым алгебраическим элементом поля $\mathrm{Q}\left(\sqrt{d}\right)$. Целые элементы образуют решётку на комплексной плоскости.

Определение 2. Целое алгебраическое число $\alpha=A+\sqrt{d}$ называется основанием канонической системы счисления в кольце целых элементов поля $\mathrm{Q}\left(\sqrt{d}\right)$, если любой целый элемент этого поля однозначно представим в форме конечной суммы

$$z=\sum_{j=0}^{k(z)} z_j\cdot\alpha^j, \qquad z_j\in N=\left\{0,1,\cdots,\left|Norm(\alpha)\right|-1\right\}. \quad (3)$$

Пара $\{\alpha,N\}$ называется канонической системой счисления (КСС) в кольце целых элементов поля $\mathrm{Q}\left(\sqrt{d}\right)$.

В данной статье рассматривается только случай $d<0$, то есть мнимые квадратичные поля.

Если в формуле (3) k фиксировано, то множество элементов, представимых $k-$членной суммой, представляет собой ограниченное множество на комплексной плоскости, которое будем называть $k-$фундаментальной областью, примеры таких областей изображены на рис. 1.

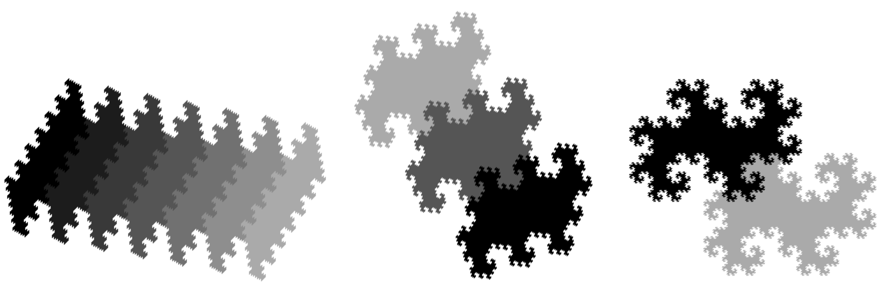


Рис. 1 – k-фундаментальная область для $k=6, \alpha=\frac{-3\pm i\sqrt{19}}{2}$, $\mathrm{k}=10,\ \alpha=-1+\mathrm{i}\sqrt{2}$, $\mathrm{k}=16,\ \alpha=-1+\mathrm{i}$

В работе [2] приводится классификационная теорема для КСС в мнимых квадратичных полях, устанавливающая явную связь между параметрами α, d, N.

Дискретные ортогональные преобразования на областях, ассоциированных с фундаментальными областями КСС.

Определение 3. Пусть α – основание КСС в мнимых квадратичных полях, D_t – t-фундаментальная область, $\Lambda_t(n)=\exp\{C_1\cdot n+C_2\cdot\overline{n}\}$, где

$$\begin{cases} C_1=\dfrac{2\cdot\pi\cdot i\cdot\overline{\alpha}^t}{Norm(\alpha^t)\cdot(\alpha-\overline{\alpha})}, \\ C_2=\dfrac{-2\cdot\pi\cdot i\cdot\alpha^t}{Norm(\alpha^t)\cdot(\alpha-\overline{\alpha})}. \end{cases}$$

Тогда фрактальным дискретным преобразованием Фурье называется преобразование вид

$$X(m)=\sum_{n\in D_t}x(n)\Lambda_t(n\cdot m),\ m\in D_t. \tag{4}$$

Определение 4. Пусть α – основание КСС в мнимых квадратичных полях, D_t – t-фундаментальная область, $\Lambda_t(n)=\exp\{C_1\cdot n+C_2\cdot\overline{n}\}$, где

$$\begin{cases} C_1=\dfrac{2\cdot\pi\cdot i\cdot\overline{\alpha}^t}{Norm(\alpha^t)\cdot(\alpha-\overline{\alpha})}, \\ C_2=\dfrac{-2\cdot\pi\cdot i\cdot\alpha^t}{Norm(\alpha^t)\cdot(\alpha-\overline{\alpha})}. \end{cases}$$

Тогда обратным фрактальным дискретным преобразованием Фурье называется преобразование вид

$$x(n)=\frac{1}{Norm(\alpha^t)}\sum_{m\in D_t}X(m)\overline{\Lambda_t(n\cdot m)},\ n\in D_t. \tag{5}$$

Теорема 1 (об ортогональности базисных функций фрактального ДПФ). Пусть α – основание канонической системы счисления с $Norm(\alpha)\ge 2$, множество

$$D_t=\left\{z=\sum_{j=0}^{t-1}z_j\cdot\alpha^j;\ z_j\in\{0,1,\cdots,Norm(\alpha)-1\}\right\}$$

– t-фундаментальная область КСС, функция $\Lambda_t(x)=\exp\{C_1\cdot x+C_2\cdot\overline{x}\}$, где

$$\begin{cases} C_1=\dfrac{2\cdot\pi\cdot i\cdot\overline{\alpha}^t}{Norm(\alpha^t)\cdot(\alpha-\overline{\alpha})}, \\ C_2=\dfrac{-2\cdot\pi\cdot i\cdot\alpha^t}{Norm(\alpha^t)\cdot(\alpha-\overline{\alpha})}. \end{cases}$$

Тогда система функций $\left\{\Lambda_t\left(m\cdot n\right)=\exp\left\{C_1\cdot n\cdot m+C_2\cdot\overline{n}\cdot\overline{m}\right\};\, m\in D_t\right\}$ является ортогональной.

В заключение этого раздела приведем графическое представление действительных частей некоторых базисных функций преобразования (4), для КСС с основанием $\alpha=-1+i$.

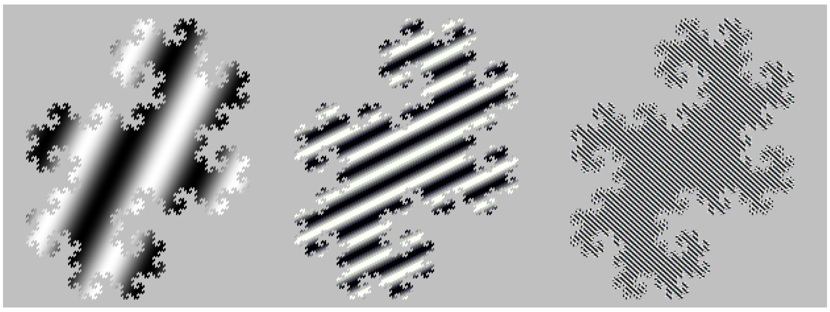


Рис. 2 – Действительные части базисных функций ДФПФ

Фрактальное преобразование Уолша-Адамара.

Известно, что преобразования Уолша-Адамара является многомерным преобразованием Фурье. Установив аналогичную связь с фрактальным преобразованием Фурье, получим преобразование, которое назовем фрактальным преобразованием Уолша-Адамара.

Определение 5. Пусть α – основание КСС в мнимых квадратичных полях, D_t – t-фундаментальная область, $Norm\left(\alpha\right)=2$, тогда фрактальным преобразованием Уолша-Адамара называется преобразование вида

$$X(m)=\sum_{n\in D_t}x(n)\Lambda_1\left(\sum_{k=0}^{t-1}n_k m_k\right),\, m\in D_t. \qquad (6)$$

где $n=\sum_{k=0}^{t-1}n_k\cdot\alpha^k$, $n_k\in D_1$ и $m=\sum_{k=0}^{t-1}m_k\cdot\alpha^k$, $m_k\in D_1$.

На рис. 3 представлено графическое представление некоторых базисных функций преобразования (6).

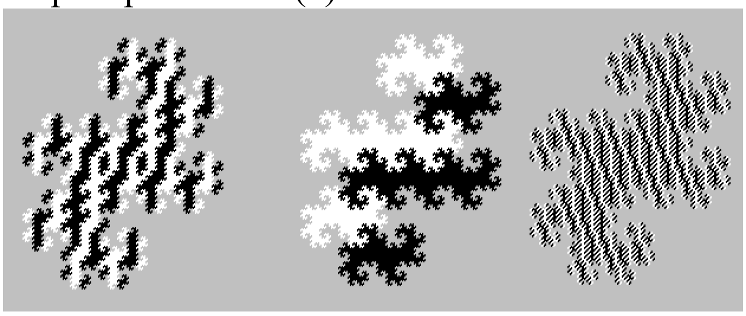


Рис. 3 – Базисные функции ФПУА для КСС $\alpha=-1+i$

Фрактальное преобразование Виленкина-Крестенсона

Известно, что ПВК можно представить в виде многомерного преобразования Фурье. Аналогичным образом выразим фрактальное преобразование Виленкина-Крестенсона через фрактальное ДПФ.

Определение 7. Пусть α – основание КСС в мнимых квадратичных полях, D_{pq} – $(p \cdot q)$-фундаментальная область. Тогда фрактальное преобразование Виленкина-Крестенсона будет иметь вид:

$$X(m) = \frac{1}{Norm\left(\alpha^{pq}\right)} \sum_{n \in D_{pq}} x(n) \Lambda_p \left(\sum_{k=0}^{q-1} n_k m_k \right), \ m \in D_{pq}, \tag{7}$$

где

$$n = \sum_{k=0}^{q-1} n_k \cdot \alpha^{p \cdot k}, \ n_k \in D_p \text{ и } m = \sum_{k=0}^{q-1} m_k \cdot \alpha^{p \cdot k}, \ m_k \in D_p.$$

Определение 8. Пусть α – основание КСС в мнимых квадратичных полях, D_{pq} – $(p \cdot q)$-фундаментальная область. Тогда обратным фрактальное преобразование Виленкина-Крестенсона будет иметь вид:

$$X(m) = \sum_{n \in D_{pq}} x(n) \overline{\Lambda_p \left(\sum_{k=0}^{q-1} n_k m_k \right)}, \ m \in D_{pq}, \tag{8}$$

где

$$n = \sum_{k=0}^{q-1} n_k \cdot \alpha^{p \cdot k}, \ n_k \in D_p \text{ и } m = \sum_{k=0}^{q-1} m_k \cdot \alpha^{p \cdot k}, \ m_k \in D_p.$$

Фрактальное дискретное косинусное преобразование, Norm(α)=2.

Определим базисные функции фрактального аналога ДКП, связанные с базисными функциями фрактального ДПФ тем же образом, что и классическое ДКП связано с классическим ДПФ:

$$\Lambda COS_k(n, x) = \frac{1}{2}\left(\Lambda_{k+1}\left(n \cdot (x + \beta)\right) + \overline{\Lambda_{k+1}\left(n \cdot (x + \beta)\right)} \right) \tag{9}$$

В отличие от базисных функций классического ДКП, для вводимого преобразования β зависит от длины преобразования и нормы основания.

$$\beta = \frac{\alpha^{k+1} - 2\alpha^k + 1}{2(\alpha - 1)}. \tag{10}$$

Определение 9. Фрактальным дискретным косинусным преобразованием (ФДКП) называется преобразование:

$$X(m) = \lambda(m) \sum_{n \in G_k} x(n) \cdot \Lambda COS_k(n, m), \tag{11}$$

где $m \in D_k$, $\lambda(m)$ - нормирующий коэффициент:

$$\lambda(m) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{Norm(\alpha)^k}}, m + m \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, \alpha^k) \\ \sqrt{\dfrac{2}{Norm(\alpha)^k}}, m + m \neq 0 \,(\mathrm{mod}\, \alpha^k) \end{cases}.$$

Определение 10. Обратным фрактальным дискретным косинусным преобразованием (ОФДКП) называется преобразование:

$$x(m) = \sum_{n \in D_k} \lambda(n) \cdot X(n) \cdot \Lambda COS_k(n, m), \tag{12}$$

где $m \in G_k$, $\lambda(n)$ – нормирующий коэффициент:

$$\lambda(n) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{Norm(\alpha)^k}}, n+n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, \alpha^k) \\ \sqrt{\dfrac{2}{Norm(\alpha)^k}}, n+n \neq 0 (\mathrm{mod}\, \alpha^k) \end{cases}.$$

Литература

1. Katai, I. Kanonische Zahlensysteme in der Theorie der quadratischen algebraischen Zahlen / I. Katai, B. Kovacs // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1980. – B. 42. – P. 99-107.
2. Katai, I Canonical Number Systems in Imaginary Quadratic Fields / I. Katai, J. Szabo // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1975. – V. 37. – P. 255-260.
3. Кнут, Д. Искусство программирования для ЭВМ Т. 2. Получисленные алгоритмы. – М.: Мир, 1977. – 727 с.
4. Чернов, В.М. Арифметические методы синтеза быстрых алгоритмов дискретных ортогональных преобразований. – М.: Физматлит, 2007.

Сведения об авторах

Каспарьян Михаил Суренович, стажёр-исследователь института систем обработки изображений РАН.

К ВОПРОСУ О ЛОКАЛИЗАЦИИ ХРАНЕНИЯ И ОТДЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ ПЕРСОНАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Киздермишов А.А.

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия.

Аннотация

Рассмотрена ситуация, сложившаяся в связи с предпринимаемыми Российской Федерацией мерами по защите персональных данных при их обработке посредством информационно-телекоммуникационной сети "Интернет".

COMMENTS ON THE QUESTION OF LOCALIZATION OF STORAGE AND LOCALIZATION OF SEPARATE PROCESSES PERSONAL DATA PROCESSING

Kizdermischov A.A.

Adygeya State University, Maikop, Russia.

По состоянию на сегодняшний день, значительный объем информации хранится на носителях информации установленных (используемых) на частных-домашних рабочих станциях, ноутбуках и др. мобильных устройствах. Речь идет о личной переписке, фото и видео материалах, аутентификационных данных личных кабинетов в социальных сетях и т.д. Очевидно, что нельзя недооценивать ущерб который может быть нанесен гражданам в результате утраты (разглашения) персональных данных. Вопросы защиты пользовательских информационных ресурсов для случая когда они обрабатываются средствами ПЭВМ к которым гражданин имеет физический доступ посвящены наши работы [1-4], далее будет рассмотрена ситуация, сложившаяся в связи с предпринимаемыми Российской Федерацией мерами по защите персональных данных при их обработке посредством информационно-телекоммуникационной сети "Интернет" (облачные хранилища, социальные сети, электронные услуги и т.п.).

С 01.09.2015 начинает действовать положение о локализации хранения и отдельных процессов обработки персональных данных, суть которого состоит в том, что персональные данные граждан России должны обрабатываться на серверах физически расположенных на территории Российской Федерации. Соответствующие изменения в законодательство были внесены еще в 2014 году [5] (далее закон) и сопровождались многочисленными публикациями, высказываниями, заявлениями и прогнозами сторонников и противников таких мер.

Аргументы противников предпринимаемых мер по защите персональных данных граждан России при их обработке средствами информационно-телекоммуникационной сети "Интернет" можно условно разделить на две группы.

К первой группе можно отнести аргументы основанные на возможных технических проблемах. В целом ряде публикаций и выступлений экспертов высказывались опасения по поводу сроков ввода в эксплуатацию необходимой для выполнения требований законодательства инфраструктуры. Действительно, сроки несколько раз переносились, но по состоянию на сегодняшний день, технические проблемы есть у отдельных операторов карты Visa [6] и компании Facebook. Проблемы с картами Visa планируется устранить в ближе время. С Facebook ведутся переговоры. Кроме сроков введения новых норм возникали проблемы связанные с возможностью различных толкований закона которые приводили к неопределенности по вопросу какие именно изменения должны быть внесены компаниями в их ИТ-инфраструктуру и (или) бизнес-процессы для того, чтобы исполнить закон, особенно если такая инфраструктура носит трансграничный характер. В целях разрешения сложившейся ситуации на сайте Минкомсвязи были даны разъяснения по применению закона. Проводя анализ публикаций и выступлений экспертов, а так же заявлений должностных лиц можно прийти к выводу, что прогнозируемого критиками коллапса не произошло.

Ко второй группе относятся "политико-экономические" аргументы, суть которых состоит в том, что предпринимаемые меры приведут, во-первых, к уходу с рынка электронных услуг иностранных компаний, что в свою очередь приведет к существенному снижению качества электронных услуг, во-вторых, к репутационным потерям России. Несмотря на "реалистичность и обоснованность" вышеупомянутых прогнозов, по состоянию на сегодняшний день, ни одной из их крупных (значимых) иностранных компаний не было объявлено о намерении уйти с рынка электронных услуг России. Прежде чем говорить о репутационных потерях следует отметить, что принимаемые в нашей стране меры принимались и другими странами, например, в Европейском Союзе (ЕС) начиная с 1998 года действовал запрет на передачу персональных данных в страны не входящие в ЕС. Здесь имеет смысл уточнить, что в США и ЕС понимают как «персональные данные» — это информация, которая может быть использована для удостоверения личности, имя и фамилия, почтовый или фактический адрес, номер телефона, адрес электронной почты, иные сведения, предоставленные или необходимые для проведения торговой операции, оказания электронной услуги или доставки продукта. Исходя из этого определения как и во многих других случаях, например, клуб Common Criteria, США и ЕС нашли общий подход к защите персональных данных своих граждан - программа «US-EU Safe Harbor» (одобрена в 2000 году), который способствовал развитию торговли и действует до сих пор. При этом США и ЕС не понесли репутационных потерь, более того в соответствии с решением, принятым федеральным судьей, требования властей США на выдачу персональных данных действительны даже в том случае, если они хранятся на серверах в других странах (ЕС). Интересно, что не смотря на существование программы «US-EU Safe Harbor» у ЕС так же возникали проблемы с компанией Facebook [7]. Из выше сказанного следует, что действия Российской Федерации по защите персональных данных граждан и связанные с ними переговоры с иностранными компаниями полностью соответствуют международной практике и при отсутствии других факторов к репутационным потерям привести не могут.

В заключении можно сказать, что предпринимаемые Российской Федерацией меры по защите персональных данных граждан России при их обработке средствами информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", являются вынужденными, но не смотря на это полностью обоснованными и соответствующими международной практике, кроме того скорейшая практическая реализация закона [5] не приведет к ухудшению оказания электронных услуг, а наоборот улучшит их качество за счет усиления защиты персональных данных и как следствие снятия некоторых ограничений на использование социальных сетей, почтовых сервисов и т.п., введенных в последнее время органами исполнительной власти.

Литература

1. Киздермишов А.А., Чефранов С.Г., Брикова И.В. К вопросу о методах тестирования специального программного обеспечения//Материалы заочной международной научно-практической конференции "Актуальные проблемы гуманитарного развития". МГТУ. Майкоп 2013. С.110-113.

2. Киздермишов А.А. Анализ возможности использования свободно распространяемых сетевых сканеров//Вестник Адыгейского государственного университета. Серия: Естественно-математические и технические науки. 2014. Вып. 3 (142). С. 201-205.
3. Киздермишов А.А. К вопросу о применении CVE-совместимых сетевых сканеров//Вестник Адыгейского государственного университета. Серия: Естественно-математические и технические науки. 2015. Вып. 1 (154). С. 136-140.
4. Киздермишов А.А. К вопросу о построении модели нарушителя правил разграничения доступа к пользовательским информационном ресурсам//Вестник Адыгейского государственного университета. Серия: Естественно-математические и технические науки. 2015. Вып. 2 (161). С. 201-205.
5. Федеральный закон от 21.07.2014 №242-ФЗ (ред. от 31.12.2014) "О внесении изменений в отдельные законодательные акты Российской Федерации в части уточнения порядка обработки персональных данных в информационно-телекоммуникационных сетях".
6. Шестопал О. Visa снимает трансакции с гарантии // Газета.ru– Режим доступа: http://www.kommersant.ru/Doc/2819968 (дата обращения: 30.09.2015)
7. Шестоперов Д., Тодоров В. Google и Facebook угрожают европейцам [Электронный ресурс] / Технологии - IT-криминал 24.09.2015 //Газета.ru– Режим доступа: http://static.gazeta.ru/tech/2015/09/23/7774055/facebook_harms _europe_privacy.shtml (дата обращения: 30.09.2015)

Сведения об авторах

Киздермишов Асхад Асланчериевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры АСОИУ, АГУ, Askhad_75@rambler.ru, информационная безопасность.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Кодзоков А.Х.

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Нальчик, Россия.

Бесланеев З.О.

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Нальчик, Россия.

Аннотация

В работе найдено решение нелокальной краевой задачи для уравнения третьего порядка в виде ряда. Доказана единственность и существование данного решения методом разделения переменных.

ABOUT ONE NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMFOR THE EQUATION OF THE THIRD ORDER

Kodzokov A.H.

Kabardino-Balkarian state university, Nalchik, Russia.

Beslaneev Z.O.

Kabardino-Balkarian state university, Nalchik, Russia.

В прямоугольной области $D=\{(x,y):\,0<x<l\,,\,0<y<b\}$ рассматривается уравнение

$$u_{xxx}+\lambda\,u_{yy}+\mu\,u=0,\quad \lambda,\mu=const\,. \tag{1}$$

Различные краевые задачи для уравнения (1) как в ограниченной, так и в неограниченной областях при $\lambda=-1,\ \mu=0$ рассматривались в работах [1–7].

Задача. *Требуется найти регулярное в области D решение уравнения (1) из класса* $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^{3,2}_{x,y}(D)\cap C^{2}_{x}(D\cup\{x=0\})$, *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u_{xx}(0,y)=\alpha\,u(0,y)+\varphi_1(y),\ u(l,y)=\varphi_2(y),\ u_x(l,y)=\varphi_3(y),\quad 0<y<b\,, \tag{2}$$

$$u(x,0)=0,\ u(x,b)=0,\quad 0<x<l\,, \tag{3}$$

где $\varphi_i(y)$ *– заданные достаточно гладкие функции,* $i=1,2,3,\ \alpha=const$.

Справедлива следующая теорема единственности.

Теорема 1. *Пусть имеют место неравенства* $\alpha\le 0,\ \mu>0,\ \lambda<0$. *Тогда однородная задача имеет только тривиальное решение*.

Существование решения задачи (1) – (3) доказывается методом Фурье. Решение ищется в виде

$$u(x,y)=g(x)\cdot\upsilon(y).$$

Решение получается в виде ряда (4) при некотором фиксированном значении $\overline{x}\in(0,l)$

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\Delta_{1n}}{\Delta}e^{-\lambda_n\overline{x}}+\frac{\Delta_{2n}}{\Delta}e^{\lambda_n\overline{x}/2}\cos\left(\kappa_n\,\overline{x}\right)+\frac{\Delta_{3n}}{\Delta}e^{\lambda_n\overline{x}/2}\sin\left(\kappa_n\,\overline{x}\right)\right]\sin\left(\frac{\pi n\,y}{b}\right). \tag{4}$$

Теорема 2. *Если функции* $\varphi_i(y),\ i=\overline{1,3}$ *непрерывны, имеют кусочно – непрерывные производные первого порядка на отрезке* $y\in[0,b]$ *и удовлетворяют условиям согласования* $\varphi_i(0)=\varphi_i(b)=0,\ i=1,2,3$*, то ряд (4) представляет собой решение уравнения (1) из требуемого класса* $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^{3,2}_{x,y}(D)\cap C^{2}_{x}(D\cup\{x=0\})$.

В данной работе доказана однозначная разрешимость краевой задачи для уравнения (1) в прямоугольной области D.

Литература

1. Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. // Новосибирск: НГУ, 1983 г. – 84 с.
2. Абдиназаров С. О единственности решения одной краевой задачи типа задачи Бицадзе – Самарского для уравнения третьего. Доклады АН УзССР, №9. – 1982. – с. 13–15.
3. Апаков Ю.П. К решению краевых задач для уравнения $u_{xxx}-u_y=0$ в неограниченных областях. // ФАН. - №3. – 2006 г. – с. 17 – 20.
4. Ионкин Н. И., Моисеев Е. И. О задаче теплопроводности с двухточечным краевым условием. // Дифференц. уравнения. 1979, Т. 15, №7, с. 1284 – 1295.

5. Ионкин Н.И. Об устойчивости одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. // Дифференц. уравнения. 1979, Т. 15, №7, с. 1280 – 1283.
6. Иргашев Ю. Некоторые краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, сб. «Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения». – Ташкент: ФАН, 1976 г. – с. 17-31.
7. Иргашев Ю., Апаков Ю.П. Первая краевая задача для уравнения третьего порядка псевдоэллиптического типа. Уз. МЖ. - 2006 г. - №2. – с. 44 – 51.

Сведения об авторах

Кодзоков Азамат Хасанович, старший преподаватель кафедры МАиТФ, КБГУ, kodzoko@mail.ru, дифференциальные уравнения, интегральные уравнения, вероятность и сатистика.

Бесланеев Залимбек Олегович, старший преподаватель кафедры ИМОАС, КБГУ, zalimbach@mail.ru, дифференциальные уравнения, информационная безопасность, моделирование данных, языки высокого уровня.

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСТЕПЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Кожевникова Л.М.

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Россия,

Каримов Р.Х.

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Россия,

Хаджи А.А.

Тюменский государственный университет, Тюмень Россия.

Аннотация

Для некоторого класса анизотропных стационарных уравнений с нестепенными нелинейностями установлены оценки скорости убывания решения задачи Дирихле на бесконечности в неограниченных областях.

ESTIMATES OF SOLUTIONS OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE STATIONARY EQUATIONS WITH NONPOWER NONLINEARITIES IN UNBOUNDED DOMAINS

Kozhevnikova L.M.

Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia,

Karimov R.H.

Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia,

Khadzhi A.A.
Tyumen State University, Tyumen, Russia

Пусть $\boldsymbol{\Omega}$ - произвольная неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}_n$, $n \geq 2$. Для анизотропных квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка рассматривается задача Дирихле

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (a_\alpha(x, u, \nabla u))_{x_\alpha} - a_0(x, u, \nabla u) = 0, \quad x \in \Omega; \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Предполагается, что функции $a_\alpha(x, s_0, s)$, $\alpha = 0, \ldots, n$, измеримы по $x \in \Omega$ для $\mathbf{s} = (s_0, s) = (s_0, s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}_{n+1}$, непрерывны по $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}_{n+1}$ для почти всех $x \in \Omega$. Пусть существуют измеримые неотрицательные функции $\psi(x), \Psi(x) \in L_{1,loc}(\overline{\Omega})$ и положительные числа $\bar{a}, \hat{A}$ такие, что для п.в. $x \in \Omega$ и $\boldsymbol{s} = (s_0, s), \boldsymbol{t} = (t_0, t) \in \mathbb{R}_{n+1}$, $\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{t}$ справедливы неравенства:

$$\sum_{\alpha=0}^{n} a_\alpha(x, s_0, s) s_\alpha \geq \bar{a} \sum_{\alpha=0}^{n} B_\alpha(s_\alpha) - \psi(x); \tag{3}$$

$$\sum_{\alpha=0}^{n} \overline{B}_\alpha\big(a_\alpha(x, s_0, s)\big) \leq \hat{A} \sum_{\alpha=0}^{n} B_\alpha(s_\alpha) + \Psi(x); \tag{4}$$

$$\sum_{\alpha=0}^{n} \big(a_\alpha(x, s_0, s) - a_\alpha(x, t_0, t)\big)(s_\alpha - t_\alpha) > 0. \tag{5}$$

Здесь, что N-функции $B_0(z)$, $B_1(z)$,…, $B_n(z)$ и дополнительные к ним $\bar{B}_0(z)$, $\bar{B}_1(z)$,…, $\bar{B}_n(z)$ удовлетворяют Δ_2-условию.

В качестве примера можно рассмотреть уравнение

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \Big(B'_\alpha(u_{x_\alpha}) + f_\alpha(x)\Big) - B'_0(u) - f_0(x) = 0 \tag{6}$$

с непрерывно дифференцируемыми N-функциями $B_0(z), B_1(z), \ldots, B_n(z)$. Для уравнения (6) все условия (3) – (5) выполняются.

В работе [1] Л.М. Кожевниковой, А.А. Хаджи для уравнения (1) с функциями, подчиняющимися условиям (3) – (5), доказано существование решений однородной задачи Дирихле в произвольных неограниченных областях. При дополнительных требованиях на структуру уравнения установлена единственность решения задачи (1), (2).

В настоящей работе получены оценки, характеризующие поведение решений задачи (1), (2) при $|x| \to \infty$ в неограниченных областях Ω. Оценка степенного характера установлена для решений анизотропных уравнений в произвольных неограниченных областях. А для "нешироких" неограниченных областей установлена экспоненциальная оценка убывания на бесконечности решений изотропных уравнений.

Сначала приведем некоторые сведения из теории N-функций [2]. Неотрицательная непрерывная выпуклая вниз функция $M(z), z \in \mathrm{R}$, называется N-функцией, если она четна и

$$\lim_{z\to 0}\frac{M(z)}{z}=0,\quad \lim_{z\to\infty}\frac{M(z)}{z}=\infty.$$

N-функция

$$\overline{M}(z)=\sup_{y\geq 0}(y|z|-M(y))$$

называется дополнительной к N-функции $M(z)$. N-функция $M(z)$ удовлетворяет Δ_2-условию, если существуют такое число $c>0$, что $M(2z)\leq cM(z)$ для любых $z\in R$.

Для N-функций $B(z)$ и $M(z)$ записывают $B(z)\prec M(z)$, если существуют числа $l>0$ и $z_0>0$ такие, что $B(z)\leq M(lz)$, $z\geq z_0$.

Будем считать, что существует такое $0<\varepsilon<1$, что выполнены условия

$$B_\alpha(z^{1+\varepsilon})\prec B_0(z),\quad \alpha=1,2,\dots,n. \tag{7}$$

В работе [1] доказана

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (3) – (5), (7), *тогда существует обобщенное решение* $u(x)$ *задачи* (1), (2).

Обозначим $\mathbf{B}(v)=B_0(v)+\sum_{\alpha=1}^{n}B_\alpha\left(v_{x_\alpha}\right)$, $\|v\|_{1,Q}$ - норма в пространстве $L_1(Q)$.

Степенная оценка решения задачи (1), (2) получена при условии, что:

$$B_\alpha(z)=c_\alpha|z|^{p_\alpha},\quad |z|\leq 1,\quad p_\alpha>1,\quad c_\alpha>0,\quad \alpha=0,1,\dots,n. \tag{8}$$

Считаем, что показатели $p_\alpha,\ \alpha=1,\dots,n$ упорядочены: $p_1\geq p_2\geq\ldots\geq p_n$ и подчиняются условиям:

$$p_0>p_1,\quad \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{1}{p_\alpha}>1. \tag{9}$$

Тогда числа $q_\alpha=\frac{p_0p_\alpha}{p_0-p_\alpha}$, $\alpha=1,\dots,n$, также упорядочены: $q_1\geq q_2\geq\ldots\geq q_n$. Предполагаем, что

$$q_n>n. \tag{10}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (3) – (5), (7) – (10). *Тогда для обобщенного решения задачи* (1), (2) *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{B}(u)\|_{1,\Omega(r/2)}\ \mathcal{M}_1\left(r^{n-q_n}+\|\psi+\Psi\|_{1,\Omega(r)}\right), \tag{11}$$

$r>2$, *в которой* $\Omega(r)=\{x\in\Omega\ |\ |x|<r\}$.

В частности, из оценки (11) при $\psi=\Psi=0$ в $\Omega(2r)$ следует, что скорость убывания решения задачи (1), (2) на бесконечности не ниже степенной.

Пример 1. Пусть $\mathrm{n}=3,\ \mathrm{p}_1=11/3,\ \mathrm{p}_2=11/34, \mathrm{p}_3=11/5$,

$$B_\alpha(z)=\begin{cases}|z|^{p_\alpha}, & |z|\leq 1;\\ |z|^{p_\alpha-1}(\ln|z|+1), & |z|>1\end{cases}\qquad \alpha=1,2,3.$$

Возьмем

$$B_0(z) = \begin{cases} \frac{|z|^8}{8}, & |z| < 1; \\ \frac{|z|^{32}}{32} + \frac{3}{32}, & |z| \geq 1 \end{cases}.$$

Рассмотрим функции

$$a_\alpha(\mathrm{x}, \mathrm{z}) = f_\alpha(\mathrm{x}) + \begin{cases} p_\alpha |z|^{p_\alpha - 2} z, & |z| < 1, \\ |z|^{p_\alpha - 3} z\big((p_\alpha - 1)\ln|z| + p_\alpha\big), & |z| \geq 1 \end{cases}, \quad \alpha = 1,2,3,$$

$$a_0(\mathrm{x}, \mathrm{s}_0) = |\mathrm{s}_0|^{[6,30]}\mathrm{s}_0 + f_0(\mathrm{x}).$$

По теореме 1 существует обобщенное решение задачи (1). Поскольку $1/\bar{p}_1 + 1/\bar{p}_2 + 1/\bar{p}_3 = 12/11 > 1$, $q_3 = \frac{\bar{p}_0 \bar{p}_3}{\bar{p}_0 - \bar{p}_3} = 88/29 > 3$, то условия (9), (10) выполнены. Согласно теореме 2, обобщенное решение задачи (1), (2) подчиняется оценке

$$\|\mathbf{B}(u)\|_{1,\Omega(r/2)} \leq M\big(\mathrm{r}^{-1/29} + \|\psi + \Psi\|_{1,\Omega(r)}\big), \qquad \mathrm{r} > 2.$$

В следующей теореме установлена экспоненциальная оценка решения изотропного уравнения (1)

$$B_\alpha(z) = B(z), \quad \alpha = 1,2,\dots,n, \tag{12}$$

в областях, подчиняющихся условию

$$\operatorname{diam}\gamma(r) \leq D, \quad r \geq r_1, \ \gamma(r) = \{x \in \Omega \mid |\mathrm{x}| = \mathrm{r}\}. \tag{13}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (3) – (5), (7), (12), (13). *Тогда существуют положительные числа* κ, $\mathcal{M}_2$, r_0 *такие, что решение* $u(x)$ *задачи* (1), (2) *при всех* $r \geq r_0$, *подчиняется оценке*

$$\|\mathbf{B}(u)\|_{1,\Omega(r/2)} \leq \mathcal{M}_2\big(\exp(-\kappa r) r^{n-1} + \|\psi + \Psi\|_{1,\Omega(2r)}\big). \tag{14}$$

Из оценки (14) следует, что скорость убывания решения при $|x| \to \infty$ в неограниченных областях, нерасширяющихся на бесконечности, имеет по крайней мере экспоненциальный характер.

Введем обозначение

$$\mathrm{z}^{[\mathrm{c},\mathrm{d}]} = \begin{cases} \mathrm{z}^{\mathrm{c}}, & 0 < \mathrm{z} < 1; \\ \mathrm{z}^{\mathrm{d}}, & z \geq 1. \end{cases}$$

Пример 2. Пусть $\mathrm{n} > 2$, $\big(1 + \sqrt{1 + 4\mathrm{n}}\big)/2 < p < n$,

$$B(z) = \begin{cases} |z|^{p-1}\left(-\ln|z| + \frac{\mathrm{p}+1}{\mathrm{p}-1}\right), & |z| < 1; \\ \frac{2}{\mathrm{p}-1} + |z|^{p-1}(\ln|z| + 1), & |z| \geq 1. \end{cases}$$

Положим $p_0 = \frac{n(p-1)}{n-p+1}$ и

$$B_0(z) = \begin{cases} |\mathrm{z}|^{\mathrm{p}_0 - 1}\left(-\ln|\mathrm{z}| + \frac{\mathrm{p}_0+1}{\mathrm{p}_0-1}\right), & |z| < 1; \\ \frac{2}{\mathrm{p}_0-1} + |\mathrm{z}|^{\mathrm{p}_0-1}(\ln|\mathrm{z}| + 1), & |z| \geq 1. \end{cases}$$

Рассмотрим функции

$$a_\alpha(\mathrm{x}, \mathrm{z}) = f_\alpha(\mathrm{x}) + |z|^{p-3} z\left((p-1)\big|\ln|z|\big| + p\right), \alpha = 1, \dots, n,$$

$$a_0(x, z) = f_0(\mathrm{x}) + |z|^{p_0 - 3} z\left((p_0 - 1)\big|\ln|z|\big| + p_0\right).$$

По теоремам 1,3 существует обобщенное решение задачи (1), (2) в областях, удовлетворяющих условию (13), и оно подчиняется оценке (14).

Полученные в работе оценки, согласуются с результатами статьи [2]. В ней О.А. Олейник и Ж.И. Диаз установили априорные оценки решения краевой задачи в неограниченных областях с однородными граничными условиями первого и второго типа (в частности задач Дирихле и Неймана) для полулинейных уравнений с переменными коэффициентами, на основе которых доказали существование и единственность решения.

Работа выполнена при поддержке СФ БашГУ (грант B15-13), РФФИ (грант № 13-01-00081-а).

Литература

1. Кожевникова Л. М., Хаджи А. А. Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях // Матем. сб. 2015. Т.206, №8, с. 99-126.
2. Рутицкий Я.Б., Красносельский М.А. Выпуклые функции и пространства Орлича / М.: Гос. издательство физ.-мат. лит.-ры, 1958.- 587 с.
3. Diaz J.I., Oleinik O.A. Nonlinear elliptic boundary-value problems in unbounded domains and the asymptotic behaviour of its solution // C. R. Acad, Sci. Paris. 1992. V. 315, № 1, p. 787-792.

Сведения об авторах

Кожевникова Лариса Михайловна, доктор физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры математического анализа Стерлитамакского филиала Башкирского государственного университета, kosul@mail.ru, дифференциальные уравнения в частных производных.

Каримов Руслан Халикович, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры математического анализа Стерлитамакского филиала Башкирского государственного университета, ruslan7k7@mail.ru, дифференциальные уравнения в частных производных.

Хаджи Анна Александровна, старший преподаватель кафедры алгебры и математической логики Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета, anna_5955@mail.ru, дифференциальные уравнения в частных производных.

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ ОБРАБОТКА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДАННЫХ НА ОСНОВЕ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Коробков В.Н.

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия.

Аннотация

Обработка пространственных данных (изогипсопахит, характеризующих мощность «разностного слоя»

между базисными поверхностями ближайших порядков) с целью построения векторных полей, моделирующих поля тектонического напряжения земной коры.

AUTOMATED PROCESSING OF SPATIAL DATA BASED ON VECTOR ANALYSIS

Korobkov V.N.
Adygeya State University, Maikop, Russia,

Пространственными данными являются сведения о пространственных объектах и их свойствах. К основным свойствам любых пространственных объектов относятся координатные и атрибутивные данные. Координатные данные определяют позиционные характеристики объекта и описывают его местоположение в заданной системе координат. Атрибутивные данные представляют собой совокупность характеристик, определяющих смысловое содержание объекта и могут содержать как качественные, так и количественные значения.

К пространственно-распределенной информации относятся данные об окружающем мире, представленные в виде топографических карт, схем или планов.

Автоматизация и усовершенствование процессов обработки пространственных данных является одной из задач геоинформационных систем (ГИС). В настоящее время геоинформационные технологии позволяют на основе манипулирования с пространственными данными выявить ранее неизвестные свойства объектов и взаимосвязей между ними. Это дает возможность делать новые фундаментальные суждения о механизмах природных процессов.

Исследование пространственных объектов с применением элементов векторного анализа для моделирования полей тектонических напряжений является одной из приоритетных задач, решаемых в Центре интеллектуальных геоинформационных технологий Адыгейского государственного университета.

Проведение подобных исследований невозможно без использования методов математического и компьютерного моделирования. Математическое моделирование предоставляет возможность количественно выражать географические закономерности в виде различных моделей, которые позволяют ответить на вопросы: как развивается система и что станет с ней при изменении внешних условий. Специфика математической модели в географии заключается в моделировании как отдельных компонентов географической среды, так и комплекса элементов, составляющих блоковую структуру земной коры.

В математическом понятии географическое поле – это такое разделение по земной поверхности количественной оценки, когда каждая ее точка характеризуется конкретной величиной (скаляром). Геометрическое место точек, каждая из которых представлена скаляром географического поля, определяет его статистическую поверхность.

Скалярное поле можно представить в виде картографической модели. Наиболее часто употребляется способ изолиний. Над поверхностями, представленными с помощью изолиний, можно проводить как стандартные математические операции: сложение, вычитание, умножение и деление, так и специфические операции, выполняемые над скалярными полями, например, вычисление градиента.

Физический смысл градиента заключается в том, что он перпендикулярен поверхности равного уровня в каждой ее точке и направлен в сторону наибыстрейшего изменения поля, а модуль градиента равен максимальному значению производной по направлению.

Для компьютерного моделирования важно наличие определенного программного обеспечения. В некоторых случаях возможно использование стандартного универсального программного обеспечения, такого как обычные текстовые и графические редакторы. Однако, в большинстве случаев необходимо специализированное программное обеспечение, предназначенное для определенного вида моделирования конкретных объектов.

Возможности для работы с пространственными данными зависят от выбранного программного обеспечения. В настоящее время наиболее распространенные системы управления базами данных (СУБД), такие как, Oracle Database, MS SQL Server, MySQL и PostgreSQL, предоставляют возможности хранения и обработки пространственной информации.

Для удобного отображения пространственной информации, в большинстве случаев, данные конвертируют из базы данных в специальный файл, который затем открывается с помощью графического редактора, например, Autodesk 3D Max, CorelDRAW, Adobe Photoshop. Одним из распространенных примеров таких файлов является шейпфайл (shapefile). Этот формат файла был введен американской компанией ERSI для использования в программном продукте ArcView GIS. Шейпфайл содержит геометрическую и атрибутивную информацию для набора объектов. Геометрия объектов хранится как форма, содержащая набор векторных координат.

Однако работать с пространственными данными в СУБД, а потом конвертировать их в файл специального формата для просмотра результата не всегда удобно. Уже разработан ряд программ, которые могут отображать пространственные данные непосредственно из базы данных. Одной из таких программ, пользующейся большой популярностью в России, является программа Quantum GIS (QGIS).

В результате анализа существующих программных продуктов, в качестве средства хранения пространственных данных была выбрана СУБД PostgreSQL, которая является свободно распространяемой, и имеет подключаемый модуля PostGIS, поддерживающий работу с пространственными объектами, определенными консорциумом OpenGIS.

Для реализации алгоритмов, построения и анализа векторного поля, было принято решение создания собственной информационной системы с использованием среда разработки Qt 4.8.4 с входящим в ее состав языком программирования С++. Главным преимуществом данной среды является наличие встроенной графической библиотеки OpenGL, располагающей широкими возможностями по созданию приложений для работы с графикой. Также существенным достоинством данной среды является ее кроссплатформенность и возможность использования свободно распространяемой версии. В поставку продукта входит большое количество визуальных компонентов для построения отображаемых на экране форм, что необходимо для создания удобного пользовательского интерфейса.

На основании имеющихся исходных данных разработан программный продукт, позволивший строить векторные поля, моделирующее пространственно-временную структуру поля тектонических напряжений территории Республики Адыгея [1]. Векторное поле строится по данным мощности «разностного слоя» между базисными поверхностями ближайших порядков, вычисленным по методу Философова. Для хранения и обработки векторного поля на ЭВМ применяется дискретный способ задания поля, то есть таблично со значениями проекций векторов в отдельных точках.

В результате, разработана автоматизированная системы построения и анализа векторного поля применительно к пространственным данным [2]. На рисунке 1 представлен результат выполнения алгоритма построения векторного поля по значениям изогипсопахит (изолиний равной мощности), которые характеризуют мощность «разностного слоя» между базисными поверхностями ближайших порядков.

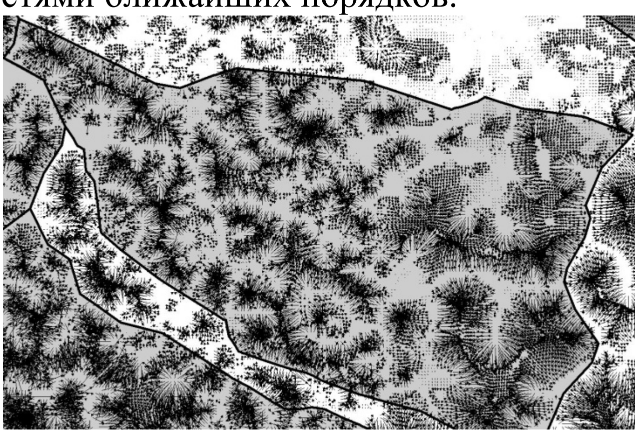


Рис.1. Векторное поле, построенное по заложениям изогипсопахит

Совмещение векторного поля с картосхемой современного блокового строения территории позволяет получить информацию о концентрации тектонических напряжений в пределах блоков, а так же точечных концентрациях тектонических напряжений.

На рисунке 2 представлен результат вычисления результирующих векторов в пределах тектонического блока, которые характеризуют дифференциацию тектонических напряжений в пределах данного блока [3].

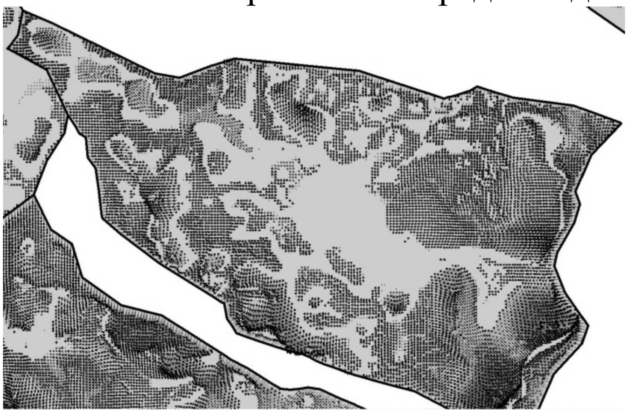


Рис.2. Векторное поле, моделирующее поле тектонических напряжений

Моделирование полей тектонического напряжения необходимо для определения пространственно-временной структуры поля тектонических напряжений территорий неограниченной площади, типа тектонических движений и характера движения тектонических блоков в целях прогнозирования тектонических движений, сейсмических проявлений различной магнитуды и мониторинга безопасности производственной инфраструктуры.

Литература

1. Варшанина Т.П., Плисенко О.А., Солодухин А.А., Коробков В.Н. Структурно-подобная геодинамическая модель Краснодарского края и Республики Адыгея / Монография под ред. Б.И. Кочурова. – Москва-Майкоп: Изд. Дом «Камертон». 2011. – 128 с.
2. Коробков В.Н., Варшанина Т.П. Построение векторного поля для моделирования пространственно-временной структуры поля тектонических напряжений // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. 2011. № 4(91). С. 139-145.
3. Коробков В.Н. Алгоритм анализа векторного поля применительно к полям тектонических напряжений в земной коре // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. 2014. № 4(147). С. 175-179.

Сведения об авторах

Коробков Виктор Николаевич, старший преподаватель кафедры АСОИУ ФГБОУ ВПО «Адыгейский государственный университет», vicor2004@mail.ru, область научных интересов: проектирование баз данных, системы интеллектуального анализа данных, геоинформационные системы.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТРУКТУРЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИНФЕКЦИОННЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ НА ПРЕДФРАКТАЛЬНОМ ГРАФЕ С ДВУДОЛЬНОЙ ЗАТРАВКОЙ

Кочкаров А.М.

Северо-Кавказская государственная гуманитарно-технологическая академия, Черкесск, Россия

Кунижева Л.А.

Северо-Кавказская государственная гуманитарно-технологическая академия, Черкесск, Россия

Аннотация

Построена математическая модель оптимизации структуры распространения инфекционных заболеваний на предфрактальном графе с двудольной затравкой.

MATHEMATICAL MODEL OF THE STRUCTURE OF THE SPREAD OF INFECTIOUS DISEASES PREFRACTAL GRAF WITH A DICOTYLEDONOUS FUSE

Kochkarov A.M.

The North Caucasian state Humanities and Technology Academy, Cherkessk, Russia

Kunizheva L.A.

The North Caucasian state Humanities and Technology Academy, Cherkessk, Russia

По данным Всемирной организации здравоохранения ежегодно на земном шаре переносят инфекционные заболевания свыше 1млрд. человек.

В течение короткого срока могут заразиться большие массы людей. Поэтому важно знать признаки инфекционных заболеваний, динамику и пути их распространения, способы предупреждения и правила поведения [1-3, 4-6,7].

Инфекционные заболевания возникают при наличии трех основных факторов:

• источники инфекции;

• благоприятных условий для распространения возбудителей;

• восприимчивого к заболеванию человека.

Если исключить из этой цепи хотя бы одно звено, эпидемический процесс прекращается. Следовательно, целью предупреждающих мероприятий является воздействие на источник инфекции, чтобы уменьшить обсеменение внешней среды, локализовать распространение микробов, а также повысить устойчивость населения к заболеваниям.

Основными возбудителями инфекционных болезней являются вирусы, бактерии и простейшие. Заболевший человек сам становится источником возбудителей болезни. Он может заразить окружающих при контакте с ними или путем обсеменения возбудителями различных объектов внешней среды. Поскольку главным источником инфекции является больной человек или бактерионоситель, то необходимо раннее его выявление, немедленная изоляция и госпитализация. Рассмотрим ситуацию, когда в крупном городе началось распространение эпидемии и власти должны принять срочные меры по ее предотвращению. Проводить ли массовую вакцинацию населения или ввести карантин? Чтобы выбрать оптимальную стратегию управления распространением эпидемии нужно смоделировать сценарии развития событий [8-11]. Имитация эпидемиологической ситуации позволяет проверить на модели эффективность различных мероприятий в борьбе со вспышками инфекционных заболеваний. Моделирование путей перемещения жителей города дает динамическую картину социальной сети - аналогичную цепь контактов использует возбудитель инфекции, распространяясь в популяции. Под социальной сетью на качественном уровне понимается социальная структура, состоящая из множества агентов (субъектов индивидуальных или коллективных, например, индивидов, семей, групп и организаций) и определенного на нем множества отношений (совокупности связей между агентами, например, это знакомство, дружба, сотрудничество). Формально социальная сеть представляет собой граф $G=(V, E)$, в котором V - множество вершин (агентов) и E - множество ребер, соответствующих взаимодействию агентов. Обозначим через вершины $v_i \in V$, $i=1,2,...n$ отдельно взятых членов семьи, состоящей из n человек, проживающих вместе. Предположим, что семья поделена на две группы лиц, которые по разным причинам (биологическая особенность, половая принадлежность, временной промежуток) не могут заражать друг друга. Обозначим через W' - одну из групп, а через W'' - другую. Соединим две вершины $v_i \in W'$, и $v_j \in W''$, ребром $e_{ij} \in E$, в случае, когда между членами v_i и v_j имеется контакт, достаточный для заражения друг друга исследуемым инфекционным заболеванием.

Модель контактов между членами такой семьи будет представлять двудольный граф $H=(W',W'',Q)$.

Таким образом, на этапе $l=1$ модель, описывающая контакты в семье, будет представлять собой n-вершинный двудольный граф $G_1=(V_1,E_1)$.

На этапе $l=2$ модель, описывающая контакты семей, проживающих, например, на одной лестничной площадке представляется графом,

$G_2 = (V_2, E_2)$, который можно получить из графа $G_1 = (V_1, E_1)$, применяя операцию ЗВЗ [12] к каждой ее вершине. Продолжая этот процесс, можно описать контакты всего многоэтажного дома, жилого квартала, микрорайона, города и т.д.

Повторяя этот процесс при $l = L$ структура контактов будет представлять собой $2^L -$ дольный предфрактальный [13] граф, $G_L = (V_L, E_L)$, порожденный двудольной затравкой $H = (W', W'', Q)$. Если контакты людей в семье происходят по-другому, то затравка будет другого типа.

Процесс построения предфрактального графа $G_L = (V_L, E_L)$, можно обобщить на тот случай, когда операция ЗВЗ производится множеством затравок [13] $H = (H_1, H_2, ...H_s)$, $s \in Z$.

Полученная таким образом модель будет более адекватной, если дополнительно учесть ряд факторов:

1. Важной особенностью структуры распространения инфекционного заболевания является то, что контакт человека с членами своей семьи оказывается более частым, тесным и продолжительным чем с соседями, живущими в расположенной рядом квартире, а контакты с жителями соседних подъездов будут еще более слабее и т.д. Эти характеристики с течением времени меняются пропорционально, поэтому всем ребрам предфрактального графа $G_l = (V_l, E_l)$, $l = 1,2,...L$ в зависимости от их ранга определим вес по правилу: $w_r(e_{s_r}) \in (k^{r-1}a, k^{r-1}b)$, где $r = 1,2,...l -$ ранг ребра, $s_r -$ номер ребра $r -$го ранга, k $(k > 1) -$ коэффициент пропорциональности, влияющий на изменение веса ребра.

2. Из теории эпидемий известно, что каждый человек обладает определенным уровнем иммунитета от того или иного инфекционного заболевания: часть людей делает сезонные прививки, в этом случае они становятся неподверженными инфицированию и обладают максимальным уровнем иммунитета, люди с ослабленной иммунной системой становятся более подверженными инфицированию. Чтобы учесть этот факт, присвоим вершинам графа $G = (V, E)$, представляющего собой модель контактов людей, веса $w(v_i)$, $v_i \in V$, $i = 1,2,...n$, $0 \le w(v_i) \le 1$. Под весом вершины $w(v_i)$ будем понимать коэффициент, пропорциональный степени защищенности от инфекционного заболевания. Если человек входит в контакт с инфицированным, то в математической интерпретации он заражается заболеванием с некоторой вероятностью $w(v_i) = \beta$, $0 \le \beta \le 1$.

Возможны следующие случаи:

1) $w(v_i) = 1$ – человек не подвержен заболеванию, ему сделана прививка или человек уже переболел определенным заболеванием и больше ему не подвержен;

2) $w(v_i)=0$ – человек обязательно будет инфицирован при осуществлении контактов.

Можно заключить, что построенный таким образом предфрактальный граф, взвешенный по всем вершинам и ребрам, в полной мере отражает контакты людей, объединенных связями между собой.

Зная, как происходит распределение особой инфекционной болезни с такими характеристиками, мы должны принять меры – провести профилактическую работу, то есть выделять двудольные затравки на существующей структуре контактов в семье, жилом квартале, микрорайоне, районе, городе, регионе и т.д. Для этого строим математическую модель. Далее необходимо определить критерии оптимальности проведения профилактической работы, так чтобы минимизировать суммарное время на локализацию инфекции, охватить максимальное количество очагов заражения, минимизировать расходы, связанные с вакцинацией.

Литература

1. Бароян О.В. Рвачев Л.А. Математика и эпидемиология.- М.: Знание, 1977.-63с.
2. Бароян О.В. Рвачев Л.А. Иванников Ю.Г. Моделирование и прогнозирование эпидемий гриппа на территории СССР.- М.: Институт эпидемиологии и микробиологии имени Н.Ф. Гамалеи, 1977.- 546с.
3. Бароян О.В. Рвачев Л.А. Прогнозирование эпидемий гриппа в условиях СССР/ Вопросы вирусологии.- 1978.- № 2.- С. 131-137.
4. Бейли Н. Математика и биология в медицине.- М.: Мир, 1970.- 326с.
5. Беляков В. Д., Яфаев Р.Х. Эпидемиология.- М.: Медицина, 1989.- 416с.
6. Боев Б.В. Современные этапы математического моделирования процессов развития и распространения инфекционных заболеваний // Эпидемиологическая кибернетика: модели, информация, эксперименты-М.:1991.-с.6-13.
7. Черкасский Б.Л. Инфекционные и паразитарные болезни человека- М.: Медицинская газета, 1994. 617 с.
8. Воробьев А.А. Оценка вероятности использования биоагентов в качестве биологического оружия.// Эпидемиология и инфекционные болезни.- 2001.-С.54-56.
9. Воробьев А.А. , Боев Б.В., Бондаренко В.М., Гинцбург А.Л. Проблема биотерроризма в современных условиях // ЖМЭИ. - 2002. - №3.-С.3
10. Салпагаров М..Б., Кочкаров А.А., Кочкаров Р.А. Потоковое моделирование структурного разрушения сложных систем // Труды XIV Международной конференции «Проблемы управления безопасностью сложных систем». – М.: Издательство Российского государственного гуманитарного университета, 2006.- С. 454-456.
11. Утакаева И.Х., Кочкаров А.М. Моделирование процесса распространения эпидемии и нахождения возможных очагов заражения на предфрактальном графе // Сборник трудов III –ой Всероссийской научно-практической конференции «Перспективные системы и задачи управления». – Таганрог: Издательство Таганрогского технологического института ЮФУ, 2011.-С. 273-283.
12. Харари Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1973.-300с.
13. Кочкаров А.М. Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. Нижний Архыз: РАН САО, 1998

Сведения об авторах

Кочкаров Ахмат Магомедович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики, Северо-Кавказская государственная гуманитарно-технологическая академия, область научных интересов: топологические характеристики теоретико-графовой модели крупномасштабной кластеризации материи во Вселенной, асимтотические точные алгоритмы решения многокритериальной задачи покрытия графа цепями, распознавание фрактальных графов.

Кунижева Лариса Адамовна, старший преподаватель кафедры математики, Северо-Кавказская государственная гуманитарно-технологическая академия, область научных интересов: математические методы в экономике, распознавание фрактальных графов.

ШКАЛА ПРОСТРАНСТВ ГЕЛЬДЕРА-ЗИГМУНДА И ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Кряквин В.Д.

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия

Аннотация.

В докладе обсуждаются полученные в последние годы результаты о действии псевдодифференциальных операторов (в том числе и переменного порядка) в пространствах Гельдера-Зигмунда на Rn (в том числе отрицательного и переменного порядка гладкости) и их свойства.

SCALE OF HOLDER-ZYGMUND SPACES AND PSEUDODIFFERENTIAL OPERATORS

Kryakvin V.D.

Southern Federal University, Rostov-na-Donu, Russia

В докладе рассматриваются псевдодифференциальные операторы с символами из классов Л. Хермандера в пространствах Гельдера-Зигмунда на R^n. Обсуждаются следующие результаты работ [1–4]:

1. Введение шкалы пространств Гельдера-Зигмунда для любых показателей гладкости, в том числе отрицательных и переменных. Эквивалентность норм, построенных с использованием конечных разностей и разбиения единицы Литтлвуда-Пэли.

2. Теоремы об ограниченности псевдодифференциальных операторов в введенных шкалах пространств Гельдера-Зигмунда.

3. Условия компактности псевдодифференциальных операторов и фредгольмовости псевдодифференциальных операторов со слабо меняющимися символами.

4. Beals R. – type характеризация псевдодифференциальных операторов в шкале пространств Гельдера-Зигмунда. Замкнутость класса

рассматриваемых псевдодифференциальных операторов относительно взятия обратного.

5. Независимость спектра и существенного спектра псевдодифференциальных операторов от выбора шкалы пространств Гельдера-Зигмунда или шкалы бесселевых потенциалов.

Литература

1. Кряквин В. Д. Критерии компактности и нетеровости псев-додифференциальных операторов в весовых пространствах Гельдера-Зигмунда. // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, №1. С.101-110.
2. Кряквин В. Д., Омарова Г.П. Об ограниченности псевдодифференциальных операторов в пространствах Гельдера-Зигмунда. // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2011. N4. С. 45-48.
3. Кряквин В. Д. Характеризация псевдодифференциальных операторов в пространствах Гельдера-Зигмунда // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, №3. С.318-324.
4. Кряквин В. Д. Об ограниченности псевдодифференциальных операторов в пространствах Гельдера-Зигмунда переменного порядка // Сибирский математический журнал. 2014. Т.55, №6. С.1315-1327.

Сведения об авторах

Кряквин Вадим Донатович, кандидат физико-математических наук, доцент, заместитель директора, институт математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, vadkr@math.sfedu.ru, математика и ее применение.

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАФА ДЛЯ ПОИСКА ОБЪЕКТОВ В ВИДЕОПОТОКЕ

Лошкарёв И.В.

ФГБАУ ВПО «Южный федеральный университет», Ростов-на-Дону, Россия

Демяненко Я.М.

ФГБАУ ВПО «Южный федеральный университет», Ростов-на-Дону, Россия

Аннотация

Описывается метод отслеживания объектов на видео. Метод основан на извлечении контурного представления объекта и обобщенном преобразовании Хафа. Приведено краткое описание алгоритма и его основные ограничения.

GENERALIZED HOUGH TRANSFORM FOR OBJECT TRACKING IN VIDEO SEQUENCE

Loshkarev I.V.

Southern Federal Univercity, Rostov-on-Don, Russia

Демяненко Я.М.

Southern Federal Univercity, Rostov-on-Don, Russia

Введение. Одним из перспективных направлений развития информационных систем на производстве являются системы мониторинга функционального состояния человека.

Устоявшимся стандартом для отслеживания лиц на изображении является метод Виолы-Джонса [1]. Однако использование метод Виолы-Джонса при обработке видеопотока оказывается ограниченным. Например, метод теряет лицо при повороте или наклоне головы.

Альтернативой данному подходу является метод поиска шаблона, динамически адаптируемого под содержание видео. Метод Хафа с успехом применяется для поиска кривых заданных аналитически. Обобщенное представление метода можно использовать для поиска кривой произвольного вида, заданных шаблоном [2].

Предлгаемый метод. Начальное предположение о положении лица на изображении получается при помощи метода Виолы-Джонса. Для применения метода Хафа в обобщенном виде, необходимо иметь начальное описание формы искомого объекта. Начальное предположение о форме и положении лица на изображении получается при помощи метода Виолы-Джонса. Затем строится шаблон на основе данных кадра видео. Для каждого кадра строится контурное представление, к которому применяется преобразование Хафа. Изменение шаблона происходит в тот момент, когда расстояние между контурами на видео и шаблоном превосходит пороговое значение. Это сигнализирует о значительном изменении контура лица, а значит необходимо провести перерасчет шаблона, с учетом новых данных о контуре. Таким образом, появляется возможность отслеживать изменение в ориентации лица, что снижает вероятность его полной потери.

В работе предлагается использование модификации обобщенного преобразования Хафа для поиска произвольных контуров. Целевой контур задаётся не аналитически, а шаблоном. Для каждой точки контура хранится не только её координаты x_i y_i, но и угол Φ_i – направление градиента в этой точке (Рис.1). Это делает метод более устойчивым к аффинным преобразованиям. Таким образом, шаблон задается с учетом локальной ориентации контура.

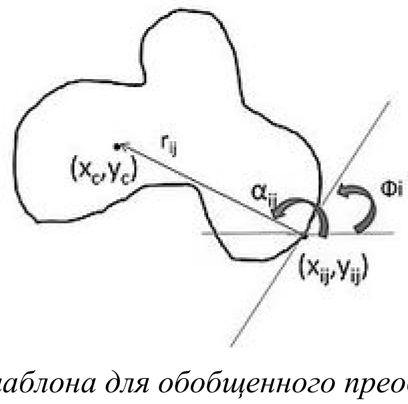


Рис. 1. Построение шаблона для обобщенного преобразования Хафа

Для каждого кадра видео используется предварительная обработка. Изображение переводится в оттенки серого, затем при помощи линейного фильтра Гауса устраняются лишние детали и шум на видео.

Метод Хафа чувствителен к фоновому шуму [3]. Для уменьшения количества фоновых пикселей, каждый кадр видео очищается от статичных контуров. Контуры, которые не меняют своего положения между кадрами, удаляются. Это позволяет снизить число ложных результатов преобразования Хафа [4]. Затем происходит получения всех контуров найденной области лица с помощью стандартного метода Кэнни (Рис.2).

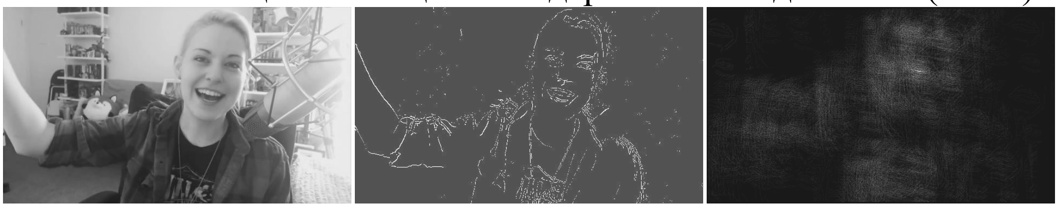


Рис. 2 Контурный детектор и результат преобразования Хафа

В предлагаемом методе шаблон корректируется по информации из предыдущего кадра. Методу требуется определение начального шаблона, а, в случае полной потери искомой области, требуется определение шаблона заново. Изначальное предположение о форме лица составляется при помощи метода Виолы-Джонса. Использование метода необходимо для начальной локализации, ввиду отсутствия некоторой предыдущей информации о контурном представлении лица. Чтобы избавится от ложных положительных результатов применения метода, вводится ограничение θ на изменение положения лица между кадрами.

Чтобы исключить ошибку при неверном определении положения лица, приводящую к появлению некорректного шаблона, вводится ограничение на изменение положения лица между кадрами – θ. Пороговые значения φ и θ устанавливаются посредством обучения системы на наборе тестовых данных.

Заключение. Метод работает при условии, что на видео находится один человек. Кроме того, на результат преобразования Хафа может влиять наличие фоновых объектов. При анализе видео можно увидеть, что метод справляется с постепенным поворотом и наклоном головы, если движение происходит в пределах 10-15 градусов между кадрами. В этих условиях метод способен распознать поворот в полный профиль.

Литература

1. P. Viola and M.J. Jones, «Robust real-time face detection» // International Journal of Computer Vision, vol. 57, no. 2, 2004, p. 117-136
2. D.H. Ballard, «Generalizing the Hough Transform to Detect Arbitrary Shapes» // Pattern Recognition, vol. 13, no.2, 1981, p.111-122
3. Leavers V.F. Which Hough transform? // Computer Vision Graphics and Image Understanding:Image Processing. 1993. Vol. 58, no. 2. P. 50-64.

Сведения об авторах

Лошкарёв Илья Витальевич, ассистент кафедры прикладной математики и программирования, Институт математики, механики и компьютерных наук, ФГБАУ ВПО «Южный федеральный университет», Россия 344090 Ростов-на-Дону ул.Мильчакова 8а, loshkarev.i@gmail.com, обработка изображений, компьютерное зрение, мобильные технологии.

Демяненко Яна Михайловна, к. т. н. , доцент кафедры прикладной математики и программирования, Институт математики, механики и компьютерных наук, ФГБАУ ВПО «Южный федеральный университет», Россия 344090 Ростов-на-Дону ул.Мильчакова 8а, dem@math.sfedu.ru, компьютерная графика, веб-технологии, обработка изображений, компьютерное зрение.

ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Макаова Р.Х.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Институт прикладной математики и автоматизации», Нальчик, Россия

Аннотация

В работе исследуется однозначная разрешимость второй краевой задачи для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной.

SECOND BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE GENERALIZED HALLAIRE EQUATION FRACTIONAL ORDER

Makaova R.Kh.

Institute of Applied Mathematics and Automation, Nalchik, Russia

В прямоугольной области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < r, 0 < y < T\}$ рассматривается обобщенное уравнение Аллера вида

$$D_{0y}^{\alpha} u(x, \eta) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[au(x, y) + bD_{0y}^{\alpha} u(x, \eta)\right], \qquad (1)$$

где a, b – заданные положительные числа; D_{0y}^{α} – оператор дробного дифференцирования в смысле Римана - Лиувилля по переменной y порядка $\alpha \in]0,1]$ с началом в точке 0 и с концом в точке y [1, с. 9], определяемый следующим образом:

$$D_{0y}^{\alpha} u(x, \eta) = \frac{\partial}{\partial y} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, \eta),$$

$$D_{0y}^{\alpha-1}u(x,\eta)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^y\frac{u(x,\eta)d\eta}{(y-\eta)^{\alpha}},$$

$$D_{0y}^{0}u(x,\eta)=u(x,y).$$

Здесь $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Уравнение (1) при $\alpha=1$ совпадает с обыкновенным уравнением Аллера

$$\frac{\partial u}{\partial y}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2}, \tag{2}$$

которое является уравнением псевдопараболического типа [2, с. 261].

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем функцию $u=u(x,y)$, такую, что $y^{1-\alpha}u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$, $D_{0y}^{\alpha}u$, $D_{0y}^{\alpha}u_{xx}\in C(\Omega)$ и удовлетворяющую уравнению (1).

Исследуется следующая

Задача. *Найти регулярное в области* Ω *решение уравнения* (1)*, удовлетворяющее следующим условиям*

$$\lim_{y\to 0}D_{0y}^{\alpha-1}u(x,\eta)=\varphi(x),\ 0\le x\le r, \tag{3}$$

$$u_x(0,y)=\nu(y),\ 0<y\le T, \tag{4}$$

$$u_x(r,y)=\nu_r(y),\ 0<y\le T, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$, $\nu(y)$, $\nu_r(y)$ *– заданные достаточно гладкие функции.*

При $\alpha=1$ задача (3) – (5) для уравнения (1) совпадает со второй краевой задачей для уравнения (2), решение которого выписано в явном виде в работе [3].

В данной работе доказана теорема однозначной разрешимости задачи (3) – (5) для уравнения (1).

Литература

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 272 с.
2. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. – 301 с.
3. Макаова Р. Х. Задача Трикоми для одного уравнения смешанного типа // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17, № 1. С. 22–24.

Сведения об авторе

Макаова Рузанна Хасанбиевна, младший научный сотрудник отдела «Уравнений математической биологии», Федеральное бюджетное научное учреждение «Институт прикладной математики и автоматизации», E-mail: Makaova.Ruzanna@mail.ru, область научных интересов: дифференциальные уравнения, математическое моделирование.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АНАЛОГОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Мамий А.Р.
Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия.

Аннотация
В статье приведены вычисления характеристик сложного сигнала при прохождении его через дифференцирующую цепь и аппаратная реализация устройства на операционных усилителях.

SYSTEM PERFORMANCE IDENTIFICATION WITH ANALOG COMPUTING

Mamiy A.R.
Adygeya State University, Maikop, Russia,

Использование аналоговых вычислений позволяет исследовать процессы, описываемые дифференциальными уравнениями. Одно из применений дифференциаторов, интеграторов, сумматоров и различных функциональных преобразователей на операционных усилителях (ОУ) заключается в их использовании для получения решения в режиме реального времени путем моделирования, при том, что решения уравнения могут не иметь аналитического решения.[1]

Найдем ток в последовательной *RL*-цепи, на которую воздействует синусоидальное напряжение, амплитуда которого преобразована с помощью логарифмического преобразователя с целью уменьшения динамического диапазона.

$$U_{вх}(t) = \ln(\sin(\omega \cdot t)) \tag{1}$$

Применим закон Кирхгофа к сумме падений напряжения в данной цепи:

$$U_{вх}(t) = U_L + U_R \tag{2}$$

Падение напряжения на сопротивлении равно

$$U_R = I \cdot R \tag{3}$$

Мгновенное значение падения напряжения на индуктивности имеет вид

$$U_L = -L\frac{dI}{dt} \tag{4}$$

Подставим выражения (3) и (4) в равенство (2) и получим уравнение

$$U_{вх}(t) = U_R + U_L = I \cdot R - L\frac{dI}{dt}$$

Интегрируя по времени обе части этого равенства, получим

$$\int U_{вх} dt = R\int Idt - LI$$

Решая это уравнение относительно *I*, и учитывая (1) найдем

$$I = \frac{R}{L}\int Idt - \frac{1}{L}\int \ln(\sin(\omega \cdot t)) \cdot dt\ ,$$

где $\ln(\sin(\omega \cdot t)) = U_{вх}$

Схема устройства, реализующая решение этого уравнения изображена на рис. 1.

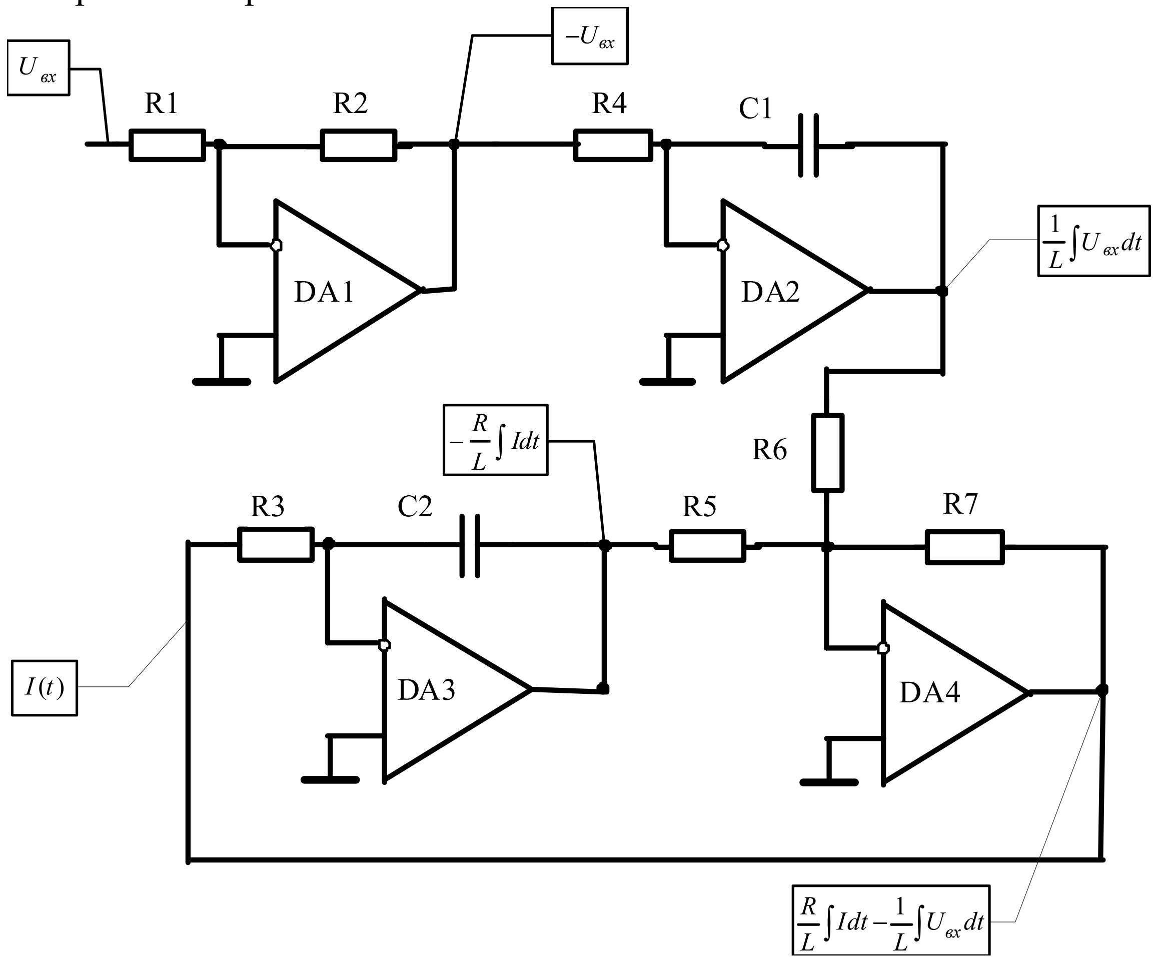


Рис. 1. Схема устройства, решающая уравнение $I = \frac{R}{L}\int Idt - \frac{1}{L}\int U_{вх} \cdot dt$

На ОУ DA1 реализован линейный инвертирующий усилитель. Его назначение изменить полярность входного сигнала. Коэффициент усиления равен единице и определятся соотношением – (R2/R1). На ОУ DA2 собран интегратор на вход которого поступает ($-U_{вх}$). На выходе кроме интеграла входного напряжения еще появляется коэффициент (1/L), где L – индуктивность, которая воздействует на входной сигнал. Используя соотношение (1/L) =(1/R4C1) или L=R4C1 можно определить величины R4 и C1. Кажущееся нарушение размерностей связано с тем, что на выходе интегратора вместо напряжения вычисляется ток и соответственно для устранения этого противоречия предполагается присутствие сопротивления R = 1 Ом, через который течет этот ток. Кроме этого интегратор инвертирует входной сигнал, меняет его полярность. Во втором интеграторе, собранном на DA3, учитывать подобное сопротивление необходимости нет, так как и на входе и на выходе характеристика одной размерности. Величины R3 и C2 выбираются из соотношения (1/R3C2)=(R/L). На ОУ DA4 собран сумматор, который складывает результаты, полученные с обоих интеграторов. При этом, масштабные коэффициенты равны единице, то есть R5=R7 и R6=R7.

Так как напряжение $U_{вх}$ переменное, то в интеграторах следует использовать корректирующие сопротивления R_p , которые подключаются параллельно конденсатору для ограничения усиления на низких частотах [2].

Вычислительные устройства на ОУ обладают невысокой точностью. Для уменьшения этого недостатка используются современные прецизионные ОУ с малым напряжением смещения нуля [3, 4]. Для предотвращения чрезмерных токов утечки вокруг входных выводов ОУ на печатной плате создают токопроводящее охранное кольцо, подключаемое к некоторой точке схемы с низким потенциалом.

Устройства на ОУ могут применяться в биомеханике двигательных действий в области реабилитации и в спорте [5, 6]. Применение подобных устройств оправдано в автоматике и системах управления, где контролируемый параметр связан множеством сложных зависимостей с различными факторами.

Литература

1. Волович Г.И. Схемотехника аналоговых и аналого-цифровых электронных устройств. 3-е изд. Стер./ Волович Г.И. - М.:Додека XXI, 2011. – 528 с.: ил. – (Серия «Схемотехника»).
2. Мамий А.Р., Тлячев В.Б. Операционные усилители. – Майкоп.: Изд-во АГУ, 2006. - 192 с.
3. Гавриков В. На любой вкус: новые операционные усилители от STMicroelectronics // Новости Электроники 2014 №6, Статья 6 URL http://www.compel.ru/lib/ne/2014/6/6-na-lyuboy-vkus-novyie-operatsionnyie-usiliteli-ot-stmicroelectronics
4. Amplifiers and comparators. Selection guide. – STMicroelectronics, 2012
5. Mamiy A.R., Zhukov V.I., Doronin A.M. Combined Development of Speed and Strength Qualities of the Weightlifters // Mediterranean Journal of Social Sciences Vol. 6, No. 5, September 2015, S2, Rome, Italy
6. Мамий А.Р., Поляков С.В. Упруго-вязкие свойства системы «тяжелоатлет-штанга» // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия «Естественно-математические и технические науки». – Майкоп: изд-во АГУ. – Вып. 4(147). – 2014. – 228 с.

Сведения об авторах

Мамий Алий Русланович, канд. пед. наук, доцент, доцент кафедры АСОИУ, Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия, alymamy@yandex.ru, электроника, схемотехника, биомеханика, биофизика.

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Масаева О.Х.

Институт прикладной математики и автоматизации, Нальчик, Россия.

Аннотация

В работе получено необходимое и достаточное условие единственности решения задачи Дирихле для уравнения с частной дробной производной, соответствующее волновому уравнению в случае целого значения порядка дробной производной.

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION FOR THE UNIQUENESS OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR NONLOCAL WAVE EQUATION IN THE RECTANGULAR DOMAIN

Masaeva O.Kh.

Institute of Applied Mathematics and Automation, Nalchik, Russia

В области $\Omega = \{(x,y): 0 < x < a, 0 < y < b\}$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \partial_{0y}^{\alpha} u = 0, \ \ 1 < \alpha < 2, \tag{1}$$

где $\partial_{0y}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int\limits_0^y (y-\eta)^{1-\alpha} u_{\eta\eta}(x,\eta) d\eta$ – регуляризованная дробная производная порядка α по переменной y [1, с. 11] .

В данной работе найдено необходимое и достаточное условие единственности решения задачи Дирихле для уравнения (1), которое согласуется с условием единственности решения задачи Дирихле для волнового уравнения.

Обозначим через $Q^{\alpha/2}$ подмножество действительных чисел вида

$$\frac{\lambda^{1/\alpha}}{(\pi n)^{2/\alpha}},$$

где $n \in \mathrm{N}$, λ – все вещественные корни функции типа Миттаг-Леффлера $E_{\alpha,2}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 2)}$ [2, с. 117].

Известно [2, с. 142], что функция $E_{\alpha,2}(z)$ имеет лишь конечное число вещественных нулей при $0 < \alpha < 2.$ Причем, при $\alpha \le \frac{4}{3}$ у этой функции нет нулей. Если $\alpha \in \left[\frac{5}{3}, 2\right[$, то существует не менее двух корней.

Очевидно, что множество $Q^{\alpha/2}$ ограничено, точка 0 является точкой сгущения.

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u(x,y)$ из класса $C(\overline{\Omega})$, имеющую производные $u_{xx}, \partial_{0y}^{\alpha}u \in C(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках области Ω.

Задача. Найти в области регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Теорема. Для того, чтобы задача (1), (2) имела только тривиальное решение необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{b}{a^{\frac{\alpha}{2}}} \notin Q^{\alpha/2}.$$

Литература

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.– 272 с.
2. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.

Сведения об авторах

Масаева Олеся Хажисмеловна, младший научный сотрудник, Институт прикладной математики и автоматизации, olesya.masaeva@yandex.ru, область научных интересов (уравнения в частных производных, дробные производные, краевые задачи, функция типа Миттаг-Леффлера).

О КРИТЕРИИ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СОПРЯЖЕННОСТИ ТРЕХМЕРНЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ С ГЕТЕРОКЛИНИЧЕСКИМИ КАСАНИЯМИ

Митрякова Т.М.

ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия.

Аннотация

В работе рассматривается класс трёхмерных диффеоморфизмов, отличающихся от градиентно-подобных систем наличием гетероклинических касаний. Рассматриваемые каскады не являются структурно устойчивыми, но для содержательного класса таких диффеоморфизмов в настоящей работе найдена полная система топологических инвариантов.

ABOUT CRITERION OF TOPOLOGICAL CONJUGACY OF 3-MANIFOLDS DIFFEOMORPHISMS WITH HETEROCLINIC TANGENCY

Mitryakova T.M.

Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod, Russia,

Градиентно-подобные потоки, то есть структурно устойчивые потоки, порождённые векторным полем градиента некоторой функции Морса, являются классическим объектом регулярной динамики. Дискретным аналогом градиентно-подобных потоков являются диффеоморфизмы Морса-Смейла (структурно устойчивые диффеоморфизмы с конечным неблуждающим множеством) без гетероклинических точек. Ж. Палисом было замечено, что касание инвариантных многообразий седловых точек каскада хотя бы вдоль одной орбиты приводит к негрубости системы.

В работе доказывается критерий топологической сопряженности негрубых 3-диффеоморфизмов, а именно, диффеоморфизмов, заданных на гладких трёхмерных замкнутых ориентируемых многообразиях и обладающих следующими свойствами: неблуждающее множество диффеоморфизма состоит из конечного числа гиперболических точек; для различных седловых точек пересечение инвариантных многообразий различной устойчивости не пусто только в случае, когда размерности этих многообразий равны двум, при этом пересечение является трансверсальным всюду, кроме, возможно, одной орбиты невырожденного одностороннего касания.

Полный топологический инвариант в этом случае представляет из себя схему, состоящую из конечного числа гладких замкнутых 3-многообразий с набором двумерных торов или бутылок Клейна, которые попарно либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально, либо пересекаются нетрансверсально с нарушением условия трансверсальности пересечения в точности в одной точке, являющейся точкой невырожденного одностороннего касания, которой присваивается действительное число (модуль топологической сопряженности).

Необходимость условий топологической сопряженности диффеоморфизмов рассматриваемого класса доказывается аналогично работам [1], [2] и [3].

Доказательство достаточности условий проводится непосредственным построением сопрягающего гомеоморфизма.

Работа выполнена совместно с О.В. Починкой.

Благодарности: работа написана в рамках НИР согласно заданию 2014/134 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России на 2014-2016 гг. (ННГУ).

Литература

1. Бонатти Х., Гринес В.З., Починка О.В. Классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. - 2005. - Т.250. - С.5-53.
2. Grines E.A., Pochinka O.V. Necessary condtions of topological conjugacy for three-dimensional diffeomorphisms with heteroclinic tangencies // Dinamicheskie Sistemy. – 2013. – V. 3(31). Issue 3-4. – P.185--200.

3. Митрякова Т.М., Починка О.В. К вопросу о классификации диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом модулей топологической сопряженности // Нелинейная динамика. – 2010. – Т. 6(1). – С. 91--105.
4. Palis J. A differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability // Asterisque. – 1978. – V. 51. – C. 335--346.

Сведения об авторах

Митрякова Татьяна Михайловна, к.ф.-м.н., доцент, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, tatiana.mitryakova@yandex.ru, динамические системы на многообразиях.

МЕТОД АВТОМАТИЧЕСКОГО ДЕТЕКТИРОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ НА МЕДИЦИНСКИХ РЕНТГЕНОГРАФИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ

Михайличенко А.А., Демяненко Я.М.

Южный Федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук, Ростов-на-Дону, Россия

Аннотация

В работе представлен метод детектирования контуров объектов на рентгенографических медицинских изображениях. В рамках этого метода разработан алгоритм связывания разрозненных участков границы в цельные контуры и предложена количественная мера оценки качества выделения этих контуров.

AUTOMATIC DETECTION METHOD OF OBJECTS IN MEDICAL RADIOGRAPHIC IMAGES

Mikhaylichenko A.A., Demyanenko Ya.M.

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia.

Введение

На настоящий момент универсальных методов детектирования объектов на медицинских изображениях, представленных рентгеновскими снимками, не существует – во многом причиной этого является слабая контрастность таких изображений и высокая вариабельность их оптических характеристик. Это является одной из причин, по которым автоматический анализ подобных изображений слабо освещён в литературе. Однако в частных случаях, основываясь на относительной предсказуемости взаимного расположения и формы объектов, представленных на рентгеновских снимках, можно разработать узкоспециализированные методы, не пригодные для произвольных изображений.

К таким частным случаям относятся фронтальные и боковые проекции коленного сустава – относительная простота составляющих его объектов и хорошая изученность позволяют применять многие существующие подходы к обработке изображений с приемлемым результатом. Основываясь на этих выводах, авторами был разработан алгоритм, позволяющий в автоматическом режиме выделять на рентгенографических изображениях контуры представленных там объектов. Полученные контуры затем могут быть использованы для оценки геометрических характеристик объектов на их отклонение от нормы.

Описание алгоритма

Для сглаживания изображения от точечных шумов проводится его сглаживание фильтром Гаусса или иным усредняющим фильтром. Затем на основе сглаженного изображения вычисляется векторное поле потока градиента (GVF [1], рис. 1*а*) и градиент этого изображения с использованием некоторого градиентного оператора (в работе использовался оператор Кирша [2], рис. 1*б*).

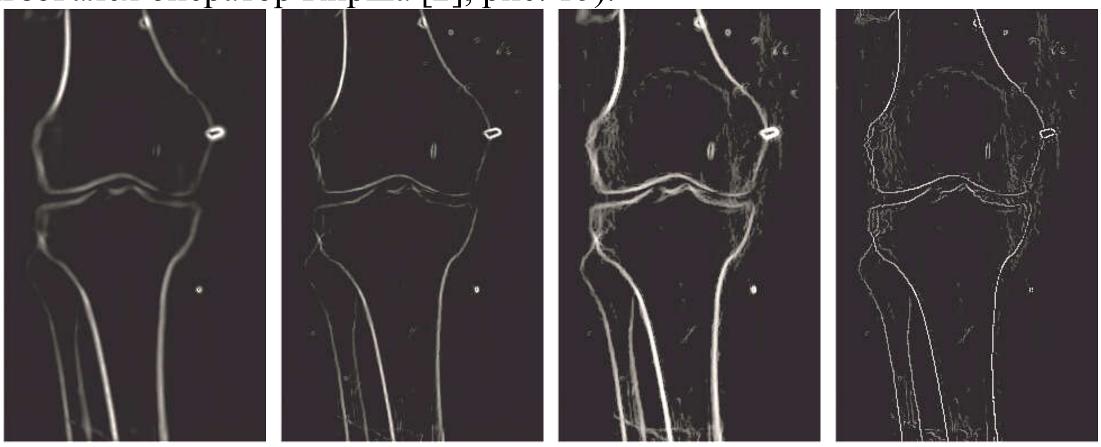


Рис. 1. Начальные этапы работы алгоритма

Далее работаем с некоторым изображением G, которое является поэлементным перемножением модуля градиента и модуля поля GVF (рис. 1*в*). Используя поле направлений GVF, значения в котором округляются до ближайших 45° (что соответствует 8-связной окрестности пикселя), к G применяется операция подавления не максимумов, аналогичная той, которая используется в методе Канни для утончения границ на изображении [3] (рис. 1*г*). После бинаризации полученного изображения с некоторым порогом получается изображение, содержащее в себе границы объектов. Однако эти границы в большинстве случаев состоят из разрозненных участков, не связанных друг с другом в замкнутые контуры.

Следующим этапом алгоритма является процесс замыкания найденных участков в контуры, которые определяют границы представленных на изображении объектов. Для этого авторами были разработаны алгоритмы связывания подходящих участков, основанные на поиске точек разрыва и устранении этих разрывов с учетом локальных особенностей изображения. Для полученных таким образом контуров вычисляется численная характеристика качества выделения, также определенная в ходе исследования, параметром которой является порог бинаризации. После получения подобных оценок для различных значений порога выбирается оптимальный порог бинаризации, и в дальнейшей обработке участвуют контуры, полученные при найденном пороге.

Когда начальные версии контуров получены, происходит их уточнение с помощью метода активных контуров, описанного в [4], [5] – с некоторыми дополнениями, учитывающими специфику обрабатываемых изображений. Важным замечанием является то, что перед применением метода необходимо обеспечить одинаковую ориентацию обхода точек всех обрабатываемых контуров. Однотипность ориентации контуров также важна на этапе распознавания.

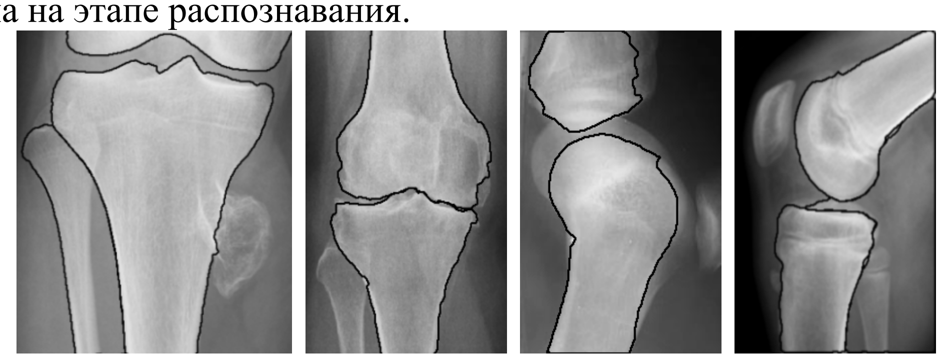


Рис. 2. Примеры работы предложенного алгоритма

Апробация метода проводилась на изображениях, предоставленных Ростовским медицинским государственным университетом. Тестирование метода проходило на более чем 50 рентгенографических изображениях коленного сустава в боковой и фронтальной проекциях, имеющих различное разрешение и качество. Результаты детектирования объектов можно разделить на три группы: в 70% – выделение контуров происходит без погрешностей; в 10-15% – при выделении заметны незначительные отклонения от искомых контуров; и в 15% – результат нельзя назвать удовлетворительным.

Заключение.

В работе представлен метод, позволяющий выполнять автоматическое детектирование объектов на медицинских рентгенографических изображениях. Он основан на выделении контуров таких объектов. Полученные контуры можно использовать как для определения геометрических характеристик выделенных объектов, так и для классификации этих объектов (к примеру, методами контурного анализа). Настройка метода происходит путем подбора коэффициентов для активных контуров и алгоритма устранения разрывов на некотором ограниченном наборе изображений с аналогичными особенностями. Затем подобранные коэффициенты можно использовать для выделения контуров на изображениях, которые имеют качество, схожее с качеством изображений, использованных при подборе этих коэффициентов.

Литература

1. C. Xu, J. L. Prince. Snakes, Shapes, and Gradient Vector Flow // IEEE Transactions on Image Processing. – March 1998. – 7 (3): P. 359-369.
2. Kirsch R. Computer determination of the constituent structure of biological images // Computers and Biomedical Research. – 1971. – 4: P. 315-328.
3. Canny, J. A Computational Approach To Edge Detection // IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 1986 (6): P. 679-698.
4. Williams D. J., Shah M. A Fast Algorithm for Active Contours and Curvature Estimation // CVGIP: Image Processing. – 1992. – Volume 55, No 1, January. – P. 14-26.
5. Петров В.О., Привалов О.О. Модификация алгоритма активных контуров для решения задачи интерактивной сегментации растровых изображений дефектов металлических отливок // Современные проблемы науки и образования. – 2008. – № 6 – С. 14-19.

Сведения об авторах

Демяненко Яна Михайловна – к.т.н. доцент, доцент, кафедра прикладной математики и программирования; Институт математики, механики и компьютерных наук, Южный федеральный университет, e-mail: dem@math.sfedu.ru. Обработка изображений. 344090, г. Ростов-на-Дону, ул.Мильчакова 8а; тел.: (+7)8632975111

Михайличенко Алексей Андреевич – магистрант, Институт математики, механики и компьютерных наук, Южный федеральный университет, e-mail: alexey.a.mikh@gmail.com. Обработка изображений. 344090, г.Ростов-на-Дону, ул.Мильчакова 8а; тел.: (+7)8632975111

О НЕКОТОРЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ

Мотькина Н.Н.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия

Аннотация

Рассмотрены тернарная проблема Гольдбаха, проблема Хуа Ло-Кена с простыми числами специального вида.

ABOUT SOME ARITHMETICAL PROBLEMS WITH PRIMES

Motkina N.N.

Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia

Abstract

The variant of a ternary problem of Goldbach, the variant of Hua Loo Keng's problem involving primes of a special type is considered.

В теории чисел важную роль играют аддитивные задачи. К таким задачам относится проблема Варинга-Гольдбаха о представлении числа N суммой n-ых степеней простых чисел:

$$N = p_1^n + p_2^n + \ldots + p_k^n \tag{1}$$

для натуральных $k \geq 2$ и $n \geq 1$. В частности, задача о числе решений уравнения

$$N = p_1 + p_2 + p_3$$

– это тернарная проблема Гольдбаха. Задача о числе решений уравнения

$$N = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2$$

– задача Хуа Ло-Кена. Пусть $I_{k,n}(N)$ – число решений уравнения (1). Для $I_{3,1}(N)$ в 1937 г. И.М. Виноградов [1] получил асимптотическую формулу, а именно доказал, что:

$$I_{3,1}(N) = \frac{N^2}{2\log^3 N}\sigma(N) + O\left(\frac{N^2}{\log^4 N}\right),$$

где

$$\sigma(N) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right) > 1.$$

В 1938 г. Хуа Ло-Кен доказал, что

$$I_{5,2}(N) \cong \frac{N^{3/2}}{\log^5 N}$$

для достаточно большого натурального *N*, $N \equiv 5 \pmod{24}$.

Первоначально классические аддитивные задачи решались без введения ограничений на переменные. Позднее в теории чисел появилась тематика – решение классических аддитивных проблем с переменными, принадлежащими некоторому специальному множеству. Такими задачами занимались И.И. Пятецкий-Шапиро (1953), А.А. Карацуба (1981), Г.А. Колесник (1985), С.А. Гриценко (1988), А. Балог и Дж. Фридлендер (1992), Дж. Дезуе (1993), М. Чанга (2003) и другие математики.

Пусть *a, b* – действительные числа, $0 \leq a < b \leq 1$, η – квадратичная иррациональность, *m* – натуральное число. Рассмотрим $J_{k,n,m}(N)$ – число решений уравнения (1) в простых числах, на которые налагаются дополнительные ограничения вида $a < \{\eta p_i^m\} < b$, *i* = 1, 2, …, *k*. Основные результаты содержатся в следующих теоремах:

ТЕОРЕМА 1. Для любого положительного *C* справедливо равенство

$$J_{3,1,1}(N) = I_{3,1}(N)\sigma_3(N,a,b) + O(N^2 \ln^{-C} N),$$

где

$$\sigma_3(N,a,b) = \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N - 1{,}5(a+b))} \frac{\sin^3 \pi m(b-a)}{\pi^3 m^3}.$$

ТЕОРЕМА 2. Справедлива формула

$$J_{5,2,2}(N) = I_{5,2}(N)\sigma_5(N,a,b) + O(N^{3/2-0,0002}),$$

где

$$\sigma_5(N,a,b) = \sum_{|m|<\infty} e^{2\pi i m(\eta N - 2,5(a+b))} \frac{\sin^5 \pi m(b-a)}{\pi^5 m^5}.$$

Полученные приближенные формулы отличаются от асимптотических формул классических задач Гольдбаха и Хуа Ло-Кена в простых числах без ограничений. В главных членах появляются ряды $\sigma_3(N,a,b)$, $\sigma_5(N,a,b)$ специального вида. Изучение поведения этих рядов представляет собой отдельную проблему [3].

Литература

1. Виноградов И.М. Представление нечетного числа суммой трех простых чисел // Докл. Акад. наук СССР. – 1937. – Т. 15. – С. 169–172.
2. Hua L.K. On the representation of numbers as the sum of powers of primes // Math. Z. – 1938. – T. 44. – P. 335–346.
3. Гриценко С.А. О вычислении некоторых особых рядов / С.А. Гриценко, Н.Н. Моткина // Чебышевский сборник. – 2011. – Т. 12, вып. 4. – С. 85–92.

Сведения об авторе

Моткина Наталья Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, e-mail: motkina@bsu.edu.ru, область научных интересов: теория чисел.

Motkina Natalya, Candidate of Physico-Mathematical Sciences , Associate Professor at the Department of Mathematics, Belgorod State National Research University, e-mail: motkina@bsu.edu.ru, area of scientific interests: the number theory.

РОСТОВСКАЯ ШКОЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Налбандян Ю.С.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия.

Аннотация

Рассматриваются такие вопросы как переезд Варшавского университета в Ростов-на-Дону в 1915 году и деятельность профессоров Д.Д.Мордухай-Болтовского, М.Г.Хапланова, Ю.Ф.Коробейника и их учеников

ABOUT HISTORY OF ROSTOV SCHOOL OF MATHEMATICAL ANALYSIS

Nalbandyan Yu.S.

South federal university,Rostov-on-Don, Russia,

Как известно, в 1862 году в Варшаве была открыта Главная школа, состоявшая из четырех отделений: историко-филологического, физико-математического (сюда входили отделы математических и естественных наук), юридического и медицинского. В 1869 году в рамках русификации, проводимой правительством России, это учебное заведение преобразовали в Императорский Варшавский университет, в котором преподавание должно было вестись на русском языке.

В математических кругах университет становится известен в середине 70-х годов XIX века, после появления в Варшаве **Николая Николаевича Алексеева (1828–1881),** получившего в свое время докторскую степень без защиты диссертации, по совокупности работ в области теории интегрирования. В Варшаве Н.Н.Алексеев продолжал научную работу и читал лекции по математическому анализу, высшей алгебре, аналитической геометрии, теории определенных интегралов, интегрированию дифференциальных уравнений, теории вероятностей. Его учебник «Курс интегрального исчисления» считался лучшим как по содержанию, так и по методике изложения.

Курсы по дифференциальным уравнениям, теории чисел, вариационному исчислению, по эллиптическим функциям вел **Михаил Аркадьевич Андреевский (1847–1879).** Именно он, как подчеркивал С.Е.Белозёров в [1], «первым заявил о создающемся в Варшавском университете новом центре математической мысли в России».

Чрезвычайно важную роль в развитии математики в Варшаве сыграл **Николай Яковлевич Сонин (1849 – 1915) –** этому периоду жизни выдающегося русского ученого посвящена отдельная глава в монографии [2].

В конце XIX – начале XX вв. в Варшаву начинают приезжать молодые, подающие надежды выпускники российских университетов. В 1898 году по рекомендации К.А.Поссе и А.А.Маркова ассистентом Г.Ф.Вороного, работавшего в то время и в университете, и в Варшавском политехническом институте, становится **Дмитрий Дмитриевич Мордухай-Болтовской (1876–1952)**, с именем которого связано становление ростовской математической школы.

Один из шести сыновей известного инженера-железнодорожника, выпускник петербургского университета, он с глубокой благодарностью вспоминал своих учителей (И.Л.Пташицкий, А.А.Марков, Ю.В.Сохоцкий, А.Н.Коркин, К.А.Поссе, Д.А.Граве, С.Е.Савич и другие), живших, по его образному выражению, "под солнцем Чебышёва", и в полной мере причислял себя к этой школе "на правах внука". Его научные работы стали появляться в печати с 1902 года. Их тематика – проблемы интегрирования в конечном виде и преобразование к простейшим видам абелевых интегралов – определилась под влиянием К.А.Поссе и И.Л.Пташицкого.

В 1906 году Д.Д.Мордухай-Болтовской защищает магистерскую диссертацию, успешно работает над организацией практических занятий по математическому анализу в политехническом институте, публикует замечательный задачник [3], выдержавший не одно переиздание и ставший основой более позднего двухтомника [4]. 1907-1909 годы он проводит в Новочеркасске, где создавался Донской политехнический институт, и группа варшавских учёных, в том числе Г.Ф.Вороной, Н.Н. Зинин, И.Р.Брайцев, была откомандирована для налаживания учебной работы. Дмитрий Дмитриевич читает лекции и ведет практические занятия по математическому анализу и аналитической геометрии, а после возвращения в Варшаву начинает работать в университете. В 1914 году, несмотря на то, что так и не сумел защитить докторскую диссертацию, но «с учётом преподавательских способностей и активной научной деятельности», Д.Д.Мордухай-Болтовской «возводится в звание ординарного профессора по занимаемой им кафедре» чистой математики.

В июне 1915 г. в связи с приближением немцев к Варшаве университет был эвакуирован в Москву, и наиболее приемлемые условия для его последующего функционирования были предложены Ростовской думой [1].

О преобразованиях, которые происходили с университетом в последующие годы, можно подробнее прочитать в [5] и [6]. Сейчас следует отметить, что Д.Д.Мордухай-Болтовской ехал в Ростов-на-Дону как один из ведущих ученых, наряду с Д.Н.Горячевым и В.П.Вельминым. Сам он не раз подчеркивал, что при переезде физмат, а в особенности его математическое отделение, более всего сохранил преемственность и связь с прошлым.

В Ростове Д.Д.Мордухай-Болтовской ведет весьма активную деятельность, как учебную (в 1917-1918 учебном году, например, он читает объемные курсы «Интегральное исчисление», «Определенный интеграл», «Эллиптические функции»), так и административную (руководство кафедрой анализа, работа в обществе естествоиспытателей, руководство физико-математическим отделением Донских педагогических курсов, физико-математический кружок, методический colloquim…). Много времени уделяет профессор работе со студентами – в 20-е годы на физмат приходят Г.П.Самко, А.П.Гремяченский, П.С.Папков, А.А.Батырев, А.Ф.Бермант, М.Г.Хапланов, Б.Е.Левин и многие другие. Судьбы этих людей сложились по-разному. Анисим Федорович Бермант, выпускник 1925 года, станет аспирантом М.А.Лаврентьева, будет заведовать кафедрами в ведущих технических вузах, многие годы проработает в в Математическом институте АН СССР им. В. А. Стеклова. Его «Краткий курс математического анализа для втузов» выдержит десятки переизданий. Алексей Алексеевич Батырев выберет специализацию в области астрономии, Петр Степанович Папков впоследствии возглавит в РГУ кафедру алгебры. Борис Яковлевич Левин представит в 1936 году кандидатскую диссертацию «О росте целой функции по лучу и распределении ее нулей по аргументам», за которую получит сразу степень доктора физико-математических наук. Впоследствии он будет работать в Одессе и Харькове, его исследования в значительной степени определят направление развития харьковской математической школы. В Одессе (уже в 60-е годы, после фронтов Великой Отечественной и нескольких лет работы в Ростове) окажется и Аристид Васильевич Батырев. Анатолий Петрович Гремяченский успеет защитить кандидатскую диссертацию в 1937 году и будет успешно совмещать интенсивную научную работу с качественной преподавательской на кафедре математического анализ РГУ. Семен Яковлевич Альпер начнет работу в РГУ в 1937 году, успешно защитит и кандидатскую, и докторскую диссертации, станет известным специалистом в области теории приближения фукнкций комплексного переменного.

Особую роль в жизни университета сыграет **Михаил Григорьевич Хапланов (1902–1977).** Будучи еще первокурсником, он выступал с докладами на семинаре у Д.Д.Мордухай-Болтовского, в 1927 году стал сверхштатным аспирантом по Северо-Кавказской краевой научно-исследовательской Ассоциации, работал в Новочеркасске и в Ростовском techinstitute.

Физико-математическому (механико-математическому) факультету РГУ М.Г.Хапланов отдаст 46 лет своей жизни, он станет автором уникального учебника «Теория функций комплексного переменного», воспитает не одно поколение ростовских (да и не только ростовских) математиков. «В очередь» с Д.Д.Мордухай-Болтовским он будет руководить кафедрой математического анализа, а впоследствии создаст и возглавит новую кафедру теории функций и функционального анализа.

В 1947 году студентом физмата становится **Юрий Фёдорович Коробейник**. Среди его учителей – лучшие представители школы Мордухай-Болтовского (математический анализ вел очаровавший первокурсников А.П.Гремяченский, курс высшей алгебры – Петр Степанович Папков, «который в это время был уже тяжело болен и читал лекции хотя и достаточно строго и в то же время доступно, но не так блестяще, как по рассказам он это делал в былые годы» [9, с.11]), да и самого мэтра Ю.Ф.Коробейник успел послушать. Правда, уже в 1949 Дмитрий Дмитриевич оказался практически изгнанным из университета – профессору припомнили краткосрочное пребывание на оккупированной территории (тяжелое ранение при бомбежке не позволило ему эвакуироваться вместе со всеми).

Путь в науке Юрий Федорович начинал под руководством Семена Яковлевича Альпера, но право руководства аспирантами на кафедре математического анализа имел только М.Г.Хапланов, аспирантом которого и стал Коробейник. В 1955 году он успешно защитил кандидатскую диссертацию, посвященную исследованию бесконечных систем линейных дифференциальных уравнений. Как сам ученый вспоминал в [9], огромный и разнообразный математический материал, изученный и разработанный в процессе подготовки кандидатской диссертации, дал свои плоды. Первый дипломник Юрия Федоровича, Казбек Мамий, занимался в своей дипломной работе методом Фурье для операторных уравнений второго порядка. После университета он поступил в аспирантуру МГУ к В.В.Немыцкому и защитил диссертацию по операторным уравнениям в гильбертовом пространстве. Вернувшись в родную Адыгею, Казбек Сагидович Мамий пройдет путь от ассистента до профессора, создаст и возглавит кафедру математического анализа, организует семинар по теории дифференциальных уравнений.

А в Ростове Ю.Ф.Коробейник, сохраняя традиции, заложенные Д.Д. Мордухай-Болтовским, продолжит активную научную работу и начнет формирование собственной научную школы. За 60 университетских лет он опубликует около 350 статей и 9 монографий, прочитает классические курсы по математическому анализу и теории функций комплексного переменного, разработает разнообразные (а порой и просто уникальные) спецкурсы, в основном связанные с тематикой его исследований. Его второй дипломник, Захар Иткин, занимавшийся изучением свойств адамаровской композиции двух степенных рядов, станет аспирантом А.О.Гельфонда. А первые аспиранты самого Коробейника, С.В.Фоменко (Варганова) и Т.И.Коршикова (Демченко) после защиты кандидатских диссертаций свяжут свою судьбу с РГУ. За прошедшие годы Юрий Федорович был научным руководителем у 24 человек, 22 из которых защитили кандидатские диссертации по предложенным им темам, а четверо впоследствии стали докторами наук. К сожалению, рано ушел из жизни О.В.Епифанов, однако продолжают работать в нынешнем институте С.Б.Климентов (заведующий кафедрой геометрии) и С.Н.Мелихов (профессор кафедры алгебры и дискретной математики). А кафедру математического анализа возглавил в 2000-м году **Александр Васильевич Абанин** (см. [10] и [11]).

Литература

1. Белозеров С.Е. Очерки истории Ростовского университета. – Ростов-на-Дону: ИРУ, 1959. – 364 с.

2. Кропотов А.И. Николай Яковлевич Сонин. – Л.: Наука, 1967. – 135 с.
3. Мордухай-Болтовской Д.Д. Систематический сборник элементарных упражнений по дифференциальному и интегральному исчислениям. Вып. 1. Теория пределов, дифференцирование и интегрирование функций. – Варшава, 1904. – 426 с.
4. Мордухай-Болтовской Д.Д. Систематический сборник элементарных упражнений по дифференциальному и интегральному исчислениям. В 2-х томах. – Спб.: Изд-во К.Л.Риккера, 1914-1915.
5. Коробейник Ю.Ф., Ерусалимский Я.М., Налбандян М.Б., Рожанская Н.Н. Механико-математический факультет Ростовского государственного университета (краткий исторический очерк). – Ростов-на-Дону: ИРУ, 1995. – 65 с.
6. Налбандян Ю.С. Даты, имена, гипотезы. / Комплексный анализ. Теория операторов. Математическое моделирование. – Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2006. – С.11-23.
7. Налбандян М.Б., Налбандян Ю.С. Д.Д.Мордухай-Болтовской (1876-1952) и М.Г.Хапланов (1902-1977) //Труды участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимова – Ростов-на-Дону, 2002. – С.11-14
8. Ахиезер Н.И., Ворович И.И., Ефимов Н.В., Захарюта В.П., Левин Б.Я. М.Г.Хапланов. К 70-летию со дня рождения //Успехи матем. наук. – 1973. – Т.28, в. 3. – С.199-204
9. Коробейник Ю.Ф. Долгий путь в науке /Ю.Ф.Коробейник. Избранные труды. Т.1. – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. – С.7-36.
10. А.В.Абанину – 60 лет // Владикавказский матем. журнал. – 2015. – Т.17, в.1. – С.78-81.
11. Абанин А.В. С благодарностью о тех, кто помог мне стать математиком и помогает им быть. [Электронный ресурс] / А.В.Абанин // Режим доступа http://www.math.rsu.ru/mexmat/ma/nalb/abanin.doc (дата обращения 29.09.2015)

Сведения об авторах

Налбандян Юлия Сергеевна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа ЮФУ, электронная почта ysnalbandyan@sfedu.ru, область научных интересов – история математики, абсолютно представляющие системы, пространства ультрадифференцируемых функций

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА

Некрасова И.В.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия.

Аннотация

В настоящей работе выводятся математические модели, определяющие распределение поля давления в пласте вблизи скважины в процессе гидравлического удара. Вывод моделей основан на строгом усреднении точных уравнений, описывающих на микроскопическом уровне совместное движение твердого скелета грунта и вязкой жидкости, заполняющей поры в грунте.

MATHEMATICAL MODELS OF A HYDRAULIC SHOCK

Nekrasova I.V.
Belgorod National Research University, Belgorod, Russia.

В предложенной работе изучается линеаризованная модель совместного движения упругого пористого тела и вязкой несжимаемой жидкости. Рассмотрен упругий пористый скелет, занимающий ограниченную область Q. Поры полностью насыщены вязкой несжимаемой жидкостью.

В скелете имеет место полое включение – цилиндрическое отверстие, заполненное той же самой жидкостью, что и поры – область Ω_0.

Область Q лежит в полупространстве $x_3 < 0$. Ее граница S состоит из двух частей: S^1 лежит в плоскости $x_3 = 0$; $S^2 = S \setminus S^1$ – гладкая поверхность класса C^2, вблизи плоскости $x_3 = 0$ заданная уравнением $\Phi(x_1, x_2) = 0$.

Область Ω является подобластью Q, такой что дополнение Ω в Q есть цилиндр $\overline{\Omega}^0 = \{\mathbf{x} \in R^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \le \delta^2 < 1,\ \phi(x_1, x_2) < x_3 < 0\}$.

В области Ω_T в безразмерных переменных совместное движение твердого скелета и жидкости, заполняющей поры, описывается системой

$$\nabla \cdot \mathbf{w}^\varepsilon = 0, \tag{1}$$

$$\rho^\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathsf{P}, \tag{2}$$

$$\mathsf{P} = \chi^\varepsilon \overline{\alpha}_\mu \mathsf{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) + (1 - \chi^\varepsilon)\overline{\alpha}_\lambda \mathsf{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) - p^\varepsilon \mathrm{I}. \tag{3}$$

В области Ω_T^0 движение жидкости описывается системой Стокса, состоящей из уравнения неразрывности (1) и уравнения баланса импульса

$$\rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathsf{P}^0, \tag{4}$$

$$\mathsf{P}^0 = \overline{\alpha}_\mu \mathsf{D}(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}) - p^\varepsilon \mathrm{I}. \tag{5}$$

На общей границе $S^0 = \partial\Omega \cap \partial\Omega^0$ выполнены условия непрерывности перемещений и нормальных напряжений

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x}\in\Omega^0}} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x}\in\Omega}} \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \tag{6}$$

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x}\in\Omega^0}} P^0(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_0) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x}\in\Omega}} P(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_0), \tag{7}$$

для $(\mathbf{x}^0, t) \in S_T^0 = S^0 \times (0, T)$.

На верхнем торце $S^1=\{x_3=1\}\cap\partial\Omega^0$ цилиндра Ω_0 задано нормальное напряжение

$$\mathsf{P}^0(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{e}_3=p_0(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_3, \qquad (8)$$

где $p_0(\mathbf{x},t)$ есть импульс, определяющий гидроудар.

$$\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x},t)=0, \quad (\mathbf{x},t)\in S_T^2=S^2\times(0,T). \qquad (9)$$

Задача замыкается однородными начальными условиями

$$\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x},0)=0, \quad \frac{\partial\mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x},0)=0, \quad \mathbf{x}\in\Omega. \qquad (10)$$

Математическая модель (1) – (10) содержит естественный малый параметр ε, которым является отношение среднего размера пор l к характерному размеру L рассматриваемой физической области: $\varepsilon=l/L$.

Модель содержит безразмерные параметры $\bar\alpha_\mu$ и $\bar\alpha_\lambda$, зависящие от малого параметра задачи ε.

Целью настоящей работы является нахождение предельных режимов (усредненных уравнений) и соответствующих начальных и краевых условий для предельных значений решений задачи (1) – (10) когда $\varepsilon\to 0$ при условии $\mu_0=\lambda_0=0$ в следующих случаях:

$$\mu_1=\infty,\ 0\le\lambda_1<\infty; \qquad (11)$$

$$\lambda_1=\infty,\ 0\le\mu_1<\infty. \qquad (12)$$

где

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\bar\alpha_\mu(\varepsilon)=\mu_0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\bar\alpha_\mu}{\varepsilon^2}=\mu_1, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\bar\alpha_\lambda(\varepsilon)=\lambda_0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\bar\alpha_\lambda}{\varepsilon^2}=\lambda_1.$$

Доказательство построено на основе метода двухмасштабной сходимости Г. Нгуетсенга [1]

Теорема 1. Пусть выполнены условия (11). Тогда для функции w^ε существует продолжение w_f^ε из области $Q_f^\varepsilon\times(0,T)$ в Q_T и существует подпоследовательность $\{\varepsilon_k>0\}$, такая что последовательности $\{p^{\varepsilon_k}\}$, $\{(1-\chi^{\varepsilon_k})\partial\mathbf{w}^{\varepsilon_k}/\partial t\}$ и $\{\partial\mathbf{w}_f^{\varepsilon_k}/\partial t\}$ сходятся при $\varepsilon_k\to 0$ слабо в $L^2(\Omega_T)$ к функциям p, $\partial\mathbf{w}^{(s)}/\partial t$ и $\partial\mathbf{w}_f/\partial t$ соответственно. Предельные функции удовлетворяют в области Q_T системе усредненных уравнений, состоящей из уравнения неразрывности

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0, \qquad (12)$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=-\frac{\zeta}{\rho_f}\nabla p+(1-\zeta)(m\frac{\partial^2\mathbf{w}_f}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\mathbf{w}^{(s)}}{\partial t^2}),$$

закона сохранения импульса

$$(1-\zeta)(m\rho_f\frac{\partial^2\mathbf{w}_f}{\partial t^2}+\rho_s\frac{\partial^2\mathbf{w}^{(s)}}{\partial t^2}+\nabla p)=0, \qquad (13)$$

для жидкой компоненты среды и соотношения

$$(1-\zeta)(\frac{\partial \mathbf{w}^{(s)}}{\partial t}-(1-m)\frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t})= \\ =-(1-\zeta)\int_0^t \mathsf{B}^{(s)}(\infty,\lambda_1;t-\tau)\cdot(\nabla p(\mathbf{x},\tau)+\rho_s\frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial \tau^2}(\mathbf{x},\tau))d\tau \qquad (14)$$

для твердой компоненты среды при $\lambda_1>0$ или усредненного закона сохранения количества движения твердой компоненты в виде

$$(1-\varsigma)\left(\frac{\partial^2 \mathbf{w}^{(s)}}{\partial t^2}-(1-m)\frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial t^2}\right)=-(1-\varsigma)\mathsf{B}^{(s)}(\infty,0)\cdot\left(\nabla p+\rho_s\frac{\partial^2 \mathbf{w}_f}{\partial t^2}\right) \qquad (15)$$

в случае $\lambda_1=0$.

Уравнения (12)-(15) дополняются однородными начальными условиями

$$\mathbf{w}^{(s)}(\mathbf{x},0)=\mathbf{w}_f(\mathbf{x},0)=0 \qquad (16)$$

для перемещений жидкой и твердой компонент, граничными условиями

$$p(\mathbf{x},t)=-p_0(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x}\in S^1, \quad t>0, \qquad (17)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})=0, \quad \mathbf{x}\in S^2, \quad t>0 \qquad (18)$$

для скорости $\mathbf{v}$ и давления p.

Матрицы $\mathsf{B}^{(s)}(\infty,\lambda_1;t)$ и $\mathsf{B}^{(s)}(\infty,0)$ определены решениями периодических начально-краевых задач на ячейке Y.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (12). Тогда для функций w^{ε} существует продолжение w_s^{ε} из области $\Omega_s^{\varepsilon}\times(0,T)$ в область $Q\times(0,T)$ и существует подпоследовательность $\{\varepsilon_k>0\}$, такая что последовательности $\{p^{\varepsilon_k}\}$, $\{\chi^{\varepsilon_k}\partial\mathbf{w}^{\varepsilon_k}/\partial t\}$ и $\{\partial\mathbf{w}_s^{\varepsilon_k}/\partial t\}$ сходятся при $\varepsilon_k\to 0$ слабо в $L^2(\Omega_T)$ к функциям p, $\partial\mathbf{w}^{(f)}/\partial t$, и $\partial\mathbf{w}_s/\partial t$ соответственно. Предельные функции удовлетворяют в области Q_T системе усредненных уравнений, состоящей из уравнения неразрывности

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0, \qquad (19)$$

$$\mathbf{v}=-\frac{\zeta}{\rho_f}\int_0^t\nabla p(\mathbf{x},\tau)d\tau+(1-\zeta)(\frac{\partial \mathbf{w}^{(f)}}{\partial t}+(1-m)\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t}),$$

закона сохранения импульса

$$(1-\zeta)(\rho_f\frac{\partial \mathbf{w}^{(f)}}{\partial t}+(1-m)\rho_s\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t}+\int_0^t\nabla p(\mathbf{x},\tau)d\tau)=0 \qquad (20)$$

для твердой компоненты, соотношения

$$(1-\zeta)(\frac{\partial \mathbf{w}^{(f)}}{\partial t}-m\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t})= \\ =(1-\zeta)\left(\int_0^t \mathsf{B}^{(f)}(\mu_1,\infty;t-\tau)\cdot(\nabla p(\mathbf{x},\tau)+\rho_f\frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial \tau^2}(\mathbf{x},\tau))d\tau\right) \qquad (21)$$

для жидкой компоненты при $\mu_1 > 0$ или усредненного закона сохранения количества движения жидкой компоненты в виде

$$(1-\varsigma)\left(\frac{\partial^2 \mathbf{w}^{(f)}}{\partial t^2} - m\frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial t^2}\right) = (1-\varsigma)\mathsf{B}^{(f)}(0,\infty)\cdot\left(\nabla p + \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}_s}{\partial t^2}\right) \qquad (22)$$

в случае $\mu_1 = 0$.

Уравнения (19)–(22) дополняются однородными начальными условиями (16) для перемещений $\mathbf{w}^{(f)}$ и $\mathbf{w}_s$ жидкой и твердой компонент и граничными условиями (17), (18).

Литература

1. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal., 1989, V. 20, Issue 3, 608 - 623.
2. Мейрманов А.М., Метод двухмасштабной сходимости Нгуетсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах // Сиб. Мат. Журнал, 2007, т. 48, No. 3, 645 - 667.
3. Burridge R. and Keller J.B., Poroelasticity equations derived from microstructure // Journal of Acoustic Society of America, 1981, V. 70, No. 4, 1140 - 1146.

Сведения об авторах

Некрасова Ирина Викторовна, кандидат физ-мат наук, доцент кафедры общей математики, Белгородский государственный университет, nekrasova_i@bsu.edu.ru, дифференциальные уравнения с частными производными, динамика вязкой жидкости.

ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ В ТЕОРИИ РЮКЗАЧНЫХ КРИПТОСИСТЕМ

Осипян В.О.

Кубанский госуниверситет, Краснодар, Россия

Аннотация.

Предлагается метод, расширяющий класс нестандартных рюкзачных криптосистем на основе принципа двойственности. В частности, приводится механизм такого расширения на примере обобщенной аддитивной задачи о рюкзаке. Разработанная система защиты информации существенно отличается от двоичной мультипликативной ранцевой криптосистемы по всем параметрам. Устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых обобщённый мультипликативный ранцевый вектор инъективен над Z_p, $p \geq 2$.

THE PRINCIPLE OF DUALITY IN THE THEORY OF KNAPSACK CRYPTOSYSTEMS

Osipyan V. O.
Kuban State University, Krasnodar, Russia

Введение.

С точки зрения теоретических основ информационной безопасности и разработки эффективных систем защиты информации следует обратить внимание на то, что трудно разрешимые математические проблемы могут служитьосновой для разработки систем защиты информации с требуемыми свойствами, а решения этих задач соответствуют ключам этих систем [1].

Традиционно, в основе всех стандартных рюкзачных систем защиты информации (РСЗИ) лежит **NP**-полная задача об укладке рюкзака или ранца $\boldsymbol{K_S}$. На сегодняшний день предложены модели **РСЗИ** на основе задачи о нестандартном рюкзаке $\boldsymbol{K_N}$**[20]**, для которого допустимо повторения элементов входа рюкзака. Наиболее общей из них является модель $\boldsymbol{M_G}$ на основе обобщенного аддитивного рюкзака. Так же предложены и исследованы [12] модели $\boldsymbol{M_U}$ и $\boldsymbol{M_F}$на основе задач об универсальном и функциональном рюкзаках соответственно.

В данной работе изучаются вопросы применения принципа двойственности для расширения класса ранцевых мультипликативных криптосистем, на основе соответствующих аддитивных криптосистем. Предлагается механизм применения указанного принципа на примере задачи об обобщенном аддитивном рюкзаке.

Прямая задача $\boldsymbol{K_G}$ *(задача об обобщённом аддитивном рюкзаке [9]).Дан рюкзачный вектор* $\boldsymbol{A = (a_1, \dots, a_n)}$*с натуральными компонентами* $\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{i = \overline{1, n}}$ *, а также* $\boldsymbol{p} \in \mathbb{N}$*–ограничение на количество повторений любой из компонент вектора* $\boldsymbol{A, p \geq 2}$*. По заданному входу* $\boldsymbol{v} \in \mathbb{N}$ *необходимо найти такой набор коэффициентов повторений*$\boldsymbol{\alpha}$= $\boldsymbol{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$*, для которого имеет место равенство:*$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha_i\, a_i}, \boldsymbol{\alpha_i} \in \boldsymbol{Z_p} = \boldsymbol{\{0, 1, \cdots, p-1\}}$.

Аналогично можно формулировать двойственную мультипликативную задачу о ранце.

Двойственная задача K_{MG}*(об обобщённоммультипликативном ранце).Пусть имеется ранцевый вектор* A_{MP}= $\boldsymbol{(a_1, a_2, \dots, a_n)}$*с натуральными компонентами* $\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{i = \overline{1, n}}$ *.Требуется установить, существуют ли для заданного*$V \in \mathbb{N}$ *такие значения* $\boldsymbol{\alpha_i} \in \boldsymbol{Z_p} = \boldsymbol{\{0, 1, \cdots, p-1\}}$*для которых справедливо равенство*

$$\prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{a_i}^{\alpha_i} = \boldsymbol{V} \text{ или } A_{MP}{}^{wp} = \boldsymbol{V} \quad ,$$

где $\boldsymbol{p} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{p \geq 2}$*,*$w_p = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$*.*

Отметим, что в данной Двойственнойзадаче $\boldsymbol{p}\in$**N**, $\boldsymbol{p}\geq$ **2**представляет собой так называемое пороговое значение для показателей степеней.

В частности, если $\mathbf{A_{MP} = (2, 3, 5, 7)}$, $\boldsymbol{p}$**= 5**, то для значения **V = 48020 имеемследующий обобщенный спектр** $\mathbf{w_5 = (2, 0, 1, 4)}$**, т.к. V = 48020 =** $\mathbf{2^2*3^0*5^1*7^4}$. Здесь значение **V = 48020** порождено спектром $\mathbf{w_5 = (2, 0, 1, 4)}$ из ранца $\mathbf{A_{MP} = (2, 3, 5, 7)}$.Очевидно, что для указанногомультипликативного ранца (здесь пороговое значение **p = 5**) имеет место неравенства

$$\mathbf{1 \leq V \leq 1944810000}$$

относительно величины**V**.

Обозначим через $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{MP}}$ обобщённыймультипликативныйинъективный ранцевыйвектор.В частности, если $\boldsymbol{p}$ **= 2**, то это означает, что $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{M2}}$ **= A**.Так, например, для $\boldsymbol{p}$ **= 3** вектор $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{M3}} = \mathbf{(2,3,5,7,11,13)}$ является обобщённым мультипликативным инъективным ранцевым вектором размерности 6.

Теорема 1. Обобщённый мультипликативный ранцевый вектор

$$\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{MP}} = (\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_n}),\ \mathbf{a_1 \neq 1}$$

инъективен над

$$\mathbf{Z_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}}$$

тогда и только тогда, когда для всех индексов **i** и **j**, таких что **i ≠ j** компоненты a_i и a_jпопарновзаимно просты.

Доказательство. Для простоты изложения рассмотрим случай произвольного порогового значения ри размерности ранца **n = 2.**

Пусть $\mathbf{НОД(a_1, a_2) = 1}$. Очевидно, для любого $\mathbf{w_p = (\alpha_1, \alpha_2), \alpha_i \in Z_p}$ и $\mathbf{V = \widetilde{A}^w_{MP} = (a_1)^{\alpha 1} * (a_2)^{\alpha 2}}$ мультипликативный вход $(\widetilde{\mathbf{A}}^{\mathbf{w}}_{\mathbf{MP}}, \mathbf{V})$ определяется однозначно. И, наоборот, если $\mathbf{НОД(a_1, a_2) = 1}$, то также однозначно определяется $\mathbf{w_p = (\alpha_1, \alpha_2), \alpha_i \in Z_p}$ для заданного V, т.к. из условия $\mathbf{НОД(a_1, a_2) = 1}$**,** следует $\mathbf{НОД(a_1^{\alpha 1}, a_2^{\alpha 2}) = 1}$.

Следствие (Оператор L). Если обобщённый мультипликативный ранцевый вектор $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{MP}} = (\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_n})$ над $\mathbf{Z_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}}$ инъективен, то для любого натурального числа L вектор $\widetilde{\mathbf{A}}^{\mathbf{L}}_{\mathbf{MP}} = (\mathbf{a_1^L, a_2^L, \ldots, a_n^L})$ также инъективен, причем их мультипликативные входы определяются однозначно.

Отметим, что данная **Теорема** и **Следствие** из неё позволяют предложить математические модели алфавитных криптосистем, стойкость которых можно увеличить за счёт применения изоморфных ранцев.

Примечание. Применяя принцип двойственности относительно криптосистем на основе аддитивного рюкзака, можно разработатьдвойственныекриптосистемы на основе мультипликативного ранца.

Теорема 2. Пусть $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{P}} = (\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_n})$ и $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{P}} = (\mathbf{b_1, b_2, \ldots, b_n})$, $\mathbf{a_1 \neq 1}$, $\mathbf{b_1 \neq 1}$ – два инъективных мультипликативных обобщённых ранца над GF(p) размерности **n, n≥ 3,** $\mathbf{b_i = \log_g^{a_i^L} (\mathrm{mod}\, p)}$, $\mathbf{g}$ – примитивный элемент поля **GF(p).**

Тогда решения задач о мультипликативных обобщённых ранцах $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{P}}$ и $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{P}}$ над $\mathbf{GF(p)}$ изоморфны.

Доказательство. Некоторые несущественные детали опустим и лишь докажем, что для произвольного шифра, обобщённые мультипликативные инъективные ранцы $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{MP}}$ и $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{MP}}$ над $\mathbf{GF(p)}$ изоморфны между собой.

Имеем для произвольного шифра:

$$\mathbf{s = V_B = bi_1 + bi_2 + \cdots + bi_r = g^{\log_g^{a_{i1}^L} + \log_g^{a_{i2}^L} + \ldots + \log_g^{a_{ir}^L}} = a_{i1}^L * a_{i2}^L * \ldots * a_{ir}^L}$$
$$\mathbf{== L^r * a_{i1} * a_{i2} * \ldots * \ a_{ir} = V_A}$$

– что подтверждает изоморфность двух мультипликативных обобщённых ранцев $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{MP}}$ и $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{MP}}$ над $\mathbf{GF(p)}$. Очевидно, заранее определяется значение L.

Заметим, что процедура восстановления открытого текста, в целом, не зависит от самих компонент ранцевого вектора, она зависит только от размера самого ранца, значения $\mathbf{L}$ и способа первоначального кодирования букв открытого текста. Данное замечание относится ко всем существующим открытым ранцевым системам.

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный университет»

Список литературы

1. Shannon C. Communication theory of secrecy systems, Bell System Techn. J. 28, № 4 – 1949. P. 656-715.
2. Merkle R., Hellman M. Hiding information and signatures in trapdoor knapsacks // IEEE Transactions on Information Theory. 1978. Vol. IT – 24. P. 525-530.
3. Rivest R.L., Chor B. A knapsack-type public key cryptosystem based on arithmetic in finite fields//IEEE Transactions on Information Theory. 1988. V. 34. No. 5. pp. 901-909.
4. Lenstra, Jr. H.W. Integer Programming with a Fixed Number of Variables // Mathematics of Operations Research. 1983. Vol. 8. No. 4. pp. 538-548.
5. Shamir A. A polynomial-time algorithm for breaking the basic Merkle - Hellman cryptosystem//Information Theory, IEEE Transactions. 1984. V. 30. No. 5. pp. 699–704.
6. Саломаа А. Криптографиясоткрытымключом. – М.: ИЛ, 1995.
7. Vaudenay S. Cryptanalysis of the Chor-Rivest cryptosystem//CRYPTO.1998.pp.243-256.
8. Алфёров, А.П. Основы криптографии [Текст]: учебное пособие для студентов ВУЗ / А.Ю. Зубов, А.С.Кузьмин, А.В. Черемушкин. – М.: Гелиос АРВ, 2002. – 480 с.
9. Осипян В.О. Об одном обобщении рюкзачной криптосистемы // Изв. вузов. Сев.-Кавк. региона, 2003, Прил. № 5.– с.18-25.
10. Осипян В.О., Осипян К.В. Математические основы теории и практики защиты информации. – Краснодар, 2003.– 192с.
11. Осипян В.О. Асимметрическая система защиты информации на основе универсального и функционального рюкзаков // Защита информации. Конфидент.– С-П., 2004.– №6. – с.61-63.

12. Осипян В.О. Разработка методов построения систем передачи и защиты информации: монография. – Краснодар, 2004. – 180с.
13. Осипян В.О. О полиалфавитной криптосистеме с обобщённым рюкзаком // Изв. вузов. Сев.- Кавк. региона. Спец. Выпуск «Мат.моделиров. и компьют. технологии», 2004.– с.65–66.
14. Осипян, В.О. Криптография в упражнениях и задачах [Текст] / К.В.Осипян. – М.: Гелиос АРВ, 2004. – 144 с.
15. Осипян В.О. О криптосистемах с различными рюкзаками // Инф. противодействие угрозам терроризма. – Таганрог, 2004.–№3.– с. 53-56.
16. Осипян В.О. О системе защиты информации на основе функционального рюкзака // Вопросы защиты информации. – М., 2004.– № 4. – с.16-19.
17. Осипян В.О., Семенчин Е.Н. Построение систем защиты информации на основе проблемы универсального рюкзака // Изв. вузов. ТРТУ, 2005. –№4.– с.182–188.
18. Осипян В.О. Моделирование систем защиты информации на основе равносильных рюкзаков, содержащих диофантовую трудность, с обнаружением и исправлением ошибок //Вопросы защиты информации.–М.,2006.–№2.– с.16-19.
19. Осипян В.О. Моделирование систем защиты информации рюкзачного типа с переменными ключами//Изв. вузов. Сев.-Кавк рег., 2006, № 3, с.31-34.
20. Осипян В.О. О системе защиты информации на основе проблемы рюкзака // Известия Томского политехнического университета. 2006. Т. 309. № 2.
21. Osipyan V.O. Generalization of open key knapsack cryptosystems // Security of Information and Networks (SIN 2007). Trafford, 2008. P. 58-63.
22. Осипян, В.О. Моделирование ранцевых криптосистем, содержащихдиофантовуютрудность [Текст] /А.С. Арутюнян, С.Г. Спирина // Чебышевский сборник. 2010.Т. XI, вып. 1. с. 209–217.
23. Osipyan V.O. Different models of information protection system, based on the functional knapsack // ACM, 2011. http://dl.acm.org/citation.cfm?id=2070461.
24. Осипян В.О. Моделирование систем защиты информации содержащих диофантовы трудности. Разработка методов решений многостепенных систем диофантовых уравнений. Разработка нестандартных рюкзачных криптосистем: монография, LAP, 2012. – 344 с.
25. Osipyan V.O. Buiding of alphabetic data protection cryptosystems on the base of equal power knapsacks with Diophantine problems // ACM, 2012, http://dl.acm.org/citation.cfm?id=2388593.
26. Осипян, В.О. Диофантовы трудности атак на нестандартные рюкзачные системы защиты информации [Текст] //Ю.А. Карпенко, А. С. Жук, А. Х. Арутюнян // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. – №12 –с. 209-215.
27. Osipyan V.O. Information protection systems based on universal knapsack problem // ACM, 2013, http://dl.acm.org/citation.cfm?id=2523555
28. V. O. Osipyan, A. S. Zhuck, A. H. Arutyunyan, Y. A. Karpenko. Building of mathematical model of flow data processing system based on given selection of elements of the set. //ACM, 2013, http://dl.acm.org/citation.cfm?id=2523574&dl=ACM&coll=DL&CFID=722424660&CFTOKEN=95253494
29. Osipyan V.O. Mathematical model of the polyalphabetic information security system based on the normal generalized knapsack // ACM, 2014, http://dl.acm.org/citation.cfm?id=2659658.
30. Osipyan V.O. Mathematical modelling of cryptosystems based on Diophantine problem with gamma superposition method //ACM, 2015, http://dl.acm.org/citation.cfm?id=2800026

Сведения об авторе

Осипян Валерий Осипович, доктор физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры ИТКубГУ, rrwo@mail.ru. Область научных интересов и сфера научной деятельности: специалист в области информационной безопасности автоматизированных систем обработки данных. Разработанные им рюкзачные криптосистемы занимают передовое место на мировом уровне.

ОБ ОДНОМ ПРИЛОЖЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Паланджянц Л.Ж.

Майкопский государственный технологический университет, Майкоп, Россия.

Тлячев В.Б.

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия.

AN ONE APPLICATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Palandzhyants L.Zh.

Maykop state technological university, Maykop, Russia.

Tlyachev V.B.

Adyghe State University, Maykop, Russia.

Рассмотрена система дифференциальных уравнений, описывающая сотовую модель диффузного двойного слоя. Получены подстановки, позволяющие упростить анализ решений системы.

В работе [1] представлена следующая система уравнений, описывающая избыточную концентрацию ионов в двойном электрическом слое при постоянной относительной диэлектрической проницаемости среды

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \Psi \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} - a_1 uv = 0, \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - a_2 uv = 0, \quad 1 \le \xi < \infty, \end{aligned} \tag{1}$$

где $u = u(\xi), v = v(\xi)$ – неизвестные функции, $a_1 > 0, a_2 < 0, \Psi \ge 0$ – некоторые постоянные.

Система (1) исследована в [2] при условии $\Psi = 0$. В данной работе при $\Psi \ne 0$ для данной системы доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Функцию $v = v(\xi)$ можно выразить через функцию $u = u(\xi)$ в виде

$$v = \frac{a_2}{a_1} u(\xi) + \frac{a_2 \Psi}{a_1 2} \xi \int \frac{u}{\xi^2} d\xi - \frac{a_2 C_2}{a_1} \xi + C_1, \tag{2}$$

где C_1, C_2 – постоянные.

С помощью теоремы 1 доказывается теорема 2.

Теорема 2. Систему (1) с помощью подстановки (2) можно привести к системе из трех уравнений вида

$$X' = \frac{2}{\xi}X + Y,$$
$$Y' = Z - \left(4 + \frac{\Psi}{2}\right)\frac{Y}{\xi} - \frac{X}{\xi}, \qquad (3)$$
$$Z' = a_2 Y^2 + a_1 \frac{\psi}{2\xi} XY,$$

где функции X, Y, Z связаны с исходной функцией $u(\xi)$ следующим образом:

$$X = \xi^2 \int \frac{u(\xi)}{\xi^2} d\xi, \;\; Y = u(\xi), \;\; Z = u'(\xi) + \frac{\Psi}{2\xi}u(\xi) + \int \frac{u(\xi)}{\xi^2} d\xi.$$

Дальнейший анализ решений системы (3) возможен на основе известных методов качественной теории дифференциальных уравнений, что упрощает решение исходной системы (1).

Литература

1. Гохштейн А.Я. О дискретности тока и диффузии в двойном слое // ДАН РФ. 1996. Т. 350. № 5. С. 632-636.
2. Попова А.А., Куижева С.К., Паланджянц Л.Ж. О распределении концентрации катионов в двойном электрическом слое // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Серия Естественные науки. 2015.

Данные об авторах

Паланджянц Левон Жирайрович, доцент кафедры математики, Майкопский государственный технологический университет, e-mail: levonmgtu@rambler.ru

Тлячев Вячеслав Бесланович, зав. кафедрой теоретической физики, АГУ, e-mail: tlyachev@adygnet.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ ЭКСПЛУАТАЦИИ СТРУКТУРИРОВАННОЙ ПО РАЗМЕРУ ПОПУЛЯЦИИ С ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ ВИДАМИ

Панеш А.А.

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия.

Платов А.С.

Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, Владимир, Россия.

Аннотация

Для модели, описывающем динамику структурированной по размеру популяции с взаимодействующими видами при заданных интенсивностях их эксплуатации, установлено существование и единственность стационарного состояния. Доказано существование набора интенсивностей эксплуатации, доставляющего максимум заданного функционала выгоды от эксплуатации на соответствующем стационарном состоянии.

OPTIMAL EXPLOITATION OF SIZE-STRUCTURED POPULATION WITH INTERACTING SPECIES

Panesh A.A.

Adyghe State University, Maykop, Russia.

Platov A.S.

Vladimir State University, Vladimir, Russia.

Рассматривается модель эксплуатации структурированной по размеру популяции с n взаимодействующими видами, динамика которой описывается системой уравнений

$$\frac{\partial x_i(t,l)}{\partial t} + \frac{\partial\left(g_i(l,E(t))\,x_i(t,l)\right)}{\partial l} = -\left(\mu_i(l,E(t)) + u_i(l)\right)x_i(t,l) \quad , \qquad (1)$$

где $x_i(t,l)$- плотность индивидов i-го вида, i=1÷n, размера l в момент времени t, функции μ_i и g_i – показатели темпов смертности и прироста этого вида соответственно, управление u_i определяет интенсивность его эксплуатации [1-3]. Предполагается, что взаимосвязь между видами осуществляется через функцию E, характеризующую суммарный уровень конкуренции видов и имеет следующую форму

$$E(t) = \sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{L_i} \chi_i(l)x_i(t,l)dl \quad , \qquad (2)$$

где χ_i- положительные функции. Все коэффициенты модели положительные непрерывные функции на отрезке размеров $[0,L_i]$, $L_i > 0$, где происходит эксплуатация i-го вида. Предполагается, что приток новых индивидов (нулевого размера) в популяцию происходит естественным воспроизведением, а также промышленным путем и обеспечивается граничными условиями вида

$$x_i(t,0)=\int_0^{L_i} r_i(l,E(t))x_i^{\beta}(t,l)dl+p_i(t) \quad , \tag{3}$$

где $r_i(l,E)$ - показатель репродуктивности i-го вида размера l при уровне конкуренции E, $\beta_i \in (0,1)$ характеризует нелинейную зависимость естественного воспроизводства от плотности, $p_i(t)$ - промышленное воспроизводство. Также предполагается, что $r_i(l,E)$ - непрерывные неотрицательные функции, положительные вблизи правого конца $[0,L_i]$.

Было показано, что при заданном наборе интенсивностей эксплуатации и положительных констант $p_i(t)\equiv p_{i,0}>0$, а также при выполнении естественных условий на коэффициенты модели (1)-(3), существует единственное стационарное решение.

Также было доказано существование набора интенсивностей эксплуатации, доставляющего на соответствующем стационарном состоянии максимум функционала выгоды

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^{L_i} c_i(l)u_i(l)x_i(l,E)dl+c_{Li}x_i(L_i,E)-p_{i,0}c_{i,0} \quad ,$$

где $c_i, c_{Li}, c_{i,0}$ – характеризуют соответствующие агрегированные цены выгоды.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-91004-АНФ_а) и No ДРПННиТ 1.1348.2011.

Литература

1. Hritonenko N., Yatsenko Yu., Goetz R., Xabadia A., A bang-bang regime in optimal harvesting of size-structured populations // Nonlinear Analysis, 71 (2009), e2331-e2336.
2. Hritonenko N., Yatsenko Yu., Goetz R., Xabadia A., Maximum principle for a size-structured model of forest and carbon sequestration management //Applied Mathematics Letters 20 (2008), 1090-1094.
3. Davydov A.A., Platov A.S. Optimal Stationary Solution in Forest Management Model by Accounting Intra-Species Competition // Moscow Mathematical Journal, Volume 12 (2012), No. 2.

Сведения об авторах

Панеш Асхад Асланович, ассистент кафедры математического анализа и методики преподавания математики, Адыгейский государственный университет, askhadr@mail.ru, динамические системы, дифференциальные уравнения в частных производных, оптимизация динамических процессов.

Платов Антон Сергеевич, ассистент кафедры функционального анализа и его приложений, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, platovmm@mail.ru, дифференциальные уравнения в частных производных, оптимизация динамических процессов.

О ЧИСЛЕ ЦЕЛЫХ ТОЧЕК НА ГИПЕРБОЛОИДАХ РОДА $G_{[w,2]}$, С УСЛОВИЕМ ДЕЛИМОСТИ ПЕРВЫХ КООРДИНАТ.

Пачев У. М.

Кабардино-Балкарский Государственный университет

Аннотация

Для числа целых точек на трехмерных гиперболоидах специального вида с условием делимости первых координат получена асимптотическая формула обобщающая соответствующие результаты Ю.В. Линника и атора.

ON THE NUMBER OF INTEGRAL POINTS ON HYPERBOLOIDS KIND OF $G_{[w,2]}$, WITH THE CONDITION OF DIVISIBILITY OF THE FIRST COORDINATES

Pachev U.M.

Пусть $f(x_1, x_{2,} x_3)$ −неопределенная целочисленная тернарная квадратичная форма рода $G_{[w,2]}$ инвариантов $[w, 2]$ и дискриминанта $D(f) = -\frac{1}{2}d(2f) = -w^2$. Пусть матрица A формы f не является целой. Тогда форма $\varphi = 2f$ с целой матрицей $B = 2A$ является несобственно-примитивной.

Через w обозначим делитель формы $\bar{f}$, алгебраически взаимной с формой f. Рассмотрим наибольший общий делитель w элементов матрицы $\bar{B}$ формы $\bar{\varphi}$. Тогда $d(f) = 2w^2$.

Род порядка инвариантов $[w, 2]$ формы $\varphi = 2f$, определяемый характерами $\left(-\frac{f}{p}\right) = 1, p/w,$ называем удобным родом, а формы f, для которых 2 f принадлежат удобному роду, называем удобными.

Тогда (см. [1]) имеет место следующее представление

$$f(x_1, x_{2,} x_3) = f_0\left(\sum_{k=1}^{3} c_{1k}x_k, \sum_{k=1}^{3} c_{2k}x_k, \sum_{k=1}^{3} c_{3k}x_k\right)$$

где $f_0 = f_0(y_1, y_{2,} y_3) = y_1y_3 - {y_2}^2$ – простейшая неопределенная тернарная квадратичная форма, $c_{ij} \in \mathbb{Z}, det(c_{ij}) = w$.

Известно, что род неопределенных тернарных квадратичных форм является одноклассным.

Обозначим через $r_1(-m, f, w)$ количество целых точек $(x_1, x_{2,} x_3)$ на гиперболоиде $f(x_1, x_{2,} x_3) = m$, для которых $x_1 \equiv 0(modw)$ и $f \in G_{[w,2]}$

при этом предполагаем, что форма f приводится к форме f_0 линейным преобразованием

$$y_1 = c_{11}x_1,\ y_2 = c_{22}x_2 + c_{23}x_3,\ y_3 = c_{32}x_2 + c_{33}x_3,$$

где $c_{11}(c_{22}\,c_{33} - c_{23}c_{32}) = w$.

Тогда дискретным эргодическим методом Ю.В.Линника (см. [2]) получаем следующий результат.

Теорема. Пусть $m \neq 0$ и $w > 0$ –целые числа, причем НОД$(w, 2m) = 1$ и $\left(-\frac{m}{p}\right) = 1, p/w$. Тогда при $|m| \to \infty$

$$r_1(-m, f, w) \sim \frac{2^{\upsilon(w)}}{\sigma_0(w)} \cdot h(-m),$$

где $\upsilon(w)$ –число простых делителей числа w;

$$\sigma_0(w) = w \prod_{p/w} \left(1 + \frac{1}{p}\right);$$

$h(-m)$-число классов собственно примитивных бинарных форм определителя m.

Полученная теорема обобщает результаты работ [2,3].

Литература

1. Касселс Дж. Рациональные квадратичные формы. «Мир». 1982. 436с.
2. Линник Ю.В. Эргодические свойства алгебраических полей. Изд-во ЛГУ. 1967, 208с.
3. Пачев У.М. О числе приведенных целочисленных бинарных квадратичных форм с условием делимости первых коэффициентов// Чебышевский сборник. Тула 2003. Т.4 Вып.3(7), С.92-105

Сведения об авторах

Пачев Урусби Мухамедович, доктор физико-математических наук, доцент, профессор, КБГУ, urusbi@rambler.ru, теория чисел.

ADAPTIVE UNSTRUCTURED MESH GENERATION METHOD FOR HYDROGEOLOGICAL PROBLEMS

Plenkin A.V.

Nuclear Safety Institute RAS, Moscow, Russia,

Chernyshenko A.Y.

Institute of Numerical Mathematics RAS, Nuclear Safety Institute RAS, Moscow, Russia,

Интенсивное развитие системы обращения с радиоактивными отходами (РАО), переход от отложенных решений (хранения) к захоронению РАО и возрастающие требования к безопасности пунктов захоронения в настоящее время обуславливают необходимость разработки расчетных кодов для трехмерного гидрогеологического моделирования. Их основной задачей является прогнозное моделирование процессов фильтрации и миграции радионуклидов в геологической среде. Отличительной особенностью разрабатываемых кодов должно стать использование новых вычислительных технологий, в частности, адаптивных неструктурированных сеток, схем дискретизации высокой точности, параллельных вычислений.

Данная работа посвящена вопросам построения адаптивных неструктурированных сеток. Об актуальности данной тематики свидетельствует наличие различных методологий построения сеток, что нашло свое отражение в множестве различных разрабатываемых кодов, таких как MODFLOW и FEFLOW. Расчетный код GeRa [1] (Геомиграция Радионуклидов), разрабатываемый ИБРАЭ РАН и ИВМ РАН, ориентирован на использование произвольных многогранных сеток. В коде выбор сделан в пользу двух сеточных генераторов. Первый генератор основан на построении треугольной сетки в двумерной проекции расчетной области и дальнейшем создании на ее основе треугольно-призматической сетки с возможностью получения также пирамидальных и тетраэдральных ячеек (например, при выклинивании пластов). Второй генератор создает иерархические сетки, ячейками которой преимущественно являются гексаэдры. Иерархия ячеек построена на структуре восьмеричного дерева. Сетка адаптируется к границам области и внутренним границам путем "скалывания" гексаэдральных ячеек. Такая сетка является конформной в обобщенном смысле. Такой выбор генераторов обусловлен несколькими соображениями. Во-первых, для прикладного гидрогеологического кода крайне важна автоматизация построения сетки – пользователь должен иметь только некоторые инструменты для адаптации сеток. Во-вторых, важно минимизировать количество ячеек. Это требование принуждает отказаться от хорошо развитых генераторов тетраэдральных сеток: при одинаковом шаге сетки число тетраэдров в 5-6 раз больше числа гексаэдров и приблизительно в 3 раза выше, чем число треугольных призм. В-третьих, такие сетки наилучшим образом подходят для типичных гидрогеологических задач, обладающих сильной геометрической анизотропией: обыкновенно мощность геологического слоя на порядки меньше его простирания.

Геометрической особенностью типичных гидрогеологических задач является слоистая структура расчетной области. Исходными данными для построения сетки являются контуры и области, отмеченные гидрогеологами на двумерных плановых картах различного назначения, и поверхности кровель и подошв геологических слоев. Этими контурами могут быть границы расчетной области, берега водоемов, линии геологических разломов, границы областей пространственной неоднородности параметров.

Построение расчетных сеток производится в два этапа. На этапе предобработки заданные пользователем данные о гидрогеологических объектах преобразуются в формат данных сеточных генераторов. Для корректного учета задаваемых пользователем объектов разработан алгоритм, который на входе получает произвольные наборы ломаных. В результате его работы формируется набор непересекающихся контуров и конформно касающихся подобластей. Положение геологических слоев принято задавать с помощью задания поверхностей кровли и подошвы геологического слоя, заданных в области, где этот слой залегает. Получив эти данные, наступает этап непосредственного построения сетки.

Построение треугольно-призматической сетки производится в два этапа. Сначала строится двумерная триангуляция расчетной области, адаптированная к заданным пользователем гидрогеологическим объектам. При этом сначала строится независимая триангуляция каждой из подобластей, в которых рассматриваются все скважины и точечные источники. Для построения триангуляции используется метод продвигаемого фронта [2]. Затем строится треугольно-призматическая сетка. Для этого, для каждой вершины триангуляции находятся точки пересечения вертикального луча, проходящего через эту точку, с кровлей и подошвой каждого геологического слоя. Полученные точки будут являться вершинами призматической сетки, в генераторе сохраняются их z-координаты. Такой компактный формат хранения позволяет генератору строить многомиллионные сетки даже на обычных ПК. Поскольку слои могут вырождаться, предусмотрен ряд настроек построения сетки, позволяющих избежать построения слишком тонких ячеек, негодных для расчетов. В окрестности выклинивания слоев призмы могут вырождаться в пирамиды и тетраэдры.

В основе второго генератора лежат сетки типа восьмеричное дерево со сколотыми ячейками. Использование сеток типа восьмеричное дерево позволяет строить гексаэдральные сетки, иерархически сгущающиеся к границам расчетной области, скважинам и другим объектам. Сколотая ячейка представляет собой часть гексаэдральной ячейки, полученную в результате ее среза поверхностной триангуляцией, и является многогранной ячейкой. Для построения сколотых ячеек используется алгоритм, основанный на методах Cubical marching squares [3] и Multiple material marching cubes [4]. Этот алгоритм подробно описан в работе [5].

В силу того, что геологические слои обычно имеют сильную вертикально-горизонтальную анизотропию, а кровли и подошвы слоев представляют собой сложные искривленные поверхности, допускающие пересечения, использование ортогональных гексаэдральных сеток становится весьма затруднительным. Для построения сеток в таких областях используется отображение ортогональных гексаэдральных сеток вдоль вертикальной оси. В результате получаются неортогональные анизотропные гексаэдральные ячейки (преимущественно). Грани, аппроксимирующие кровли и подошвы могут стать неплоскими, которые, при необходимости, грани могут быть разбиты на треугольники.

Продемонстрируем работу генераторов на примере. Рассмотрим область, состоящую из трех геологических слоев, расположенных на высоте от 50 до 225 метров. Двумерная область ограничена контуром, изображенным на рисунке 1. Верхний геологический слой выклинивается. Триангуляции геологических интерфейсов имеют порядка 4 тыс. треугольников. Внутри области расположена скважина. В каждом геологическом слое будем делать несколько сеточных подслоев.

В таблице 1 представлены параметры сеток, построенных треугольно-призматическим генератором, а также время их построения. Параметры для гексаэдрального генератора представлены в таблице 2. Пример гексаэдральной сетки приведен на рисунке 2.

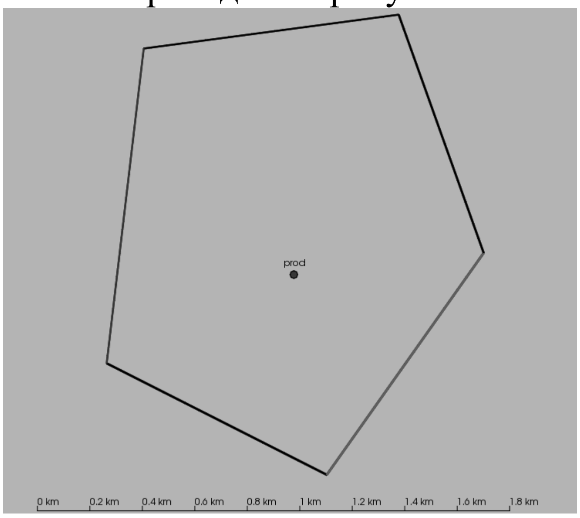


Рис.1. Контур области со скважиной

Табл.1. Параметры сеток, построенных треугольно-призматическим генератором, и время их построения

Шаг сетки	Число ячеек	Число вершин	Время, сек
40	25542	14688	0.99
20	93731	52620	3.33
10	367477	203424	16.5
5	1560988	857340	58.65

Табл.2. Параметры сеток, построенных гексаэдральным генератором, и время их построения

Шаг сетки	Число ячеек	Число вершин	Время, сек
40	12715	14970	4.21
20	48022	54397	15.84
10	188111	209337	57.39
5	745330	822236	227.40

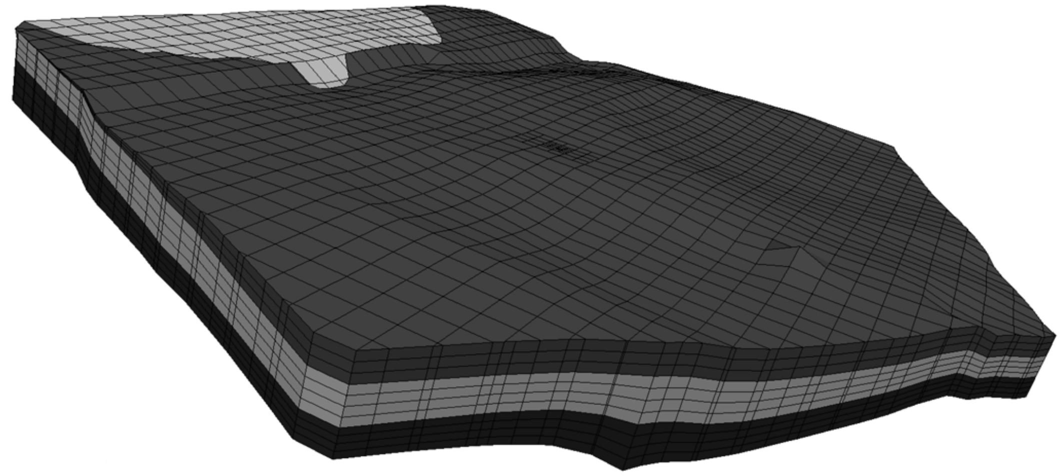


Рис.2. Пример гексаэдральной сетки при шаге сетки 40м

Из таблиц можно заметить, что время построения сеток растет почти линейно. Представленные результаты позволяют утверждать, что разработанные сеточные генераторы позволяют строить адаптированные к положению различных гидрогеологических объектов сетки, состоящие из миллионов ячеек, на обычном персональном компьютере без применения параллелизации за приемлемое время.

Литература

1. Капырин И.В., Уткин С.С., Василевский Ю.В. Концепция разработки и использования расчетного комплекса GeRa для обоснования безопасности пунктов захоронения радиоактивных отходов// Вестник атомной науки и техники, серия «Математическое моделирование физических процессов» . 2014. №4. С.44-54.
2. Danilov A.A. Unstructured tetrahedral mesh generation technology //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. – 50. – P. 146- 163.
3. Чернышенко А.Ю. Построение сеток типа восьмеричное дерево со сколотыми ячейками в неоднородных областях Вычислительные методы и программирование. 2013. – 14, №5. С. 229-245.
4. Ho C.-C., Wu F.-C., Chen B.-Y., Chuang Y.-Y., Ouhyoung M. Cubical Marching Squares: Adaptive Feature Preserving Surface Extraction from Volume Data// EUROGRAPHICS. 2005. – 24, №3.
5. Wu Z., Sullivan J.M. Multiple material marching cubes algorithm// Int. J. Numer. Meth. Engng. 2003. – 58. – P. 189-207.

Сведения об авторах

Пленкин Андрей Валерьевич, к.ф.-м.н., научный сотрудник Института проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, golden_dragon_84@mail.ru, численные методы, сетки, мат. моделирование.

Чернышенко Алексей Юрьевич, к.ф.-м.н., научный сотрудник Института проблем безопасного развития атомной энергетики РАН и Института вычислительной математики РАН, chernyshenko.a@gmail.com, численные методы, сетки, мат. моделирование.

ВЛИЯНИЕ ЛЕЙБНИЦА НА СТАНОВЛЕНИЕ МАТЕМАТИКИ В РОССИИ

Полякова Т.С.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

Аннотация
В статье охарактеризованы отношения с Россией великого мыслителя конца XVII – начала XVIII в Г.В. Лейбница и влияние его и созданной им научно-математической школы на становление отечественной математики.

INFLUENCE OF G.W. VON LEIBNIZ ON MATHEMATICS DEVELOPMENT IN RUSSIA

Poljakova T.S.
Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

Abstract
This article describes relations to Russia of the great thinker of the end of 17^{th} – beginning of 18^{th} centuries G.W. von Leibniz, his personal influence and influence of the scientific and mathematical school created by him on the development of national mathematics.

В «Концепции развития российского математического образования», принятой в 2013 г., подчеркивается, что «важным является и общественное представление об истории российского математического образования» [1, с. 7], а также говорится о том, что «необходима последовательная, правдивая и деликатная популяризация наиболее значительных фигур российской математики…» [1, с. 14]. Готфрид Вильгельм Лейбниц не является значительной фигурой российской математики, однако влияние его на ее развитие весьма существенно, что будет нами обосновано далее.

Заметим, что сферы деятельности Лейбница просто поразительны: его по праву считают универсальным гением. Философ, стоящий в одном ряду с Декартом. Математик, оспаривающий с Ньютоном честь открытия математического анализа. Политик, дипломат, публицист, юрист, логик, теолог, историк, даже психолог и изобретатель. Основатель и первый президент Берлинской академии наук, иностранный член Французской академии наук.

В математике Лейбниц также универсальный гений: он достиг высоких результатов как в исследовании дифференциального и интегрального исчислений, т.е. в изучении непрерывного, так и в комбинаторном анализе – исследовании дискретного: уже в 1666 г.

Лейбницем было написано сочинение «Об искусстве комбинаторики». Он задумал грандиозный проект математизации логики, не доведенный, впрочем, до конца

Математика для него составляла часть философской системы, фундаментом которой являлась всеобщая гармония. Мир, в котором царит всеобщая гармония, считал Лейбниц, един, его можно понять единым методом познания, под которым он понимал универсальный математический метод. Для этого, предполагал Лейбниц, необходимо построить алгоритм, где операции над понятиями выполнялись бы так же, как в математике операции над величинами.

Для его интеллекта и деятельной натуры не было ничего невозможного. Так, он прилагал усилия для устранения противоречий между католицизмом и протестантизмом, позже и православия, даже христианизация Китая (!), для чего он собирался использовать территорию России.

Лейбниц был, если можно так выразиться, «титаном коммуникаций»: много ездил, завязывал знакомства с выдающимися людьми Европы, вел огромную переписку – в архивах, которые еще не полностью разобраны, насчитывается более 15 000 писем Лейбница. Большое значение придавал воспитанию. С ним связывают высказывание: «Дайте в мои руки дело воспитания, и через полвека Вы не узнаете Европу».

Лейбниц и Россия. География интересов Лейбница необычайно широка. В письме Петру I от 1 января 1712 г. он признается «Я не принадлежу к числу тех, которые питают страсть к своему отечеству или какой-нибудь другой нации, мои помыслы направлены на благо всего человеческого рода» [2, с. 200].

Огромный интерес Лейбниц проявлял к России и ее государю. Они познакомились с Петром I только в 1711 г. на свадьбе царевича Алексея. Однако интерес к России у Лейбница сложился задолго до этого. В своей переписке он часто упоминает о России уже в 90-х гг. XVII в., пытается встретиться с царем во время дипломатической миссии России в Европу, получившей название «Великого посольства».

После победы 1709 г. под Полтавой положение России в Европе чрезвычайно упрочилось. В течение почти 20 лет Лейбниц предпринимал попытки сближения с русским двором преимущественно для реализации планов распространения наук в России. В частности, он откровенно высказывал свое желание стать во главе академии. Это желание не воплотилось в жизнь: академия наук в России была создана значительно позже ухода Лейбница из жизни.

Вторая встреча с Петром I произошла осенью 1712 г.: Лейбниц имел аудиенцию у государя, в результате которой он был принят на русскую службу с чином тайного советника и с жалованьем по 1000 талеров в год. В соответствующем указе Петра I, в частности, говорится: «Готфрид

Вилгелма Лейбница … в наши тайные юстиц-раты определить <…> он ко умножению математических и иных искусств … и к приращению наук много вспомощи может, его ко имеющему нашему намерению, чтобы науки и искусства в нашем государстве в вящий цвет произошли, употребить» [2, с. 725].

Для выполнения свих функций советника Лейбниц предпринимает неоднократные, но безуспешные попытки получения необходимых из России материалов. С целью получения этих материалов Лейбниц начал контактировать с ближайшими соратниками Петра I. Особенно интересны для нас попытки Лейбница связаться с одним из основателей математико-навигацкой школы Фарварсоном, которого он просил найти списки книг и ученых. В переписке он говорит о желании составить для русских общую энциклопедию наук. Заметим, что даже в Европе эта задача решена значительно позже созданием французскими просветителями во второй половине XVIII в. «Энциклопедии, или Толкового словаря наук, искусств и ремесел».

К сожалению, в течение трех с половиной лет Лейбниц не получает из России не только жалованья и дальнейших инструкций, но и ответа на свои просьбы о высылке материалов, необходимых для его работы. С целью получения этих материалов Лейбниц контактирует с соратниками Петра I. Особенно интересны попытки связаться с одним из основателей математико-навигацкой школы Фарварсоном, которого он просил найти списки книг и ученых и способы их получения. В переписке он говорит о желании составить для русских общую энциклопедию наук. Заметим, что даже в Европе эта задача решена только во второй половине XVIII в. созданием французскими просветителями «Энциклопедии, или Толкового словаря наук, искусств и ремесел».

Последняя встреча с царем состоялась летом 1716 г. К сожалению, никаких подробностей о встречах с Петром Лейбниц не оставил. Кроме восторженных отзывов о нем такого рода: «Я не могу довольно надивиться живости и уму этого великого государя. Он со всех сторон собирает около себя сведущих людей, и, когда он с ними говорит, они совершенно поражены: с таким пониманием их дела он ведет с ними речь» [2, с. 751].

Будучи советником Петра I, Лейбниц предпринимает многократные попытки разработки проектов развития в России науки и просвещения, в частности, образовательные проекты, которые описаны в [3, с. 69-70]. Не все из них воплощены в жизнь полностью или частично, в его время или в дальнейшем, но влияние идей Лейбница на образование и науку несомненно. Так, разработанный им, но не осуществленный в полной мере проект создания высшей администрации России в виде коллегий включает ученую коллегию, пользу от которой Лейбниц характеризует в письме Петру I следующим образом: «1) невежество мало-помалу исчезнет в стране; 2) в известных случаях можно будет испрашивать совета ученой коллегии; 3) собрание таких замечательных людей будет привлекать иностранцев; 4) посланные за границу юноши возвратятся с большой пользой, что послужит к уменьшению расходов вашего величества; 5) ваше величество будете со временем иметь из вашего собственного народа и по всем предметам таких же отличных ученых, и даже лучших, чем где-либо в Европе» [2, с. 752].

Однако высказываются и сомнения в искренности Лейбница в отношении реформирования России. Задаются вопросы: Что мешало ему приехать в Россию и самому заняться организацией академии? Почему он хотел руководить ею из Ганновера или Берлина? Он хотел, как многие другие, оставаясь в Европе, получать пенсион из России и писать докладные записки? [4. С. 800].

Однако отнюдь не разработанные для нашей страны проекты, по нашему мнению, являются наиболее значимыми. Самым существенным является то, что именно научная школа Лейбница заложила основы развития математики в России. Лейбниц значительную часть своей жизни пытался проникнуть в духовный и интеллектуальный мир России. Наиболее успешным оказалось проникновение и развитие в России его математических идей, о чем Лейбниц, к сожалению, так и не узнал.

Первая европейская научно-математическая школа Г.В. Лейбница. Особенность характера, интеллекта и образа жизни Лейбница приводили к тому, что у него не хватало времени и сил на воплощение в жизнь своих гениальных идей, в том числе математических. Положение изменилось после публикации в основанном Лейбницем в Лейпциге научном журнале «Ученые записки» его знаменитого мемуара «Новый метод для максимумов и минимумов…». Лейбниц получает письмо Якова Бернулли, который прочел мемуар Лейбница и начал активно работать над исчислением бесконечно малых, привлекая своего брата Иоганна, впоследствии и его ученика Лопиталя.

Произошло, возможно, самое главное в математическом творчестве Лейбница – высказанные им идеи, введенные понятия и методы стали активно использоваться коллегами. Практически это означало возникновение научно-математической школы Лейбница, следовательно, признание и распространение его достижений в математическом анализе. У Лейбница как генератора идей появились ученики, которые блестяще их реализовывали. Они вместе со своим учителем печатали статьи в научных журналах, оживленно переписывались, обсуждая постановку новых задач и пути их решения. В результате в 1796 г. вышел в свет первый курс дифференциального исчисления – «Анализ бесконечно малых для исследования линий» маркиза Лопиталя.

Вернемся в Россию. Советы Лейбница, профессора Марбургского университета Христиана Вольфа, избрание Петра членом Парижской академии наук побудили последнего к учреждению Санкт-Петербургской

Академии наук, указ о котором издан Сенатом еще при жизни Петра, в январе 1724 г.

В России того времени ученых не было, пришлось приглашать их из Европы, в которой наблюдался расцвет математики. Подбор профессоров по отделу математических наук оказался поразительно удачным: Я.Герман, ученик Якова Бернулли, с 1707 г. профессор университета в Падуе, а затем во Франкфурте-на-Одере; Николай и Даниил Бернулли – сыновья знаменитого Иоганна Бернулли. С 1727 г. к ним присоединился один из самых замечательных математиков всех времен Леонард Эйлер, который был другом и коллегой братьев Бернулли. Все они принадлежали к первой европейской научно-математической школе, у истоков которой стоял Лейбниц и которая по праву носит его имя.

Сбылось предсказание Лейбница: всего через сотню лет – чрезвычайно малый исторический срок – в России появились первоклассные ученые. Это Н.И. Лобачевский, произведший революцию в математике, и М.В. Остроградский, признанный на европейском уровне математик и механик, создавший в России первую научную школу механики.

Итак, Лейбниц оказал чаще всего опосредованное, но чрезвычайно значимое влияние на развитие науки и образования в России. Прежде всего, это касается математики и математического образования: у истоков российской математики стоит созданная им научно-математическая школа; в образовательных проектах подчеркивается особая роль математики в общем и университетском образовании.

Литература

1. Концепция развития российского математического образования. – Электрон. текст. дан., 2013. – http://www.math.ru/conc/vers/conc-3003.
2. Герье В. Лейбниц и его век. – СПб.: Наука, 2008. – 807 с.
3. Марков Б.В. Современная философия // Лейбниц и его век. – СПб: Наука, 2008. – С. 770-801.
4. Полякова Т.С. История математики: Европа. XVII – начало XVIII века: учебное пособие. – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2015.–126с.

Сведения об авторе

Полякова Татьяна Сергеевна, доктор педагогических наук, профессор кафедры теории и методики математического образования Института математики, информатики и компьютерных наук Южного федерального университета.Область научных интересов – история математики и математического образования в России, теория и методика высшего математического образования. Почтовый адрес: Россия, Ростов-на-Дону, пр. Ворошиловский, 52, кв. 52. E-mail: 46tsp@mail.ru

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Псху А.В.
Институт прикладной математики и автоматизации, Нальчик, Россия.

Аннотация
Решена первая краевая задача в нецилиндрической области для уравнения дробной диффузии.

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION IN NONCYLINDRICAL DOMAIN

Pskhu A.V.
Institute of applied mathematics and automation, Nalchik, Russia.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} u(x,y) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) = f(x,y) \qquad (1)$$

где $\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} = D_{0y}^{\alpha}$ – дробная производная Римана-Лиувилля [1, с. 9] порядка α, $\alpha \in (0,1)$, с началом в точке $y = 0$. Пусть $z_1(y)$ и $z_2(y)$ – непрерывные на $[0, T]$ функции, $z_1(y)$ не убывает, а $z_2(y)$ не возрастает, $z_1(y) < z_2(y)$ для всех $y \in [0, T)$, и $z_1(T) \leq z_2(t)$. В области

$$D = \{(x,y): z_1(y) < x < z_2(y), 0 < y < T\}$$

рассматривается задача: найти регулярное решение уравнения (1) в области D, удовлетворяющее условиям

$$u(z_1(y), y) = \varphi_1(y), u(z_2(y), y) = \varphi_2(y), 0 < y < T; \quad (2)$$

$$\lim_{y \to 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x,y) = \tau(x), \qquad z_1(0) < x < z_2(0). \quad (3)$$

Под регулярным решением уравнения (1) в области D понимается решение из класса $y^{1-\alpha} u(x,y) \in C(\overline{D} \setminus \{y = T\})$, $u_{xx}(x,y), D_{0y}^{\alpha} u(x,y) \in C(D)$.

Уравнения в частных производных дробного порядка в настоящее время интенсивно исследуются, в том числе и в связи с многочисленными приложениями в физике и моделировании (см., например, [1, 2]). Обзор работ, посвященных уравнению дробной диффузии работ можно найти в [3, 4]. В частности, первая краевая задача для уравнения (1) в прямоугольной области решена в [5]. Для уравнения теплопроводности ($\alpha = 1$) первая краевая задача в нецилиндрической области была решена в работах [6] и [7]. В данной работе решена задача (2)-(3) для уравнения (1) в случае нецилиндрической области.

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.
2. Учайкин В.В. Метод дробных производных. – Ульяновск: Артишок, 2008. – 512 с.

3. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, vol. 204 of North-Holland Mathematics Studies, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 2006.
4. Псху А.В. Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // Изв. РАН. Сер. матем. 2009, т.73, №2. С.141-182.
5. Псху А.В. Решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка // Дифференциальные уравнения, 2003, т.39, №9. С.1286-1289.
6. Gevrey M. Sur les equations aux derivees Partielles du type parabolique // Journal de math-ematiques pures et appliquees 6e serie, 1913, tome 9. P.305-476.
7. Petrowsky I. Zur ersten Randwertaufgabe der Warmeleitungsgleichung // Compositio Mathematica, 1935, tome 1. P.383-419.

Сведения об авторе

Псху Арсен Владимирович, доктор физико-математических наук, доцент, заместитель директора по научной работе, Институт прикладной математики и автоматизации, pskhu@list.ru, дифференциальные уравнения, дробное исчисление, интегральные преобразования, специальные функции.

ЭПИСТОЛЯРНОЕ НАСЛЕДИЕ Д.Д. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОГО: ПЕРЕПИСКА С ОТЕЧЕСТВЕННЫМИ И ЗАРУБЕЖНЫМИ МАТЕМАТИКАМИ

Пырков В.Е.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия.

Аннотация

В статье кратко охарактеризована научная переписка выдающегося российского математика профессора Д.Д. Мордухай-Болтовского с отечественными и зарубежными коллегами. В качестве примера рассказано об обнаруженных автором в 2014-2015 годах и неопубликованных ранее письмах проф. А.В. Васильеву, проф. М.Я. Выгодскому и телеграмме от Ж. Адамара.

EPISTOLARY HERITAGE OF D. D. MORDUKHAI-BOLHOVSKOGO: CORRESPONDENCE WITH DOMESTIC AND FOREIGN MATHEMATICIANS

Pyrkov V.E.

Southern Federal University, Rostov-on-don, Russia.

Д.Д. Мордухай-Болтовской – уникальное явление в отечественной науке и образовании. Он внес существенный вклад во многие разделы математики, а также в ее историю и методику преподавания. Библиография научных работ Д.Д. Мордухай-Болтовского, насчитывающая 315 опубликованных исследований и около полутора сотен ненапечатанных рукописных работ, большая часть которых хранится в ПФА РАН (Ф. 821, Оп.1), содержит также труды по философским вопросам математики, психологии математического мышления, математической логике, аксиоматике и даже филологии и истории.

Несмотря на то, что имя Д.Д. Мордухай-Болтовского прочно вошло в историю отечественной науки, многие факты научной биографии ученого до сих пор остаются неизвестными или неоднозначно истолкованными.

В частности, известно не большое количество документальных источников, свидетельствующих о деловых контактах ученого с коллегами-математиками в стране и за рубежом. Между тем, косвенных свидетельств такого сотрудничества вполне достаточно. Такое положение дел во многом объясняется обстоятельствами жизни ученого и неустроенностью его быта: в частности, частая смена места жительства (Санкт-Петербург, Варшава, Новочеркасск, Ростов-на-Дону, Ессентуки, Пятигорск, Иваново и др.) и социальные катаклизмы (революция 1917 г. и последующая гражданская война, Великая отечественная война). В одной из своих последних биографий Д.Д. Мордухай-Болтовской отмечал «Все мое имущество было уничтожено немцами … вследствие чего я …, не получая ни зарплаты, ни пенсии, и не будучи в состоянии что-либо продавать, находился в состоянии крайней нужды, страдал от болезней, и от холода, и от голода…»[1]. Вместе с имуществом погибла богатейшая библиотека Д.Д. Мордухай-Болтовского и практически все рукописи его работ, включая обширную переписку с отечественными и зарубежными коллегами.

В личном фонде Д.Д. Мордухай-Болтовского (ф.821), хранящемся в Санкт-Петербургском филиале архива РАН[2], достаточно полно представлена переписка ученого со своим средним сыном, Филаретом Дмитриевичем Мордухай-Болтовским – известным отечественным гидробиологом. В этом же архиве хранятся письма Д.Д. Мордухай-Болтовского к академику В.А. Стеклову и профессору К.А. Поссе (ф. 162), относящиеся к началу XX века и связанные с первыми научными работами Д.Д. Мордухай-Болтовского и обсуждением идей его диссертации. В личном фонде известного астронома, и ученика Д.Д. Мордухай-Болтовского по Варшавскому университету М.Ф. Субботина (ф.967) имеются письма, охватывающие временной период с 1917 по 1923 гг, их содержание, в основном касается проблем организации математического образования в Ростовском университете.

Сведения о зарубежных контактах Д.Д. Мордухай-Болтовского с Дж. Пеано имеются в статье С.С. Демидова [1] и содержат описание писем Д.Д. Мордухай-Болтовского, хранящихся в архиве Пеано в Турине.

[1] Архив РГУ, ф. Р-46, оп. 22, д. 63, л. 86-87.
[2] Содержание этих писем было описано нами ранее. См. подробнее [4].

Переписка охватывает период с лета 1925 г. по осень 1931 г. Написаны эти письма на интерлингве и посвящены обсуждению вопросов математической логики, истории и философии математики и её преподавания, содержанию некоторых работ обоих ученых.

Переписка ученого, помимо богатого фактологического материала, личностно значимого для автора письма, кроме того, способствует более глубокому пониманию социального контекста истории науки. Поэтому, нами был продолжен поиск ранее неизвестных писем ученого в архивных фондах его потенциальных адресатов. Работа эта достаточно объемная и кропотливая, осложнена географической удаленностью архивов и ограниченными временными рамками работы с их фондами. Тем не менее, за последние два года, благодаря командировкам на конференции в Москву, нами были обнаружены:

- в Отделе редких книг и рукописей научной библиотеки МГУ (ф.25, оп.1, д.90) письма Д.Д. Мордухай-Болтовского профессору Московского университета, первому российскому члену-корреспонденту Международной академии истории науки А.В. Васильеву;
- в Центральном московском архиве – музее личных собраний (ф.30, оп.1, д.254) письмо известному историку математики, профессору МГУ и ученику Д.Д. Мордухай-Болтовского по Варшавскому университету М.Я. Выгодскому;
- в Архиве РАН (ф.606, о.3, д.107) почтовая карточка Д.Д. Мордухай-Болтовскому от известного французского математика Ж. Адамара.

В этой статье мы предпримем попытку ввести в научный оборот указанные документы.

Хранящиеся в научной библиотеке МГУ письма Д.Д. Мордухай-Болтовского к Александру Васильевичу Васильеву представлены четырьмя документами, общим объемом в 19 страниц. Это три довольно обширных письма к самому А.В. Васильеву и записка на 1 странице некоему Александру Александровичу об отправке портретного фото А.В. Васильева от 11 мая 1930 г.

В письме от 22 марта 1925 г. Д.Д. Мордухай-Болтовской пишет о примерах несоответствия временных и интеллектуальных затрат в научном исследовании и последующим признанием полученного результата. В качестве первого примера такого несоответствия он приводит историю со своей докторской диссертацией[1]: «За огромный труд, совершенно оригинального содержания – я вместо заслуженной … получил только своего рода каинову печать, которая и по настоящее время … доставляет большое огорчение»[2].

В противовес этому он говорит об истории с работой о трансцендентности числа e^e[5]: «За пустяшную работу, нескольких

[1] При цитировании сохранены авторские орфография, пунктуация и подчеркивание.
[2] ОРКР НБ МГУ, ф.25, оп.1, д.90, л.1

вечеров я получил большую славу. Похвалу от Хадамара, Митагг-Леффлера предлагающего мне написать о своих замечательных исследованиях мемуары в Acta Mathematica. О моих исследованиях докладывают в Москве, докладывают в Геттингене и т.д. В Revue semestrielle я попал, как злоба дня. И все это незаслуженно, так как в моих исследованиях, очень сложных, скверная ошибка уничтожившая половину работы»[1].

В качестве третьей иллюстрации своего тезиса, Д.Д. Мордухай-Болтовской приводит историю с решением задачи о гипертрансцендентности Дзета-функции Римана. Этот результат Д.Д. Мордухай-Болтовского, до сих пор воспринимается исследователями его творчества неоднозначно. Поэтому предоставим слово самому ученому: «В 1900 г. Гильбертом была предложена задача о доказательстве гипертрансцендентности знаменитой функции $\zeta(s,x)$. 21 год ломали над этим голову и не могли решить эту задачу. … Я решил её в 2 часа. Прочтя о ней в одну из своих поездок с дачи в Варшаве и продумав её частью в поезде, частью на даче. Удалось её решить не столько потому, что у меня голова хорошая, а потому, что мои исследования о теореме Эйзенштейна дали все для решения этой проблемы. Владея плохо немецким языком, я все откладывал посылку работы Гильберту и наконец оказался отрезанным войной от Германии. Послал её только в 1922 г. когда она оказалась уже решенной Островским снискавшим себе этим большую славу. Мое решение было в Математическом Институте признано вполне правильным и совершенно не похожим на решение Островского, а мне было предложено объявить … приоритет Островского, открывшего свое решение 7 лет спустя после меня, причем совместно с математиками, которых он благодарит»[2].

Далее Д.Д. Мордухай-Болтовской приводит примеры с пропавшими на границе девятью его работами, в которых он решил «очень трудные задачи», неудачную историю с переизданием Госиздатом его задачника, пользующегося широким распространением в дореволюционной России и переизданного в Польше и в Чехии [2][3] и др.

В следующем письме дата не указана, но, судя по тексту, оно предшествовало описанному выше, т.к. является первым письмом от Д.Д. Мордухай-Болтовского А.В. Васильеву, отосланному на московский адрес последнего. По содержанию можно судить об их переписке и в бытность А.В. Васильева в Казани и в Санкт-Петербурге. Речь в этом письме идет о попытках изданиях работ Д.Д. Мордухай-Болтовского в

---

[1] ОРКР НБ МГУ, ф.25, оп.1, д.90, л.1 об.

[2] ОРКР НБ МГУ, ф.25, оп.1, д.90, л.2- л.2 об.

[3] Видимо, об этом издании самому Д.Д. Мордухай-Болтовскому не было известно, т.к. оно не вошло ни в один из составленных им списков своих работ, и до сих пор не фигурирует в изданных полных списках его публикаций. Нами оно было обнаружено в Киевской национальной библиотеке.

различных сборниках и журналах, в том числе зарубежных: «Вообще чувствуется как бы толстая стена, отделяющая нас от Западно-Европейской Науки. Мной послано много статей в иностранные журналы, но судьба только нескольких мне известна»[1]. Далее речь идет об организации и результативности научной работы на физмате Ростовского университета в первой половине 20-х годов. Приведем несколько выдержек из этого письма: «В период правда очень тяжелый в материальном отношении, в период разрухи и голода, научная жизнь не скажу чтобы процветала, но во всяком случае её живой источник не иссякал. … очень интенсивно работало Философское Общество которое пользовалось огромной популярностью и доклады в котором привлекали до 500 слушателей ... Но с началом борьбы на идеологическом фронте, философское общество совершенно прекратило свою деятельность: проф. И.И. Ягодинский чуть не вылетел из Университета, проф. А.М. Ладыженский подвергся отчаянной травле и всяким неприятностям, я меньше других пострадал. По назначении меня деканом Педфака, я был выброшен с этой должности вследствие телеграммы, посланной из Ростова, указывающей на неподходящее мое мировоззрение, выразившееся в докладах. Попытки издать мои доклады мне не удались, цензура не смотря на их полную аполитичность их не пропустила»[2].

Д.Д. Мордухай-Болтовской пишет А.В. Васильеву о своем исследовании по теме «Схоластика и математика», над которым ученому пришлось много поработать в центральных библиотеках страны; о его работах по истории методики математики, результаты которых докладывались на методическом коллоквиуме; о работе в Первой Ростовской гимназии и др. В этом же письме он рассказывает о деятельности авиационного кружка при Донском Техническом университете и своих выступлениях в нем; о судьбе студенческих педагогического и философского кружков; о постановке математического образования на факультете и др.

Следующее письмо датировано 28 марта 1929 года. Из его содержания нам становится известно, о подготовленном Д.Д. Мордухай-Болтовским некрологе К.А. Поссе[3], который был отправлен для публикации В.И. Вернадскому, но так и не был опубликован. В рукописном фонде работ Д.Д. Мордухай-Болтовского подобной рукописи нами не обнаружено.

Ниже речь идет о других исследованиях Д.Д. Мордухай-Болтовского по истории математики, некоторые из которых также не значатся ни в

[1] ОРКР НБ МГУ, ф.25, оп.1, д.90, л.5 об.

[2] ОРКР НБ МГУ, ф.25, оп.1, д.90, л.6 – л.6 об.

[3] Поссе Константин Александрович, один из преподавателей Д.Д. Мордухай-Болтовского в Санкт-Петербургском университете, и первый его научный руководитель. Скончался в возрасте 80 лет, 24 августа 1928 г.

списке его опубликованных работ, ни в перечне рукописного наследия. Сожалея о том, что этим работам вряд ли удастся выйти в печати, Д.Д. Мордухай-Болтовской отмечает: «Хорошо было бы, если бы Госиздат вместо того чтобы издавать всякий мусор и ряд книг для рабфаков и различных наглядных Геометрий, издавал бы журнал по Истории Математики или вообще по истории Физико-Математических Наук. Такой журнал имел бы, как Математическое образование, хороший сбыт. Интересное явление: при очень слабых знаниях по истории, студенты страшно интересуются историей науки, книги на эти темы берутся на расхват, лекции мои посещаются с особенной охотой. Некоторые берут и темы дипломных работ по Истории Математики. Хорошо бы закинуть эту мысль какому нибудь влиятельному марксисту, что такой журнал мог бы содержать статьи с соответствующим соусом, но на ряду со статьями с соусом, могли бы быть и статьи без соуса»[1].

В этом же письме мы встречаем одно из первых упоминаний Д.Д. Мордухай-Болтовского об увлечении «совершенно новой темой» - геометрией радиолярий. Он пишет: «Надо сознаться, что это самое интересное, что я в своей жизни видел. Это богатый по-геометрически кабинет с моделями решений интереснейших проблем Ситуационной и метрической Геометрии. Наряду с элементарными задачами, которые я решил, есть и задачи Вариац.*[ионного]* Исчисления, которые я едва ли решу. Устанавливаю связь с зоологами и летом хочу приблизить результаты хотя бы по атласам»[2].

В Центральном московском архиве – музее личных собраний в фонде М.Я. Выгодского помимо, прочих интересных документов, храниться письмо от Д.Д. Мордухай-Болтовского датированное 16 февраля 1933 г. Оно представляет собой исписанный с обеих сторон мелким почерком тетрадный лист. Речь в нем идет в основном о переводе и комментариях к математическим работам Ньютона [3]. Здесь же упоминается об «обилии ненапечатанных работ» по истории математике, издать которые в стране не получается, но которые охотно принимают за рубежом: «По истории математики одна работа напечатана в Scripta Mathematica и вторая в редакции, одна в Accheion, вторую туда посылаю. Надо сознаться, что почти восторженного приема со стороны редакторов этих журналов – я не ожидал. Мне это в высокой степени приятно, ибо повторяю – на эти работы я потратил больше труда, чем на специальные, из которых все, кроме «Интегрирования в конечном виде» были только эпизодами моей жизни, в то время как эти работы и работы математическо-биологические все время занимали мою голову т.е. заполняли всю жизнь»[3].

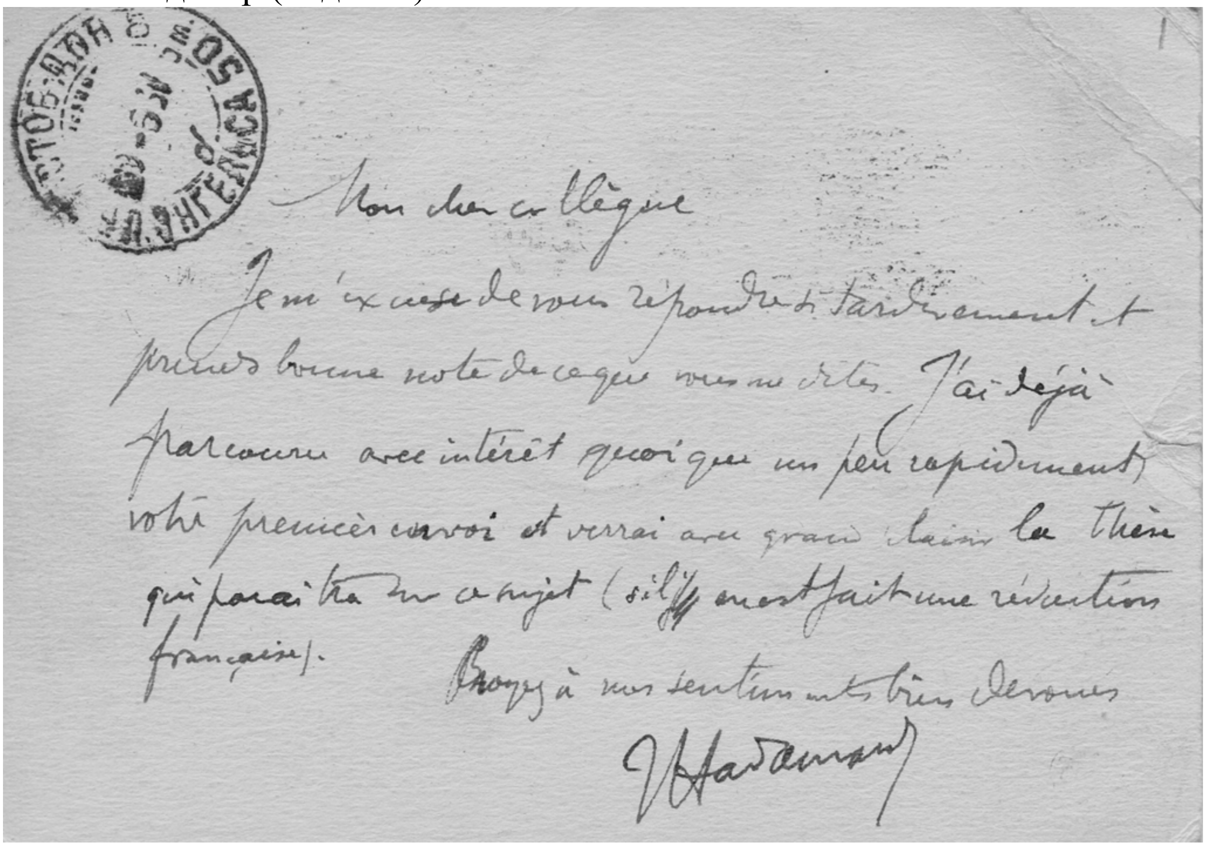
[1] ОРКР НБ МГУ, ф.25, оп.1, д.90, л.9 – л.9 об.
[2] ОРКР НБ МГУ, ф.25, оп.1, д.90, л.9 об.
[3] ЦМАМЛС ф.30, оп.1, д.254, л.86 – л.86 об.

Последним из рассматриваемых эпизодов будет почтовая карточка, адресованная Д.Д. Мордухай-Болтовскому от Ж. Адамара, датированная 17 июня 1937 года. Она хранится в Архиве РАН[1]. Приведем ниже её перевод[2] и фотокопию.

«Мой дорогой коллега! Извиняюсь, что слишком задержался с ответом. Я размышляю над тем, что вы мне написали. Я уже прочитал с интересом, но может быть слегка поверхностно Вашу первую работу, и я с большим удовольствием прочитаю вашу работу по этой теме, если будет французский перевод.

Искренне Ваш

Ж. Адамар (подпись)»



Mon cher collègue

Je m'excuse de vous répondre si tardivement et prends bonne note de ce que vous me dites. J'ai déjà parcouru avec intérêt quoique un peu rapidement votre premier envoi et verrai avec grand plaisir la thèse qui paraîtra sur ce sujet (s'il en est fait une traduction française).

Croyez à mes sentiments bien dévoués

J Hadamard

Рис.1. Оборотная сторона почтовой карточки от Ж. Адамара адресованная Д.Д. Мордухай-Болтовскому в Ростов-на-Дону.

Из рассмотренных выше, и других писем следует, что Д.Д. Мордухай-Болтовской вел активную переписку не только с отечественными, но и с зарубежными коллегами (Ж. Адамар, М. Миттаг-Леффлер, Дж. Пеано, Д. Пойя, А. Ритт и др.), а также с редакторами иностранных математических журналов. Возможно, в архивных фондах этих лиц и организаций, сохранились письма и неизвестные рукописи

[1] АРАН ф.606, оп.3, д.107, л.1 с обор.

[2] Выражаем признательность и благодарность проф. Е.А. Katz из университета Ben-Gurion (Израиль), за помощь в переводе этого документа.

работ Д.Д. Мордухай-Болтовского, которые позволят сделать наши знания о научном наследии этого ученого более полными.

Литература

1. Демидов С. С. Джузеппе Пеано и российское математическое сообщество его времени // Историко-математические исследования. Вып. 14 (49). 2011. С. 25-40.
2. Мордухай-Болтовський Д. Д. Систематична Збірка елементарних вправ з диференціяльного й інтегрального числень. Том.II. – Прага: «Сіяч», 1927.
3. Ньютон И. Математические работы / Перевод с латинского, вводная статья и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1937.–452с.
4. Пырков В. Е. Методическое наследие Д.Д. Мордухай-Болтовского и опыт его использования в современном математическом образовании / Дисс. канд. пед. наук. – Ростов-н/Д, 2004. – 358 с.
5. Mordouhay-Boltovskoy D. Sur la transcendance de e^e et de certains autres nombres // Comptes rendus des seances de 1'Academie des sciences. – 1924. – V.179. – P. 1020-1023.

Сведения об авторах

Пырков Вячеслав Евгеньевич, кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры теории и методики математического образования, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, pyrkovve@yandex.ru, история математики и математического образования, современные технологии обучения и воспитания.

О МЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ПРЕДФРАКТАЛЬНЫХ ГРАФОВ

Резников А.В.

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия.

Аннотация

В работе рассматриваются предфрактальные графы, в том числе такие, в траектории которых смежность старых ребер сохраняется. Рассматриваются метрические характеристики таких предфрактальных графов. Предложены верхние и нижние оценки этих характеристик.

ABOUT METRIC CHARACTERISTICS OF PREFRACTAL GRAPHS

Reznikov A.V.

Adygeya State University, Maikop, Russia.

1. Основные определения и понятия

Определению предфрактального графа предшествуют дополнительные определения и понятия.

Затравка: термином затравка будем называть какой-либо фиксированный связный n-вершинный граф $H=(W,Q)$.

Операция замещения вершины затравкой: определим операцию замещения вершины затравкой (ЗВЗ), суть которой состоит в следующем. В данном графе $G=(V,E)$ у намеченной для замещения вершины v_0 выделяется ее окружение U_0 и множество ребер R_0, инцидентных вершине v_0. Определим некоторое отображение φ множества вершин U_0 во множество вершин затравки W: $\varphi: U_0 \to W$. После этого, у каждого ребра $e=v_0u$ из множества R_0 конец v_0 заменяется на определяемую отображением φ вершину $v=\varphi(u)$ затравки H. «Старое» ребро $e=v_0u$ удаляется из графа G и появляется в нем в «новом» измененном виде $e'=vu$. Множеством вершин получаемого графа является исходное множество вершин V, за исключением замещаемой вершины v_0, но с добавлением множества вершин затравки W, т.е. множеством вершин получаемого графа будет являться множество $V \cup W \setminus \{v_0\}$.

Процесс построения предфрактальных графов: определим поэтапный процесс выполнения операции ЗВЗ. На этапе $s=1$ затравку $H=(W,Q)$ обозначаем как граф $G_1=(V_1,E_1)$. Пусть выполнены этапы $s=1,2,...,l$, и по завершению этапа l получен граф $G_l=(V_l,E_l)$, который назовем предфрактальным графом. На этапе $s=l+1$ для каждой вершины v ($v \in V_l$) осуществляется операция ЗВЗ, т.е. замещение каждой вершины затравкой H. В процессе выполнения всех операций ЗВЗ на данном этапе все ребра $e \in E_l$ сохраняются и называются старыми ребрами по отношению ко всем графам $G_{l+1},.G_{l+2},..,G_L$, где $L>1$. Причем, старые ребра, инцидентные замещаемой вершине $v \in V_l$, становятся, случайным или регулярным образом, инцидентными некоторым вершинам затравки, заместившей вершину v. Ребра каждой из таких появившихся затравок называют новыми ребрами, т.е. множество всех новых ребер есть множество $E_{l+1} \setminus E_l$.

Говорят, что предфрактальные графы $G_1,G_2,..,G_L$ составляют *траекторию* порождения предфрактального графа G_L.

В работе исследуются предфрактальные графы, на структуру затравки которых наложено ограничение: условие Оре.

Условие Оре: будем говорить, что n-вершинный граф $H=(W,Q)$ удовлетворяет условию Оре, если для любой пары его вершин v_1 и v_2 выполняется условие $\rho(v_1)+\rho(v_2)\ge n$, где $\rho(v)$ - степень вершины v графа H.

Рассмотрим траекторию $G_l=(V_l,E_l),\ l=\overline{1,L}$ построения предфрактального графа $G_L=(V_L,E_L)$, порожденного затравкой $H=(W,Q)$.

Предфрактальным графом, в траектории которого *старые ребра сохраняют смежность*, называется предфрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$ такой, при поэтапной генерации которого, в процессе выполнения каждой операции ЗВЗ каждого этапа s ($s = \overline{1, L-1}$) старые ребра сохраняют смежность.

2. Оценки метрических характеристик предфрактальных графов, в траектории которых смежность старых ребер сохраняется

Введем следующие обозначения: $r(H)$ — *радиус* графа H; $d(H)$ — *диаметр* графа H.

Рассмотрим произвольный n-вершинный граф $H = (W, Q)$. Пусть $G_L = (V_L, E_L)$ — предфрактальный граф, в траектории которого *смежность старых ребер сохраняется*, причем G_L порожден графом H. Тогда выполняются следующие верхние и нижние оценки:

1) $d(G_L) \le d(H) \cdot (2L-1)$

2) $d(G_L) \ge 2L - 1 + d(H) - 1$

3) $r(G_L) \le (L-1) \cdot d(H) + r(H)$

4) $r(G_L) \ge L \cdot r(H)$

В том случае, если на предфрактальный граф G_L наложено дополнительное условие, а именно: затравка H, порождающая граф G_L удовлетворяет условию Оре, то будут выполняться следующие свойства:

5) $r(G_L) \le 2L$

6) Если степень каждой вершины затравки H меньше $n-1$, то $r(G_L) = 2L$.

Литература

1. Кочкаров, А.М. Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. / А. М. Кочкаров. – Нижний Архыз: РАН САО, 1998. – 170 с.
2. Резников, А.В. Алгоритм распознавания предфрактальных графов с регулярной N-вершинной затравкой степени не менее N/2 [текст] / А.В. Резников, А.А. Кочкаров // Экологический вестник научных центров черноморского экономического сообщества. – Краснодар, 2010. – Выпуск 2. – С. 63-69.
3. Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари; пер. с англ. и предисл. В.П. Козырева; под ред. Г.П. Гаврилова. – Изд. 2-е. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 296 с.

Сведения об авторах

Резников Андрей Владимирович, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, кафедра прикладной математики, информационных технологий и информационной безопасности, trot99@mail.ru, структурная динамика, теория графов, теория предфрактальных графов, NP-полнота.

ЦЕНТРЫ КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С НЕНУЛЕВОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТЬЮ

Садовский А.П.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

Аннотация

В работе исследуется проблема центра и фокуса для кубической системы дифференциальных уравнений в случае ненулевой линейной части. Приводится решение проблемы центра и фокуса для кубической системы с однородными нелинейностями второй и третьей степени.

CENTERS OF CUBIC SYSTEM WITH NONZERO LINEAR PART

Sadovskii A.P.

Belarusian State University, Minsk, Belarus

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Kx^3 + Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3, \\ \dot{y} &= Hxy + Gy^2 + Rx^3 + Qx^2y + Vxy^2 + Wy^3, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $A, B, C, K, L, M, N, H, G, R, Q, V, W \in \mathbb{R}$.

На основании теоремы из [1] для системы (1) существует аналитическое преобразование

$$\begin{aligned} u &= x + \sum_{i=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{i} a_{j,i-j}x^j y^{i-j} \\ v &= y + \sum_{i=2}^{+\infty}\sum_{j=1}^{i} b_{j,i-j}x^j y^{i-j} \end{aligned}, \qquad (2)$$

приводящее (1) к виду

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v + \sum_{i=2}^{+\infty} a_i u^i \\ \dot{v} &= \sum_{i=2}^{+\infty} b_i u^i \end{aligned}. \qquad (3)$$

Существование формальной замены вида (2) было доказано ранее в [2]. Для нахождения замены (2) и системы (3) имеем систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial u}{\partial y}\dot{y} &= v + \sum_{i=2}^{+\infty} a_i u^i \\ \frac{\partial v}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y}\dot{y} &= \sum_{i=2}^{+\infty} b_i u^i \end{aligned}. \qquad (4)$$

Из (4) определяем:

$$\sum_{j=1}^{2} a_{j,2-j} x^j y^{2-j} = -\frac{1}{2}(B+G)x^2 - Cxy, \ \sum_{j=1}^{2} b_{j,2-j} x^j y^{2-j} = -\frac{H}{2}x^2 - Gxy,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(2A+H), \ b_2 = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{3} a_{j,3-j} x^j y^{3-j} = -\frac{1}{6}\left(-2B^2 + 2AC - 3BG - G^2 - CH + 2L\right)x^3 -$$

$$-\frac{1}{2}(-2BC - 3CG + M + W)x^2 y + \left(C^2 - N\right)xy^2,$$

$$\sum_{j=1}^{3} b_{j,3-j} x^j y^{3-j} = -\frac{1}{3}(-AG - BH - GH + Q)x^3 +$$

$$+\frac{1}{2}\left(BG + G^2 + CH\right)x^2 y + (CG - W)xy^2,$$

$$a_3 = -\frac{1}{6}(2AG - BH - GH - 6K - 2Q), \ b_3 = -AH + R,$$

$$a_4 = \frac{1}{24}\Big(-8A^2C + B^2H + 2G^2H - CH^2 + 6GK + 2HL + 2A\left(B^2 - 4\left(G^2 + L\right)\right) +$$

$$+ 6GQ + 3B(GH + 4K + 2Q) - 6CR\Big),$$

$$b_4 = \frac{1}{2}\left(2A^2G - 2HK - A\left((B+G)H + 2Q\right) + (3B+G)R\right),$$

$$a_5 = \frac{1}{120}\Big(B^3H + 6G^3H - 3CGH^2 - 6G^2K - 12CHK + 12GHL -$$

$$-2H^2M + 22G^2Q - 10CHQ + 16LQ + 2B^2(3GH + 15K + 7Q) +$$

$$+36CGR - 24MR + B\Big(11G^2H + 8HL + 12G(4K + 3Q) - 3C\left(H^2 + 4R\right) -$$

$$-4\left(H^2 + 18R\right)W + A^2(-32CG + 44W) + 2A\Big(4B^2G - 16G^3 - 7BCH -$$

$$-19CGH - 60CK - 16GL + 4HM - 6CQ + 25HW\Big)\Big)\Big),$$

$$b_5 = \frac{1}{4}\Big(4A^2\left(G^2 + CH\right) - 4K\left((B+G)H + Q\right) + \left((B+G)(5B+G) + 4L\right)R -$$

$$-A\left(B^2H + 2BGH + G^2H - 8GK + 4(B+G)Q + 8CR\right)\Big).$$

Особая точка O(0,0) является центром или фокусом, если

$$b_3 < 0, \ _, 2b_3 + a_2^2.$$

Первые два необходимых условия центра для (1) имеют вид

$2a_2b_4 - 5a_3b_3 = 0,$

$$-875a_5b_3^3 + 700a_4b_3^2b_4 + 2a_2\left(42b_4^3 - 175b_3b_4b_5 + 125b_3^2b_6\right) = 0.$$

Все последующие условия центра могут быть получены по методу, изложенному в [3].

Для систем вида (1), где $C = M = N = 0$, необходимые и достаточные условия центра можно выразить в терминах абсолютных инвариантов этих систем.

Рассмотрим далее систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y\left(1 + Dx + Px^2\right) + Hx^2 + Qx^3 + y^2\left(G + Vx\right), \\ \dot{y} &= -x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3, \end{aligned} \tag{5}$$

где $D, P, H, Q, G, V, A, B, C, K, L, M, N \in \mathbb{R}$.

В [4] доказано, что для системы (5) существует аналитическое преобразование вида (3), приводящее ее к системе (4). Условия центра для системы (5) можно получить аналогично условиям центра системы (1).

Случай центра может иметь место при наличии определенного количества инвариантных прямых. Рассмотрим случай существования инвариантных кубик.

Введем вектор $p = \left(D, P, H, Q, G, V, A, B, C, K, L, M, N, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\right)$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *При* $p \in V\left(I\right)$, *где*

$$\begin{aligned} I = \Big\langle & 3d_3G - d_2V, 2d_2G + d_4\left(M - 3P\right) - 2d_1V, \left(d_1G - 3V\right)V + \\ & + d_4\left(3GP + \left(C - 3D\right)V\right), 3\left(d_4 - G\right)GP + \left(Cd_4 - 3D\left(d_4 - G\right)\right)V - 3V^2, \\ & 6G^2LV - G\left(2CP - D\left(M + 9P\right)\right)V + \left(2\left(C - 3D\right)D - M + 3P\right)V^2 - \\ & - 3G^2\left(\left(M - P\right)P + 2QV\right), 3G\left(5DP - CP + GQ\right)V - 9G^2P^2 - MV^2 + \\ & + \left(2\left(C - 3D\right)D + 3\left(BG - GH + P\right)\right)V^2, GQ\left(3GP + CV - 3DV\right) - \\ & - V\left(G\left(G + 3H\right)P + V^2 + \left(CH - D\left(G + 3H\right)\right)V\right), 3G\left(G + H\right)P + V^2 - \\ & - \left(AG - CH + 3D\left(G + H\right)\right)V, 2KV^2\left(3GP + CV - 3DV\right)^2 - V^4\left(3V^2 + \right. \\ & \left. + \left(C - 3D\right)^2\left(4AD + 6D^2 - P\right) + 3B\left(C - 3D\right)V\right) + 9G^4P^2\left(V^2 - 9P^2\right) + \\ & + 3GV^3\left(\left(C - 3D\right)P\left(2A\left(C - 7D\right) + 5CD - 27D^2 + 2P\right) - 2\left(A + D\right)V^2 - \right. \\ & \left. - B\left(\left(C - 3D\right)\left(2A + 3D\right) + 3P\right)V\right) + 3G^3PV\left(9\left(2A - 2C + 11D\right)P^2 + 9BPV - \right. \\ & \left. - 2\left(A + 3D\right)V^2\right) + 3G^2V^2\left(3P^2\left(4A\left(C - 4D\right) - C^2 + 16CD - 45D^2 + P\right) + \right. \\ & \left. + 3B\left(C - 2A - 6D\right)PV + \left(2AD + 3D^2 + 2P\right)V^2\right), N - 3V \Big\rangle, \end{aligned}$$

для системы (5) существует инвариантная кубика вида $f(x, y) = 0$, *где*

$$f(x, y) = 1 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + d_4y.$$

Теорема 2. *При* $p \in V(J)$, *где*

$$J = I + \langle 3B(4C-3D) + 20AG - 4(2C+D)G + 80V,$$
$$G\left((6C-7D)(4C-3D)^2 + 300B(4C-3D)G - 300(2C+D)G^2\right)+$$
$$+10\left(8C^2 - 42CD + 27D^2 + 300G^2\right)V, 10GP + 2CV - 9DV, (2C+D)\times$$
$$\times G\left(8C^2 - 18CD + 9D^2 + 80G^2\right) + 2\left(8C^2 - 42CD + 27D^2 - 400G^2\right)V\rangle,$$

система (5) имеет интегрирующий множитель вида $\mu = f^{-\frac{10}{3}}$. *O(0,0) системы (5) является центром.*

Заметим, что в этом случае система (5) имеет инвариантную кривую седьмого порядка. Для системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2, \\ \dot{y} &= -x + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3 \end{aligned} \tag{6}$$

где $A, B, C, K, L, M, N \in \mathbb{R}$, справедлива

Теорема 3. *Пусть V – многообразие центра системы (6). Тогда*

$$V = \bigcup_{i=1}^{7} V(J_i),$$

где

$$J_1 = \langle 729B^6(2A+C)(3A+2C)^2 + 16A^5(A^2 - 4AC - 3C^2)^2 + 324B^4(17A^5 +$$
$$+5A^4C - 20A^3C^2 - 9A^2C^3 + 4AC^4 + 2C^5) + 36B^2(18A^7 - 35A^6C - 12A^5C^2 +$$
$$+94A^4C^3 + 102A^3C^4 + 53A^2C^5 + 20AC^6 + 4C^7), 81B^4(2A+C)(3A+2C)^2\times$$
$$\times(5A+6C) + 8A^4(13A^4 - 12A^3C - 81A^2C^2 - 72AC^3 - 18C^4) + 18AB^2(98A^5 +$$
$$+131A^4C - 154A^3C^2 - 333A^2C^3 - 182AC^4 - 32C^5) - 72(A+C)^4(A^2 - 3AC -$$
$$-2C^2)K, 81A^2B^5(2A+C)(3A+2C)^2 + 18AB^3(52A^6 + 7A^5C - 284A^4C^2 -$$
$$-525A^3C^3 - 418A^2C^4 - 160AC^5 - 24C^6) + 8AB(14A^8 - 15A^7C - 90A^6C^2 -$$
$$-93A^5C^3 - 45A^4C^4 - 51A^3C^5 - 62A^2C^6 - 33AC^7 - 6C^8) + 24(A+C)^4(A^2 -$$
$$-4AC - 3C^2)(A^2 - 3AC - 2C^2)L, 81AB^4(2A+C)(3A+2C)^2 + 8A^3(11A^5 -$$
$$-12A^4C - 69A^3C^2 - 78A^2C^3 - 36AC^4 - 6C^5) + 18B^2(40A^6 + A^5C - 188A^4C^2 -$$
$$-309A^3C^3 - 226A^2C^4 - 82AC^5 - 12C^6) - 24(A+C)^4(A^2 - 3AC - 2C^2)M,$$
$$81A^2B^5(2A+C)(3A+2C)^2 + 18AB^3(52A^6 + 7A^5C - 284A^4C^2 - 525A^3C^3 -$$
$$-418A^2C^4 - 160AC^5 - 24C^6) + 8B(17A^9 - 21A^8C - 144A^7C^2 - 117A^6C^3 +$$
$$+242A^5C^4 + 657A^4C^5 + 711A^3C^6 + 423A^2C^7 + 135AC^8 + 18C^9) - 24(A+C)^4\times$$
$$\times(A^2 - 4AC - 3C^2)(A^2 - 3AC - 2C^2)N, 1 - (A+C)(A^2 - 4AC - 3C^2)(A^2 -$$
$$-3AC - 2C^2)t\rangle \bigcap \mathbb{R}[N, M, K, L, B, C, A],$$

$$J_2 = \langle A+2C, AB+L, K, 2M-2A^2+9B^2, 2N-3AB\rangle,$$
$$J_3 = \langle A+C, 4A^2+9B^2, 2AK+3BL, 3BK-2AL, K^2+L^2, 3K+M, L+N\rangle,$$
$$J_4 = \langle B, L, N\rangle, \qquad J_5 = \langle A, L, 2M-9B^2, N-BC\rangle,$$
$$J_6 = \langle A, C, L, N\rangle, \quad J_7 = \langle A+C, K, L, M, N\rangle.$$

Ранее проблема центра и фокуса для системы (6) рассматривалась в [5, 6].

Теорема 4. *Существуют кубические системы вида*

$$\dot{x} = y + \lambda x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2,$$
$$\dot{y} = -x + \lambda y + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3 \qquad (6)$$

где $A, B, C, K, L, M, N \in \mathbb{R}$, *с семью предельными циклами в окрестности начала координат.*

При решении проблемы центра и фокуса для указанных систем эффективным образом можно использовать систему Mathematica.

Литература

1. Strozyna E., Zoladek H. The analytic and formal normal forms for the nilpotent singularity// J. Differential Equation. 2003. №193. P. 239 – 259.
2. Садовский А.П. О проблеме различения центра и фокуса для систем с ненулевой линейной частью// Дифференц. уравнения. 1976. Т.12, № 7. С. 1237 – 1246.
3. Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. – Минск: Изд-во БГУ, 1982. - 208 с.
4. Loray F. A preparation theorem for codimension-one foliations // Ann. Math.(2). 2006. № 163. P. 709 – 722.
5. Ле Ван Линь. Центры кубической системы с однородными нелинейностями// Вестник БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. 2003. № 1. С 90 -91.
6. Садовский А.П., Щеглова Т.В. Многообразия центра одного класса кубических систем // X Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, 3 – 7 ноября 2008 г. Часть 2. Мн: Институт математики НАН Беларуси. С. 63.

Сведения об авторе

Садовский Антон Павлович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа механико-математического факультета Белорусского государственного университета, sadovskii@bsu.by, качественная теория дифференциальных уравнений

ОРИГИНАЛЬНЫЕ МЕТОДИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ В ПЕДАГОГИЧЕСКОМ НАСЛЕДИИ К.С.МАМИЯ

Селютин В.Д.

Орловский государственный университет, Орел, Россия.

Аннотация

В докладе затрагиваются отдельные оригинальные методические подходы к обучению школьников математике, предложенные профессором К.С.Мамием в его многогранной научно-педагогической деятельности.

THE ORIGINAL METHODOLOGICAL AND MATHEMATICAL APPROACHES IN THE PEDAGOGICAL HERITAGE OF K.S. MAMIA

Selyutin V.D.
Orel State University, Orel, Russia,

Общеизвестно, что каждый творчески работающий педагог, будь то школьный учитель или вузовский преподаватель, за свою многолетнюю профессиональную деятельность набирает определенный запас собственных методических находок, личных новаторских идей и авторских приемов обучения. Эта своеобразная копилка становится для многих хорошим подспорьем в работе, а наиболее удачные методические построения становятся достоянием педагогической общественности и получают достойную оценку.

Особое высокое признание заслужила научно-педагогическая деятельность профессора Мамия Казбека Сагидовича, - талантливого Труженика науки, яркого представителя национальной научной элиты Адыгеи. Как неординарный ученый, посвятивший свою жизнь служению математике, становлению и развитию АГУ, подготовке учителей математики и повышению их квалификации, глазами представителей других регионов нашей страны, К.С.Мамий воспринимается Патриархом математического образования в Адыгее.

Многогранность его методических идей, принятых на вооружение учителями, невозможно осветить в одном докладе. Это должно стать предметом специальных исследований. Поэтому остановимся лишь на отдельных предложениях Казбека Сагидовича по оптимизации процесса обучения математике, не претендуя на всеобщий охват методико-математических подходов в его педагогическом наследии.

В частности, определенный интерес представляют своеобразные приемы решения неравенств и построения эскизов графиков функций. Методика обучения решению неравенств никогда не оставалась за пределами внимания исследователей. Ведь содержательно-методическая линия уравнений и неравенств занимает центральное место в структуре школьного курса математики. Изучение основных её разделов основывается на уже усвоенных учащимися представлениях формально-операционной и числовой линий, а именно на понятиях дробей, пропорций, арифметических действий, тождественных преобразований, сравнении величин и многих других. Вместе с тем, приобретение школьниками навыков решения уравнений и неравенств различной степени является необходимым условием, предваряющим их знакомство с наиболее сложными понятиями – функциями различного вида, а также элементами математического анализа.

К сожалению, несмотря на многочисленные попытки оптимизировать обучение, не удается искоренить формализм в усвоении школьниками приемов решения неравенств и построения графиков функций.

К.С.Мамий исходит из необходимости вооружения учащихся теоретическим видением тех или иных приемов решения задач. Так, в противовес «натаскиванию» на механическом освоении алгоритмов решения задач, предлагается опора на понятия односторонних пределов и односторонней непрерывности функции на наглядно-интуитивной основе. С помощью графиков простейших функций формируются первичные понятия левого и правого пределов функции в данной точке. На ряде конкретных примеров, средствами наглядности, рассуждения учащихся направляются на выводы, позволяющие ввести понятия левого и правого пределов произвольной функции в данной точке. После чего создаются благоприятные условия для введения определения понятия обычного предела как общего значения левого и правого пределов, когда они равны между собой.

Не стоит опасаться, что предложенные «определения» нельзя принять за строгие математические определения. Это вполне оправданно на начальных этапах ознакомления с содержанием понятий, тогда как при дальнейшем обучении предполагается возможность ознакомления с их точным смыслом. Этому способствует рассмотрение понятия предела функции с точки зрения приближенных вычислений в органичном единстве с описанным подходом.

На конкретных примерах с графическими иллюстрациями показывается смысл понятий односторонней и обычной (двусторонней) непрерывности функции в точке. Аналогично предлагается познакомить учащихся с бесконечными пределами в конечных точках и с конечными пределами на бесконечностях. На графиках функций $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, tgx, $arctgx$ и др., показывается смысл понятий вертикальных и горизонтальных асимптот графика функции.

Опора на интуитивное понимание свойств непрерывной числовой функции закладывает теоретическую основу изучения метода промежутков.

В частности, обоснование применимости метода интервалов для решения дробно-рациональных неравенств вооружает обучающихся осознанным пониманием решения задач.

На такой прочной базе предлагаются алгоритмы решения строгих и нестрогих неравенств методом промежутков, приводятся примерные образцы решения некоторых неравенств и ряд упражнений для самостоятельного решения.

Сочетание интуитивных и логических компонентов осознания пределов и непрерывности помогают учащимся во многих случаях довольно точно набросать эскизы графиков функций без исследования на монотонность, выпуклость, точки экстремума и перегиба. В результате, предлагаемый Казбеком Сагидовичем алгоритм построения эскиза графика функции без привлечения производных получает теоретическую основу. Его реализация убедительно осуществляется на примере функции $\frac{1}{x^2+1}$. Затем этот алгоритм демонстрируется для других функций, в более сложных ситуациях.

Оригинально выстроенная последовательность заданий для самостоятельного решения позволяет надежно закрепить изучаемый метод, прививая прочные практические навыки в построении графиков функций.

Приведенный краткий обзор лишь небольшой части всего спектра методических идей Казбека Сагидовича Мамия является свидетельством раскрытия уникального таланта, яркой научно-педагогической и научно-организационной деятельности выдающегося педагога.

Сведения об авторе

Селютин Владимир Дмитриевич, доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и математических методов в экономике, Орловский государственный университет, selutin_v_d@mail.ru, методика обучения математике и математические методы в экономике.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕОДНОРОДНО ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКОВ И УСТРОЙСТВ НА ИХ ОСНОВЕ

Соловьев А.Н.

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия.

Оганесян П.А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия.

Скалиух А.С.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия.

Аннотация

Разработана математическая модель неоднородной поляризации пьезоэлектриков, программно реализованная в конечно элементном пакете ACELAN. В ACELAN проведено компьютерное моделирование процесса неоднородной поляризации биморфных пьезоэлементов и построены конечно-элементные модели пьезопреобразователей. С помощью этих моделей исследована эффективность устройств накопления энергии на основе пьезоэлементов.

MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELING INHOMOGENEOUSLY POLARIZED PIEZOELECTRIC MATERIALS AND DEVICES BASED ON THEM

Soloviev A.N.
Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia

Oganesyan P.A.
Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

Skaliukh A.S.
Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

В работе приводится сравнение результатов численного моделирования неоднородно поляризованных пьезоэлементов, проведенного при помощи конечно-элементного пакета ACELAN и предложенной прикладной теории на основе гипотез о напряженно деформированном состоянии пьезопластин [1]. В комплексе ACELAN используется следующая постановка задачи для упругих и электроупругих тел [2]

$$\rho_{pk}\ddot{\mathbf{u}} + \alpha_{dj}\rho_j\dot{\mathbf{u}} - \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_j \qquad \nabla\cdot\mathbf{D} = 0, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}_j^E\cdot\cdot(\boldsymbol{\varepsilon} + \beta_{dj}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \mathbf{e}_j^T\cdot\mathbf{E}, \qquad \mathbf{D} + \varsigma_d\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{e}_j\cdot\cdot(\boldsymbol{\varepsilon} + \varsigma_d\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \mathbf{э}_j^S\cdot\mathbf{E} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)/2, \qquad \mathbf{E} = -\nabla\varphi \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, ρ_j – плотность тела, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформаций, $\mathbf{u}$ – вектор перемещений, $\mathbf{D}$ – вектор электрической индукции, $\mathbf{E}$ – вектор напряженности электрического поля, $\mathbf{f}_j$ – вектор массовых сил, φ – электрический потенциал, α_{dj}, β_{dj}, ς_d – коэффициенты демпфирования, $\mathbf{c}_j^E$, $\mathbf{e}_j^T$, $\mathbf{э}_j^S$ – тензоры упругих констант, пьезомодулей и диэлектрических проницаемостей, индекс j отвечает номеру тела в модели. Для моделирования неоднородных свойств материалов тензоры $\mathbf{c}_j^E$, $\mathbf{e}_j^T$, $\mathbf{э}_j^S$ и плотность тел будем считать функциями координат в теле:

$$\rho_k = \rho_{pk}(x) \quad \mathbf{c}_j^E = \mathbf{c}_j^E(x) \quad \mathbf{э}_j^S = \mathbf{э}_j^S(x) \quad \mathbf{e}_j^T = \mathbf{e}_j^T(x) \tag{4}$$

Для учета степени поляризации предлагается использовать следующую зависимость механических, электрических свойств материалов:

для тензоров $\mathbf{c}_j^E$ и $\mathbf{э}_j^S$ - $g = g^i + |P|(g^a - g^i)$, для тензора

$$\mathbf{e}_j^T \text{ - } g = |P|g^a \tag{5}$$

где через g обозначены компоненты соответствующих тензоров, при этом индексом i обозначены компоненты тензоров для изотропного состояния, а индексом α – для анизотропного. Модели поляризации пьезоэлектриков, реализованные в ACELAN представлены в [3]. Ранее были проведены исследования, показавшие прирост коэффициента механической связи и увеличение ширины полосы пропускания преобразователя при наведении предварительно неоднородной поляризации [4].

Рассматривается биморфный пьезоэлемент с неоднородной поляризацией, каждый активный слой поляризуется с помощью двух шагов (рис.1 слева и справа). Нижние технологические электроды удаляются перед вторым шагом (рис.1 справа).

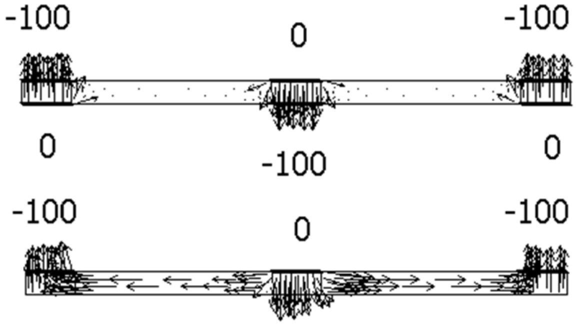


Рис 1. Шаги поляризации проведенные в ACELAN.

Далее строится модель преобразователя с кусочно постоянной поляризацией, состоящего из двух частей: поперечно поляризованного участка и активного биморфа со встречной продольной поляризацией (рис.2).

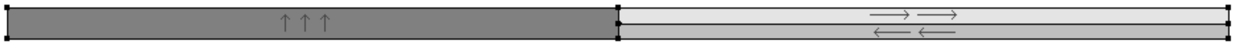


Рис 2. Схема преобразователя

Рассмотрим установившиеся колебания при цилиндрическом изгибе однослойного поперечно поляризованного пьезопреобразователя толщины h и длины L (рис. 2 - левая часть). Средняя линия преобразователя совпадает с осью абсцисс. Полагая в (2) σ_{33}=0 и ε_{22}=0 получим

$$\sigma_{11} = c_{11}\varepsilon_{11} - c_{13}\frac{c_{13}e_{11} + e_{33}\dfrac{\partial\phi}{\partial z}}{c_{33}} + e_{31}\frac{\partial\phi}{\partial z},\ \sigma_{22} = c_{12}\varepsilon_{11} - c_{13}\frac{c_{13}e_{11} + e_{33}\dfrac{\partial\phi}{\partial z}}{c_{33}} + e_{31}\frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad (6)$$

Распределение амплитуды потенциала будем искать в виде:

$$\phi(x,y,z) = V_0(\frac{2z}{h} - 1)/h + V_0(\frac{2z}{h} + 1)/h + \Phi(x)(1 - \frac{4z^2}{h^2}) \qquad (7)$$

где V_0 - некоторая функция, описывающая распределение потенциала на поверхности пластины. Распределение амплитуды осевых перемещений ищем в виде

$$u_1(x,y,z) = -\frac{\partial U_z(x)}{\partial x}z \qquad (8)$$

Рассчитаем погонный изгибающий момент M_{11} и погонную поперечную силу Q_1:

$$M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{11}zdz = \frac{1}{12}(-c_{11}\frac{\partial^2 U_z(x)}{\partial x^2} - \frac{c_{13}}{c_{33}}(c_{13}\frac{\partial^2 U_z(x)}{\partial^2 x} + \frac{8e_{33}}{h^2}(V_0 - \Phi(x)) + \frac{8e_{31}}{h^2}(V_0 - \Phi(x)))h^3$$

$$Q_1 = -\frac{\partial M_{11}}{\partial x} = \frac{1}{12}(-c_{11}\frac{\partial^3 U_z(x)}{\partial x^3} - \frac{c_{13}}{c_{33}}(c_{13}\frac{\partial^3 U_z(x)}{\partial x^3} - \frac{8e_{33}}{h^2}\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x} - \frac{8e_{31}}{h^2}\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x})h^3 \qquad (9)$$

Система уравнений движения и электростатики примет вид:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} - p(x) - W^2 \rho h U_z(x) = 0; \quad \int_{-h/2}^{h/2} (\frac{\partial D_3}{\partial x} + \frac{\partial D_1}{\partial x}) dz = 0 \tag{10}$$

где ρ - плотность материала, *p(x)* – внешняя нагрузка, $W = 2\pi\omega$ - круговая частота, ω- частота колебаний. После подстановки (8) и (9) в (10) система дифференциальных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} -\frac{1}{12}(-c_{11} + \frac{c_{13}^2}{c_{33}})h^3 \frac{\partial^4 U_z(x)}{\partial x^4} - \frac{1}{12}(\frac{8c_{13}e_{33}}{h^2 c_{33}} - \frac{8e_{31}}{h^2})h^3 \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} - p(x) - W^2 \rho h \frac{\partial U_z(x)}{\partial x} = 0 \\ (-e_{31} + \frac{e_{33}c_{13}}{c_{33}})(\frac{\partial^2 U_z(x)}{\partial x^2}) + K\Phi(x) - KV_0 - \frac{2}{3} g_{11} \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} = 0, \qquad K = \frac{8e_{33}^2}{h^2 c_{33}} + \frac{8g_{33}}{h^2} \end{cases} \tag{11}$$

Далее рассматривается модель второй части преобразователя со встречно продольной поляризацией. Для удобства нумерации материальных констант введем локальную систему координат с началом в точке (*L*, 0). Для этого поменяем местами координатные оси *x* и *z*. Определяющие соотношения останутся неизменными с точностью до названия осей координат. Для поперечного смещения предполагаем соотношение типа (8), а электрический потенциал будем искать в виде:

$$\phi(x, y, z) = \Phi(z)$$

Получим выражения для силовых факторов D_3, M_3 и Q_3, аналогично предыдущему случаю:

$$\begin{aligned} D_3 &= (-\frac{e_{31}^2 h}{c_{11}} - g_{33} h) \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} - \frac{1}{8}(2e_{33} - \frac{2c_{13}e_{31}}{c_{11}})h^2 \frac{\partial^2 U_x(z)}{\partial z^2} \\ M_3 &= \frac{1}{24}(\frac{2c_{13}}{c_{11}} - 2c_{33})h^3 \frac{\partial^2 U_x(z)}{\partial z^2} + \frac{1}{8}(2e_{33} - \frac{2c_{13}e_{31}}{c_{11}})h^2 \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} \\ Q_3 &= -\frac{1}{24}(\frac{2c_{13}}{c_{11}} - 2c_{33})h^3 \frac{\partial^3 U_x(z)}{\partial z^3} - \frac{1}{8}(2e_{33} - \frac{2c_{13}e_{31}}{c_{11}})h^2 \frac{\partial^2 \Phi(z)}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{12}$$

Подставляя (11) в систему уравнений аналогичную (10), получаем систему дифференциальных уравнений для второго участка преобразователя:

$$\begin{cases} -\frac{1}{8}(-\frac{2e_{31}c_{13}}{c_{11}} + 2e_{33})h^2 \frac{\partial^3 \Phi(z)}{\partial z^3} - \frac{1}{24}(\frac{2c_{13}^2}{c_{11}} - 2c_{33})h^3 \frac{\partial^4 U_x(z)}{\partial z^4} - p(z) - W^2 \rho h U_x(z) = 0 \\ (-\frac{e_{31}}{c_{11}} - g_{33}) \frac{\partial^2 \Phi(z)}{\partial z^2} + \frac{1}{4}(\frac{e_{31}c_{13}}{c_{11}} - e_{33})h \frac{\partial^3 U_x(z)}{\partial z^3} = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Общие решения уравнений (11) и (13) имеют следующий вид

$$\begin{aligned} U^1(x) &= C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + C_4 e^{\lambda_4 x} + C_5 \cos(\lambda_5 x) + C_6 \sin(\lambda_6 x) + U_* \\ \Phi^1(x) &= T_1 C_1 e^{\lambda_1 x} + T_2 C_2 e^{\lambda_2 x} + T_3 C_3 e^{\lambda_3 x} + T_4 C_4 e^{\lambda_4 x} + T_5 C_5 \cos(\lambda_5 x) + T_6 C_6 \cos(\lambda_6 x) \\ U^2(z) &= C_7 e^{\alpha_1 z} + C_8 e^{\alpha_2 z} + C_9 \cos(\alpha_5 z) + C_{10} \sin(\alpha_6 z) + U_* \\ \Phi^2(z) &= T_7 C_7 e^{\alpha_1 z} + T_8 C_8 e^{\alpha_2 z} + T_9 C_9 \cos(\alpha_5 z) + T_{10} C_{10} \sin(\alpha_6 z) + C_{11} z + C_{12} \end{aligned} \tag{14}$$

где наборы значений λ_i, α_i, - корни соответствующих характеристических многочленов, T_i находятся из решения однородной системы, $U_* = -\frac{p(x)}{\mathrm{W}^2 \rho h}$, верхний индекс указывает на принадлежность правой части (1) и левой части (2) преобразователя.

Рассмотрим условия, при которых на левом и правом концах преобразователя задано шарнирное опирание. Записывая граничные условия и условия стыковки в локальных координатах, получим следующий набор из двенадцати соотношений:

$$\begin{array}{ll} U^1(0)=0 & U^1(L)=U^2(0) \\ M^1(0)=0 & M^1(L)=M^2(0) \\ D^1(0)=0 & \Theta^1(L)=\Theta^2(0) \\ U^2(L)=0 & Q^1(L)=Q^2(0) \\ M^2(L)=0 & 2\Phi^1(L)/3=\Phi^2(0) \\ \Phi^2(L)=0 & D^1(L)=D^2(0) \end{array} \qquad (16)$$

Граничные условия (16) позволяют, используя уравнения (15), записать систему линейных алгебраических уравнений и вычислить коэффициенты C_1-C_{12}, что и является решением исходной задачи.

В численных экспериментах были решены задачи на вынужденные колебания на различных частотах с различными граничными условиями. Рассматривались колебания под действием внешней нагрузки при наличии или отсутствии потенциала на электродах.

В таблице 1 и на рис. 3 приводятся сравнительные результаты решения различными способами для V_0=100 В, $p(x)$=1000 Н/м^2, $\omega=100$ Гц.

Табл. 1. Результаты расчетов

	МКЭ	Прикладная теория
Максимум смещений, м	$2.76\cdot10^{-5}$	$2.73\cdot10^{-5}$
Максимум потенциала Φ, В	317	310

На рис. 3 представлено распределение смещений (слева) и потенциала (справа) в виде тепловой карты (МКЭ ACELAN) и графика (прикладная теория)

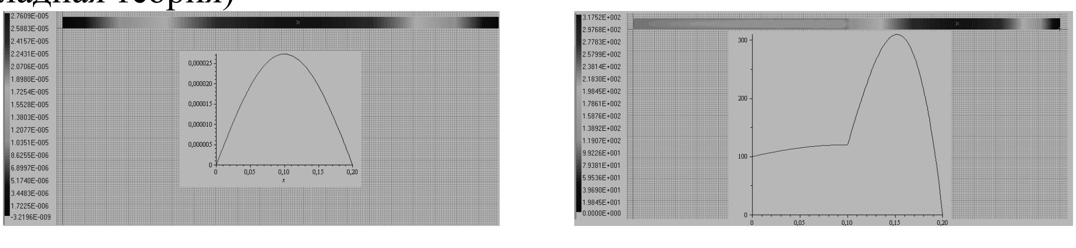


Рис.3. Распределение смещений (слева) и потенциала (справа) в виде тепловой карты (МКЭ) и графика (прикладная теория)

В численных экспериментах было продемонстрировано совпадение результатов МКЭ и прикладной теории с точностью в пределах 3-4%.

Литература

1. Ватульян А.О., Гетман И.П., Лапицкая Н.Б. Об изгибе пьезокерамической биморфной пластины, Прикладная механика, 1991, Т. 27, №10, p. 101-105
2. Белоконь А.В., Наседкин А.В., Соловьев А.Н. Новые схемы конечно-элементного динамического анализа пьезоэлектрических устройств [Текст] // Прикладная математика и механика, 2002. – №.3. – С.491-501.
3. Белоконь А.В., Скалиух А.С. Математическое моделирование необратимых процессов поляризации. М: Физматлит. 2010. 328 с.
4. Soloviev, P. A. Oganesyan, A. S. Skaliukh. Modeling of Piezoelectric Elements with Inhomogeneous Polarization by Using ACELAN, Advanced Materials - Studies and Applications, Chapter 12. Nova Publishers, Editors: Ivan A. Parinov, Shun-Hsyung Chang and Somnuk Theerakulpisut,2015, pp.169-192

Сведения об авторах

Соловьев Аркадий Николаевич, д.ф.-м.н., проф., заведующий кафедрой "Теоретическая и прикладная механика", Донской государственный технический университет, профессор кафедры математического моделирования, Южный федеральный университет, зав. Лабораторией механики активных материалов Южного научного центра РАН, solovievarc@gmail.com, прямые и обратные задачи механики, метод конечных элементов, электроупругость, искусственные нейронные сети, генетические алгоритмы.

Оганесян Павел Артурович, ассистент кафедры математического моделирования, Южный федеральный университет, wolwerine@yandex.ru, неоднородные электроупругие материалы, метод конечных элементов, программное обеспечение.

Скалиух Александр Сергеевич, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математического моделирования, Южный федеральный университет, a.s.skaliukh@gmail.com, неоднородные электроупругие материалы, метод конечных элементов, программное обеспечение.

СВОЙСТВА ЧАСТОТ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Сташ А.Х.

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия,
Республиканская естественно-математическая школа при Адыгейском государственном университете

Аннотация

Полностью изучены множества значений, принимаемых полной и векторной частот строгих знаков, нестрогих знаков и корней решений линейных однородных автономных дифференциальных уравнений. Кроме того, дано полное описание регуляризованных частот строгих знаков, нестрогих знаков и корней таких уравнений.

PROPERTIES OF THE FREQUENCIES OF SOLUTIONS OF LINEAR HOMOGENOUS AUTONOMOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS

Stash A. Kh.

Adyghe State University, Maikop, Russia,
Republican School of Mathematics and Natural Sciences at Adyghe State University, Maikop, Russia

Abstract

The sets of values of full and vector frequencies of strict signes, non-strict signes of roots of solutions of homogeneous autonomous differential equations are completely studied. Besides, a complete description of regularized frequencies of strict signes, non-strict signes and roots of such equations is given.

Во множестве E^n обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \qquad t \in R^+ \equiv [0;+\infty)$$

с непрерывными ограниченными строками коэффициентов

$$a \equiv (a_1,...,a_n): R^+ \to R^n$$

(отождествляемыми с соответствующими уравнениями) выделим подмножество C^n, состоящее из уравнений с постоянными коэффициентами. Линейное пространство всех решений $y: R^+ \to R$ уравнения $a \in E^n$ обозначим через $S(a)$, а подмножество всех его ненулевых решений - через $S_*(a)$.

Определение 1[1]. Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *строгая* (*нестрогая*) *смена знака* функции $y: R^+ \to R$, если в любой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения.

Определение 2[1,2]. Для момента $t > 0$ и функции $y: R^+ \to R$ под выражением $\nu^\alpha(y,t)$ будем понимать при $\alpha = -,\mp,0,+$ соответственно:

– число *её строгих смен знака* на промежутке $(0,t]$;

– число *её нестрогих смен знака* на промежутке $(0,t]$;

– число её *нулей* на промежутке $(0,t]$;

– число её *корней* на промежутке $(0,t]$, *т.е. нулей с учетом их кратности.*

Далее, для ненулевого вектора $m \in R^n_*$ введем обозначение $\nu^\alpha(y,m,t) \equiv \nu^\alpha(\langle\psi y, m\rangle, t)$, где $\psi y \equiv (y, \dot{y},..., y^{(n-1)})$, а $\langle\psi y(\cdot), m\rangle$ - скалярное произведение.

Определение 3[2]. Для каждого решения $y \in S_*(a)$ уравнения $a \in E^n$ зададим *полную и векторную частоты*

$$\sigma^{\alpha}(y)=\inf_{m\in R_*^n}\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(y,m,t),\ \ \zeta^{\alpha}(y)=\varlimsup_{t\to\infty}\inf_{m\in R_*^n}\frac{\pi}{t}\nu^{\alpha}(y,m,t)$$

знаков, нулей или корней при $\alpha=-,\mp,0,+$ соответственно.

Определение 4[1,2]. Для каждого $w=\sigma^{\alpha},\zeta^{\alpha}$ назовем i-ым верхним $w_{\bar{i}}(a)$ и нижним $w_{\underline{i}}(a)$ регуляризованные по Миллионщикову значения соответствующей частоты уравнения $a\in E^n$, величины задаваемые равенствами

$$w_{\bar{i}}(a)=\inf_{L\in G_*^i(a)}\sup_{y\in L}w(y),\qquad w_{\underline{i}}(a)=\sup_{L\in G_*^{n-i+1}(a)}\inf_{y\in L}w(y),$$

где $i=1,2,\ldots,n$, а через $G_*^i(a)$ обозначено множество i-мерных подпространств пространства $S(a)$, в которых выколота нулевая точка (нулевое решение).

Для уравнения $a\in C^n$ обозначим через

$$\Lambda_1(a),\Lambda_2(a),\ldots,\Lambda_n(a)\qquad(3)$$

все корни соответствующего ему характеристического многочлена, упорядоченные по неубыванию модулей их мнимых частей.

Спектры полной и векторной частот нулей (т.е. множества их значений на ненулевых решениях) автономных уравнений были полностью изучены. Полные и векторные частоты нестрогих знаков, строгих знаков и корней решений автономных уравнений не были исследованы.

Для любого решения $y\in S_*(a)$ любого уравнения $a\in C^n$ полная и векторная частоты нулей совпадают между собой [2,3]. Аналогичное утверждение имеет место и для частот знаков и корней.

Теорема 1. *Для любого решения* $y\in S_*(a)$ *любого уравнения* $a\in C^n$ *справедливы равенства*

$$\zeta^{-}(y)=\sigma^{-}(y),$$
$$\zeta^{\mp}(y)=\sigma^{\mp}(y)=\zeta^{0}(y)=\sigma^{0}(y)=\zeta^{+}(y)=\sigma^{+}(y).$$

Спектры полной и векторной частот нулей (т.е. множества их значений на ненулевых решениях) любого уравнения $a\in C^n$ совпадают с множеством модулей мнимых частей корней соответствующего характеристического многочлена [2,3]. Это свойство распространяется на полные и векторные частоты нестрогих знаков и корней, но однако для частот строгих знаков ситуация совсем иная.

Теорема 2. *Спектры полной и векторной частот нестрогих знаков и корней любого уравнения* $a\in C^n$ *совпадают с набором*

$$\{|\operatorname{Im}\Lambda_1(a)|,|\operatorname{Im}\Lambda_2(a)|,\ldots,|\operatorname{Im}\Lambda_n(a)|\}.$$

Теорема 3. *Спектры полной и векторной частот строгих знаков любого уравнения* $a\in C^n$ *состоят только из нуля, если характеристический многочлен уравнения имеет действительный корень, и из нуля и наименьшего из модулей мнимых частей корней характеристического многочлена, если характеристический многочлен действительных корней не имеет.*

Регуляризованные значения частот нулей совпадают с соответствующими модулями мнимых частей корней характеристического многочлена [2,3]. Это свойство полностью переносится на регуляризованные значения частот нестрогих знаков и корней.

Теорема 4. *Для любого уравнения* $a \in C^n$ *при каждом* $w = \sigma^{\mp}, \zeta^{\mp}, \sigma^{+}, \zeta^{+}$ *имеют место равенства*

$$w_{\underline{i}}(a) = w_{\bar{i}}(a) = |\operatorname{Im} \Lambda_i(a)|, \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

Последнее утверждение не распространяется на частоты строгих знаков.

Теорема 5. *Для любого* $n > 1$ *и любого уравнения* $a \in C^n$ *при каждом* $w = \sigma^{-}, \zeta^{-}$ *имеют место равенства*

$$w_{\underline{n}}(a) = w_{\bar{n}}(a) = w_{\underline{n-1}}(a) = w_{\overline{n-1}}(a) = |\operatorname{Im} \Lambda_1(a)|, \qquad w_{\underline{i}}(a) = w_{\bar{i}}(a) = 0, \;\; i < n-1.$$

Замечание. Сформулированные теоремы остаются в силе и после замены нижнего предела в определении 3 на верхний предел.

Автор выражает глубокую благодарность профессору И.Н. Сергееву за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. Сергеев И.Н. Определения и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды Семинара им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249-294.
2. Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейного уравнения // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 11. С. 1577.
3. Бурлаков Д.С., Цой С.В. Равенство полной и векторной частот решений линейной автономной системы// Дифференциальные уравнения 2011. Т. 47. №11. С.1662-1663.

Сведения об авторах

Сташ Айдамир Хазретович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и методики преподавания математики факультета математики и компьютерных наук Адыгейского государственного университета, Майкоп, тел. (8772) 59-39-05, e-mail: aidamir.stash@gmail.com. Дифференциальные уравнения, линейные системы, устойчивость, показатели Ляпунова, колеблемость, Бэровская классификация. 385000 г. Майкоп, ул. Юннатов 1, д. 257.

О СХОДИМОСТИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Трухляева И.В.

Волгоградский государственный университет, г. Волгоград, Россия.

Аннотация

В работе рассматриваются полиномиальные приближенные решения задачи Дирихле многомерного уравнения минимальной поверхности.

Показывается, что при определенных условиях на геометрическое строение области, градиенты таких решений остаются по модулю ограниченными при увеличении степени рассматриваемых многочленов. Следствием полученных свойств является равномерная сходимость приближенных решений к точному решению уравнения минимальной поверхности.

ON THE CONVERGENCE OF ALMOST POLYNOMIL SOLUTIONS OF THE MULTIDIMENSIONAL MINIMAL SURFASE

Truhlyaeva I.V.

Volgograd State University, Volgograd, Russia

Abstract

In this paper we consider the polynomial approximation of the Dirichlet problem for multidimensional minimal surface equation. It is shown that under certain conditions on the geometric structure of the domain the gradients of the solutions remain limited in absolute value when the degree of these polynomials increases. The consequence of the obtained properties is the uniform convergence of approximate solutions to the exact solution of the minimal surface equation.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения минимальной поверхности

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f_{x_i}}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right)=0 \tag{1}$$

в области Ω с краевым условием $f|_{\partial\Omega}=\varphi|_{\partial\Omega}$, где функция

$$\phi\in C\left(\overline{\Omega}\right). \tag{2}$$

Известно, что задача (1)-(2) имеет единственное решение для любой непрерывной функции φ, если граница $\partial\Omega$ имеет неотрицательную среднюю кривизну относительно внешней нормали.

Мы исследуем вопрос о равномерной сходимости полиномиальных приближенных решений уравнения минимальной поверхности, построение которых осуществляется следующим образом.

Предположим, что $\Omega\subset R^n$- ограниченная область такая, что для некоторого многочлена $\psi(x_1,\dots,x_n)$, степени не более N_0 по каждой переменной, выполнено $\psi(x_1,\ldots,x_n)=0$ при $(x_1,\ldots,x_n)\in\partial\Omega$ и $\psi(x_1,\ldots,x_n)>0$ для $(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega$. Для натурального N обозначим через L_N множество всех многочленов вида

$$v_N(x_1,\ldots,x_n)=\psi(x_1,\ldots,x_n)\sum_{h_1=1}^{N}\ldots\sum_{h_n=1}^{N}c_{h_1,\ldots,h_n}x_1^{h_1},\ldots,x_n^{h_n}$$

Ясно, что $v_N(x_1,\ldots,x_n)=0$ для $(x_1,\ldots,x_n)\in\partial\Omega$. Функцию $f_N^*=\varphi+v_N^*, v_N^*\in L_N$, будем называть полиномиальным приближенным решением краевой задачи (1)- (2), если для любого многочлена $v_N\in L_N$ выполнено равенство

$$\int_\Omega\frac{\left\langle\nabla\varphi+\nabla v_N^*,\nabla v_N\right\rangle}{\sqrt{1+\left|\nabla\varphi+\nabla v_N^*\right|^2}}dx=0. \tag{3}$$

Используя вариационный принцип не сложно доказывается, что полиномиальное решение f^N существует. Единственность следует из условия (3). Основной наш результат состоит в следующем. При некоторых предположениях относительно области Ω мы показываем, что последовательность f_N равномерно сходится к решению f задач (1)- (2) при $N\to\infty$.

Условие сходимости формулируется через следующую характеристику области $\Omega\subset R^n$

$$\lambda_N=\inf_P\frac{\left(|\nabla P|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\Omega}\sup\limits_\Omega|\nabla P|},$$

где точная нижняя грань берется по всем многочленам $P(x_1,\ldots,x_n)$ степени не более чем N по каждой переменной. Отметим, что подобные величины часто встречаются в вопросах сходимости приближенных решений различных краевых задач (см. [1]).

Нами установлено следующее неравенство (см. [2]). Если для области Ω выполнено $\Delta(\Omega)>0$, то верно неравенство

$$\lambda_N\geq\frac{1}{2^{n+1}N^n}\frac{\sqrt{w_n}}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt[4]{n^n}}\frac{\Delta^{\frac{n}{2}}(\Omega)}{\sqrt{|\Omega|}}, \tag{4}$$

где w_n - объем единичного шара в R^n.

Отметим, что для области $\Omega\subset R^n$ с гладкой границей величина $\Delta(\Omega)>0$ и поэтому

$$\lambda_N=O\left(\frac{1}{N^n}\right)\text{ при }N\to\infty.$$

Литература

1. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.-Л., 1970.

2. Трухляева И.В. Оценка некоторой полиномиальной характеристики многомерной области // Дни геометрии в Новосибирске-2015: Тезисы Международной конференции. Новосибирск: Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, 2015.- С.61-62.

Сведения об авторах

Трухляева Ирина Владимировна, ассистент, кафедра математического анализа и теории функций Волгоградского Государственного Университета, irishka2027@mail.ru, эллиптические уравнения с частными производными, краевые задачи вариационного типа, вопросы сходимости приближенных решений нелинейных уравнений.

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ПРЯМЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

Ушхо А.Д.

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия

Аннотация

Приводится обзор работ, посвященных изучению инвариантных прямых полиномиальных векторных полей.

INVARIANT LINES OF PLANAR POLYNOMIAL VECTOR FIELDS

Ushho A.D.

Adyghe State University, Maikop, Russia.

Еще со времен Дарбу [1] известно, что наличие достаточного количества алгебраических инвариантных кривых системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i=0}^{n} P_i(x,y) \equiv P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i=0}^{n} Q_i(x,y) \equiv Q(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где

$$P_i(x,y) = \sum_{r+s=i}^{n} a_{rs}x^r y^s,\, Q_i(x,y) = \sum_{r+s=i}^{n} b_{rs}x^r y^s,\, a_{rs}, b_{rs} \in R, \deg(P^2+Q^2) = 2n, (P,Q) = 1,$$

позволяет записать ее общий интеграл элементарными средствами, не прибегая к операции интегрирования. Кроме того, знание хотя бы одной алгебраической инвариантной кривой упрощает полное качественное исследование системы (1) и дает возможность обнаружения новых свойств этой системы. В этой связи возникает задача об оценке числа p алгебраических инвариантных кривых системы (1). Если $p = \infty$, то систему (1) принято называть алгебраически интегрируемой.

Напомним определение алгебраической инвариантной кривой.

Определение 1. Действительным частным алгебраическим интегралом системы (1) или, что то же самое, дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ фазовых траекторий системы (1) называется алгебраическая кривая $F(x,y)=0$, удовлетворяющая равенству $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}P(x,y)+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}Q(x,y)\equiv F(x,y)R(x,y)$ (2), где $R(x,y)$- многочлен степени $n-1$, называемый кофактором.

Понятия «алгебраический частный интеграл» и «алгебраическая интегральная кривая» являются синонимами [2].

Вместо термина «алгебраический частный интеграл» мы будем пользоваться термином «алгебраическая инвариантная кривая», прочно закрепившимся в современной литературе по дифференциальным уравнениям.

В работе М.В. Долова [3] доказана теорема: если среди интегральных кривых дифференциального уравнения траекторий системы (1) содержится конечное число p попарно различных, неприводимых над полем комплексных чисел алгебраических кривых, то $p\le\frac{n^2+n+2}{2}$ (3), причем оценка (3) точна для $n=2$.

Важное место в вопросе об оценке числа алгебраических инвариантных кривых системы (1) занимает задача об оценке сверху числа инвариантных прямых.

Определение 2[4]. Прямая линия $ax+by+c=0$ называется инвариантной прямой линией системы (1), если выполняется равенство $aP(x,y)+bQ(x,y)\equiv(ax+by+c)R(x,y)$, где $R(x,y)$- многочлен степени не выше $n-1$. В последнее десятилетие прошлого столетия активно занимались проблемой оценки числа алгебраических инвариантных прямых системы (1). Так, в статье [4] доказано, что число инвариантных прямых системы (1) не превосходит $3n-1\,(n\ge1)$. В работе [5] доказано, что система (1) при $n=4$ имеет не более девяти инвариантных прямых, разумеется, речь идет о вещественных инвариантных прямых. Интерес исследователей к обсуждаемой проблеме не ослабевает и в наши дни. Как показали авторы [6,7], система (1) может иметь более девяти инвариантных прямых, если учитывать инвариантные прямые с комплексными коэффициентами. Так, в статье [6] приводится система

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x(x-1)(x^2-3x+3),\\ \frac{dy}{dt}=y(y-1)(y^2-3y+3),\end{cases}$$

допускающая одиннадцать инвариантных прямых: $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ y=x,\ x=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ y=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ y=\frac{3+i\sqrt{3}}{2}-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x,\ y=\frac{3-i\sqrt{3}}{2}-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x$

Прежде чем формулировать основной результат работ [6,7] приведем

Определение 3[6]. Система (1) называется вырожденной на бесконечности, если $xQ_n(x,y)-yP_n(x,y)\equiv 0$ (4).

По терминологии [8] система (1) при выполнении (4) называется проективно особой. Согласно [6,7] справедлива теорема: если система (1) при $n=4$ является вырожденной на бесконечности, то число ее инвариантных прямых не более девяти (с учетом инвариантных прямых с комплексными коэффициентами). Автором заметки [5] доказано, что число вещественных инвариантных прямых системы (1) при $n=4$ не более девяти.

Из числа более поздних работ можно отметить статьи [9-11]. В [9] приводится классификация кубических дифференциальных систем, имеющих максимальное число инвариантных прямых. В статье [10] доказано, что плоское полиномиальное векторное поле $n-$й степени при $n-$четном (нечетном) и $n\geq 3$ имеет не более $2n+1(2n+2)$ инвариантных прямых, если оно имеет n параллельных между собой инвариантных прямых, а также особую точку, которой инцидентны $n+1$ инвариантных прямых.

Долгое время считалось, что дифференциальная система

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\sum\limits_{i+j=0}^{3}a_{ij}x^iy^j\equiv P_3(x,y),\\ \dfrac{dy}{dt}=\sum\limits_{i+j=0}^{3}b_{ij}x^iy^j\equiv Q_3(x,y),\end{cases}\tag{5}$$

где $a_{ij},b_{ij}\in R,\ (P_3,Q_3)=1$, может иметь инвариантные прямые не более четырех различных направлений. Такой позиции придерживается автор статьи [12], в которой доказано, что максимальное число действительных инвариантных прямых системы (5) равно восьми. Однако в работе [13] приведен пример системы (5), имеющей инвариантные прямые шести различных направлений. Нами проведено качественное исследование системы (5), имеющей инвариантные прямые шести различных направлений. В результате установлено: 1) если $\Omega-$множество, состоящее из инвариантных прямых шести различных направлений, то Ω содержит ровно шесть прямых; 2) все инвариантные прямые (5) принадлежат множеству Ω; 3) в ограниченной части фазовой плоскости система (5) имеет семь состояний равновесия, в том числе четыре простых узла M,N,P,Q и три простых седла F,G,H; 4) система (5) не имеет на экваторе сферы Пуанкаре состояний равновесия; 5) система интегрируется в форме Дарбу. Особенность состояний равновесия M,N,P,Q в том, что через каждое из них проходят три инвариантные прямые. Поэтому возможны две различные конфигурации, образованные семью состояниями равновесия системы (5):

а) состояния равновесия M,N,P,Q образуют невыпуклый четырехугольник, б) состояния равновесия *M,N,P,Q* образуют выпуклый четырехугольник. В соответствии с этими конфигурациями возможны два фазовых портрета системы (5) (см. рис.1 и рис.2).

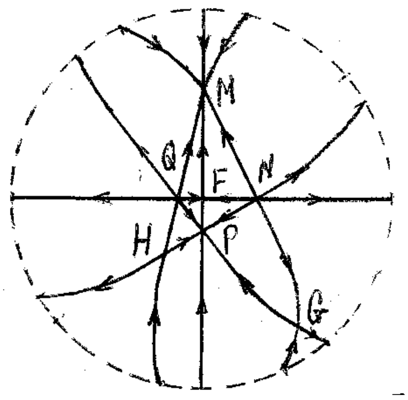


Рис.1. Фазовый портрет системы (5), у которой состояния равновесия M,N,P,Q образуют выпуклый четырехугольник

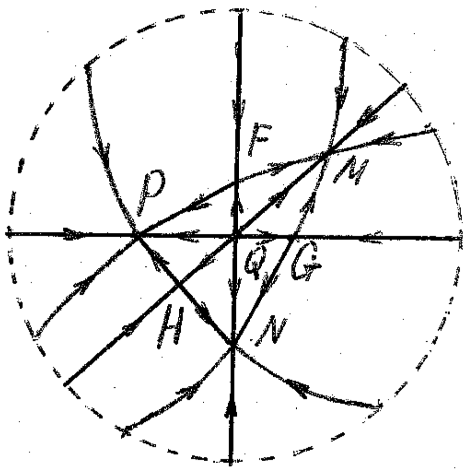


Рис.2. Фазовый портрет системы (5), у которой состояния равновесия M,N,P,Q образуют невыпуклый четырехугольник

Замечание. Окружность круга Пуанкаре на рис.1 и 2 изображена пунктирной линией в знак того, что экватор сферы Пуанкаре системы (5) не состоит из траекторий системы.

В некотором смысле обобщением результатов работы [14] являются выводы, сделанные нами при исследовании системы (1), имеющей два инвариантных множества M_A^n и M_B^n, частным случаем которой является система (5).

Под символом M_R^s следует понимать множество, состоящее из s инвариантных прямых системы (1), проходящих через ее состояние равновесия R.

Нами установлены следующие факты:

– если система (1) имеет два инвариантных множества M_A^n и M_B^n, то существует аффинное преобразование, приводящее (1) к системе

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x[Q_{n-1}(x,y) + P_{n-2}(x,y) + Q_{n-3}(x,y) + \ldots + Q_1(x,y) + b_{00}], \\ \dfrac{dy}{dt} = y[Q_{n-1}(x,y) + Q_{n-2}(x,y) + Q_{n-3}(x,y) + \ldots + Q_1(x,y) + b_{00}], \end{cases} \tag{6}$$

где $Q_i(x,y)\ (i = 1,2...n-1)$ – однородные многочлены степени i, причем $Q_{n-1}(x,y) \not\equiv 0$, $P_{n-2}(x,y)$ – однородный многочлен степени $n-2$ и $P_{n-2}(x,y) \not\equiv Q_{n-2}(x,y)$, $b \in R$, то есть система (1) является проективно особой;

– если система (1) имеет два инвариантных множества M_A^n и M_B^n, то прямая (AB) является инвариантной;

– если система (1)имеет инвариантные прямые более чем $n+1$ направлений, то система (1) является проективно особой;

– если система (1) имеет два инвариантных множества M_A^n и M_B^n, то при n- четном (нечетном) эта система имеет не более $2n+1\,(2n)$ инвариантных прямых;

– если система (1) имеет два инвариантных множества M_A^n и M_B^n, но не имеет параллельных инвариантных прямых, то эта система имеет на экваторе сферы Пуанкаре не более одного состояния равновесия, которое (если оно существует) расположено на концах прямой AB.

Так, например, система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x[2y^2 - 3xy + 4x - 6y + 8], \\ \dfrac{dy}{dt} = y[2y^2 - 3xy + 8x - 10y + 8] \end{cases} \tag{7}$$

имеет два инвариантных множества $M_N^3 = \{x - 2y + 2 = 0,\ 2x - y + 4 = 0,\ y = 0\}$, $N \equiv (-2;0)$, $M_O^3 = \{y - x = 0,\ x = 0,\ y = 0\}$, $O \equiv (0;0)$. Система (7) имеет на экваторе сферы Пуанкаре единственное состояние равновесия на «концах» прямой $y = 0$, в то же время не имеет инвариантной прямой L, где $L \notin \mathrm{M}_{\mathrm{N}}^3 \cup M_O^3$.

Фазовый портрет системы (7) изображен на рис.3

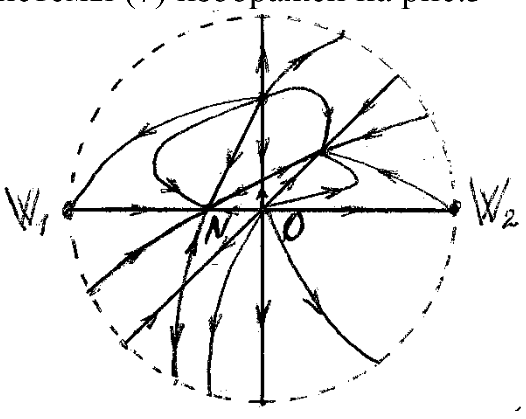


Рис.3. Единственное состояние равновесия системы (7) на экваторе сферы Пуанкаре изображено точками W_1 и W_2, расположенными на «концах» прямой $y = 0$.

В связи с приведенными выше фактами, изложенными в пунктах 4) и (5) естественным образом возникает вопрос: есть ли у системы (1), имеющей два инвариантных множества M_A^n и M_B^n, но не имеющей параллельных инвариантных прямых в случае максимального числа инвариантных прямых, состояния равновесия на бесконечности?

Литература

1. Darboux M.G. Memoire sur les equations differentielles algebriques du premier ordre et du premier degre//Bulletin des sciences mathematiques et astronom. Paris, 1878.- P. 60-96, 123-144, 151-200.
2. Дружкова Т.А. Алгебраические дифференциальные уравнения с алгебраическими интегралами. Методическое пособие. Часть первая/Т.А.Дружкова.-Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2005.- 37с.
3. Долов М.В. О числе алгебраических инвариантных кривых полиномиальных векторных полей/М.В.Долов//Дифференциальные уравнения, 2004. – Т. 40, №6.- С. 838-839.
4. Artes Joan C., Grunbaum B., Llibre J. On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems//Pacific journal of mathematics, 1998. – Vol. 184. - №2. – P. 207-230.
5. Sokulski J. On the number of invariant straight lines for polynomial vector fields//Nonlinearity, 1996. - №9. – P. 479-485.
6. Долов М.В. О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвертой степени с вырожденной бесконечностью /М.В.Долов, С.А. Чистякова//Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского, 2010, №6. – С. 132-137.
7. Долов М.В. О линейных частных интегралах полиномиальных векторных полей четвертой степени с вырожденной бесконечностью. II/ М.В.Долов, С.А. Чистякова//Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского, 2011, №1. – С. 139-148.
8. Горбузов В.Н. Проективный атлас траекторий дифференциальных систем второго порядка/В.Н.Горбузов//Вестник Гродненского гос. ун-та. Сер. 2, 2011. - №2 (111). – С. 15-26.
9. Llibre J., Vulpe N. Planar cubic polynomial differential systems with the maximum number of invariant straight lines//Rocky mountain journal of mathematics, 2006. – Vol. 36, №4. – P. 1301-1373/
10. Тлячев В.Б. Оценка сверху числа инвариантных прямых полиномиального векторного поля n-й степени/В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо, Д.С. Ушхо//Изв. Саратовского ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2015. – Т. 15, №2. – С. 171-178.
11. Bujac C., Vulpe N. Cubic systems with invariant lines of total multiplicity eight and with four distinct infinite singularities. Preprint/Universitat Autonoma de Barcelona, 2013. - №10. – P. – 1-51.
12. Любимова Р.А. Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми/Р.А. Любимова//Дифференциальные и интегральные уравнения. Межвуз. Сборник. – Горький: Изд-во гос. ун-та, 1977. – С. 19-22.
13. Putuntica V.M. The cubic differential system with six real invariant straight lines along six directions//Материалы международной конференции, посвященной столетию Н.Н. Боголюбова и 70- летию Н.Н. Нагнибиды. –Черновцы: Изд-во Черновицкого гос. ун-та, 209. – С.245-247.

14. Ушхо А.Д. Траектории кубической дифференциальной системы на плоскости, имеющей инвариантные прямые шести различных направлений/А.Д. Ушхо//Вестник Воронежского гос. ун-та. Серия: Физика. Математика, 2012. - №2. – С. 224-231.

Сведения об авторе

Ушхо Адам Дамирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической физики Адыгейского университета, e-mail: uschho76@mail.ru, качественная теория дифференциальных уравнений .

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ АВТОНОМНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ушхо Д.С.

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия

Аннотация

В докладе излагаются результаты исследования кубической дифференциальной системы по вопросам: оценки числа особых точек второй группы, оценки числа прямых изоклин, сосуществования особых точек второй группы и предельных циклов, а также сосуществования инвариантных прямых и предельных циклов.

SOME QUESTIONS OF THE QUALITATIVE THEORY OF SECOND ORDER AUTONOMOUS POLYNOMIAL DIFFERENTIAL SYSTEMS

Ushho D.S.

Adyghe State University, Maikop, Russia.

Качественная теория дифференциальных уравнений, основоположниками которой по праву считаются А.Пуанкаре и А.М. Ляпунов, возникла в конце 80-х годов 19-го столетия. Она получила свое дальнейшее развитие в трудах зарубежных и отечественных математиков, таких, как Д. Биркгоф, И. Бендиксон, Г. Дюлак, М. Фроммер, А.А. Андронов, Л.С. Понтрягин, В.В. Степанов, В.В. Немыцкий, Е.А. Леонтович, А.А. Витт, С.Э. Хайкин, А.Г. Майер, И.И. Гордон и др.

Если качественная теория возникла из потребностей в основном небесной механики, то уже, начиная с 30-х годов 20-го столетия, она стала математическим аппаратом для изучения процессов, происходящих в электрических цепях и радиотехнических устройствах, а также для решения задач теории устойчивости. Достаточно широк круг вопросов(прикладных и теоретических), изучение которых приводит к необходимости качественного интегрирования двумерных динамических систем аналитического класса

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases} \tag{1}$$

Многие радиотехнические, механические, гидродинамические, экологические, биологические и иные реальные системы моделируются с помощью системы (1), где P, Q – многочлены вполне определенной степени с действительными коэффициентами. Так, например, отдельные вопросы химической кинетики, астрофизики, математической биологии приводят к системе специального вида [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a_{00} + a_{10}x + a_{01}y), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(b_{00} + b_{10}x + b_{01}y) \end{cases}.$$

Изотермический реактор непрерывного действия, в котором протекает обратимая химическая реакция, моделируется системой [2]

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda(x_0 - x) + y - x^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = \lambda(y_0 - y) - y + x^2 \end{cases}.$$

Обобщенная модель "хищник-жертва" представлена системой уравнений (1), где P, Q – многочлены третьей степени [3].

Много применений автономных полиномиальных систем второго порядка в биологии можно найти в работе [4].

Большой интерес математиков к изучению полиномиальных векторных полей на плоскости обусловлен их фундаментальной ролью в теории дифференциальных уравнений [5].

Различные вопросы качественной теории применительно к системе (1) изучались в трудах А.Ф. Андреева,Н.А. Сахарникова, К.С. Сибирского, Н.Ф. Отрокова, М.И. Альмухамедова, Н.А. Лукашевича, А.Н. Берлинского, А.А. Черкаса, М.В. Долова и многих других.

Среди автономных систем второго порядка с алгебраическими правыми частями наиболее полно изучены квадратичные (в системе (1) P, Q – многочлены второй степени). Здесь решены проблема центра-фокуса, вопрос о числе особых точек второй группы и числе инвариантных прямых и т.д. Вместе с тем число работ по изучению системы (1) с кубическими правыми частями сравнительно невелико. Проблема центра-фокуса здесь решена лишь для системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + P_3(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = x + Q_3(x, y), \end{cases}$$

где P_3, Q_3 – однородные многочлены третьей степени.

Наряду с такими классическими проблемами качественной теории, как проблема центра-фокуса, предельных циклов, поставленными А.Пуанкаре, в последние десятилетия возникли новые проблемы качественной теории плоских полиномиальных дифференциальных систем. К ним можно отнести проблемы: оценки числа алгебраических инвариантных кривых, оценки числа особых точек второй группы, оценки числа прямых изоклин, сосуществования особых точек второй группы и изолированных периодических решений, сосуществования инвариантных прямых и предельных циклов и др.

В данном сообщении излагаются результаты исследования системы (1) по вопросам: оценки числа особых точек второй группы кубической системы, сосуществования центров и предельных циклов кубической системы, сосуществования инвариантных прямых и предельных циклов кубической системы, поведения фазовых траекторий кубической системы на бесконечности.

Литература

1. Дружкова Т.А. Алгебраические дифференциальные уравнения с алгебраическими интегралами/Т.А. Дружкова.- Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 2005.- 37с.
2. Вольтер Б.В. Устойчивость режимов работы химических реакторов/ Б.В. Вольтер, И.Е. Сальников.- М.: Химия, 1981.- 200 с.
3. Huang X., Wang Y., Cheng A. Limit cycles in a cubic predator-prey differential system//J. Korean Math. Soc.- 2006.- Vol. 43.- № 4.- P. 829-843.
4. Llibre J., Valls C. Analitic first integrals of the Fitz Hug- Nagamo systems //Zeitschrift fur angewandte Matematik und Physik(ZAMP).- 2009.- Vol. 60.- P/ 237-245.
5. Немыцкий В.В. Некоторые современные проблемы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений/ В.В. Немыцкий// УМН.- 1965.- Т.20.- Вып.4(124).- С. 3-36.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ РАСТУЩЕЙ КЛЕТОЧНОЙ ПОПУЛЯЦИИ

Хацимова Б. В.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Институт прикладной математики и автоматизации», Нальчик, Россия

Аннотация

В работе построена математическая модель роста клеточных популяций при ограниченности скорости созревания клетки.

ABOUT ONE MODEL OF GROWING CELL POPULATIONS

Khatsimova B.V.

Federal State Scientific Institution " Institute of Applied Mathematics and Automation " , Nalchik , Russia

В 1983 г. М. Ротенбергом для описания роста клеточных популяций было предложено уравнение Фоккера – Планка [1], [2]

$$\frac{\partial w}{\partial t} + x\frac{\partial w}{\partial y} = D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где $w = w(x, y, t)$ характеризует рост числа клеток как функция времени t, x- независимая переменная, описывающая скорость созревания клетки; y - степень созревания клетки. Когда клетка рождается $y = 0$, а когда делится $y = 1$. $D > 0$ - коэффициент диффузии.

Построим математическую модель, описывающую рост клеточной популяции, если известны:

– скорость изменения роста, зависящая от скорости созревания клетки, когда последняя равно нулю;

– рост клеточной популяции в случае наибольшей скорости созревания клетки.

Предположим, что рост клетки в момент, когда она рождается, прямо пропорционален росту клетки в момент ее деления с коэффициентом пропорции p.

Приведенная выше биологическая модель имеет следующую математическую интерпретацию.

Пусть задана трехмерная область Ω, зависящая от переменных x, y, t, в которой $0 < x \leq r, 0 \leq y \leq 1, 0 < t < T$. Здесь T - конечное число окончания эксперимента.

Задача 1. Найти решение $w = w(x, y, t)$, непрерывное в Ω, удовлетворяющее уравнению (1) и следующим условиям

$$\frac{\partial w}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad (2)$$

$$w(r, y, t) = v_0(y, t), \quad (3)$$

$$w(x, 0, t) = pw(x, r, t). \quad (4)$$

Здесь $v_0 = v_0(y, t)$- заданная непрерывная положительная функция, зависящая от времени и степени созревания клетки, характеризующая численность клеточной популяции при наибольшем росте скорости созревания; $p \in (0,1) \cup (1,2]$ - среднее число жизнеспособных дочерних клеток. Случай $p = 1$ не рассматривается, поскольку это условие не удовлетворяет определению растущей клеточной популяции.

Явное решение задачи 1 выписывается следующим образом:

$$w(x, y, t) = \frac{-Bi'(\beta)v_0(y,t)}{Ai'(\beta)Bi(\overline{x_r}) - Bi'(\beta)Ai(\overline{x_r})}Ai(\bar{x}) + \frac{Ai'(\beta)v_0(y,t)}{Ai'(\beta)Bi(\overline{x_r}) - Bi'(\beta)Ai(\overline{x_r})}Bi(\bar{x}), \quad (5)$$

где $\bar{x} = \alpha x + \beta, \alpha = \left(-\frac{\mu}{D}\right)^{\frac{1}{3}}, \mu = \ln p, \beta = \left(-\frac{\mu}{D}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(-\frac{\lambda}{D}\right), \overline{x_r} = \alpha r + \beta.$

Потребуем от μ и λ, чтобы выражения аргумента функций Эйри были положительны. Учитывая, что при положительных аргументах обе функции $Ai(\bar{x})$ и $Bi(\bar{x})$ положительны, а их производные $Ai'(\bar{x}) < 0$ (т.к. при положительных $\bar{x}$ $Ai(\bar{x})$ - убывающая функция), $Bi'(\bar{x}) < 0$ (при положительных $\bar{x}$ $Bi(\bar{x})$ - возрастающая функция). Отсюда видно, что знаменатель выражения (7) не равен нулю.

Рассмотрим случай, когда $p \in (0,1) \cup (1,2]$ и $\lambda < 0$.

В явном виде решение уравнения (1) должно удовлетворять условию $w(x,y,t) > 0$. Перепишем (7) в виде неравенства

$$w(x,y,t) = \frac{[-Bi'(\beta)Ai(\bar{x}) + Ai'(\beta)Bi(\bar{x})]v_0(y,t)}{Ai'(\beta)Bi(\overline{x_r}) - Bi'(\beta)Ai(\overline{x_r})} > 0. \qquad (6)$$

В силу вышесказанного видно, что числитель и знаменатель меньше нуля, следовательно, выполняется неравенство (6).

Случаи, при $\mu < 0, \lambda > 0$ и при $\mu > 0, \lambda > 0$ не предусматривают положительного значения аргумента функций Эйри, что является необходимым в построении модели.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $p \in (0,1) \cup (1,2]$ и $\lambda < 0$, тогда задача 1 имеет единственное решение, представимое в виде (5).

Доказано, что полученное решение устойчиво.

Задача 1 представляет собой математическую модель растущей клеточной популяции.

Литература

1. Rotenberg M. Transport theory for growing cell populations. J. Theor. Biol. 1983, 109. P. 189-199.
2. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.

Сведения об авторе

Хацимова Бэла Владимировна, аспирант второго года обучения, стажер – исследователь отдела уравнения математической биологии, Институт прикладной математики и автоматизации, E-mail:. hacimova@list.ru, область научных интересов: уравнение Фоккера – Планка, математическое моделирование.

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ПОЛУПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

Хуштова Ф.Г.

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Институт прикладной математики и автоматизации», Нальчик, Россия

Аннотация

Исследуется первая краевая задача в полуполосе для вырождающегося уравнения параболического типа с оператором Римана-Лиувилля. В терминах интегрального преобразования с функцией Райта в ядре найдено представление решения в случае нулевого граничного условия. Единственность решения доказана в классе функций, удовлетворяющих аналогу условия А.Н. Тихонова.

FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM IN THE HALF-STRIP FOR A DEGENERATE PARABOLIC EQUATION WITH RIEMANN-LIOUVILLE OPERATOR

Khushtova F.G.

Institute of Applied Mathematics and Automation, Nalchik, Russia

В области $\Omega = \{(x,y): 0 < x < \infty, 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x,y) + \frac{b}{x} u_x(x,y) - D_{0y}^{\alpha} u(x,y) = 0, \tag{1}$$

где D_{0y}^{α} – оператор Римана-Лиувилля порядка α [1], $|b| < 1$, $0 < \alpha \le 1.$

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω будем называть функцию $u = u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω, и такую, что $y^{1-\alpha} u \in C(\overline{\Omega})$, u_x, u_{xx}, $D_{0y}^{\alpha} u \in C(\Omega)$, $\overline{\Omega}$ – замыкание области Ω.

Задача 1. *Найти регулярное в области* Ω *решение уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$\Gamma(\alpha) \lim_{y \to 0} y^{1-\alpha} u(x,y) = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty, \tag{2}$$

$$u(0,y) = 0, \quad 0 < y < T, \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ *– заданная функция.*

Обозначим через

$$G(x,\xi,y) = A_y^{\alpha} g(x,\xi,y),$$

$$g(x,\xi,y) = \frac{x^{\beta} \xi^{\beta}}{2y} e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4y}} I_{\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right), \; \beta = (1-b)/2,$$

где A_y^{α} – интегральное преобразование с функцией Райта в ядре [2], $I_{\beta}(z)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка β [3] .

Лемма 1. *Для функции* $G(x,\xi,y)$ *при* $x\xi \le 2y$ *справедливы следующие оценки:*

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial x^n} G(x,\xi,y)\right| \le const \cdot x^{2\beta - n} \xi^{2\beta} y^{-\alpha\beta - 1}, \; \beta \ne 1/2,$$

$$\left|\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} G(x,\xi,y)\right| \le const \cdot x \, \xi \, y^{-\alpha(2n+1)/2 - 1}, \quad \beta = 1/2,$$

$$\left|\frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}} G(x,\xi,y)\right| \le const \cdot \xi \, y^{-\alpha(2n+1)/2 - 1}, \quad \beta = 1/2,$$

$$\left|D_{0y}^{\alpha} G(x,\xi,y)\right| \le const \cdot x^{2\beta} \xi^{2\beta} y^{-\alpha\beta - \alpha - 1},$$

при $x\xi > 2y$ *– оценки:*

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial x^n} G(x,\xi,y)\right| \le const \cdot P_n(x,\xi,y) \exp\left(-\alpha_0 |x-\xi|^{2/(2-\alpha)} y^{-\alpha/(2-\alpha)}\right),$$

$$\left|D_{0y}^{\alpha} G(x,\xi,y)\right| \le const \cdot P_2(x,\xi,y) \exp\left(-\alpha_0 |x-\xi|^{2/(2-\alpha)} y^{-\alpha/(2-\alpha)}\right),$$

где

$$\alpha_0=(2-\alpha)\,2^{\,-2/(2-\alpha)}\,\alpha^{\,\alpha/(2-\alpha)},$$

$$P_n(x,\xi,y)=x^{\,\beta+(2n-1)/2}\xi^{\,\beta-1/2}\,|\,x-\xi\,|^{\,-(2n-1)(1-\alpha)/(2-\alpha)}\,y^{-(2n-1)\alpha/[2(2-\alpha)]-1},\ n=0,1,2,...$$

Теорема 1. *Пусть* $\varphi(x)\in C\,[0,\infty)$, $\varphi(0)=0$ *и выполнено условие* $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)\exp\left(-\rho\,x^{\,2/(2-\alpha)}\right)=0$, $\rho<\alpha_0 T^{-\alpha/(2-\alpha)}$. *Тогда функция*

$$u(x,y)=\int\limits_0^\infty \xi^{\,1-2\beta}G(x,\xi,y)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

является решением задачи 1.

Решение единственно в классе функций, удовлетворяющих для некоторого $\sigma>0$ *условию*

$$\lim_{x\to\infty} y^{\,1-\alpha}u(x,y)\exp\left(-\sigma\,x^{\,2/(2-\alpha)}\right)=0, \tag{4}$$

причем сходимость в (4) является равномерной на множестве $\{y\in(0;T)\}$.

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит. 2003.–272с.
2. Уравнения в частных производных дробного порядка. – М.: Наука, 2005. – 199 с.
3. Кузнецов Д.С. Специальные функции. – М.: Высшая школа, 1965. – 424 с.

Сведения об авторе

Хуштова Фатима Гидовна, научный сотрудник отдела САПР смешанных систем и управления, Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Институт прикладной математики и автоматизации», E-mail: khushtova@yandex.ru, область научных интересов: дифференциальные уравнения в частных производных параболического типа.

АЛГОРИТМ ПОИСКА ДОПУСТИМОГО РАСПИСАНИЯ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ МНОГОСТАДИЙНЫХ ПРОИЗВОДСТВ

Черненко А.А.

Майкопский государственный технологический университет, г.Майкоп, РФ

Аннотация

В статье рассматривается задача оперативно-календарного планирования на примере непрерывного многостадийного производства. Производится постановка задачи в терминах теории расписаний. Предлагается алгоритм поиска допустимого расписания.

SEARCH ALGORITHMS FEASIBLE SCHEDULE FOR CONTINUOUS MULTISTAGE PRODUCTION

Chernenko A.A.

Maikop State Technological University, Maikop, Russian Federation.

Автоматизация основных бизнес-процессов на предприятиях способствует повышению эффективности производства за счет снижения производственных издержек. На сегодняшний день разработано множество решений в области промышленной автоматизации, многие из которых являются интегрированными системами управления [2]. Однако несмотря на насыщенность рынка промышленных систем, задача производственного планирования, а конкретно расчета производственных расписаний и механизмов их диспетчирования, остается актуальной. Это может быть связано с характером, типом производства, а также формой организации производственного цикла. Рассмотрим задачу поиска допустимого расписания, характерную для непрерывного многостадийного производства.

Заказ req поступает в систему в момент времени t. В соответствии с маршрутной технологией, каждый заказ включает n операций operj, где *j=1,…, n.* На множестве операций заданы отношения предшествования. Операции выполняются на производственных единицах ware, расположенных на участках. На любом участке могут находиться одна или несколько производственных единиц, работающих параллельно. Причем производительность единиц в рамках участка одинакова. Для каждой операции задана длительность обслуживания на оборудовании 1 $p_{\mathrm{oper}_{lj}}$. Принимаем, что в один и тот же момент времени на одной единице оборудования может обрабатываться только одна операция. Длительность обслуживания заказа определяется как сумма длительностей обслуживания входящих в него операций:

$$C_{req} = \sum_{j=1}^{n} p_{\mathrm{oper}_{lj}} \tag{1}$$

С учетом времени поступления заказа *t* и отношений предшествования операций, для каждой операции могут быть определены время начала обслуживания r_{oper_j} и директивный срок d_{oper_j}, к которому необходимо либо желательно завершить обслуживание.

Если обслуживание операции завершается позже установленного значения d_{oper_j}, то вводится функция штрафа $U_j = 1$.

Требуется построить такое допустимое расписание, при котором суммарный штраф будет минимальным, то есть

$$\sum_{j=1}^{n} U_j \to min .$$

Таким образом, математическая модель исследуемой задачи имеет следующий вид: $Pm\|\mathrm{prec}\|\sum_{j=1}^{n} U_j$. То есть, это система с m параллельно обслуживающих приборов, на множестве требований определены отношения предшествования, критерий состоит в минимизации суммарного штрафа. Сформулированная задача **NP**-трудна в сильном смысле [1].

Заданное на множестве требований отношение предшествования позволяет представить производственную схему в виде отдельных участков с параллельно функционирующими единицами оборудования (рис.1).

Рис. 1 Обобщенная схема производственного цикла

Для каждого участка решается задача $Pk\|\text{prec}\|\sum_{j=1}^{n} U_j$, где k – количество производственных единиц на участке. В результате получается консолидированное расписание для всего производственного цикла на определенный период. Данная задача может быть сведена к ЗАДАЧЕ О РЮКЗАКЕ следующим образом. Количество производственных единиц n соответствует количеству рюкзаков с переменными значениями вместимости. Вместимость рюкзака равна сумме всех продолжительностей выполнения требований $\sum_{i=1}^{k} p_i$.

В основе предлагаемой методики лежит идея «жадного» алгоритма для решения ЗАДАЧИ О РЮКЗАКЕ [3]. Входными данными являются списки длительностей работ (p), директивных сроков (d), стоимостей (w) и количество производственных единиц на участке (ware_count). На начальном этапе резервируется память для служебных переменных: выходного расписания (ware), суммарного штрафа (U), суммарной длительности работ на i производственной единице (cash) и списка отношений pi/wi (pw). Далее значения в списке pw сортируются согласно правилу неубывания, то есть $pw[0] \geq pw[1] \geq \ldots \geq pw[n]$ (2), n – количество требований.

Процесс формирования расписания протекает в два этапа. На первом этапе каждая производственная единица заполняется требованием i, согласно правилу 2. Если суммарная длительность операций превышает установленный директивный срок, то суммарный штраф возрастает на единицу.

На втором этапе оставшиеся требования распределяются между производственными единицами по следующим правилам. Требование x ставится в соответствие той производственной единице, для которой выполняется условие: суммарная длительность работ минимальна. Причем если директивный срок требования d[x] больше аналогичного предыдущего значения d[x-1], то происходит перестановка требований.

Algorithm 1. *Построение допустимого расписания для задачи* $Pm \,||\, \mathrm{prec} \,||\, \sum_{j=1}^{n} U_j$

```
Для каждого p_i вычислить значения pw_i = p_i / w_i , i = 0, 1, ..., n
Отсортировать значения в списке pw по убыванию : pw[0] ≥ pw[1] ≥ ... ≥ pw[n]
1 − ый этап . Заполнить все свободные единицы оборудования
for i := 0 to ware_count do
    s := p[i], ware += S, cash += p[i]
    if cash[i] < d[i] then
        U += 0
    else
        U += 1
    endif
endfor
2 − ой этап . Оставшиеся p[i]
p_last = p.count() − ware_count
for x := 0 to p_last do
    min_p = get_min(cash)
    Операция добавляется на оборудование , для которого Σ_{j=1}^{n} p_j → min
    ware[min_p] += p[x]
    if d[x] > prev_index[min_p] then
        ware[min_p][x] = val
        ware[min_p][x] = ware[min_p][x − 1]
        ware[min_p][x − 1] = val
    endif
    Функция штрафа U_j
    if cash[min_p] > d[x] then
        U += 1
    endif
    cash[min_p] += p[x]
endfor
RETURN (ware, U) Вернуть расписание и суммарный штраф
```

Результатом работы алгоритма является список, содержащий порядок исполнения требований на производственных единицах (расписание) и суммарный штраф. Сложность предложенного алгоритма можно оценить как $O(n^2)$.

Предложенный в рамках настоящей статьи алгоритм может быть использован в качестве основы для модуля оперативно-детального планирования (ODS), который в свою очередь, в интеграции с модулем диспетчирования произвводства (DPU), образует ядро системы оперативно-календарного планирования производства.

Литература

1. Лазарев А.А., Гафаров Е.Р. Теория расписаний: задачи и алгоритмы. - М.: 2011.- 213с.
2. Черненко А.А. Особенности повышения эффективности бизнес-процессов на предприятиях различных типов посредством использования возможностей промышленных ИС // Новые технологии. Вып. 4/2014. - Майкоп: изд-во ФГБОУ ВПО "МГТУ", 2014. - 108с.
3. Pinedo, Michael L. Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems, 2012.

Сведения об авторах

Черненко Александр Александрович, аспирант кафедры информационной безопасности и прикладной информатики Майкопского государственного технологического университета, spiritfov@yandex.ru, промышленные информационные системы.

ОГИБАЮЩАЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЬ СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ МНОГОМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Шармин В.Г.

Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия

Аннотация

В данных тезисах приведены условия существования огибающей n-параметрического семейства кривых в (n+1)-мерном евклидовом пространстве. Эти условия являются достаточными.

THE ENVELOPE OF THE FAMILY OF CURVES OF A HYPERSURFACE OF THE EUCLIDEAN SPACE MULTIDIMENSIONAL

Sharmin V. G.

Tyumen State University, Tyumen, Russia

Пусть

$$\vec{r} = \vec{r}(u, \varphi_1, ..., \varphi_n) \tag{1}$$

есть n-параметрическое семейство регулярных кривых в (n+1)-мерном евклидовом пространстве.

Семейство (1) типично и имеет устойчивую огибающую при k = n. В этом случае огибающая является гиперповерхностью в рассматриваемом многомерном евклидовом пространстве [1].

Сформулируем **основной результат**:

Пусть некоторое семейство кривых в E^{n+1} является гладким класса C^2

$$\vec{r} = \vec{r}(u, \varphi_1, ..., \varphi_n) = (x_1(u, \varphi_1, ..., \varphi_n), ..., x_{n+1}(u, \varphi_1, ..., \varphi_n)) \in C^2, \tag{2}$$

$a < u < b,\ c_i < \varphi_i < d_i$ и в точке $(u_0, \varphi_{1_0}, ..., \varphi_{n_0})$, выполнены условия:

$$f=\frac{D(x_1,...,x_{n+1})}{D(u,\varphi_1,...,\varphi_n)}=(\vec{r}_u,\vec{r}_{\varphi_1},...,\vec{r}_{\varphi_n})=0; \tag{3}$$

$$\vec{r}_u\neq 0; \tag{4}$$

$$f_u\neq 0; \tag{5}$$

$$\vec{N}=f_u[\vec{r}_{\varphi_1},...\vec{r}_{\varphi_n}]-f_{\varphi_1}[\vec{r}_u,\vec{r}_{\varphi_2},...,\vec{r}_{\varphi_n}]-...-f_{\varphi_n}[\vec{r}_{\varphi_1},...,\vec{r}_{\varphi_{n-1}},\vec{r}_u]\neq 0. \tag{6}$$

Тогда в некоторой достаточно малой окрестности точки ($u_0,\varphi_{1_0},...,\varphi_{n_1})(a_0<u<b_0,\ \ c_{i_0}<\varphi_{i_0}<d_{i_0})$ для семейства (2) можно доказать следующие утверждения:

Семейство (2) имеет огибающую, которая задается вектор-функцией $\vec{r}=\vec{r}(u,\varphi_1,...,\varphi_n)$ при условии $f=f(u,\varphi_1,\dots,\varphi_n)=0$. Параметры $\varphi_1,...,\varphi_n$ являются внутренними координатами на огибающей. Закон прикрепления $u(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ является функцией класса C^1. Точке $(\varphi_{1_0},\dots,\varphi_{n_0})$ отвечает u_0.

Вектор $\vec{N}$ - нормальный вектор огибающей. Любая кривая семейства и огибающая касаются друг друга в единственной точке. Огибающая гиперповерхность и закон прикрепления единственны (с точностью до замены параметров).

Литература

1. Залгаллер В.А. Теория огибающих. – М.: Наука, 1975. – 104 с.

Сведения об авторе

Шармин Валентин Геннадьевич, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры алгебры и математической логики Института математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «Тюменский государственный университет», sharmin@utmn.ru, дифференциальная геометрия.

ФАКТОРИЗАЦИЯ ЦЕЛЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Шишкин А.Б.

Кубанский государственный университет, Славянск-на-Кубани, Россия,

Аннотация

Пусть *p(z)* – целая функция минимального типа при порядке 1. Целая функция *f(z)* называется *p*-симметричной, если она представляется в виде композиции *F(p(z))*, где *F* – целая функция. Доклад посвящён следующему вопросу. Можно ли всякую целую *p*-симметричную функцию экспоненциального типа представить в виде произведения двух близких по росту функций, каждая из которых сама является целой *p*-симметричной функцией?

FACTORIZATION OF INTEGER SYMMETRIC FUNCTION

Shishkin A.B.
Kuban State University, Slavyansk-On-Kuban, Russia

Факторизация целых функций подобна операции извлечения квадратного корня и находит применение в различных областях комплексного анализа. Рассмотрим лишь один пример, который связан с задачей спектрального синтеза для линейного дифференциального оператора

$$f \to \pi(D) f := \sum_{k=0}^{\infty} a_k D^k f,\ a_k \in \mathbf{C}.$$

Пусть Ω – выпуклая область в $\mathbf{C}$; $H(\Omega)$ – пространство аналитических в области Ω функций, с топологией равномерной сходимости на компактах. Считаем, что сужение оператора $\pi(D)$ на пространство $H(\Omega)$ является непрерывным эндоморфизмом этого пространства. Для этого достаточно, а если область Ω ограничена, то и необходимо, предположить, что функция

$$\pi(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

является целой функцией минимального типа при порядке 1. Задача спектрального синтеза (в комплексной области) состоит в нахождении условий, при которых замкнутые $\pi(D)$-инвариантные подпространства $W \subseteq H(\Omega)$ восстанавливаются по запасам содержащихся в них корневых элементов оператора $\pi(D)$ с помощью замыкания их линейной оболочки. Традиционный путь решения этой задачи связан с переходом к двойственной задаче. Полное исследование по этому вопросу проведено в [1]. В этой работе исследование замкнутого $\pi(D)$-инвариантного подпространства $W \subseteq H(\Omega)$ на допустимость спектрального синтеза сведено к вопросу обильности его аннуляторного подмодуля $I := L_\Omega(W^0) \subseteq P(\Omega)$. Здесь $P(\Omega)$ – интерпретация сильного сопряженного $H^*(\Omega)$ к пространству $H(\Omega)$ в терминах преобразования Лапласа L_Ω, наделенная структурой топологического модуля над кольцом многочленов $\mathbf{C}[\pi(z)]$ от $\pi(D)$. В работе [2] свойство обильности замкнутого подмодуля $I \subseteq P(\Omega)$ расщепляется на три отдельных свойства: интенсивность, устойчивость, насыщенность. Общее исследование этих свойств проведено в работе [3]. Целая функция называется целой π-симметричной, если она представляется в виде композиции $f \circ \pi$, где f – целая функция. Пусть $P_\pi[1;+\infty)$ – класс всех целых π-симметричных функций экспоненциального типа, $S\in H^{*}(\Omega)$, $\phi := L_{\Omega}(S)\in P(\Omega)$. Замкнутое $\pi(D)$ -инвариантное подпространство

$$W_S := \left\{ f\in H(\Omega) : \left\langle S, \pi(D)^k f\right\rangle = 0,\ k=0,1,... \right\} \subset H(\Omega)$$

называется полиномиальным ядром (точнее, $\mathbf{C}[\pi(D)]$-ядром) функционала S. Иногда полиномиальные ядра линейных непрерывных функционалов называют главными $\pi(D)$-инвариантными подпространствами в $H(\Omega)$. Полиномиальное ядро W_S функционала S допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда выполняется следующая импликация: если $\psi\in P(\Omega)$ и $\frac{\psi}{\phi}\in P_{\pi}[1;+\infty)$, то существует такая последовательность многочленов p_k, что последовательность $(p_k\circ\pi)\phi$ сходится к ψ в топологии пространства $P(\Omega)$. Ранее И. Ф. Красичков-Терновский доказал выполнимость этой импликации для любого функционала $S\in H^{*}(\Omega)$ в случае $\pi(z)\equiv z$. Отсюда вытекает следующая аппроксимационная теорема: в случае $\pi(z)\equiv z$ полиномиальные ядра линейных непрерывных функционалов допускают спектральный синтез. Доказательству этой теоремы предшествовало доказательство факторизуемости класса $P[1;+\infty)$ всех целых функций экспоненциального типа по естественному отношению эквивалентности $R(|z|)$: $f\sim g$ тогда и только тогда, когда

$$\left|\ln|f(z)|-\ln|g(z)|\right| = o(|z|),\ z\to\infty,\ z\notin E_{f,g},$$

где $E_{f,g}$ – некоторое множество «нулевой плотности» в окрестности бесконечности. Затем, В. С. Азарин обобщил этот факт и показал, что класс всех целых функций конечного порядка $\rho\in(0;+\infty)$ факторизуем по отношению $R\left(|z|^{\rho}\right)$. Отсюда следует, что класс $P[\rho;+\infty)$ всех целых функций конечного порядка и конечного типа тоже факторизуем по отношению $R\left(|z|^{\rho}\right)$. Опираясь на этот результат, И. Ф. Красичков-Терновский показал, что класс целых π-симметричных функций $P_{\pi}[1;+\infty)$ факторизуем по отношению $R(|z|)$ в случае $\pi(z)$ – многочлен. Это позволило ему доказать такую аппроксимационную теорему: в случае $\pi(z)$ – многочлен полиномиальные ядра линейных непрерывных функционалов допускают спектральный синтез. Замечательным является то, что позднее в диссертации Б. Н. Хабибуллин существенно уточнил факторизационную теорему В. С. Азарина. Оказалось, например, что класс $P[\rho;+\infty)$ факторизуем по отношению $R\left(|z|^{\frac{\rho}{2}+\varepsilon}\right)$ для любого положительного ε. Отметим, что результаты В. С. Азарина и Б. Н. Хабибуллина по факторизации целых функций получены ими в связи с общими исследованиями по проблеме влияния близости распределений масс субгармонических функций на сходство их асимптотического поведения.

Расщепление целой π-симметричной функции $f \circ \pi \in P_\pi[1;+\infty)$ на эквивалентные π-симметричные множители связано с расщеплением целой функции f на эквивалентные множители. Если функция π отлична от многочлена, то функция f имеет нулевой порядок. Это означает, что продолжение исследований по спектральному синтезу предполагает решение задач факторизации целых функций нулевого порядка. Заметим, что все отмеченные выше факторизационные задачи к таковым не относятся, так как в каждой из них предполагается, что $\rho \in \left(0;+\infty\right)$. Приходится возвращаться к истокам.

Первые результаты по факторизации целых функций нулевого порядка получены в работах Р. Г. Письменного и А. Б. Шишкина. Пусть $\mu(r) \sim \ln^\rho r$ – логарифмический вес порядка $\rho \in \left(1;+\infty\right)$. В статье [4] показано, что класс $P[\mu\left(r\right);+\infty)$ всех целых функций f, для которых выполняется условие

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f\left(r\right)}{\mu\left(r\right)} < +\infty,$$

факторизуем по отношению эквивалентности $R\left(\mu\left(\left|z\right|\right)\right)$. Однако, прямое применение этого результата к расщеплению целых π-симметричных функций наталкивается на трудности, которые связаны с проверкой совпадения на классе $P_\pi[1;+\infty)$ всех целых π-симметричны функций экспоненциального типа естественного отношения эквивалентности $R\left(\left|z\right|\right)$ с отношением: $f \circ \pi \sim g \circ \pi$ тогда и только тогда, когда $f \sim g$ по отношению $R\left(\mu\left(\left|z\right|\right)\right)$.

В настоящем докладе автор анонсирует следующий результат: при наложении на целую функцию π некоторого ограничения класс $P_\pi[1;+\infty)$ факторизуем по отношению $R\left(\left|z\right|\right)$. Этому ограничению подчинена, например, всякая целая функция вполне регулярного роста при уточненном порядке $\rho_\pi\left(r\right) \approx \rho_\pi \in \left(0;1\right)$ с постоянным положительным индикатором. Этот результат можно трансформировать в результаты по спектральному синтезу по схеме из [5], но это требует отдельного разговора.

Литература

1. Шишкин А. Б. Проективное и инъективное описания в комплексной области. Двойственность // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14, № 1. – С. 47-64.

2. Волковая Т. А., Шишкин А. Б. Локальное описание целых функций // Исследования по математическому анализу. Итоги науки. Юг России. Мат. форум. Т. 8, ч. 1. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2014. – С. 218-230.
3. Волковая Т. А., Шишкин А. Б. Локальное описание целых функций. Подмодули ранга 1 // Владикавк. матем. журн. – 2014. – Т. 16, № 2. – С. 14-28.
4. Письменный Р. Г., Шишкин А. Б. Расщепление целых функций конечного порядка на эквивалентные множители // Вест. Адыг. гос. ун-та. Сер. Естественно-математические и технические науки. – 2010. – № 2(61). – С. 23-28.
5. Волковая Т. А. Синтез в полиномиальном ядре двух аналитических функционалов // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14, № 3. – С. 251-262.

Сведения об авторах

Шишкин Андрей Борисович, доктор физико-математических наук, профессор, Кубанский государственный университет, филиал в г. Славянске-на-Кубани. E-mail:. shishkin-home@mail.ru

Shishkin Andrey B., doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor, Kuban State University, branch in Slavyansk-on-Kuban

СУММА И ПЕРЕСЕЧЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ИДЕАЛОВ

Шубарин М. А.
Южный Федеральный Университет, Ростов-на-Дону, Россия.

Аннотация
В статье изучаются две операции (сумма и пересечение), определенные на категории пар пространственных идеалов. Изучаются их свойства. Полученные результаты применяются для изучения свойств инвариантных классов *(DN)*, $(\overline{\Omega})$, (Ω) и $(\overline{DN})$.

SUM AND INTERSECTION SOME IDEAL FRECHET SPACES

Shubarin M. A.
Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia.

1. В статье изучаются интерполяционные свойства пространств Фреше (т.е. полных метризуемых локально выпуклых пространств), принадлежащих пространственным идеалам специального вида.

Определение 1 ([1], определения 1.1.1 и 29.2.1, [2]) Множество I (состоящее из пространств Фреше) называют пространственным идеалом, если выполняются следующие условия:

1. I содержит все конечномерные пространства Фреше;

2. если $X,Y \in I$, то $X \times Y \in I$;

3. если $X \in I$ и Y изоморфно дополняемому подпространству в X, то $Y \in I$.

В качестве модельных примеров пространственных идеалов в статье будут рассматриваться классы пространств *(DN)*, $(\overline{\Omega})$, (Ω) и $(\underline{DN})$.

Пусть X – пространство Фрешйййййе, топология в котором задаётся счётным набором норм $(\|\cdot\|_p)$ и $(\|\cdot\|_p^{'})$ – набор сопряжённых норм, где $\|x'\|_p^{'} := \sup\left\{ |x'(x)\} : x \in X, \|x\|_p \le 1 \right\}$ для произвольного линейного непрерывного функционала $x' \in X'$ (при этом не исключается случай $\|x'\|_p^{'} = +\infty$).

Определение 2. Говорят, что это пространство имеет тип *(DN)* или $(\underline{DN})$, если выполняется соответственно условие (1) или (2):

$$\exists p_0 \forall p \exists p_1 \exists C > 0 \forall x \in X \ \|x\|_p \le C \|x\|_{p_0}^{1/2} \|x\|_{p_1}^{1/2} \tag{1}$$

$$\exists p_0 \forall p \exists p_1 \exists \tau \in (0,1) \exists C > 0 \forall x \in X \ \|x\|_p \le C \|x\|_{p_0}^{1-\tau} \|x\|_{p_1}^{\tau} \tag{2}$$

Определение 3. Говорят, что это пространство имеет тип $(\overline{\Omega})$ или (Ω), если выполняется соответственно условие (3) или (4):

$$\forall p_0 \exists p \forall p_1 \exists C > 0 \forall x' \in X' \ \|x'\|_p^{'} \le C \left(\|x'\|_{p_0}^{'} \right)^{1/2} \left(\|x'\|_{p_1}^{'} \right)^{1/2}, \tag{3}$$

$$\forall p_0 \exists p \forall p_1 \ \exists \tau \in (0,1) \ \exists C > 0 \ \forall x' \in X' \ \ \|x'\|_p^{'} \le C \left(\|x'\|_{p_0}^{'} \right)^{\tau} \left(\|x'\|_{p_1}^{'} \right)^{1-\tau} \tag{4}$$

Классы пространств Фреше *(DN)*, $(\overline{\Omega})$, (Ω) и $(\overline{DN})$ были введены в работах Фогта, М.-Й. Вагнера: *(DN)* – Д. Фогт [3]; $(\overline{\Omega})$ – М.-Й. Вагнер [4]; (Ω) – [5], определение 1.1, [6], определение 1.5; $(\underline{DN})$ – Д. Фогт [7]. Обзор свойств и приложений перечисленных выше классов пространств Фреше содержится в [8]. Непосредственно проверяется, что перечисленные множества являются пространственными идеалами.

2. Говорят, что пространства Фреше X_0, X_1 образуют интерполяционную пару пространств Фреше (по другой терминологии – пару пространств Фреше) и обозначаемую через $\overline{X} = [X_0, X_1]$, если эти пространства непрерывно вкладываются в одно и то же отделимое локально выпуклое пространство E.

Пару пространств Фреше $\overline{X} = [X_0, X_1]$ называют регулярной, если существует векторное подпространство в $X_0 \cap X_1$, всюду плотное X_0 и X_1.

Пусть $\overline{X} = [X_0, X_1]$ – интерполяционная пара пространств Фреше и $\left(\|\square\|_{j,p} \right)$ – не более чем счётный набор норм, задающий топологию X_j, $j = 0,1$. Пересечение пространств $X_0 \cap X_1$ будет пространством Фреше, если наделить топологией, определяемой набором норм $\|\square\|_p^{\cap}$, $\|x\|_p^{\cap} = \max_{j=0,1}\|x\|_{j,p}$ для произвольного $x \in X_0 \cap X_1$.

Сумма пространств $X_0 + X_1$ состоит из всех $x \in E$ для которых существует разложение $x = x_0 + x_1$ в котором $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$. Топология пространства Фреше в сумме определяется набором норм $\left(\|\square\|_p^{\Sigma}\right)$, $\|\square\|_p^{\Sigma} = \inf\left\{ \|x_0\|_0 + \|x_1\|_1 : x = x_0 + x_1, x_j \in X_j \right\}$.

3. Пусть I_0, I_1 – пространственные идеалы.

Определение 4 Пересечение $I_0 \cap I_1$ состоит из всех пространств Фреше X, для которых существует регулярная пара пространств Фреше $[X_0, X_1]$ такая, что $X = X_0 \cap X_1$.

Определение 5 Сумма $I_0 + I_1$ состоит из всех пространств Фреше X, для которых существует регулярная пара пространств Фреше $[X_0, X_1]$ такая, что $X = X_0 + X_1$.

При сделанных предположениях, множества $I_0 \cap I_1$, $I_0 + I_1$ являются пространственными идеалами.

4. Основное утверждение статьи содержится в следующих частично заполненных таблицах:

Таблица 1. Пересечение идеалов

$I_0 \cap I_1$	(DN)	$(\overline{\Omega})$	$(\underline{DN})$	(Ω)
(DN)	$=(DN)$		(DN)	
$(\overline{\Omega})$		$(\overline{\Omega})$		
$(\underline{DN})$	(DN)		$=(\underline{DN})$	
(Ω)				(Ω)

Таблица 2. Сумма идеалов

$I_0 + I_1$	(DN)	$(\overline{\Omega})$	$(\underline{DN})$	(Ω)
(DN)	$\supset (DN)$			
$(\overline{\Omega})$		$=(\overline{\Omega})$		$(\overline{\Omega})$
$(\underline{DN})$			$\supset (\underline{DN})$	
(Ω)		$(\overline{\Omega})$		$=(\Omega)$

5. Покажем, что $(\overline{\Omega}) \cap (\overline{\Omega}) \not\subset (\overline{\Omega})$.

Пусть D – область в комплексной плоскости C. Через $A(D)$ обозначим множество всех функций, аналитических в области D. Топология пространства Фреше определяется в этом пространстве как топология равномерной сходимости на компактных подмножествах в D.

Пусть даны последовательности (x_n), (r_n) такие, что

1. $x_n \downarrow 0$ при $n \uparrow +\infty$,
2. $r_n \downarrow 0$ при $n \uparrow +\infty$,
3. $r_{n+1} + r_n < x_n - x_{n+1}$ для любого n.

Пусть $\overline{B}(z,r) := \{\ \xi : |\ \xi - z\ | \le r\}$. При сделанных предположениях последовательность замкнутых кругов $\left(\overline{B}(x_n, r_n)\right)$ попарно не пересекаются.

Обозначим через A_1 множество функций, аналитических в единичном круге. Непосредственно проверяется, что $A_1 \in (\overline{\Omega})$.

Положим $K_0 := \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \overline{B}(x_n, r_n)$, $K_+ := {}_{t \ge 0}(it + K_0)$, $K_+ := {}_{t \le 0}(it + K_0)$, $D_0 := C \setminus K_0$, $D_\pm := C \setminus K_\pm$.

Теорема 1 При сделанных предположениях справедливы следующие утверждения:

1. $A(D_\pm) \in (\overline{\Omega})$,
2. если $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\ln(1/r_n)} < +\infty$, то $A(D_0) \notin (\overline{\Omega})$.

Первая часть утверждения следует из того, что области $D_\pm$ односвязные и, следовательно $A(D_\pm) \cong A_1 \in (\overline{\Omega})$. Очевидно, что $A(D_+) \cap A(D_-) = A(D_0)$. Поэтому вторая часть следует из полученных В.П. Захарютой [9] условий изоморфности пространств вида $A(D)$ и A_1.

Литература

1. Пич А. Операторные идеалы.– М.: Мир, 1982.– с. 536.
2. Junek H. Locally Convex Spaces and Operator Ideals.– Lpz.:Teubner–Texte zur Math, Bnd. 56, 1983.–p.~300.
3. Vogt D. Charakterisierung der Unterräume von s // Math. Z., 1977, v. 155.– p. 109–117;
4. Wagner M.-J. Quotientenräume von stabilen Potenzreihenrüme endlichen Type // Manuscripta Math., 1980, v. 31.– p. 97–109.
5. Vogt D., Wagner M.J. Charakterisierung der Quotientenräume von s und eine Vermutung von Martineau // Studia Math., 1980, 67, 225–240;
6. Vogt D., Wagner M.J. Charakterisierung der Unterraume und Quotientenraume der nuclearen stabilen Potenzreihenraumen von unendlichem Typ // Studia Math. 1981, v. 70.– P.63-80;
7. Charekteriesierung der Unterräme eines nuclearen Potenzreihenraumes von endlichem Typ // Studia Math., 1982, v. 71.– 251–270;
8. Meise R., Vogt D. Introduction in Functional Analysis . — Meise R., Vogt D. Introduction in Functional Analysis // N.-Y.: Calderon Press, Oxford univ. Press, 1997.– 447 p.
9. Захарюта В. П. Изоморфизмы пространств аналитических функций // Докл. АН СССР, 1980, т. 255, № 1.– с. 11--14.

Сведения об авторах

Шубарин Михаил Александрович, канд. физ.-мат.наук, доцент, факультет Математики, Механики и Компьютерных наук, ЮФУ, Ростов-на-Дону, Россия, mas102@mail.ru, Функциональный Анализ: структурная теория пространств Фреше, операторные и пространственные идеалы, интерполяция линейных операторов, ТФКП.

СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Шумафов М.М.

Факультет математики и компьютерных наук, Адыгейский государственный университет, Майкоп, Республика Адыгея, РФ

Abstract

A problem of stabilization of unstable steady states (unstable equilibria) of dynamical systems by feedback control is considered. A short survey on the feedback control stabilization of unstable steady states of controllable systems is presented. Different types of feedback control are used: stationary and nonstationary output (state) feedbacks, classical and Pyragas' time-delayed output (state) ones. More attention is paid to the delayed feedback control stabilization. Effective necessary and/or sufficient conditions for stabilization of unstable steady states of two-and three-dimensional dynamical systems in terms of the system parameters are obtained. These conditions show that an introduction in the system considered nonstationary feedback or time-delayed feedback control, in general, extends the possibilities of the ordinary stationary stabilization. The results can be used for stabilization of unstable steady states embedded in strange attractors of nonlinear dynamical systems with chaotic behavior.

STABILIZATION OF UNSTABLE STEADY STATES OF DYNAMICAL SYSTEMS

Shumafov M.M.

Department of Mathematics and Computer Science, Adyghe State University, Maykop, Russia

Keywords: asymptotic stability, stabilization, pole assignment, unstable steady state, controllable system, output feedback, delayed feedback control.

One of the most fundamental topics of control theory is a stabilization problem of dynamical systems. Within last 140 years the methods of stabilization have been constructed, developed and improved: from the creation of Watt's regulator to the analysis and synthesis of rocket stabilization systems and the controlling chaos.

At present the various methods of stabilization have become classical ones in control theory, and have entered into many books and surveys ([21, 30]; see also bibliography in [10]).But in the last thirty years a rapid growth of publications devoted to the methods of stabilization of control systems occurred. The increasing interest to stabilization problems is motivated both the needs of the practice of control, and the formulation open problem by many famous scholars ([2,3,27,32,33,35]).

One of the problems stimulated a number of publications was the Brockett problem [3] on stabilizability of an unstable linear stationary system by means of a nonstationary output feedback control. In mathematical terms the Brockett's stabilization problem is stated as follows.

Consider a linear time-invariant controllable dynamical system described by the differentional equation

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ y = Cx\ \ (\dot{x} \equiv dx/dt)\,, \qquad (1)$$

where $x \epsilon \mathbb{R}^n$ is a state vector, $u \epsilon \mathbb{R}^m$ is an input (control) vector, $y \epsilon \mathbb{R}^l$ is an output vector, and A, B, C are real constant $(n \times n)-, (n \times m)-, (\mathrm{l} \times \mathrm{n})-$ matrices , respectively.

Brockett problem. *Given a linear controllable system (1). Find a time-varying (nonstationary) output feedback*

$$u = K(t)y \qquad (2)$$

with real $(m \times l)$*- matrix* $K(t)$ *such that the closed-loop system*

$$\dot{x} = (A + BK(t)C)x \qquad (3)$$

is asymptotically stable.

Recall that if in the feedback (2) the matrix $K(t)$ is constant, $K(t) \equiv K$, then the Brockett problem turns into the classical stationary feedback stabilization one. Therefore, the Brockett problem can be reformulated in the following way.

How much does the introduction of *nonstationary* output feedback (2) in the system (1) enlarges the possibilities of stabilization by stationary output feedback: $\mathrm{u} = \mathrm{Ky}$?

As is well-known the solution of the classical stabilization problem by stationary full state feedback $u = Kx$ follows from Zubov's and Wonham's theorem on pole assignment [33, 35]:

Let $M = \{\ \mu_1, \dots, \mu_n\}$ *be an arbitrary self-conjugate set of complex numbers* $\mu_j (j = 1, \dots, n)$*. Then for existing of* $(m \times n) - matrix\ K$ *such that the matrix* $A + BK$ *has the set M as its set of eigenvalues it is necessary and sufficient that the pair (A,B) would be completely controllable,* $i.e.$

$$\mathrm{rank}(\mathrm{B}, \mathrm{AB}, \dots, \mathrm{A}^{\mathrm{n}-1}\mathrm{B}) = \mathrm{n}.$$

Note that the proof of Zubov's -Wonham's theorem in multi-input $(m > 1)$ case is rather tedious.Therefore after publication of works [33, 35] there were offered alternative proofs to simplify them (see, bibliography in [10]). A simple and new direct proof of Zubov-Wonham theorem is proposed in works [15, 16].

First, the solution of the Brockett problem in a number of cases, important for practice, was given in G.A. Leonov's [12, 13,14] and L.Moreau & D.Aeyels [17] works. In particular in these works necessary and sufficient conditions for nonstationary low-and high-frequency stabilizations of two-and three-dimensional dynamical systems are obtained. It was shown that nonstationary feedback control strategy can achieve results that cannot be obtained by stationary feedback, and this approach essentially extends the domains of stabilization by stationary feedback.

The problem of controlling chaos and its stabilization in deterministic chaotic dynamical systems was other one which caused the enormous number of publications. Starting with the pioneering works of Ott, Grebogi, Yorke [20] and K.Pyragas [23] this problem is intensively studied by many researchers for last more than twenty years (see, for instance, surveys [22,25,31]). In these works stabilization of a chaotic system is achieved by stabilization of unstable periodic orbits (UPOs) embedded in a strange attractor of the system. For this purpose in the work [23] K.Pyragas proposed a simple and convenient powerful control scheme, called delayed feedback control (DFC), which is constructed as a feedback proportional to the difference between the current output (or state) of a given system and the delayed output (or state) : $u(t) = k[y(t) - y(t-\tau)]$, $k \neq 0,\ \tau > 0.$ Pyragas' DFC algorithm was successfully applied to the solution of many real control problems in physical, chemical and biological systems ([22,25]).

It turned out that the DFC scheme and its various extensions, which were originally invented for stabilization of UPOs, are also suitable to stabilize unstable steady states (USSs) of dynamical systems ([1,4,6,7,11,24,26,28,29,34]).

Steady states or equilibria play an important role in studying of a large variety of electronic, chemical, biological, and other nonlinear systems ([22,25]). According to Pyragas [24, 25] the problem of stabilizing steady states by DFC (and other its extensions) "*is, maybe, more important for various applications than the problem of stabilizing UPOs* ".

Note that the theory of the DFC is rather difficult since the equations describing the closed-loop system, including DFC, are delayed differential ones. Even linear stability analysis of such systems is quite complicated because of existing of infinite number of Floquet exponents (in the case of the problem of UPOs stabilization) or infinite number of roots of transcendental characteristic equation associated with delayed linear differential equations being the linearized ones of the nonlinear closed-loop system equations (in the case of

USSs stabilization). It makes difficult to a considerable extent obtaining effective stabilization analytic criteria. Nevertheless some general analytical results were obtained using numerical simulations ([1,4,5,6,7,8,9,18,19,25,34]).

In the work [7] necessary and/or sufficient conditions of the stabilization of a USS of the linearized system of a two-dimensional nonlinear dynamical system are obtained by DFC, using an eigenvalue optimization approach with in combination with a continuation argument and numerical simulation. Such approach allowed to "guess" the analytical expressions for the boundary of the domains of stabilization, that then one are verified by means of numerical computations.

Other approach of solving the USS stabilization problem based on the method of D-decomposition of the space of system parameters is proposed in [11,28,29].The advantage of this approach consist in that, the used method is purely analytical and yet much less mathematical tools are exploited, and therefore the corresponding stabilization algorithms turn out to be more simple. Necessary and/or sufficient analytical conditions of the stabilization of the USSs of two-and three-dimensional dynamical systems are obtained it terms of the system parameters. These conditions show that the introduction of a delay in the feedback of the linearized systems of nonlinear ones on the whole enlarges the opportunities of stationary stabilization by feedback without delay.

The results obtained can be used in the linear stability analysis of nonlinear control systems in the neighborhood of an equilibrium point, and for stabilization of unstable equilibria of nonlinear dynamical systems with chaotic behavior.

REFERENCES

1. *Ahlborn A. and Parlitz U.* Stabilizing Unstable Steady States Using Multiple Delay Feedback Control // Phys. Rev. Lett. Vol. 93, 2004. 264101.
2. *Bernstein D.S.* Some Open Problems in Matrix Theory Arising in Linear Systems and Control // Linear Algebra and its Applications. Vol.162-164, 1992. P.409-432.
3. *Brockett R.* A stabilization problem. In book: Blondel V., Sontag E., Vidyasagar M., Willems J. Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory. Springer, 1999. 288p.
4. *Dahms T., Hövel P., Schöll E.* Stabilization of fixed points by extended time-delayed feedback control // Phys. Rev. E. Vol. 76, 2007. 056213.
5. *Gjurchinovski A. and Urumov V.* Stabilization of unstable states by variable delay feedback control // EPL. Vol. 84, 2008. 40013.
6. *Hövel P. and Schöll E.* Control of unstable steady states by time-delayed feedback methods // Phys. Rev. E. Vol. 72, 2005. 046203.
7. *Huijberts H., Michiels W. and Hijmeijer.* Stabilizability via Time-Delayed Feedback: An Eigenvalue Optimization Approach // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. Vol. 8, № 1, 2009. P.1-20.
8. *Just W., Bernard T., Ostheimer M., Reibold E. & Benner H.* Mechanism of time-delayed feedback control // Phys. Rev. Lett. Vol. 78, 1997. P.203-206.

9. *Kokame H., Hirata K., Konishi K., et. al.* Difference feedback can stabilize uncertain steady states// IEEE Trans. Autom. Contr. Vol. 46 (12), 2001. P.1908-1913.
10. *Leonov G.A. and Shumafov M.M.* Stabilization of Linear Systems. Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, 2012.408p.
11. *Leonov G.A, Shumafov M.M..* Delayed feedback stabilization of unstable equilibria//Preprints of the 19th World Congress. The Intern. Federation of Automatic Control, Cape Town, South Africa. August 24-29, 2014.
12. *Leonov G.A.* Brockett's problem in stability theory of linear differential equations// Algebra and analysis. Vol.13. No 4, 2001. P.134-155. (In Russian.)
13. *Leonov G.A*. Brockett's problem of stabilization // Avtomatika i telemekhanika. No 5, 2001. P.190-193. (In Russian.)
14. *Leonov G.A.* The Brockett problem in the theory of nonstationary stabilization of linear differential equations. Weierstrass-Institut. Preprint. N 623. Berlin, 2000. 15p.
15. *Leonov G.A., Shumafov M.M.* Elementary proof of the theorem on stabilizability of linear controllable systems //Vestnik Sanct-Peterburgskogo Universiteta. Ser. Matematika, mekhanika, astronomiya. Tom 3 (No. 17), 2003. S.56-68. (In Russian.)
16. *Leonov G.A., Shumafov M.M..* The algorithm step-by-step stabilization of the linear object of control//Izvestiya vuzov. Severo- Kavkaz. region. Estestvenye nauki. No. 2, 2005. S.14-19. (In Russian.)
17. *Moreau L. and Aeyels D.* Periodic output feedback stabilization of single-input single-output continuous-time systems with odd relative degree //Systems & Control Letters. Vol.51, N5, 2004. P.395-406.
18. *Nakajima H. & Ueda Y.* Limitation of generalized delayed feedback control // Physica D. Vol. 111, 1998. P.143-150.
19. *Nakajima H.* On analytical properties of delayed feedback control of chaos // Phys. Lett. A. Vol. 232, 1997. P.207-210.
20. *Ott E., Grebogi C. and Yorke J. A*. Controlling Chaos // Phys. Rev. Lett. A. Vol. 64, N 11, 1990. P.1196-1199.
21. *Polyak B.T., Shcherbakov P.S.* Hard problems of linear control theory. Some approaches to solving// Avtomatika i Telemekhanika. N 5, 2005. S.7-46. (In Russian.)
22. *Pyragas K.* A Twenty-Year Review of Time-Delay Feedback Control and Recent Developments // Intern. Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, Spain, 2012. P.683-686.
23. *Pyragas K.* Continuous control of chaos by self-controlling feedback // Phys. Lett. A. Vol. 170, 1992. P.421-428.
24. *Pyragas K.* Control of chaos via extended delay feedback // Phys. Lett. A. Vol. 206, 1995. P.323-330.
25. *Pyragas K.* Delayed feedback control of chaos // Phil. Trans. Royal Soc. A. Vol. 369, 2006. P.2309-2334.
26. *Pyragas K., Pyragas V., Kiss I. Z. & Hudson J. L.* Stabilizing and tracking unknown steady states of dynamical systems // Phys. Rev. Lett. Vol. 89, 2002. 244103.
27. *Rosenthal J., Willems J.C.* Open problems in the area of pole placement. In book: Blondel V., Sontag E., Vidyasagar M., Willems J. Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory. Springer. 1999. 288p.

28. *Shumafov M. M.* On the stabilization of two-dimensional linear controllable systems by delayed feedback//Vestnik Adygeiskogo Gosudarstvenogo Universiteta. Ser. Estestvenye i Technicheskye nauki. № 2(61), 2010. S.40-52. (In Russian.)
29. *Shumafov M.M.* Stabilization of the second-order time-invariant control systems by a delay feedback // Russian Mathematics (Iz. VUZ). № 12, 2010. P.87-90.
30. *Syrmos V.L., Abdallah C.T., Dorato P., Grigoriadis K.* Static Output Feedback-- A Survey //Automatica. Vol.33. N2, 1997. P.125-137.
31. *Tian Yu., Zhu J., Chen Gu.* A survey on delayed feedback control of chaos // Journ. Control Theory and Application, N 4, 2005. P. 311-319.
32. *Wonham W.M.* Linear Multivariable Control: a Geometric Approach. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1979.
33. *Wonham W.M.* On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear System// IEEE Trans. Aut. Contr. Vol. AC-12. N6, 1967. P.660-665.
34. *Yanchuk S., Wolfrum M., Hövel P. and Schöll E.* Control of unstable steady states by long delay feedback // Phys. Rev. E. Vol. 74, 2006. 026201.
35. *Zubov V.I.* Theory of optimal control. L.: Sudostroenie, 1966. 352 p.(In Russian.)

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Шхагапсоев А.М.

Федеральное государственное научное учреждение «Институт прикладной математики и автоматизации», Нальчик, Россия.

Аннотация

В работе исследована нелокальная задача для уравнения смешанного типа в прямоугольной области. В гиперболической части выписывается решение в явном виде, а в параболической части доказана единственность методом интегралов энергии и найдено решение с помощью преобразования Лапласа.

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE EQATION OF HYPERBOLIC-PARABOLIC TYPE FOURTH ORDER

Skhagapsoev A.M.

Institute of Applied Mathematics and Automation, Nalchik, Russia

Рассматривается уравнение

$$Lu = \begin{cases} u_y + \beta u_{xxx} + \gamma u_x, & y > 0, \\ u_{xxxx} - 2au_{xxyy} + a^2 u_{yyyy}, & y < 0 \end{cases} \tag{1}$$

в конечной области $D = D_1 \cup D_2 \cup A_0B_0$; $D_1 = \{(x,y): 0 < x < r, 0 < y < h\}$; $D_2 = \{(x,y): y < 0, -x < y < x - r\}$; $A_0B_0 = \{(x,y): 0 < x < r, y = 0\}$; $-\beta, \gamma, a = const > 0.$

Регулярным в области D решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(x,y)$ из класса $C(\overline{D}) \cap C^4(D_2)$, такую, что $u_y, u_{xxx} \in C(D_1)$ и при подстановке, которой уравнение (1) обращается в тождество.

Задача. *Найти регулярное в области D решение* $u = u(x,y)$ *уравнения (1), удовлетворяющее следующим краевым условиям*

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \qquad u_x(0,y) = \varphi_2(y), \qquad 0 \le y \le h \tag{2}$$

$$u_x(r,y) + u_x(0,y) = \varphi_3(y), \qquad 0 \le y \le h \tag{3}$$

$$u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2\sqrt{a}}\right) = \psi_1(x), \quad 0 \le x \le r, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2\sqrt{a}}\right) = \psi_2(x), \frac{\partial u}{\partial n}\left(\frac{x+r}{2}, \frac{x-r}{2\sqrt{a}}\right) = \psi_3(x), \qquad 0 \le x \le r, \tag{5}$$

где n – внутренняя нормаль; φ_1, φ_2, φ_3, ψ_1, ψ_2, ψ_3 *– заданные функции и выполняются условия согласования* $\varphi_1(0) = \psi_1(0)$, $\psi_2'(r/2) = \psi_3'(r/2)$.

Задача (2), (5), $u_{xx}(r,y) = \varphi_3(y)$, и $u\left(\frac{x+r}{2}, \frac{x-r}{2\sqrt{a}}\right) = \psi_3(x)$ для уравнения (1) исследована в работе [1].

Доказана следующая

Теорема. *Если* $\varphi_1(y) \in C^1[0,h], \varphi_2(y), \varphi_3(y) \in C^2[0,h),$, $\psi_1(x) \in C^1[0,r]$, $\psi_2(x), \psi_3 \in C^2[0,r]$ то задача (2) – (5) для уравнения (1) имеет и при том единственное решение.

Литература

1. Шхагапсоев А. М. Краевая задача для одного уравнения гиперболо-параболического типа четвертого порядка // Международная конференция дифференциальные уравнения и математическое моделирование. Улан-Уде, 2015. № 3. С.338-339.

Сведения об авторах

Шхагапсоев Амур Муаедович, младший научный сотрудник отдела уравнении математической биологии института прикладной математики и автоматизации. Работаю над уравнениями смешанного типа высокого порядка.

ОБОБЩЕННАЯ ПРОБЛЕМА ДЕЛИТЕЛЕЙ

Эминян К.М.

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Финансовый университет при Правительстве РФ,Москва, Россия

Аннотация

Получена асимптотическая формула для суммы $\tau_k(n)$ по *n* со специальным двоичными разложениями.

GENERALIZED DIVISORS PROBLEM

Eminyan K.M.

Financial University under the Government of the Russian Federation, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Abstract

Asymptotic formula for the sum of $\tau_k(n)$ over n with special binary expansions is got.

Пусть

$$n = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 2 + \varepsilon_2 2^2 + \dots \tag{1}$$

двоичное разложение натурального числа n, $\varepsilon_j = 0;1,\quad j = 0,1,2,3,\dots$

Разобьем множество натуральных чисел на две непересекающихся класса. Если число 1 в двоичном разложении (1) четное, то n отнесем к классу $\mathbf{N}_0$. В противном случае – к классу $\mathbf{N}_1$.

В 1968 г. А.О. Гельфонд [1] доказал, что

$$\sum_{\substack{n\le x, n\in \mathbf{N}_0 \\ n\equiv a(\mathrm{mod}\, q)}} 1 = \frac{x}{2q} + O(x^{\lambda}),$$

где $\lambda = \dfrac{\ln 3}{\ln 4} \approx 0.792$.

В 1991 г. автор [2] получил следующий результат

$$\sum_{n\le x, n\in \mathbf{N}_0} \tau(n) = \frac{1}{2}(\ln x + 2\gamma - 1) + O(x^{\omega}\ln^2 x),$$

где $\tau(n)$- число делителей n, $\omega = \dfrac{1}{2}\left(1 + \log_2\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$ и γ - постоянная Эйлера.

Основной теоремой, обсуждаемой в настоящем докладе, является следующая:

Теорема. Пусть $k \ge 2$ - произвольное натуральное число. Тогда справедлива следующая асимптотическая формула

$$\sum_{n\le x, n\in \mathbf{N}_0} \tau_k(n) = \frac{1}{2}\sum_{n\le x}\tau_k(n) + O(x^{\theta+\varepsilon}), \qquad (2)$$

где $0 < \theta < 1$, $\varepsilon > 0$ - произвольно малое число.

Проблема вычисления асимптотической формулы для суммы $\sum_{n\le x}\tau_k(n)$ называется обобщенной проблемой делителей. Поскольку главный член этой формулы имеет вид $xP_{k-1}(\ln x)$, где $P_{k-1}(y)$ - многочлен степени $k-1$ от y, главный член формулы (2) имеет порядок роста, строго больший, чем остаточный.

Литература

1. Gelfond A.O. Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données. Acta Arith., 13 (1968), 259-265.
2. Эминян К.М. О проблеме делителей Дирихле в некоторых последовательностях натуральных чисел. Изв. АН СССР. Сер. матем., 55:3 (1991), 680-686.

Сведения об авторе

Эминян Карапет Мкртичевич, кандидат физико-математических наук, доцент. Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана. Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, Россия. e-mail: eminyan@mail.ru. Область научных интересов: аналитическая теория чисел.