



ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 530.182, 51-73

MSC 2010: 37M10

## Эффект увеличения чувствительности метода причинности по Грейнджеру с ростом измерительного шума

Т. М. Медведева, Ф. Б. Парамонов, И. В. Сысоев

Рассмотрено влияние внешнего измерительного шума на характеристики метода причинности по Грейнджеру на примере однонаправленно связанных эталонных нелинейных систем, находящихся в различных режимах. Рассмотрены связанные отображения как с одним типом оператора эволюции ведущей и ведомой систем, так и с различными типами, а также связанные потоковые системы. Показано нетривиальное поведение зависимости характеристик метода причинности по Грейнджеру от шума для всех рассмотренных систем при определенном выборе параметров и коэффициентов связи. Выявлены причины немонотонного поведения такой зависимости.

Ключевые слова: временные ряды, измерительный шум, анализ связанности, причинность по Грейнджеру

---

Получено 27 мая 2015 года

После доработки 24 октября 2015 года

---

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 14-02-00492, и Стипендии Президента РФ для поддержки молодых ученых СП-1510.2015.4.

---

Медведева Татьяна Михайловна

[golovatanya@rambler.ru](mailto:golovatanya@rambler.ru)

Парамонов Федор Борисович

[rheodor.paramonov@gmail.com](mailto:rheodor.paramonov@gmail.com)

Сысоев Илья Вячеславович

[ivssci@gmail.com](mailto:ivssci@gmail.com)

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

410012, Россия, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

## 1. Введение

Исследование связанности между сложными системами по записям их колебаний (временным рядам) является актуальной задачей в приложении ко многим областям знания: теории передачи информации, нейрофизиологии, кардиологии, климатологии и др. В настоящее время получили распространение подходы к определению связанности путем детектирования причинно-следственных связей между настоящим состоянием одного объекта и прошлыми состояниями другого (или нескольких других). К таким подходам можно отнести причинность по Грейнджеру [1], энтропию переноса [2] и частную направленную когерентность [3]. В ряде простейших случаев эти подходы сводятся один к другому [4].

Метод причинности по Грейнджеру основан на построении по наблюдаемым временным рядам эмпирических прогностических моделей, первоначально только линейных регрессионных. Впоследствии был предложен целый ряд нелинейных обобщений: с использованием полиномиальных [5, 6], радиальных [7] и ядерных [8] базисных функций. Основным преимуществом метода является то, что он способен выявить направленную произвольную функциональную связанность между объектами исследования, тогда как подходы, основанные на взаимной корреляционной функции, функции когерентности, анализе фазовой и обобщенной синхронизации выявляют только линейную связь и не могут определить ее направление, а теоретико-информационные непараметрические методы (функция взаимной информации, энтропия переноса) требуют, как правило, больших объемов данных.

Идея подхода заключается в том, что если система  $Y$  воздействует на систему  $X$ , то значения временного ряда  $\{y_n\}_{n=1}^N$  системы  $Y$  являются причиной изменений временного ряда  $\{x_n\}_{n=1}^N$  системы  $X$ . Следовательно, учет данных от системы  $Y$  должен помочь в предсказании будущих значений временного ряда  $\{x_n\}_{n=1}^N$ . На первом этапе строится собственная модель (1.1), предсказывающая следующее значение во временном ряде  $\{x_n\}_{n=1}^N$  по  $D_s$  предыдущим:

$$x_{n+\tau} = f(x_n, x_{n-l}, \dots, x_{n-(D_s-1)l}, \mathbf{c}^s) + \xi_n^s, \quad (1.1)$$

где  $f$  — аппроксимирующая функция,  $\tau$  — дальность прогноза,  $l$  — лаг модели,  $D_s$  — собственная размерность модели,  $\mathbf{c}^s$  — неизвестные коэффициенты, а  $\{\xi_n^s\}$  — остатки. Коэффициенты  $\mathbf{c}^s$  оцениваются методом наименьших квадратов, среднеквадратичная ошибка прогноза  $\varepsilon_s^2$  равна дисперсии остатков  $\{\xi_n^s\}$ .

Следующим шагом строится совместная модель (1.2), использующая для предсказания  $\{x_n\}_{n=1}^N$  также  $D_a$  значений из ряда  $\{y_n\}_{n=1}^N$ :

$$x_{n+\tau} = g(x_n, x_{n-l}, \dots, x_{n-(D_s-1)l}, y_n, y_{n-l}, \dots, y_{n-(D_a-1)l}, \mathbf{c}^j) + \xi_n^j, \quad (1.2)$$

где  $D_a$  — размерность добавки,  $\mathbf{c}^j$  — коэффициенты совместной модели,  $f$  и  $g$  — полиномы общего вида степени  $P$ . Ошибка прогноза модели (1.2)  $\varepsilon_j^2$  равна дисперсии остатков  $\{\xi_n^j\}$ .

Случай  $\varepsilon_j^2 < \varepsilon_s^2$  показывает, что данные из ряда системы  $Y$  помогли предсказать поведение системы  $X$ . В таком случае говорят, что система  $Y$  действует на систему  $X$  по Грейнджеру. Как количественная мера воздействия используется величина  $PI$  — улучшение прогноза, определяемое по формуле (1.3):

$$PI = 1 - \frac{\varepsilon_j^2}{\varepsilon_s^2}. \quad (1.3)$$



Одна из проблем метода причинности по Грейнджеру состоит в том, что зависимость его работоспособности от шумов мало исследована, а шумы всегда имеют место при измерениях. Существуют различные механизмы фильтрации, очистки систем от измерительных шумов, однако у них есть свои ограничения и полностью очистить сигнал от шума, как правило, невозможно. Вследствие этого с практической точки зрения интересно исследовать зависимость характеристик метода от дисперсии внешнего измерительного шума  $\sigma^2$ .

В работе [9] теоретически было показано, что с увеличением шума в системе величина улучшения прогноза будет падать и эта зависимость будет монотонна, но такие исследования проводились лишь для линейных систем. В работе [10] было показано, что применение калмановской фильтрации дает возможность для систем, уравнения которых известны, избавиться от влияния измерительного шума на результат оценки  $PI$ . Влияние шума на оценки связанности методом причинности по Грейнджеру для двунаправленно связанных линейных авторегрессионных систем произвольного порядка рассмотрено в [11]. Хотя полученные в этих работах результаты существенны, возможность их использования на практике ограничена, поскольку часто уравнения модели неизвестны, а использование нелинейного метода предпочтительнее [5, 12]. Весьма важным является вопрос о том, может ли зависимость  $PI(\sigma)$  быть немонотонна, то есть иметь участки роста  $PI$  с увеличением уровня шума? На практике это означает, что метод будет показывать увеличение силы связи при ухудшении измерительной техники или росте влияния помех, проще говоря, плохая аппаратура будет выявлять связи, которые на хорошей не обнаруживаются.

Целью данной работы является исследование поведения зависимости  $PI(\sigma)$  на эталонных нелинейных системах и, в первую очередь, выявление возможных причин, ведущих к немонотонному ее поведению. Использование эталонных систем дает возможность точно знать характеристики объектов исследования: направление и силу связи, уровень шума и собственно динамику систем, что невозможно при анализе реальных систем. Поскольку провести исследования для всего многообразия нелинейных аппроксимирующих функций не представляется возможным, мы ограничились нелинейным обобщением с использованием полиномов общего вида как самым популярным [5]. В данной работе рассмотрение ограничивается случаем однонаправленной связи.

## 2. Методика исследования и численный эксперимент

Суть эксперимента заключается в том, что сначала для выбранных двух однонаправленно связанных эталонных динамических систем генерируются временные ряды. Далее к рядам обеих систем добавляются реализации независимого, с нормальным распределением, нулевым средним и среднеквадратичным отклонением шума. На следующем шаге решается обратная задача: для ведомой системы восстанавливаются собственная (1.1) и совместная (1.2) модели и рассчитывается улучшение прогноза по формуле (1.3). Такой численный эксперимент повторяется для нескольких последовательных значений среднеквадратичного отклонения  $\sigma$ . В результате получается зависимость улучшения прогноза от уровня шума  $PI(\sigma)$  (см. рис. 1а).

Поскольку эта зависимость оказывается сильно изрезана вследствие индивидуальных особенностей шумовых реализаций, она усредняется, для чего при каждом  $\sigma$  генерируются 100 различных пар реализаций шума, добавляемые к одним и тем же реализациям модельных систем, в результате чего получаются 100 пар зашумленных реализаций с неза-

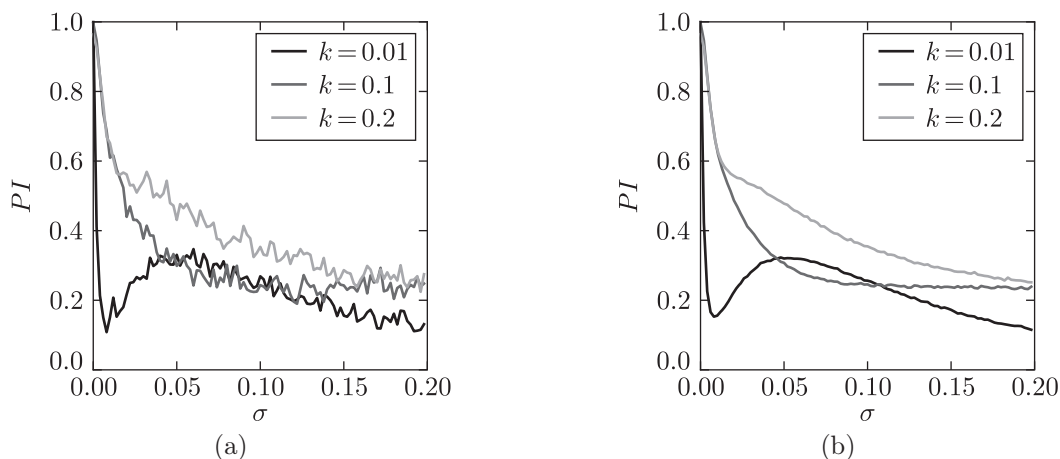


Рис. 1. Типичные зависимости  $PI(\sigma)$  без усреднения (а) и с усреднением по 100 реализациям шума (б) при различных коэффициентах связи  $k$  между подсистемами.

висимыми шумами. По каждой паре из 100 рассчитывается зависимость  $PI(\sigma)$ , полученные зависимости усредняются по ансамблю (см. рис. 1б).

## 2.1. Простейший пример — связанные логистические отображения

Логистическое отображение — одна из простейших и наиболее изученных моделей нелинейной динамики. Нами рассматривались связанные логистические отображения вида (2.1) при различных значениях параметров  $\lambda_x, \lambda_y$ :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda_x \cdot x_n \cdot (1 - x_n) + k \cdot y_n, \\ y_{n+1} &= \lambda_y \cdot y_n \cdot (1 - y_n). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ведущая система всегда находилась в хаотическом режиме, ведомая система — как в хаотическом, так и в периодических режимах, начиная с периода 1. Параметр связи  $k$  менялся в пределах от 0 до 0.2 с шагом 0.01 при каждом наборе параметров  $\lambda_x, \lambda_y$ , величина среднеквадратичного отклонения шума  $\sigma$  — в пределах от 0 до 1 с шагом 0.01. Таким образом, при каждом наборе параметров индивидуальных систем получались семейства кривых  $PI(\sigma)$  при различных коэффициентах связи  $k$ , для чего строились модели в виде (1.1), (1.2) с параметрами  $D_s = D_a = 1, P = 2, \tau = 1$ .

На рисунке 2 представлены: фазовые портреты ведущей (1 ряд) и ведомой (2–4 ряды) систем при различных уровнях измерительного шума (различные столбцы), а на рисунке 3а — семейство графиков зависимости уровня собственной  $\varepsilon_j^2$  и совместной  $\varepsilon_s^2$  ошибок аппроксимации и улучшения прогноза  $PI$  от уровня измерительного шума  $\sigma$ . Видно, что зависимости  $PI(\sigma)$  немонотонны и имеют локальный минимум и локальный максимум, положение которых зависит от силы связи. При этом зависимости  $\varepsilon_s^2(\sigma)$  и  $\varepsilon_j^2(\sigma)$  монотонны и не имеют никаких «полочек». Аналогичное поведение зависимостей  $PI(\sigma), \varepsilon_s^2(\sigma)$  и  $\varepsilon_j^2(\sigma)$  наблюдается и при других значениях параметров, в том числе в случае, когда автономная ведущая система находится в хаотическом режиме, за исключением режима периода 1 в ведомой системе, где все зависимости монотонны. При этом в ряде случаев немонотонность зависимости  $PI(\sigma)$  наблюдается при всех силах связи, в других — только при относительно слабой связи.

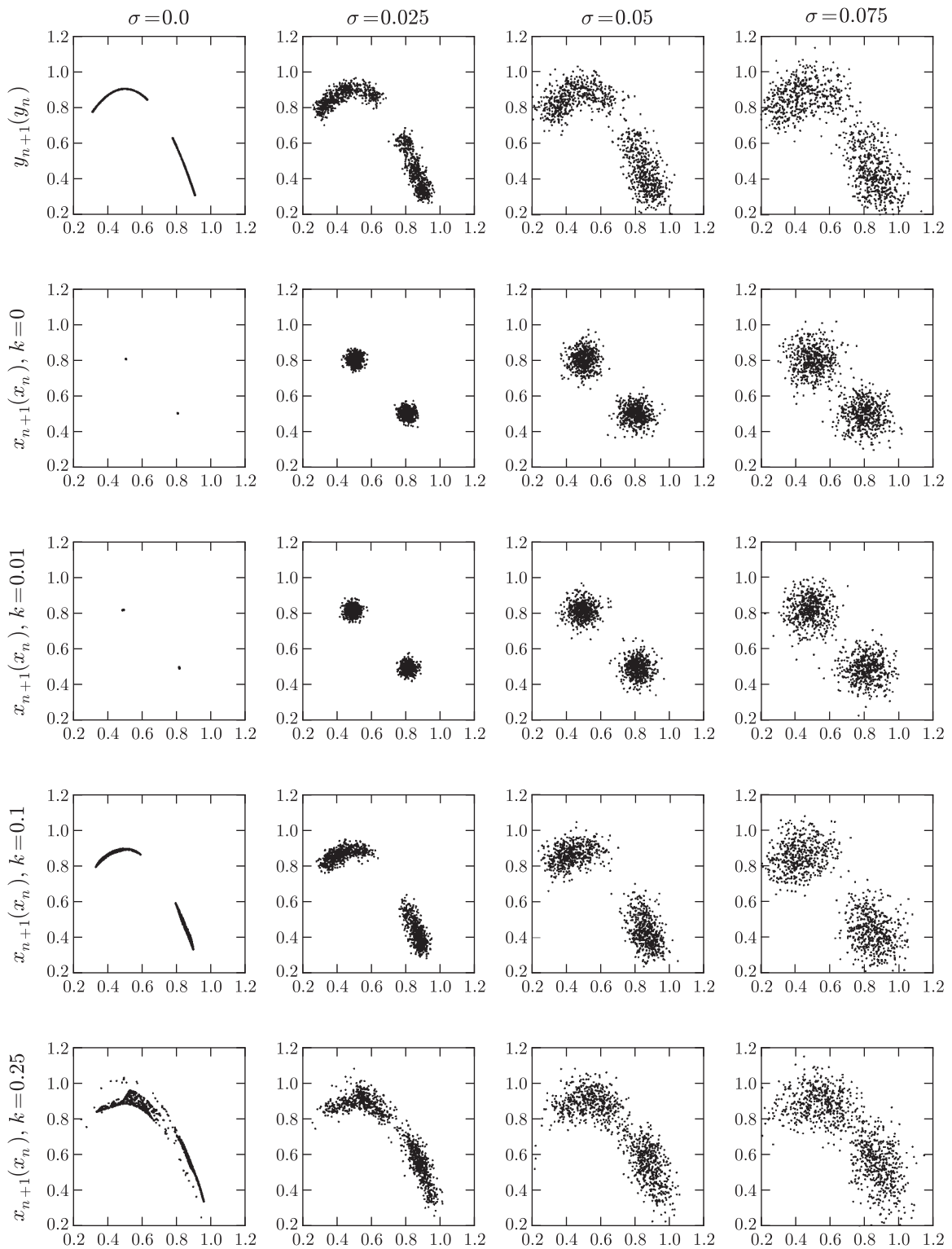


Рис. 2. Диаграммы Ламерея: ряды № 1 и № 2 — автономная динамика  $Y$  и  $X$ , ряды № 3–5 динамика ведомой системы при воздействии на нее ведущей с увеличением коэффициента связи между системами. С увеличением номера столбца для каждого ряда увеличивается уровень измерительного шума в системе. Параметры связанных логистических отображений:  $\lambda_x = 3.23$ ,  $\lambda_y = 3.62$ .

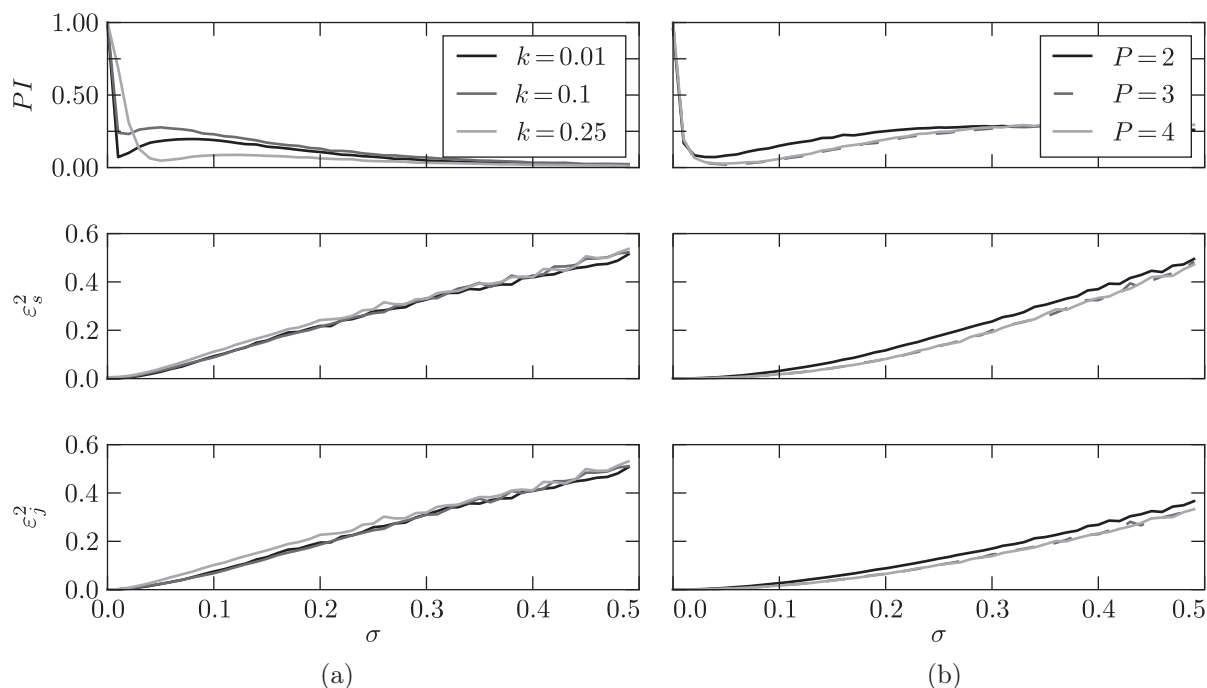


Рис. 3. Зависимости собственной  $\varepsilon_j^2$  и совместной  $\varepsilon_s^2$  ошибок аппроксимации и улучшения прогноза  $PI$  от уровня измерительного шума  $\sigma$ : (а) для связанных логистических отображений при  $\lambda_x = 3.23$ ,  $\lambda_y = 3.62$ , (б) для связанных отображений окружности при  $\Delta_x = 0.25$ ,  $m_x = 0.25$ ,  $\Delta_y = 0.17$ ,  $m_y = 3.47$  (2.1).

## 2.2. Интерпретация результатов

В связи с полученными результатами возникают следующие вопросы:

1. Почему (за счет каких факторов) зависимость  $PI(\sigma)$  вообще может быть немонотонна?
2. Почему немонотонная зависимость не наблюдается для случая, когда ведомая система находится в режиме периода 1?
3. Почему немонотонность зависимости  $PI(\sigma)$ , как правило, сильнее выражена для меньших уровней связи, чем для больших?

Чтобы ответить на эти вопросы, на наш взгляд, следует обратиться к характеристикам аттракторов ведущей и ведомой систем в автономном режиме.

Аттрактор ведущей системы представляет собою во всех рассмотренных случаях многоленточный хаотический аттрактор, образовавшийся вскоре после критической бифуркации Фейгенбаума. Аттрактор ведомой системы представлял собою как периодический с периодом 1, 2, 4 и др., так и хаотический аттрактор, тоже многоленточный. Далее следует принять во внимание, что переключения на аттракторе такого типа между лентами в случае хаотического аттрактора и их прообразами в случае периодического происходят строго последовательно. Например, для двух лент изображающая точка каждый раз перемещается на соседнюю ленту, то же самое происходит, скажем, в режиме периода 2: точка последовательно переходит между двумя состояниями, в случае аттрактора периода 4 —

между первой и второй парами точек и т. д. Эту закономерность легко проверить с помощью кластерного анализа, если разбить все точки на заданное число кластеров (в нашем случае — 2) методом К-средних: окажется, что все четные точки временной реализации попали в один кластер, все нечетные — в другой.

Таким образом, если поделить изображающие точки на фазовом портрете обеих систем на группы 1 и 2, можно сделать вывод, что каждой точке из группы 1 ведущей системы взаимно-однозначно соответствует точка из группы 1 ведомой и то же для группы 2, то есть переключения между лентами аттрактора в ведущей и ведомой системах происходят синхронно, причем это является следствием природы рассматриваемых систем вне зависимости от уровня связи. Такая синхронность переключений фактически является дополнительным источником информации для каждой из систем о второй системе и может быть использована для прогноза поведения одной из них по временному ряду другой.

Исходя из описанного, немонотонность зависимости  $PI(\sigma)$  объясняется следующим образом. При нулевом уровне шума и конечной величине связи в силу того, что система (2.1) может быть точно переписана в виде (1.1), (1.2) при выбранных значениях  $P$ ,  $D_a$  и  $D_s$ , совместная ошибка близка к нулю с точностью вычислений, а собственная — конечна и отлична от нуля. При малых уровнях измерительного шума его увеличение приводит к ухудшению точности прогноза и увеличению совместной и индивидуальной ошибок пропорционально  $\sigma$ , то есть примерно на одну и ту же величину, как следствие этого величина  $\varepsilon_j^2(\sigma)/\varepsilon_s^2(\sigma)$  растет и  $PI$  уменьшается. Начиная с некоторого значения  $\sigma$  уровень шума становится настолько велик, что предсказать точно значение  $x_n$  оказывается невозможно, но все еще можно предсказать, в какую часть аттрактора (ленту, группу точек) попадет точка на следующем шаге, и информация о переключениях между лентами начинает играть ключевую роль в улучшении прогноза, поэтому учет информации о системе  $Y$  становится снова полезен для прогноза состояния системы  $X$  вследствие синхронности переключений. Чем больше шум, тем меньше оказывается роль собственной динамики и больше роль переключений в предсказании следующего состояния,  $PI(\sigma)$  растет. При этом чем меньше коэффициент связи, тем раньше шум полностью уничтожает информацию о действительно существующем воздействии  $Y$  на  $X$ , поэтому при сильной связи минимум в зависимости  $PI(\sigma)$  выражен менее явно или вовсе отсутствует. Это становится возможно, поскольку в рассматриваемом примере и внешнее воздействие, и шум добавляются аддитивно, то есть суммируются. Наконец, при очень больших уровнях шума кластеры точек на аттракторе начинают сливаться воедино, информация о переключениях теряет смысл и  $PI(\sigma)$  снова начинает убывать к нулю.

Для режима периода 1 в ведомой системе информация о переключениях между лентами в ведущей системе не имеет значения для ведомой, поэтому  $PI(\sigma)$  всегда монотонно спадает к нулю.

Пример, на основании которого построена выдвинутая гипотеза о природе немонотонного поведения зависимости  $PI(\sigma)$ , имеет ряд ограничений: рассматривались только одномерные системы, исходные уравнения могут быть сведены к модельным, рассматривались только идентичные по типу нелинейных функций системы и только с дискретным временем. Чтобы подтвердить данную гипотезу и показать общность полученных результатов, было проведено тестирование на ряде других эталонных систем. В разделе 2.3 рассмотрены связанные отображения окружности, для которых исходные уравнения эталонных систем не могут быть однозначно сведены к модельным уравнениям (1.1), (1.2); в разделе 2.4 рассмотрены связанные отображения Эно — двумерные системы, при использовании в моделях  $D_s = 1$ ; в разделе 2.5 — отображение Эно, воздействующее на отображение окружности; в разделе 2.6 — связанные потоковые системы (системы Рёсслера).

### 2.3. Оценка зависимости $PI(\sigma)$ при неточной аппроксимации базисных функций

Как показано в [13], при оценке  $PI$  для двух однонаправленно связанных отображений окружности (2.2) в отсутствие шума с помощью моделей вида (1.1), (1.2) результат зависит от степени аппроксимирующего полинома и не достигает теоретического значения 1 в заведомо верную сторону:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \Delta_x + m_x \sin(x_n) + k \cdot y_n, \\y_{n+1} &= y_n + \Delta_y + m_y \sin(y_n).\end{aligned}\tag{2.2}$$

В данной работе параметры ведущей системы  $m_y$  и  $\Delta_y$  подбираются так, чтобы она находилась в хаотическом режиме, тогда как у ведомой системы фиксируется параметр  $\Delta_x$ , а параметр  $m_x$  перебирается в некотором диапазоне значений, охватывающем как различные периодические, так и хаотические режимы.

На рисунке 3b представлены зависимости  $PI(\sigma)$ ,  $\varepsilon_j^2(\sigma)$  и  $\varepsilon_s^2(\sigma)$  при различных степенях аппроксимирующего полинома  $P$  нелинейных функций (1.1), (1.2). Аналогичное поведение зависимостей  $PI(\sigma)$ ,  $\varepsilon_j^2(\sigma)$  и  $\varepsilon_s^2(\sigma)$  наблюдается и при других значениях параметров, в том числе в случае, когда автономная ведомая система находится в хаотическом режиме.

### 2.4. Оценка зависимости $PI(\sigma)$ при недостаточной размерности модели

Как и в ранее рассмотренных примерах, ведомая и ведущая системы представляют собой отображения с одинаковым оператором эволюции, но расстроенные по параметрам. Параметры ведущей системы подбираются так, чтобы она находилась в хаотическом режиме: у ведомой системы фиксируется один параметр, в данном случае  $b_x$ , а второй параметр перебирается в некотором диапазоне значений, охватывающим как периодические режимы, так и некоторые хаотические режимы:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - a_x \cdot x_n^2 - b_x \cdot x_{n-1} + k \cdot y_n, \\y_{n+1} &= 1 - a_y \cdot y_n^2 - b_y \cdot y_{n-1}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

При построении модели используются параметры  $D_s = 1$ ,  $D_a = 1$ ,  $\tau = 1$ ,  $P = 2$ .

Представленные на рисунке 4a зависимости качественно не отличаются от полученных ранее и демонстрируют один минимум и один локальный максимум, которые выражены тем сильнее, чем меньше параметр связи.

### 2.5. Оценка зависимости $PI(\sigma)$ при различных типах оператора эволюции ведущей и ведомой систем

В данном разделе исследовалась система (2.4), состоящая из двух существенно разных по природе отображений: отображения Эно (ведущая подсистема) и отображения окружности (ведомая подсистема). Первое из них — двумерное, но имеет нелинейность только второго порядка, в то время как второе — одномерное, но имеет синусоидальную нелинейность, которую невозможно точно представить степенным полиномом:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - x_n + \Delta_x + m_x \sin(x_n) + k \cdot y_n, \\y_{n+1} &= 1 - a_y \cdot y_n^2 - b_y \cdot y_{n-1}.\end{aligned}\tag{2.4}$$





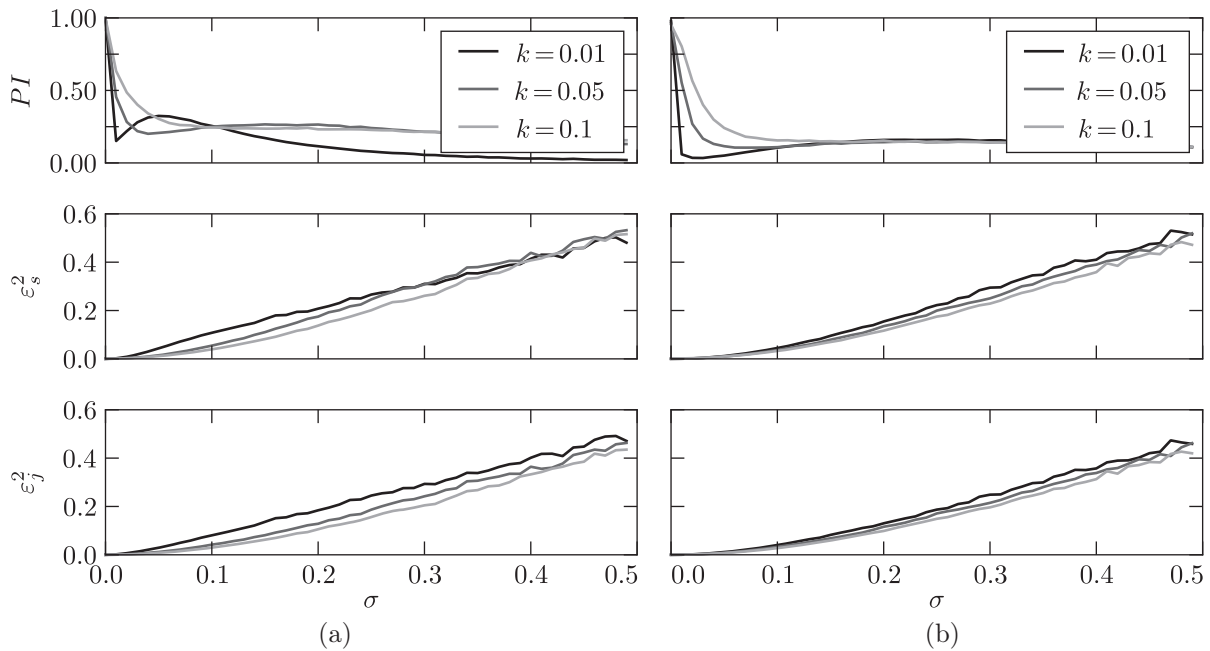


Рис. 4. Зависимости уровня собственной  $\varepsilon_j^2$  и совместной  $\varepsilon_s^2$  ошибок аппроксимации и улучшения прогноза  $PI$  от уровня измерительного шума  $\sigma$ . (а) Параметры связанных отображений Эно:  $a_x = 0.48, b_x = -0.15, a_y = 1.15, b_y = -0.2$ . (б) Параметры связанных отображений окружности и отображений Эно:  $\Delta_x = 0.1, m_x = 2.05, a_y = 1.3, b_y = -0.15$ .

Аттрактор ведущей системы многоленточный. Проводя кластерный анализ, снова можно показать, что переключения между лентами происходят синхронно. Эта синхронность помогает повысить уровень улучшения прогноза в области небольших шумов. Сначала информации о системе в пределах каждого кластера недостаточно в связи с тем, что одна точка, в которую попадает система, на каждом шаге все больше превращается в некую область. Однако еще существуют различия между кластерами, и это состояние соответствует области роста улучшения прогноза (см. рис. 4б). Конец этой области определяется таким уровнем шума, при котором невозможно определить, к какой ленте принадлежит точка в данный момент времени. Локальные минимум и максимум на зависимости  $PI(\sigma)$  лучше выражены для малых значений коэффициента связи.

Таким образом показано, что немонотонная зависимость  $PI(\sigma)$  может наблюдаться и для связанных систем с различными типами операторов эволюции.

### 2.6. Оценка зависимости $PI(\sigma)$ для потоковых систем

До сих пор рассматривались системы с дискретным временем, поэтому интересно исследовать зависимость  $PI(\sigma)$  для потоковых систем. В качестве примера были рассмотрены связанные системы Рёсслера (2.5) и уравнения связанных автогенераторов с полутора степенями свободы (2.6) [14]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 + k \cdot y_1, & \dot{x}_2 &= x_1 + a_x \cdot x_2, & \dot{x}_3 &= b_x + x_3(x_1 - c_x), \\ \dot{y}_1 &= -y_2 - y_3, & \dot{y}_2 &= y_1 + a_y \cdot y_2, & \dot{y}_3 &= b_y + y_3(y_1 - c_y), \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} \tau_x \dot{x}_1 &= (m_x \cdot x_3 \cdot e^{-x_3^2} - x_1) + k \cdot y_1, & \dot{x}_2 &= \delta_x^2 \cdot (x_1 - x_3), & \dot{x}_3 &= x_2 - a_x \cdot x_3, \\ \tau_y \dot{y}_1 &= (m_y \cdot y_3 \cdot e^{-y_3^2} - y_1), & \dot{y}_2 &= \delta_y^2 \cdot (y_1 - y_3), & \dot{y}_3 &= y_2 - a_y \cdot y_3. \end{aligned} \tag{2.6}$$



Для обеих связанных систем (2.5) и (2.6) временные ряды координат  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y_1$  считались наблюдаемыми, остальные — скрытыми. Для построения прогностической модели мы перешли к отображению Пуанкаре, полученному сечением исходной связанной системы гиперплоскостью  $x_2 = 0$ , поскольку сильная корреляция между последовательными значениями в исходных временных рядах, как правило, провоцирует большое число ложноположительных выводов о связанности [13, 15, 16]. Таким образом, получались и анализировались временные ряды значений переменных  $x_1$  для ведомой и  $y_1$  для ведущей систем в сечении Пуанкаре.

Для оценки улучшения прогноза использовались модели с собственной размерностью  $D_s = 2$  и добавочную размерностью  $D_a = 1$ , полиномом порядка 2.

Параметры ведущей системы и часть параметров ведомой фиксировались таким образом, чтобы ведущая система находилась в хаотическом режиме, а ведомая могла находиться в различных периодических режимах периода 2 и более или хаотических режимах с многоленточным аттрактором. Сечение фазового пространства полученного отображения приведено на рисунке 5.

Из рисунков а, б видно, что при некоторых значениях коэффициента связи  $k$  зависимость  $PI(\sigma)$  немонотонная, значит, как и для каскадов, для потоковых систем переключение между лентами аттрактора существенно помогает прогнозировать поведение ведомой системы в некотором диапазоне значений  $\sigma$ , что подтверждает общность сделанных в работе выводов.

### 3. Заключение

Влияние шумов на результаты поиска связанности по экспериментальным сигналам различными методами мало исследовано, в то время как они всегда присутствуют в канале связи. Как правило, шумы приводят к потере информации о связях, особенно слабых, поскольку вклад, вносимый ими в динамику ведомой системы, становится неразличимо мал. Поэтому особый интерес представляет возможность немонотонной зависимости любой меры связи — в рассмотренном случае показателя улучшения прогноза  $PI$  — от среднеквадратичного отклонения шума, так как рост улучшения прогноза с увеличением интенсивности шума является контринтуитивным.

В данной работе зависимость улучшения прогноза от уровня шума исследовалась для однонаправленно связанных систем на численных примерах: различных дискретных отображениях и потоковых системах. Для расчета причинности по Грейнджеру рассматривались модели в виде отображения последования с полиномиальной нелинейностью, как и в работах [5, 6, 12, 13]. Рассматривались разные степени полинома.

По результатам проведенных численных экспериментов можно сделать следующие выводы. Нетривиальное поведение зависимости  $PI(\sigma)$  — рост  $PI(\sigma)$  в некотором диапазоне  $\sigma$  — наблюдается в тех же системах, что и тривиальная монотонная зависимость, но при других параметрах, причем имеют значение как параметры ведущей, так и параметры ведомой системы. В рассмотренных примерах немонотонное поведение  $PI(\sigma)$  имело место только в случае, когда в ведомой подсистеме параметры соответствовали периодическому режиму индивидуальной динамики в режиме периода 2 или более, а в ведущей — хаотическому режиму с многоленточным аттрактором.

На основе анализа результатов можно сформулировать следующие выводы:

1. Синхронность переключения между лентами аттрактора ведущей и ведомой систем позволяет при некоторых промежуточных уровнях шума получить существенную

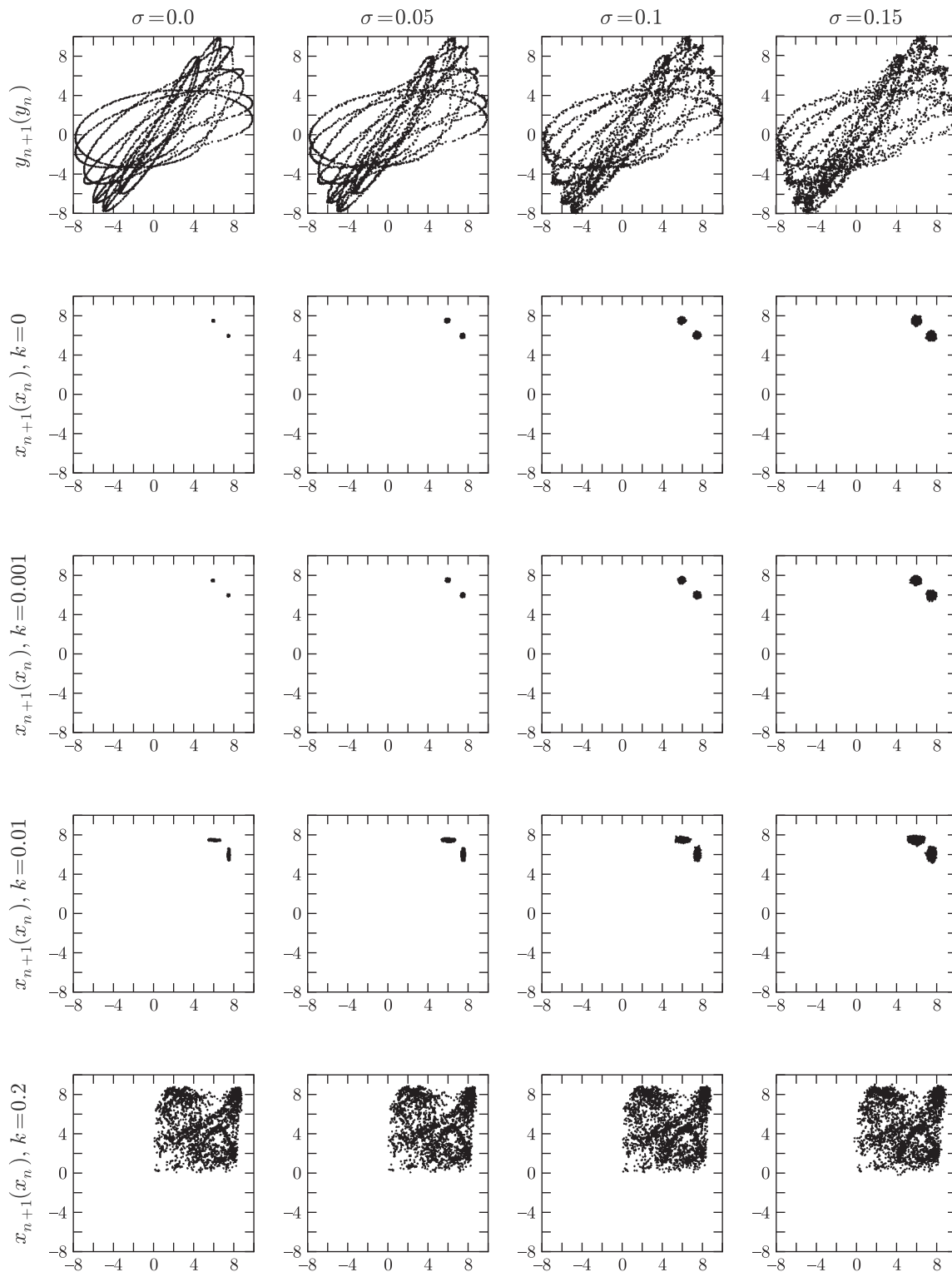


Рис. 5. В рядах № 1–5 представлены диаграммы Ламерея: ряды № 1 и № 2 — автономная динамика  $Y$  и  $X$ , ряды № 3–5 показывают динамику ведомой системы при воздействии на нее ведущей с увеличением коэффициента связи между системами. С увеличением номера столбца для каждого ряда увеличивается уровень измерительного шума в системе. Параметры связанных систем Рёсслера:  $a_x = 0.2$ ,  $b_x = 0.85$ ,  $c_x = 5.7$ ,  $a_y = 0.2$ ,  $b_y = 0.15$ ,  $c_y = 4.6$ .

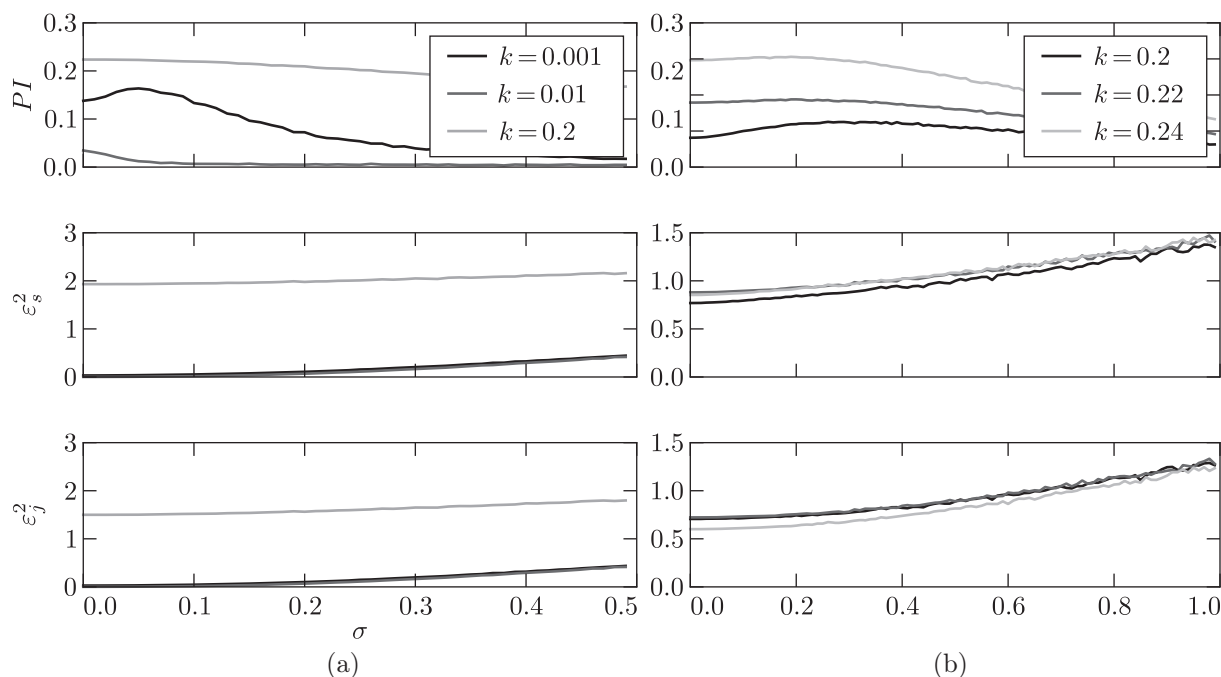


Рис. 6. Зависимости уровня собственной  $\varepsilon_j^2$  и совместной  $\varepsilon_s^2$  ошибок аппроксимации и улучшения прогноза  $PI$  от среднеквадратичного отклонения измерительного шума  $\sigma$ : (а) для связанных систем Рёсслера при  $a_x = 0.2$ ,  $b_x = 0.85$ ,  $c_x = 5.7$ ,  $a_y = 0.2$ ,  $b_y = 0.15$ ,  $c_y = 4.6$ , (б) для уравнений связанных автогенераторов с полутора степенями свободы при  $m_x = 3$ ,  $a_x = 0.15$ ,  $\tau_x = 4.6$ ,  $\delta_x = 1$ ,  $m_y = 21$ ,  $a_y = 0.21$ ,  $\tau_y = 3$ ,  $\delta_y = 1$ .

дополнительную информацию для прогноза поведения ведомой системы, что приводит к росту показателя улучшения прогноза с увеличением дисперсии шума наблюдений.

- Минимум и максимум в зависимости  $PI(\sigma)$  выражены сильнее при малых уровнях связи, поскольку в таком случае сравнительно небольшие шумы могут сильно исказить информацию о связи, но при этом не способны уничтожить информацию о синхронности переключений между лентами.

Полученные результаты представляются важными в первую очередь для анализа нестационарных сигналов сложных систем при переменном соотношении сигнал/шум. В таком случае рост величины улучшения прогноза нельзя трактовать как увеличение силы связи, если при этом отношение сигнал/шум значительно изменилось (в том числе увеличилось). Неучет данного обстоятельства может привести к ошибкам в диагностике изменений силы взаимодействия. Кроме того, данные результаты показывают, что улучшение соотношения сигнал/шум в измерительных приборах не всегда будет приводить к росту значения  $PI$  (то есть к росту чувствительности метода).

## Список литературы

- Granger C. W. J. Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods // *Econometrica*, 1969, vol. 37, no. 3, pp. 424–438.
- Schreiber T. Measuring information transfer // *Phys. Rev. Lett.*, 2000, vol. 85, no. 2, pp. 461–464.



- [3] Schelter B., Timmer J., Eichler M. Assessing the strength of directed influences among neural signals using renormalized partial directed coherence // *J. Neurosci. Methods*, 2009, vol. 179, no. 1, pp. 121–130.
- [4] Barnett L., Barrett A.B., Seth A.K. Granger causality and transfer entropy are equivalent for Gaussian variables // *Phys. Rev. Lett.*, 2009, vol. 103, no. 23, 238701, 4 pp.
- [5] Chen Y., Rangarajan G., Feng J., Ding M. Analyzing multiple nonlinear time series with extended Granger causality // *Phys. Lett. A.*, 2004, vol. 324, no. 1, pp. 26–35.
- [6] Безручко Б. П., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д., Смирнов Д. А., Тасс П. А. Моделирование и диагностика взаимодействия нелинейных колебательных систем по хаотическим временным рядам (приложения в нейрофизиологии) // *УФН*, 2008, т. 178, № 3, с. 304–310.
- [7] Marinazzo D., Pellicoro M., Stramaglia S. Nonlinear parametric model for Granger causality of time series // *Phys. Rev. E*, 2006, vol. 73, no. 6, 066216, 6 pp.
- [8] Marinazzo D., Pellicoro M., Stramaglia S. Kernel method for nonlinear Granger causality // *Phys. Rev. Lett.*, 2008, vol. 100, no. 14, 144103, 4 pp.
- [9] Winterhalder M., Schelter B., Hesse W., Schwab K., Leistriz L., Klan D., Bauerd R., Timmera J., Witte H. Comparison of linear signal processing techniques to infer directed interactions in multivariate neural systems // *Signal Processing*, 2005, vol. 85, no. 11, pp. 2137–2160.
- [10] Nalatore H., Ding M., Rangarajan G. Mitigating the effects of measurement noise on Granger causality // *Phys. Rev. E*, 2007, vol. 75, no. 3, 031123, 10 pp.
- [11] Nalatore H., Rangarajan G. Effect of measurement noise on Granger causality // *Phys. Rev. E*, 2014, vol. 90, no. 6, 062127, 9 pp.
- [12] Сысоев И. В., Караваев А. С., Наконечный П. И. Роль нелинейности модели в диагностике связей при патологическом треморе методом грейнджеровской причинности // *Изв. вузов. ПНД*, 2010, т. 18, № 6, с. 81–90.
- [13] Корнилов М. В., Сысоев И. В. Влияние выбора структуры модели на работоспособность метода нелинейной причинности по Грейнджеру // *Изв. вузов. ПНД*, 2013, т. 21, № 2, с. 3–16.
- [14] Дмитриев А. С., Кислов В. Я. Стохастические колебания в автогенераторе с инерционным запаздыванием первого порядка // *Радиотехника и электроника*, 1984, т. 29, № 12, с. 2389–2398.
- [15] Корнилов М. В., Сысоев И. В., Безручко Б. П. Оптимальный подбор параметров прогностических моделей в методе нелинейной причинности по Грейнджеру в приложении к сигналам, характеризующимся хорошо выраженными временными масштабами // *Нелинейная динамика*, 2014, т. 10, № 3, с. 279–295.
- [16] Сысоева М. В., Диканев Т. В., Сысоев И. В. Выбор временных масштабов при построении эмпирической модели // *Изв. вузов. ПНД*, 2012, т. 20, № 2, с. 54–62.

### **The effect of increase of the Granger causality method sensitivity with rise of a measurement noise**

Tatyana M. Medvedeva<sup>1</sup>, Fedor B. Paramonov<sup>2</sup>, Ilya V. Sysoev<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Saratov State University

Astrahanskaya st. 83, Saratov, 410012, Russia

<sup>1</sup>golovatanya@rambler.ru, <sup>2</sup>pheodor.paramonov@gmail.com, <sup>3</sup>ivssci@gmail.com

The effect of the external measurement noise on characteristics of the Granger causality method was considered for unidirectionally coupled non-linear etalon systems in different oscillation regimes. Coupled maps with the same and different evolution operator in driving and driven



systems were studied, as well as coupled flows. The nontrivial dependency of method characteristics was shown in all considered cases for certain parameters and coupling intensity. The reason why this dependency is not monotonous was found out.

MSC 2010: 37M10

Keywords: time series, measurement noise, coupling analysis, Granger causality

Received May 27, 2015, accepted October 24, 2015

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2015, vol. 11, no. 4, pp. 657–670 (Russian)