Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

Функциональные пространства и теория приближения функций

Посвященная 110-летию со дня рождения академика С. М. Никольского

(25–29 мая 2015 г., МИАН, г. Москва)

Тезисы докладов

Steklov Mathematical Institute
Russian Academy of Scienses

INTERNATIONAL CONFERENCE

Function Spaces and Function Approximation Theory

Dedicated to the 110th anniversary of academician S. M. Nikolskii

(May 25–29, 2015, Moscow)

Abstracts

МИАН

Москва
2015

УДК 517.5
ББК (В)22.161.6
М43

М43 Международная конференция “Функциональные пространства и теория приближения функций”, посвященная 110-летию со дня рождения академика С. М. Никольского (25–29 мая 2015 г., МИАН, г. Москва): Тезисы докладов – М.: МИАН, 2015. – 246 с.

ISBN 978-5-98419-059-6

Теория функциональных пространств и теория приближения функций – активно развивающийся раздел математики. Они играют важную роль в современном математическом анализе и имеют приложения во многих областях математики и в прикладных вопросах. На конференции будут обсуждены актуальные проблемы теории пространств дифференцируемых функций на областях евклидова пространства и на метрических пространствах: теоремы вложения и интерполяции, свойства дифференциальных и интегральных операторов, вопросы гармонического анализа, поперечники классов функций, представления и аппроксимации функций и другие.

Конференция посвящается 110-летию со дня рождения выдающегося ученого академика С. М. Никольского. Тематика конференции связана с направлениями исследований С. М. Никольского и его школы.

ISBN 978-5-98419-059-6

Организационный комитет:

В.В. Козлов (*сопредседатель*),
В.А. Садовничий (*сопредседатель*),
О.В. Бесов, *С.В. Бочкарев*, *В.И. Буренков*, *С.В. Конягин*, *Ю.В. Малыхин*,
Е.С. Половинкин, *А.Г. Сергеев*, *В.Д. Степанов*, *С.А. Теляковский*, *А.И. Тюленев*,
А.А. Шкаликов

Программный комитет:

О.В. Бесов (*председатель*),
С.В. Бочкарев, *В.И. Буренков*, *Б.И. Голубов*, *Б.С. Кашин*, *С.В. Конягин*,
С.А. Теляковский, *Н.Н. Холщевникова*

Organizing Committee:

V.V. Kozlov (*co-chairman*),
V.A. Sadovnichii (*co-chairman*),
O.V. Besov, *S.V. Bochkarev*, *V.I. Burenkov*, *S.V. Konyagin*, *Yu.V. Malykhin*,
E.S. Polovinkin, *A.G. Sergeev*, *V.D. Stepanov*, *S.A. Telyakovskii*, *A.I. Tyulenev*,
A.A. Shkalikov

Program Committee:

O.V. Besov (*chairman*),
S.V. Bochkarev, *V.I. Burenkov*, *B.I. Golubov*, *B.S. Kashin*, *S.V. Konyagin*,
S.A. Telyakovskii, *N.N. Kholschevnikova*

Содержание / Contents

Nikolskii-type inequalities for algebra polynomials in regions with cusps

F. Abdullayev, N. Özkartepe
Mersin University, Turkey

Let $G \subset \mathbb{C}$ be a finite Jordan region, with $0 \in G$, $L := \partial G$; $P_n(z)$, $\deg P_n \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$, be an arbitrary algebraic polynomials and let $h(z)$ be a weight function. For $p > 0$ we denote by $A_p(h, G)$ the class of analytic in G functions f such that

$$\iint_G h(z)|f(z)|^p \, dx \, dy < \infty, \qquad z = x + iy;$$

and, when L is rectifiable, by $\mathcal{L}_p(h, L)$, $p > 0$, the class of measurable on L functions f such that

$$\int_L h(z)|f(z)|^p \, |dz| < \infty.$$

In this work, we study the Nikol'skii-type inequalities for algebraic polynomials $P_n(z)$ and pointwise estimations for these polynomials in various regions of the complex plane through their $A_p(h, G)$ and $\mathcal{L}_p(h, L)$-norms, depending on the geometrical properties of regions and generalized Jacobi weight function $h(z)$ for some Jordan regions of complex plane.

References

[1] F. G. Abdullayev, "On the some properties of the orthogonal polynomials over the region of the complex plane (Part III)", *Ukr. Math. J.*, **53**:12 (2001), 1934–1948.

[2] E. Hille, G. Szegö, J. D. Tamarkin, "On some generalization of a theorem of A. Markoff", *Duke Math.*, **3** (1937), 729–739.

[3] N. Stylianopoulos, "Fine asymptotics for Bergman orthogonal polynomials over domains with corners", CMFT 2009 (Ankara, June 2009).

[4] J. L. Walsh, *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*, AMS, 1960.

Approximation by polynomials in Bergman spaces

R. Akgun
Balikesir University, Turkey

The purpose of this work is to obtain Jackson and converse inequalities of polynomial approximation in Bergman spaces. Some known results, proved for moduli of continuity, are extended to the moduli of smoothness. We proved some simultaneous approximation theorems and obtained the Nikolskii-Stechkin inequality for polynomials in these spaces.

References

[1] M. Sh. Shabozov, O. Sh. Shabozov, "Best approximation and the value of the widths of some classes of functions in the Bergman space B_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$", *Dokl. Akad. Nauk*, **410**:4 (2006), 661–664.

[2] E. A. Storozhenko, "On a Hardy–Littlewood problem", *Mat. Sb.* (*N.S.*), **119 (161)**:4 (1982), 564–583.

[3] Xing Fu Chong, "A Bernstein-type inequality in Bergman spaces B_q^p, $p > 0$, $q > 1$", *Acta Math. Sinica* (*Chin. Ser.*), **49**:2 (2006), 431–434.

Recent progress in the study of the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces

V. I. Burenkov

Peoples' Friendship University of Russia
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences

Let $0 < p, \theta \leqslant \infty$ and let w be a non-negative measurable function on $(0, \infty)$. We denote by $LM_{p\theta,w}$, $GM_{p\theta,w}$, the local Morrey-type spaces, the global Morrey-type spaces respectively, which are the spaces of all functions $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ with finite quasi-norms

$$\big\| w(r) \|f\|_{L_p(B_r)} \big\|_{L_\theta(0,\infty)}, \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|f(x + \cdot)\|_{LM_{p\theta,w}}$$

respectively. (Here B_r is the ball of radius r centered at the origin.) For $w(r) = r^{-\frac{\lambda}{p}}$ with $0 < \lambda < n$ the spaces $GM_{p\theta,w}$ were introduced by C. Morrey in 1938 and appeared to be quite useful in various problems in the theory of partial differential equations.

A survey will be given of recent results in which, for a certain range of the numerical parameters p_1, θ_1, p_2, θ_2, necessary and sufficient conditions on the functions w_1 and w_2 are established ensuring the boundedness of the maximal operator, fractional maximal operator, Riesz potential, genuine singular integrals, the Hardy operator as operators from one local Morrey-type space $LM_{p_1\theta_1,w_1}$ to another one $LM_{p_2\theta_2,w_2}$.

Under discussion there will also be interpolation theorems for general local Morrey-type spaces $LM_{p\theta,w}$.

References

[1] V. I. Burenkov, "Recent progress in the problem of the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. I", *Eurasian Math. J.*, **3**:3 (2012), 11–32.

[2] V. I. Burenkov, "Recent progress in the problem of the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. II", *Eurasian Math. J.*, **4**:1 (2013), 21–45.

[3] V. I. Burenkov, E. D. Nursultanov, D. K. Chigambayeva, "Description of the interpolation spaces for a pair of local Morrey-type spaces and their generalizations", *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V. A. Steklova*, **284** (2014), 105–137 (in Russian); *Proc. Steklov Inst. Math.*, **284** (2014), 97–128.

On spherical functions connected with a general PDE of the second order in the unit ball

V. P. Burskii

Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Ukraine
Moscow Institute of Physics and Technology

The report is devoted to a connection between the Dirichlet problem in the unit ball for a general PDE of the second order and spherical functions which are zero on null-variety of the PDE-symbol.

Let $L = L(x, D) = \sum_{|\alpha|\leqslant 2} a_\alpha D^\alpha$ be a general linear differential operation with constant coefficients, which can be complex-valued or matrix, and let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$.

Let us consider the Dirichlet problem

$$Lu = f, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1}$$

in the Sobolev space $W_2^2(\Omega)$. We extend functions f and u by zero: $\widetilde{u} = u$ in Ω, $\widetilde{u} = 0$ outside of Ω. Then

$$L\widetilde{u} = \widetilde{f} + L_1 u\delta_{\partial\Omega}, \tag{2}$$

where $L_1 u$ is a linear differential expression on ψ and $u'_\nu \langle\delta_{\partial\Omega}, \varphi\rangle = \int_{\partial\Omega} \overline{\varphi}\, ds$. Let the domain Ω be defined by means of the inequality $P(x) > 0$ where $P \in \mathbb{R}[x]$ is a polinomial, $|\nabla P|_{P=0} \neq 0$. We multiply equality (2) by $P(x)$ and apply the Fourier transform. We obtain

$$P(-D_\xi)[L(\xi)F(\widetilde{u})(\xi)] = g(\xi) \tag{3}$$

with a known function g. Here $L(\xi)$ is the symbol and $L_2(\xi)$ is the major symbol.

Statement 1. *The solvability of the last equation in some classes of entire functions is equivalent to the solvability of problem* (1).

If the domain is the unit ball, then $P(-D_\xi) = \Delta_\xi$ and if, moreover, the right-hand side $f = 0$, then $g = 0$ and for the uniqueness problem in problem (1) we obtain the equivalent problem of the following form: $(\Delta_\xi + 1)[L_2(\xi)v(\xi)] = 0$. Now for lowest term $v_m(\xi)$ of the power series for v we have the equation $\Delta_\xi[L_2(\xi)v_m(\xi)] = 0$.

The application of this methods gives, in particular, the following results. Let us consider

$$Lu = u_{x_1x_1} + \cdots + u_{x_kx_k} - a^2(u_{x_{k+1}x_{k+1}} + \cdots + u_{x_nx_n}).$$

Statement 2. *Problem* (1) *with* $f = 0$ *has a nontrivial solution in* $W_2^2(\Omega)$ *if and only if there exist natural numbers* m, i, j, $i + j \leqslant m$ *such that*

1) $m - i - j$ *even and*

$$P^{(\frac{n-k}{2}+j-1,\, i+\frac{k}{2}-1)}_{\frac{m-i-j}{2}+1}\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right) = 0$$

or

2) $m+n-k-i+j$ *even and*

$$P^{(1-j-\frac{n-k}{2},i+\frac{k}{2}-1)}_{\frac{m+n-k-i+j}{2}}\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)=0$$

or

3) $m+n+i+j$ *even and*

$$P^{(1-j-\frac{n-k}{2},1-i-\frac{k}{2})}_{\frac{m+n+i+j}{2}-1}\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)=0$$

or

4) $m+k+i-j$ *even and*

$$P^{(\frac{n-k}{2}+j-1,1-i-\frac{k}{2})}_{\frac{m+k+i-j}{2}}\left(\frac{a^2-1}{a^2+1}\right)=0,$$

where $P_N^{(\alpha,\beta)}(x)$ *is the Jacoby polynomial.*

For the case $n=2$ the result conforms with the well-known result for the string equation. There is also an application of these results to problems of the interal geometry.

Uniform boundness of Steklov's operator in variable exponent Morrey space

A. Ghorbanalizadeh

Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Iran

Let $p(\cdot)$ be a continuous function on $I_0 = [0,1]$ with values in $[1,\infty)$. We suppose that

$$1 \leqslant p_- \leqslant p(x) \leqslant p_+ < \infty, \tag{1}$$

where $p_- := \operatorname{ess\,inf}_{x\in I_0} p(x) \geqslant 1$, $p_+ := \operatorname{ess\,sup}_{x\in I_0} p(x) < \infty$, and also suppose the $p(\cdot)$ satisfy the log-condition i.e.

$$|p(x) - p(y)| \leqslant \frac{A}{-\ln|x-y|}, \qquad |x-y| \leqslant \frac{1}{2}, \quad x, y \in I_0. \tag{2}$$

Let $\lambda(\cdot)$ be a measurable function on I_0 with values in $[0,1]$. We define the variable exponent Morrey space $M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0)$ as the set of integrable functions f on I_0 such that

$$I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(f) := \sup_{\substack{x\in I_0\\ 0<r<2\pi}} r^{-\lambda(x)} \int_{\widetilde{I}(x,r)} |f|^{p(y)}\,dy < \infty.$$

The norm of space $M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0)$ may be defined in two forms,

$$\|f\|_1 := \inf\left\{\eta > 0 : I_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}\left(\frac{f}{\eta}\right) < 1\right\},$$

and

$$\|f\|_2 := \sup_{\substack{x\in I_0\\ 0<r<2\pi}} r^{-\frac{\lambda(x)}{p(x)}} \|f\chi_{\widetilde{I}(x,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(I_0)}.$$

Since two norms coincide, we put

$$\|f\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0)} := \|f\|_1 = \|f\|_2.$$

The Steklov operator is defined as

$$s_h(f)(x) := \frac{1}{h}\int_0^h f(x+t)\,dt.$$

Our main result is following.

Theorem. *Let $f \in M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0)$, $\lambda_+ := \operatorname{ess\,sup}_{x\in I_0} \lambda(x)$, $0 \leqslant \lambda(x) \leqslant \lambda_+ < 1$, and $p(\cdot)$ satisfy conditions (1) and (2), then the family of operators $s_h(f)$, $0 < h \leqslant 1$, is uniformly bounded in $M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(I_0)$.*

This contribution is based on recent joint work with Professor Vagif Guliyev.

References

[1] A. Almeida, J. Hasanov, S. Samko, "Maximal and potential operators in variable exponent Morrey spaces", *Georgian Math. J.*, **15**:2 (2008), 195–208.

[2] P. L. Butzer, R. J. Nessel, *Fourier Analysis and Approximation*, Academic Press, New York, 1971.

[3] O. Kovavcik, J. Rakosnik, "On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$", *Czechoslovak Math. J.*, **41** (1991), 592–618.

[4] I. I. Sharapudinov, "On direct and inverse theorems of approximation theory in variable Lebesgue and Sobolev spaces", *Azerbaijan J. Math.*, **4**:1 (2014), 53–71.

[5] I. I. Sharapudinov, "Approximation of functions in variable-exponent Lebesgue and Sobolev spaces by finite Fourier–Haar series", *Mat. Sb.*, **205**:2 (2014), 145–160.

[6] I. I. Sharapudinov, "Approximation of functions in $L^{p(x)}_{2\pi}$ by trigonometric polynomials", *Izv. RAN. Ser. Mat.*, **77**:2 (2013), 197–224.

Sharp Pitt inequality and logarithmic uncertainty principle for Dunkl transform in L^2

D. V. Gorbachev, V. I. Ivanov, S. Yu. Tikhonov

Let $\Gamma(t)$ be the gamma function, $\mathbb{R}^d$ be the real space of d dimensions, equipped with a scalar product (x, y) and a norm $|x| = \sqrt{(x, x)}$. Denote by $S(\mathbb{R}^d)$ the Schwartz space on $\mathbb{R}^d$ and by $L^2(\mathbb{R}^d)$ the Hilbert space of complex-valued functions endowed with a norm $\|f\|_2 = \bigl(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\,dx\bigr)^{1/2}$. The Fourier transform is defined by

$$\widehat{f}(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i(x,y)}\,dx.$$

W. Beckner [1] proved the Pitt inequality for the Fourier transform

$$\bigl\||y|^{-\beta}\widehat{f}(y)\bigr\|_2 \leqslant C(\beta)\bigl\||x|^{\beta} f(x)\bigr\|_2, \qquad f \in S(\mathbb{R}^d), \quad 0 < \beta < \frac{d}{2}, \tag{1}$$

with sharp constant

$$C(\beta) = 2^{-\beta}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}(\frac{d}{2} - \beta))}{\Gamma(\frac{1}{2}(\frac{d}{2} + \beta))}.$$

Noting that $\||y|^{-\beta}\widehat{f}(y)\|_2 = (2\pi)^{-\beta}\||(-\Delta)^{\beta/2} f|\|_2$, Pitt's inequality can be viewed as a Hardy–Rellich inequality; see the papers by D. Yafaev [2] and S. Eilertsen [3] for alternative proofs and extensions of (1).

For $\beta = 0$, (1) is the Plancherel theorem. If $\beta > 0$ there is no extremiser in inequality (1) and its sharpness can be obtained on the set of radial functions.

The proof of (1) in [1] is based on an equivalent integral realization as a Stein-Weiss fractional integral on $\mathbb{R}^d$. D. Yafaev in [2] used the following decomposition

$$L^2(\mathbb{R}^d) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \mathfrak{R}_n^d, \tag{2}$$

where $\mathfrak{R}_0^d$ is the space of radial function, and $\mathfrak{R}_n^d = \mathfrak{R}_0^d \otimes \mathfrak{H}_n^d$ is the space of functions in $\mathbb{R}^d$ that are products of radial functions and spherical harmonics of degree n. Thanks to this decomposition it is enough to study inequality (1) on the subsets of $\mathfrak{R}_n^d$ which are invariant under the Fourier transform.

Following [2] and using similar decomposition of the space $L^2(\mathbb{R}^d)$ with the Dunkl weight, we prove sharp Pitt's inequality for the Dunkl transform.

Let $R \subset \mathbb{R}^d$ be a root system, R_+ be the positive subsystem of R, and $k\colon R \to \mathbb{R}_+$ be a multiplicity function with the property that k is G-invariant. Here $G(R) \subset O(d)$ is a finite reflection group generated by reflections $\{\sigma_a : a \in R\}$, where σ_a is a reflection with respect to a hyperplane $(a, x) = 0$.

Let

$$v_k(x) = \prod_{a \in R_+} |(a, x)|^{2k(a)}$$

be the Dunkl weight, $d\mu_k(x) = c_k v_k(x)dx$, where

$$c_k^{-1} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2} v_k(x)\,dx$$

is the Macdonald–Mehta–Selberg integral. Let $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ be the Hilbert space of complex-valued functions endowed with a norm

$$\|f\|_{2,d\mu_k} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\,d\mu_k(x)\right)^{1/2}.$$

Introduced by C. F. Dunkl, a family of differential–difference operators (Dunkl's operators) associated with G and k are given by

$$D_j f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{a\in R_+} k(a)(a, e_j)\,\frac{f(x) - f(\sigma_a x)}{(a, x)}, \qquad j = 1, \dots, d.$$

The Dunkl kernel $e_k(x, y) = E_k(x, iy)$ is the unique solution of the joint eigenvalue problem for the corresponding Dunkl operators:

$$D_j f(x) = iy_j f(x), \quad j = 1, \dots, d, \qquad f(0) = 1.$$

Let us define the Dunkl transforms as follows

$$\mathcal{F}_k(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{e_k(x, y)}\,d\mu_k(x), \qquad \mathcal{F}_k^{-1}(f)(x) = \mathcal{F}_k(f)(-x),$$

where $\mathcal{F}_k(f)$ and $\mathcal{F}_k^{-1}(f)$ are the direct and inverse transforms correspondingly (see, e.g., [4]). For $k \equiv 0$ we have $\mathcal{F}_0(f) = \widehat{f}$.

Our goal is to study Pitt's inequality for the Dunkl transform

$$\||y|^{-\beta}\mathcal{F}_k(f)(y)\|_{2,d\mu_k} \leqslant C(\beta, k)\||x|^{\beta} f(x)\|_{2,d\mu_k}, \quad f \in S(\mathbb{R}^d), \tag{3}$$

with the sharp constant $C(\beta, k)$.

Let us first recall some known results on Pitt's inequality for the Hankel transform. Let $\lambda \geqslant -1/2$. Denote by $J_\lambda(t)$ the Bessel function of degree λ and by $j_\lambda(t) = 2^\lambda\Gamma(\lambda+1)t^{-\lambda}J_\lambda(t)$ the normalized Bessel function. Setting

$$b_\lambda = \left(\int_0^\infty e^{-t^2/2} t^{2\lambda+1}\,dt\right)^{-1} = \frac{1}{2^\lambda\Gamma(\lambda+1)}$$

and $d\nu_\lambda(r) = b_\lambda r^{2\lambda+1}\,dr$, we define $\|f\|_{2,d\nu_\lambda} = \bigl(\int_{\mathbb{R}_+} |f(r)|^2\,d\nu_\lambda(r)\bigr)^{1/2}$.

The Hankel transform is defined by

$$\mathcal{H}_\lambda(f)(\rho) = \int_{\mathbb{R}_+} f(r) j_\lambda(\rho r)\,d\nu_\lambda(r).$$

Note that $\mathcal{H}_\lambda^{-1} = \mathcal{H}_\lambda$.

Pitt's inequality for the Hankel transform is written as

$$\|\rho^{-\beta}\mathcal{H}_\lambda(f)(\rho)\|_{2,d\nu_\lambda} \leqslant c(\beta, \lambda)\|r^\beta f(r)\|_{2,d\nu_\lambda}, \qquad f \in S(\mathbb{R}_+), \tag{4}$$

where $c(\beta,\lambda)$ is the sharp constant in (4) and $S(\mathbb{R}_+)$ is the the Schwartz space on $\mathbb{R}_+$. Note that if $f\in\mathfrak{R}_0^d$, a study of the Hankel transform is of special interest since the Fourier transform of a radial function can be written as the Hankel transform.

L. De Carli [5] proved that $c(\beta,\lambda)$ is finite only if $0\leqslant\beta<\lambda+1$. For $\lambda=d/2-1$, $d\in\mathbb{N}$, the constant $c(\beta,\lambda)$ was calculated by D. Yafaev [2], and in the general case by S. Omri [6]. The proof of Pitt's inequality in [6] is rather technical and uses the Stein–Weiss type estimate for the so-called B-Riesz potential operator. Following [2], we give a direct and simple proof of inequality (4).

Let $|k|=\sum_{a\in R_+}k(a)$ and $\lambda_k=d/2-1+|k|$. For a radial function $f(r)$, $r=|x|$, Pitt's inequality for the Dunkl transform (3) corresponds to Pitt's inequality for the Hankel transform (4) with $\lambda=\lambda_k$. Therefore the condition

$$0\leqslant\beta<\lambda_k+1 \tag{5}$$

is necessary for $C(\beta,k)<\infty$. Our goal is to show that in fact $C(\beta,k)=c(\beta,\lambda_k)$ if condition (5) holds.

Note that for the one-dimensional Dunkl weight

$$v_\lambda(t)=|t|^{2\lambda+1},\qquad d\mu_\lambda(t)=\frac{v_\lambda(t)\,dt}{2^{\lambda+1}\Gamma(\lambda+1)},\qquad \lambda\geqslant-\frac{1}{2},$$

and the corresponding Dunkl transform

$$\mathcal{F}_\lambda(f)(s)=\int_{\mathbb{R}}f(t)\overline{e_\lambda(st)}\,|t|^{2\lambda+1}\,d\mu_\lambda(t),\qquad e_\lambda(t)=j_\lambda(t)-ij'_\lambda(t),$$

F. Soltani [7] proved Pitt's inequality that can be equivalently written as

$$\||s|^{-\beta}\mathcal{F}_\lambda(f)(s)\|_{2,d\mu_\lambda}\leqslant\max\{c(\beta,\lambda),c(\beta,\lambda+1)\}\,\||t|^\beta f(t)\|_{2,d\mu_\lambda} \tag{6}$$

for $f\in S(\mathbb{R})$ and $0\leqslant\beta<\lambda+1$. Since $c(\beta,\lambda)\geqslant c(\beta,\lambda+1)$ (see [2]), then in fact (6) holds with the constant $c(\beta,\lambda)$ and therefore, we have in this case $C(\beta,k)=c(\beta,\lambda_k)$.

Finally, we remark that Pitt's inequality in L^2 for the multi-dimensional Dunkl transform has been recently established in [8] in the case of $\lambda_k-1/2<\beta<\lambda_k+1$. The obtained constant is not sharp.

Let $\mathbb{S}^{d-1}$ be the unit sphere in $\mathbb{R}^d$, $x'\in\mathbb{S}^{d-1}$, and dx' be the Lebesgue measure on the sphere. Set $a_k^{-1}=\int_{\mathbb{S}^{d-1}}v_k(x')\,dx'$, $d\omega_k(x')=a_kv_k(x')\,dx'$, and $\|f\|_{2,d\omega_k}=\bigl(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}|f(x')|^2\,d\omega_k(x')\bigr)^{1/2}$.

Let us denote by $\mathfrak{H}_n^d(v_k)$ the subspace of k-spherical harmonics of degree $n\in\mathbb{Z}_+$ in $L^2(\mathbb{S}^{d-1},d\omega_k)$. Let $\Delta_kf(x)=\sum_{j=1}^dD_j^2f(x)$ be the Dunkl Laplacian and $\mathfrak{P}_n^d$ be the space of homogeneous polynomials of degree n in $\mathbb{R}^d$. Then $\mathfrak{H}_n^d(v_k)$ is the restriction of $\ker\Delta_k\cap\mathfrak{P}_n^d$ to the sphere $\mathbb{S}^{d-1}$.

If l_n is the dimension of $\mathfrak{H}_n^d(v_k)$, we denote by $\{Y_n^j\colon j=1,\dots,l_n\}$ the real-valued orthonormal basis $\mathfrak{H}_n^d(v_k)$ in $L^2(\mathbb{S}^{d-1},d\omega_k)$. A union of these bases forms orthonormal basis in $L^2(\mathbb{S}^{d-1},d\omega_k)$ consisting of k-spherical harmonics, i.e., we have

$$L^2(\mathbb{S}^{d-1},d\omega_k)=\sum_{n=0}^\infty\oplus\mathfrak{H}_n^d(v_k). \tag{7}$$

Using (7) and the following Funk-Hecke formula for k-spherical harmonic $Y\in\mathfrak{H}_n^d(v_k)$

$$\int_{\S^{d-1}}Y(y')\overline{e_k(x,y')}\,d\omega_k(y')=\frac{(-i)^n\Gamma(\lambda_k+1)}{2^n\Gamma(n+\lambda_k+1)}\,Y(x')r^nj_{n+\lambda_k}(r),\qquad x=rx',$$

similarly to (2) we have the direct sum decomposition of $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$:

$$L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \mathfrak{R}_n^d(v_k), \qquad \mathfrak{R}_n^d(v_k) = \mathfrak{R}_0^d \otimes \mathfrak{H}_n^d(v_k),$$

and that the space $\mathfrak{R}_n^d(v_k)$ is invariant under the Dunkl transform.

The next result provides a sharp constant in the Pitt inequality for the Dunkl transform (3).

Theorem 1. *Let $\lambda_k = d/2 - 1 + |k|$ and $0 \leqslant \beta < \lambda_k + 1$, then for $f \in S(\mathbb{R}^d)$ we have*

$$C(\beta, k) = 2^{-\beta} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(\lambda_k + 1 - \beta))}{\Gamma(\frac{1}{2}(\lambda_k + 1 + \beta))}.$$

Sharpness of this inequality can be seen by considering radial functions.

W. Beckner in [1] proved the logarithmic uncertainty principle for the Fourier transform using Pitt's inequality (1): if $f \in S(\mathbb{R}^d)$, then

$$\int_{\mathbb{R}^d} \ln(|x|)|f(x)|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^d} \ln(|y|)|\widehat{f}(y)|^2\,dy \geqslant \left(\psi\left(\frac{d}{4}\right) + \ln 2\right) \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\,dx,$$

where $\psi(t) = d\ln\Gamma(t)/dt$ is the ψ-function.

For the Hankel transform the logarithmic uncertainty principle reads as follows (see [6]): if $f \in S(\mathbb{R}_+)$ and $\lambda \geqslant -1/2$, then

$$\int_{\mathbb{R}_+} \ln(t)|f(t)|^2 t^{2\lambda+1}\,dt + \int_{\mathbb{R}_+} \ln(s)|\mathcal{H}_\lambda(f)(s)|^2 s^{2\lambda+1}\,ds \geqslant \left(\psi\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) + \ln 2\right) \int_{\mathbb{R}_+} |f(t)|^2 t^{2\lambda+1}\,dt.$$

For the one-dimensional Dunkl transform of functions $f \in S(\mathbb{R})$, F. Soltani [7] has recently proved that

$$\int_{\mathbb{R}} \ln(|t|)|f(t)|^2 |t|^{2\lambda+1}\,dt + \int_{\mathbb{R}} \ln(|s|)|\mathcal{F}_\lambda(f)(s)|^2 |s|^{2\lambda+1}\,ds \geqslant \left(\psi\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) + \ln 2\right) \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 |t|^{2\lambda+1}\,dt.$$

Using Pitt's inequality (3) we obtain the logarithmic uncertainty principle for the multi-dimensional Dunkl transform.

Theorem 2. *Let $\lambda_k = d/2 - 1 + |k|$ and $f \in S(\mathbb{R}^d)$. We have*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \ln(|x|)|f(x)|^2\,d\mu_k(x) + \int_{\mathbb{R}^d} \ln(|y|)|\mathcal{F}_k(f)(y)|^2\,d\mu_k(y) \geqslant \left(\psi\left(\frac{\lambda_k+1}{2}\right) + \ln 2\right) \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\,d\mu_k(x).$$

The work was supported by grants RFBR № 13-01-00043, № 13-01-00045, Ministry of education and science of Russian Federation № 5414ГЗ, № 1.1333.2014K, Dmitry Zimin's Dynasty Foundation, MTM 2011-27637, 2014 SGR 289.

References

[1] W. Beckner, "Pitt's inequality and uncertainty principle", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **123** (1995), 1897–1905.

[2] D. R. Yafaev, "Sharp constants in the Hardy–Rellich inequalities", *J. Funct. Anal.*, **168**:1 (1999), 121–144.

[3] S. Eilertsen, "On weighted fractional integral inequalities", *J. Funct. Anal.*, **185**:1 (2001), 342–366.

[4] M. Rösler, "Dunkl operators. Theory and applications", *Orthogonal Polynomials and Special Functions*, Lecture Notes in Math., **1817**, Springer-Verlag, 2002, 93–135.

[5] L. De Carli, "On the L^p–L^q norm of the Hankel transform and related operators", *J. Math. Anal. Appl.*, **348** (2008), 366–382.

[6] S. Omri, "Logarithmic uncertainty principle for the Hankel transform", *Int. Trans. Spec. Funct.*, **22**:9 (2011), 655–670 .

[7] F. Soltani, "Pitt's inequality and logarithmic uncertainty principle for the Dunkl transform on $\mathbb{R}$", *Acta Math. Hungar.*, **143**:2 (2014), 480–490.

[8] F. Soltani, "Pitt's inequalities for the Dunkl transform on $\mathbb{R}^d$", *Int. Trans. Spec. Funct.*, **25**:9 (2014), 686–696.

Necessary and sufficient conditions for the boundedness of the fractional integral operators in the local Morrey-type spaces on Carnot groups

V. S. Guliyev

Ahi Evran University, Turkey

Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan

Let $\mathbb{G}$ be a Carnot group (nilpotent stratified Lie group), ρ its homogeneous norm and Q its homogeneous dimension. The fractional integral $I_\alpha f$ on Carnot group $\mathbb{G}$ is defined by

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{G}} \rho(y^{-1}x)^{\alpha-Q} f(y)\,dy, \qquad 0 < \alpha < Q.$$

Let $0 < p, \theta \leqslant \infty$ and let w be a non-negative measurable function on $(0,\infty)$. We denote by $LM_{p\theta,w}(\mathbb{G})$, $GM_{p\theta,w}(\mathbb{G})$, the local Morrey-type spaces, the global Morrey-type spaces respectively, which are the spaces of all functions $f \in L_p^{\rm loc}(\mathbb{G})$ with finite quasi-norms

$$\|f\|_{LM_{p\theta,w}(\mathbb{G})} = \left(\int_0^\infty w(r)^\theta \left(\int_{\{x\in\mathbb{G}:\rho(x)<r\}} |f(x)|^p\,dx\right)^{\theta/p} dr\right)^{1/\theta},$$

$$\|f\|_{GM_{p\theta,w}(\mathbb{G})} = \sup_{x\in\mathbb{G}} \left(\int_0^\infty w(r)^\theta \left(\int_{\{y\in\mathbb{G}:\rho(y^{-1}\cdot x)<r\}} |f(y)|^p\,dy\right)^{\theta/p} dr\right)^{1/\theta}$$

respectively. For $\theta = \infty$ and $w(r) = r^{-\frac{\lambda}{p}}$ with $0 < \lambda < Q$ the space $M_{p,\lambda}(\mathbb{G}) \equiv GM_{p\infty,r^{-\lambda/p}}(\mathbb{G})$ is the Morrey space, for $\theta = \infty$ the space $M_{p,w}(\mathbb{G}) \equiv GM_{p\infty,w}(\mathbb{G})$ is the generalized Morrey space on Carnot group $\mathbb{G}$.

A survey will be given of recent results in which, for certain ranges of the numerical parameters n, p_1, θ_1, p_2, θ_2 necessary and sufficient conditions on the functions w_1 and w_2 are established ensuring the boundedness of the fractional integral operators from one local Morrey-type space $LM_{p_1\theta_1,w_1}(\mathbb{G})$ to another one $LM_{p_2\theta_2,w_2}(\mathbb{G})$.

It is shown that from the above result the Sobolev-Morrey embeddings for Carnot groups follow easily. A priori estimates for the sub-Laplacian in corresponding Besov-Morrey spaces are also proved.

Note that, the local Morrey-type spaces $LM_{p\theta,w}(\mathbb{G})$ defined on homogeneous Lie groups $\mathbb{G}$ were introduced in doctoral thesis [1] by Guliyev (see also [2]) and the global Morrey-type spaces $GM_{p\theta,w}(\mathbb{R}^n)$ defined on n-dimensional Euclidian space $\mathbb{R}^n$ were introduced in [3] by Burenkov and Guliyev (see also [4], [5]). The main purpose of [1] (also of [2]) is to give some sufficient conditions for the boundedness of fractional integral operators and singular integral operators defined on homogeneous Lie groups in the local Morrey-type space $LM_{p\theta,w}(\mathbb{G})$. In a series of papers by Burenkov, H. Guliyev and V. Guliyev, etc. (see [3], [4], [5], [6]), some necessary and sufficient conditions for the boundedness of fractional maximal operators, fractional integral operators and singular integral operators in local Morrey-type spaces $LM_{p\theta,w}(\mathbb{R}^n)$ were given.

This research was supported by the grant of Science Development Foundation under the President of the Republic of Azerbaijan Grant EIF-2013-9(15)-46/10/1 and by the grant of Presidium Azerbaijan National Academy of Science 2015.

Joint work with Dr. S.Q. Hasanov.

References

[1] V. S. Guliyev, *Integral operators on function spaces on the homogeneous groups and on domains in* $\mathbb{R}^n$, Doctor's degree dissertation, Mat. Inst. Steklov, Moscow, 1994 (in Russian), 329 pp.

[2] V. S. Guliyev, *Function spaces*, *Integral Operators and Two Weighted Inequalities on Homogeneous Groups. Some Applications*, Chashioglu, Baku, 1999 (in Russian), 332 pp.

[3] V. I. Burenkov, H. V. Guliyev,, "Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in the local Morrey-type spaces", *Studia Math.*, **163**:2 (2004), 157–176.

[4] by V. I. Burenkov, H. V. Guliyev, V. S. Guliyev "Necessary and sufficient conditions for boundedness of the fractional maximal operators in the local Morrey-type spaces", *J. Comput. Appl. Math.*, **208**:1 (2007), 280–301.

[5] V. I. Burenkov, V. S. Guliyev, "Necessary and sufficient conditions for the boundedness of the Riesz potential in local Morrey-type spaces", *Potential Anal.*, **30**:3 (2009), 211–249.

[6] V. Burenkov, V. S. Guliyev, A. Serbetci, T. V. Tararykova, "Necessary and sufficient conditions for the boundedness of genuine singular integral operators in local Morrey type spaces", *Eurasian Math. J.*, **1** (2010), 32–53.

On the simultaneous approximation by the Bieberbach polynomials on complex domains

D. M. Israfilov
Balikesir University, *Turkey*

In this talk we investigate the approximation properties of the Bieberbach polynomials and their derivatives on complex domains. We prove that these polynomials and their derivatives converge to the Riemann conformai mapping function of a simply connected domain onto unit disk and their derivatives, respectively. We also estimate the rate of this convergence with dependence of the differential properties of the boundary.

Moduli of the supporting convexity and the supporting smoothness

G. Ivanov

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)
National Research University "Higher School of Economics"

In our talk we introduce the moduli of the supporting convexity and the supporting smoothness of a Banach space, which characterize the deviation of the unit sphere from an arbitrary supporting hyperplane.

Let X be a real Banach space. We use $\langle p, x\rangle$ to denote the value of a functional $p \in X^*$ at a vector $x \in X$.

Let

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2} : \ \|x\| = \|y\| = 1, \ \|x-y\| \geqslant \varepsilon\right\}$$

and

$$\rho_X(\tau) = \sup\left\{\frac{\|x+y\|}{2} + \frac{\|x-y\|}{2} - 1 : \|x\| = 1, \ \|y\| = \tau\right\}.$$

The functions $\delta_X(\,\cdot\,)\colon [0,2] \to [0,1]$ and $\rho_X(\,\cdot\,)\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ are referred to as the moduli of convexity and smoothness of X respectively.

We say that y is *quasiorthogonal* to the vector $x \in X \setminus \{o\}$ and write $y \urcorner x$ if there exists a functional p such that $\|p\| = 1$, $\langle p, x\rangle = \|x\|$, $\langle p, y\rangle = 0$.

Define the *modulus of local supporting convexity* as

$$\lambda^-_X(r) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \|x\| = \|y\| = 1, \ y \urcorner x, \ \|x + ry - \lambda x\| = 1\}.$$

Define the *modulus of local supporting smoothness* as

$$\lambda^+_X(r) = \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \|x\| = \|y\| = 1, \ y \urcorner x, \ \|x + ry - \lambda x\| = 1\}.$$

We show that the modulus of supporting smoothness and the modulus of smoothness are equivalent at zero, the modulus of supporting convexity is equivalent at zero to the modulus of convexity.

Theorem 1. *For any $r \in [0;1]$ we have that $\delta_X(r) \leqslant \lambda^-_X(r) \leqslant \delta_X(2r)$.*

Theorem 2. *For any $r \in [0, \frac{1}{2}]$ we have that $\rho_X\left(\frac{r}{2}\right) \leqslant \lambda^+_X(r) \leqslant \rho_X(2r)$.*

We prove a Day–Nordlander type result for these moduli. The Day–Nordlander theorem (see [7]) asserts that $\delta_X(\varepsilon) \leqslant \delta_H(\varepsilon)$ for $\varepsilon \in [0,2]$, where H denotes an arbitrary Hilbert space.

Theorem 3. *Let X be an arbitrary Banach space. Then*

$$\lambda^-_X(r) \leqslant \lambda^-_H(r) = 1 - \sqrt{1-r^2} = \lambda^+_H(r) \leqslant \lambda^+_X(r) \qquad \forall r \in [0,1].$$

If at least one of these inequalities turns into equality, then X is a Hilbert space.

In the paper [1] J. Banaś defined and studied some new modulus of smoothness. Namely, he defined

$$\delta_X^+(\varepsilon) = \sup\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2} : \|x\| = \|y\| = 1,\ \|x-y\| \leqslant \varepsilon\right\}, \qquad \varepsilon \in [0,2].$$

The function $\delta_X^+(\cdot)$ is called the *Banaś modulus*.

In the papers [1], [2], [3], [4] several interesting results concerning this modulus were obtained. Particulary, in [1], J. Banaś proved that a space is uniformly smooth iff $\frac{\delta_X^+(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0$ as $\varepsilon \to 0$. However, from the definition a space is uniformly smooth if and only if $\frac{\rho_X(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0$ as $\varepsilon \to 0$. This leads to the question: are the modulus of smoothness and the modulus of Banaś equivalent at zero? It is easy to check that there exist positive constant a, b such that $\delta_X^+(t) \leqslant a\rho_X(bt)$, but the lower estimate of the modulus of Banaś in terms of the modulus of smoothness is unknown. In the next theorem we prove that the modulus of Banaś and the modulus of supporting smoothness are equivalent at zero, so Theorem 2 answers the above question.

Theorem 4. *Let X be an arbitrary Banach space. Then the following inequalities hold*:

$$\delta_X^+(2r) \leqslant \lambda_X^+(r) \leqslant 2\delta_X^+(3r) \qquad \forall r \in \left[0, \frac{2}{3}\right].$$

References

[1] J. Banaś, “On moduli of smoothness of Banach spaces”, *Bull. Pol. Acad. Sci., Math.*, **34** (1986), 287–293.

[2] J. Banaś, K. Fraczek, “Deformation of Banach spaces ”, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, **34** (1993), 47–53.

[3] J. Banaś, A. Hajnosz, S. Wedrychowicz, “On convexity and smoothness of Banach space”, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, **31**:3. (1990), 445–452.

[4] J. Banaś, B. Rzepka, “Functions related to convexity and smoothness of normed spaces”, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **46**:3 (1997), 395–424.

[5] M. Baronti, P. Papini, “Convexity, smoothness and moduli”, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **70**:6 (2009), 2457–2465.

[6] J. Diestel, *Geometry of Banach Spaces. Selected Topics*, Lecture Notes in Math., **485**, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[7] G. Nordlander, “The modulus of convexity in normed linear spaces”, *Arkiv för Matematik*, **4**:1 (1960), 15–17.

On a Volterra equation of the second kind with "incompressible" kernel

M. T. Jenaliyev[a], M. M. Amangaliyeva[a], M. T. Kosmakova[b], M. I. Ramazanov[c]

[a] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling*
[b] *Al-Farabi Kazakh National University*
[c] *E. A. Buketov Karaganda State University*

Solving the boundary value problems of the heat equation in noncylindrical domains degenerating at the initial moment leads to the necessity of research of the singular Volterra integral equations of the second kind, when the norm of the integral operator is equal to 1. The paper deals with the singular Volterra integral equation of the second kind, to which by virtue of 'the incompressibility' of the kernel the classical method of successive approximations is not applicable. It is shown that the corresponding homogeneous equation when $|\lambda| > 1$ has a continuous spectrum, and the multiplicity of the characteristic numbers increases depending on the growth of the modulus of the spectral parameter $|\lambda|$. By the Carleman-Vekua regularization method [1] the initial equation is reduced to the Abel equation. The eigenfunctions of the equation are found explicitly. Similar integral equations also arise in the study of spectral-loaded heat equations [2].

When solving model problems for parabolic equations in domains with moving boundary the singular integral equations of the following form arise:

$$\varphi(t) - \lambda \int_0^t K(t,\tau)\varphi(\tau)\, d\tau = f(t), \qquad t > 0, \tag{1}$$

where

$$K(t,\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)} \right) + \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} \exp\left(-\frac{t-\tau}{4a^2} \right) \right\}.$$

The kernel $K(t,\tau)$ has the following properties:

1) $K(t,\tau) \geqslant 0$ and continuously at $0 < \tau < t < +\infty$;
2) $\lim_{t\to t_0} \int_{t_0}^t K(t,\tau)\, d\tau = 0$, $t_0 \geqslant \varepsilon > 0$;
3) $\lim_{t\to 0} \int_0^t K(t,\tau)\, d\tau = 1$, $\lim_{t\to +\infty} \int_0^t K(t,\tau)\, d\tau = 1$.

The kernel $K(t,\tau)$ is summable with weight function $t^{-1/2}$.

Problem. To find the solution $\varphi(t)$ of integral equation (1) satisfying the condition $\sqrt{t}\cdot\varphi(t) \in L_\infty(0,\infty)$ for any given function $\sqrt{t}\cdot f(t) \in L_\infty(0,\infty)$ and each given complex spectral parameter $\lambda \in \mathcal{C}$.

The following theorem holds.

Theorem. *The nonhomogeneous integral equation* (1) *is solvable in the class* $\sqrt{t}\cdot\varphi(t) \in L_\infty(0,\infty)$ *for any right-hand side* $\sqrt{t}\cdot f(t) \in L_\infty(0;\infty)$ *and for each* $|\lambda| > 1$. *The corresponding homogeneous equation has* $(N_1 + N_2 + 1)$ *eigenfunctions*

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{p_k}{t} - \frac{t}{4a^2} \right) + \frac{\lambda\sqrt{\pi}}{2a} \exp\left(\frac{\lambda^2 - 1}{4a^2} t - \frac{\lambda\sqrt{-p_k}}{a} \right) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{2a\sqrt{-p_k} - \lambda t}{2a\sqrt{t}} \right),$$

and the general solution of integral equation (1) *can be written as*

$$\varphi(t) = F(t) + \frac{\lambda^2}{4a^2}\int_0^t \exp\left(\frac{\lambda^2(t-\tau)}{4a^2}\right)F(t)\,d\tau + \sum_{k=-N_1}^{N_2} C_k\varphi_k(t),$$

where

$$N_1 = \left[\frac{\ln|\lambda| + \arg\lambda}{2\pi}\right], \qquad N_2 = \left[\frac{\ln|\lambda| - \arg\lambda}{2\pi}\right],$$

$$F(t) = \widetilde{f}_2(t) - \frac{\lambda}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\widetilde{f}_2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau,$$

and the function $\sqrt{t}\cdot\exp\{-t/(4a^2)\}\cdot\widetilde{f}_2(t) \in L_\infty(0,\infty)$ *is defined by equality*

$$\widetilde{f}_2(t) = \widetilde{f}(t) + \lambda\int_0^t r(t,\tau)\widetilde{f}(\tau)\,d\tau.$$

References

[1] I. N. Vekua, *Generalized analytic functions*, FIZMATLIT, Moscow, 1988.

[2] M. M. Amangaliyeva, D. M. Akhmanova, M. T. Jenaliyev, M. I. Ramazanov, “Boundary value problems for a spectrally loaded heat operator with load line approaching the time axis at zero or infinity”, *Differentsialniye uravneniya*, **47**:2 (2011), 231–243.

Norm of union for dual Morrey spaces with applications to nonlinear elliptic PDEs

E. Kalita
Institute of Applied Mathematics and Mechanics

For Banach spaces, the union as a general construction is a nonsence – it is not even a linear set. For a purposes of analysis, the construction of a sum of spaces is sufficient in (almost) all situations. For nolinear PDEs it is not so. Even minor simpleness of a construction $\inf_j \|f\|_{X_j}$ in comparison with $\inf_{\sum_j f_j = f} \sum_j \|f_j\|_{X_j}$ can be crucial.

For $p \in (1, \infty)$, $a \in (0, n(p-1))$ we let define spaces $L_{p,a} = L_{p,a}(R^n)$ by the (quasi)norm

$$\|f\|_{p,a} = \inf_{\sigma} \|f; L_p(R^n; \omega)\|,$$

$L_p(R^n; \omega)$ – weighted Lebesgue spaces with

$$\omega(x) = \left(\int_{R_+^{n+1}} r^{a/(1-p)} 1_{\{|x-y|<r\}} \, d\sigma(y, r) \right)^{1-p}$$

inf is taken over nonnegative Borel measures σ on $R_+^{n+1} = \{(y, r) : y \in R^n, r > 0\}$ with normalization $\sigma(R_+^{n+1}) = 1$.

N.B. The dual for $L_{p,a}$ with $a > 0$ are classical Morrey spaces.

We consider nonlinear elliptic equations of the form

$$\operatorname{div}^m A(x, D^m u) = f(x)$$

in R^n with the natural energetic space W_p^m, $p \in (1, \infty)$, and standard structure conditions (e.g. m, p-Laplacian).

We establish the existence of very weak solution $u \in W_{p,a}^m$ for some range of $a \in (0, a^*)$ where $a^* > 0$ depends on n, m, p and a modulus of ellipticity of equation.

Key difference from spaces W_q^m with $q \neq p$ (a priori estimates in $W_{p-\varepsilon}^m$ are known since 1993) is that weighted spaces $W_{p,\omega}^m$ allow to establish pseudomonotonicity of our nonlinear operator.

On two S. M. Nikol'skii problems

G. Kalyabin
Samara State Technical University

1. Equivalence of different spherical moduli of smoothness.

Let S^{n-1} be a unit sphere in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, f be a measurable real-valued function belonging to $L_p(S^{n-1})$, $1 < p < \infty$, $\Delta_t f(\mu)$ stand for the spherical difference with the step $t \in (0, \pi/2)$ defined as

$$\Delta_t f(\mu) := (\sin t)^{2-n} \int_{(\sigma,\mu)=\cos t} (f(\sigma) - f(\mu))\, d\sigma \tag{1}$$

where the integration is taken over the $(n-2)$-dimensional parallels, the point μ being a north-pole.

In 1981 M. Wehrens [1] considered the so-called "amplified" moduli of smoothness

$$\omega_k^\star(\delta; f; L_p) := \sup_{0<t_1,t_2\ldots t_k\leqslant\delta} \|\Delta_{t_1}(\Delta_{t_2}(\ldots(\Delta_{t_k} f(\mu))\ldots)\|_p, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad \delta < \pi/2, \tag{2}$$

and proved that this quantity is equivalent to J. Peetre K-functional

$$K(\delta^{2k}, f; L_p, W_p^{2k}) := \inf\{\delta^{2k}\|\mathbb{D}^k g\|_p + \|f - g\|_p : g \in C^\infty(S^{n-1})\} \tag{3}$$

with $\mathbb{D}$ denoting the Laplace-Beltrami operator on S^{n-1}. It was also claimed in [1] that the *ordinary* moduli of smoothness $\omega_k(\delta; f; L_p) := \sup_{0<t\leqslant\delta} \|\Delta_t^k f(\mu)\|_p$ *do not* yield such an equivalence. The latter assertion was refuted by P. I. Lizorkin and S. M. Nikol'skii [2] for $p = 2$. The whole range of p was covered in [3]:

Theorem 1. *There is a constant $c := c(k, n, p) > 0$, $1 < p < \infty$, such that*:

$$c^{-1}\omega_k^\star(\delta; f; L_p) \leqslant K(\delta^{2k}, f; L_p, W_p^{2k}) \leqslant c\omega_k(\delta; f; L_p); \tag{4}$$

in particular, the ordinary and the amplified moduli of smoothness are equivalent to each other.

The proof uses the Strichartz theorem on multipliers with respect to spherical harmonics and the estimates of derivatives (over positive parameter m) for Mehler integral form presentation of Gegenbauer polynomials $C_m^{0.5n-1}(\cos t)$, $m \in \mathbb{N}$.

2. On functions whose differences belong to $L_p(0,1)$.

Let $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}(I)$, $I := (0,1)$ be the set of all measurable and almost everywhere finite functions $f\colon I \to \mathbb{C}$, $0 < p \leqslant \infty$, $L_p \equiv L_p(I)$ be the Lebesgue spaces of functions possessing a finite quasi-norm (a norm as $p \geqslant 1$):

$$\|f\|_{L_p(I)} := \left(\int_I |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}, \qquad \|f\|_{L_\infty(I)} := \operatorname{ess\,sup}_{x\in I} |f(x)|. \tag{5}$$

Introduce a difference of f with the step $h \in I$ at the point $x \in (0, 1-h)$: $\Delta_h f(x) := f(x+h) - f(x)$, and the higher differences ($k \geqslant 2$, [4, § 4.2])

$$\Delta_h^k f(x) := \Delta_h\left(\Delta_h^{k-1} f(x+h) - \Delta_h^{k-1} f(x)\right), \qquad h \in (0, 1/k), \quad x \in (0, 1-kh),$$

for which one has the estimates $\|\Delta_h^k f(\cdot)\|_{L_p(0,1-kh)} \leqslant c(p,k)\|f(\cdot)\|_{L_p(I)}$.

In the 1970s, Sergey Mikhailovich Nikol'skii raised the following question (according to O. V. Besov): if $\|\Delta_h^k f\|_{L_p(0,1-kh)}$ is finite for all h from sufficiently "massive" set $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}_+$ is it true that f belongs to $L_p(I)$? Our goal is to answer this question in the affirmative; moreover the answer is given for general families of linear combination of shifts.

Definition. Given two finite collections of numbers

$$\begin{gathered} \{\beta\} \equiv \{\beta_j\}_{j=0}^k, \qquad \{\tau\} \equiv \{\tau_j\}_{j=0}^k, \qquad \beta_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \qquad \tau_j \in \mathbb{R}, \\ j \in \{0, 1, \dots k\}, \qquad k \geqslant 1, \qquad \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k. \end{gathered} \tag{6}$$

Denote $H = H(\{\tau\}) := (\tau_k - \tau_0)^{-1}$ and consider the family of linear operators

$$\begin{gathered} \mathcal{D}_h^k \equiv \mathcal{D}_{h,\{\beta\}\{\tau\}}^k : \mathfrak{M}(I) \to \mathfrak{M}(I_h), \qquad I_h := (-\tau_0 h, 1 - \tau_k h); \\ \mathcal{D}_h^k f(x) := \sum_{j=0}^k \beta_j f(x + \tau_j h), \qquad 0 < h < H, \quad x \in I_h. \end{gathered} \tag{7}$$

Theorem 2. *Let $f \in \mathfrak{M}(I)$ and for some $p \in (0, \infty]$ the functions $\mathcal{D}_h^k f \in L_p(I_h)$ for all h from a set $\mathcal{H} \subset (0, H/2)$ of positive Lebesgue measure. Then $f \in L_p(I)$.*

Remark 1. In the proof only the classical results on the measurable functions [6] are involved.

Remark 2. Simple examples show that the number $H/2$ in Theorem 2 cannot be replaced by any larger one.

Remark 3. As for multidimensional case (say for "good" bounded domains in $\mathbb{R}^d$) the question posed by S. M. Nikol'skii remains still open except when it can be reduced to $d = 1$.

The work was supported by grant of Russian Foundation of Basic Research, project No 14-01-00684.

The author is deeply grateful to O. V. Besov and V. I. Burenkov for their interest to this work and a number of valuable remarks.

References

[1] M. Wehrens, *Functional Analysis and Approximation* (Proc. Conf., Oberwohlfach, 1980), Birkhäuser, 1981, 233–245.

[2] P. I. Lizorkin, S. M. Nikol'skii, *Anal. Math.*, **9** (1983), 207–221.

[3] G. A. Kalyabin, *Soviet Math. Doklady*, **35**:3 (1987), 619–622.

[4] S. M. Nikol'skii, *Approximation of Functions of Several Variables and Embedding Theorems*, Springer-Verlag, New York, 1975.

[5] G. A. Kalyabin, *Doklady Mathematics*, **91**:2 (2015), 163–166.

[6] I. P. Natanson, *Theory of Functions of a Real Variable*, Ungar, New York, 1955.

Nikol'skii inequality and approximation of functions in the framework of non-standard Banach function spaces

V. Kokilashvili

A. Razmadze Mathematical Institute

The goal of our talk is to present some embedding theorems of classical and nonstandard Banach function spaces in weighted setting, applications to the approximation theory. In particular, we plan to discuss the following topics.

• One and two-weighted versions of Nikol'skii inequalities.

• Ul'yanov type embedding theorems.

• Approximation inequalities with different space exponents in their different sides.

• Invariant classes with respect to the conjugate operators in the frame of variable exponent Lebesgue $L^{p(x)}$ spaces with $\inf p(x) = 1$.

• Approximation of conjugate functions in above mentioned case.

Boas theorem for Lorentz spaces $\Lambda_q(\omega)$

A. N. Kopezhanova

L. N. Gumilyov Eurasian National University

Let $0 < q \leqslant \infty$ and ω be a nonnegative function on $[0,1]$. The generalized Lorentz spaces $\Lambda_q(\omega)$ consists of the functions f on $[0,1]$ such that $\|f\|_{\Lambda_q(\omega)} < \infty$, where

$$\|f\|_{\Lambda_q(\omega)} := \begin{cases} \left(\int_0^1 (f^*(t)\omega(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} & \text{for } 0 < q < \infty, \\ \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} f^*(t)\omega(t) & \text{for } q = \infty. \end{cases}$$

These spaces $\Lambda_q(\omega)$ coincide to the classical spaces L_{pq} in the case $\omega(t) = t^{\frac{1}{p}}$, $1 < p < \infty$ (see [1]).

Let $\mu = \{\mu(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ be a sequence of positive number and the space $\lambda_q(\mu)$ consists of all sequences $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ such that $\|a\|_{\lambda_q(\mu)} < \infty$, where

$$\|a\|_{\lambda_q(\mu)} := \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k^*\mu(k))^q \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{q}} & \text{for } 0 < q < \infty, \\ \sup\limits_{k} a_k^*\mu(k) & \text{for } q = \infty. \end{cases}$$

Here $\{a_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ is the nonincreasing rearrangement of the sequence $\{|a_k|\}_{k=1}^{\infty}$. Boas theorem was generalized also for more general Lorentz spaces $\Lambda_q(\omega)$ in 1974 by L.-E. Persson for the case when $\Phi = \{e^{2\pi ikx}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ is the trigonometric system (see [2]).

Let the function f be periodic with period 1 and integrable on $[0,1]$ and let $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ be an orthonormal system on $[0,1]$. The numbers

$$a_k = a_k(f) = \int_0^1 f(x)\overline{\varphi_k(x)}dx, \qquad k \in \mathbb{N}$$

are called the Fourier coefficients of the functions f with respect to the system $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$.

We say that the orthonormal system $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ is regular if there exists a constant B, such that

1) for every segment e from $[0,1]$ and $k \in \mathbb{N}$ it yields that

$$\left|\int_e \varphi_k(x)dx\right| \leqslant B\min(|e|, 1/k),$$

2) for every segment w from $\mathbb{N}$ and $t \in (0,1]$ we have that

$$\left(\sum_{k\in w} \varphi_k(\,\cdot\,)\right)^*(t) \leqslant B\min(|w|, 1/t),$$

where $\left(\sum_{k\in w}\varphi_k(\cdot)\right)^*(t)$ as usual denotes the nonincreasing rerrangement of the function $\sum_{k\in w}\varphi_k(x)$.

Examples of regular systems are all trigonometric systems, the Walsh system and Price's system. In [3], [4], [5] some results were obtained with respect to the regular system using network space.

Let $\delta > 0$ be a fixed parameter. Consider a nonnegative function $\omega(t)$ on $[0,1]$. We define the following classes:

$$A_\delta := \{\omega(t) : \omega(t)t^{-\frac{1}{2}-\delta} \text{ is an increasing function and } \omega(t)t^{-1+\delta} \text{ is a decreasing function}\},$$
$$B_\delta := \{\omega(t) : \omega(t)t^{-\delta} \text{ is an increasing function and } \omega(t)t^{-1+\delta} \text{ is a decreasing function}\},$$

Then the classes A, B can be defined as follows: $A = \bigcup_{\delta>0} A_\delta$, $B = \bigcup_{\delta>0} B_\delta$.

The main results of this work are the following generalizations of the Boas theorem.

Theorem 1. *Let $1 \leqslant q \leqslant \infty$ and $\omega \in B$. Let $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ be a regular system and let $f \overset{\text{a.e.}}{=} \sum_{k=1}^\infty a_k\varphi_k$. If f is a nonnegative and a nonincreasing function, then*

$$\left(\int_0^1 (f(t)\omega(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \approx \left(\sum_{k=1}^\infty (a_k^*\mu(k))^q \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{q}},$$

where $\mu(k) = k\omega(1/k)$.

We say that a function f on $[0,1]$ is generalized monotone if there exists some constant $M > 0$ such that

$$|f(x)| \leqslant M\frac{1}{x}\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|, \qquad x > 0.$$

Our next main result reads.

Theorem 2. *Let $1 \leqslant q \leqslant \infty$ and $\omega \in A$. Let $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ be a regular system and let $f \overset{\text{a.e.}}{=} \sum_{k=1}^\infty a_k\varphi_k$. If f is a nonnegative and a generalized monotone function, then*

$$\|f\|_{\Lambda_q(\omega,[0,1])} \approx \left(\sum_{k=1}^\infty (a_k^*\mu(k))^q \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{q}},$$

where $\mu(k) = k\omega(1/k)$.

References

[1] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces. An Introduction*, Springer Verlag, Berlin, 1976.

[2] L.-E. Persson, *Relation between regularity of periodic functions and their Fourier series*, Ph.D thesis, Dept. of Math., Umeå University, 1974.

[3] E. D. Nursultanov, "On the coefficients of multiple Fourier series from L_p-spaces", *Izv. Math.*, **64**:1 (2000), 93–120.

[4] E. D. Nursultanov, "Net spaces and the Fourier transform", *Dokl. Akad. Nauk*, **361**:5 (1998), 597–599.

[5] E. D. Nursultanov, "Network spaces and inequalities of Hardy–Littlewood type", *Sb. Math.*, **189**:3-4 (1998), 399–419.

On sharp constants in fractional Sobolev and Hardy inequalities

A. I. Nazarov
St.-Petersburg Branch of Steklov Mathematical Institute
St.-Petersburg University

We discuss the relations between two types of fractional Laplacians – "Dirichlet" and "Navier" ones – in bounded domains in $\mathbb{R}^n$. Then we prove the coincidence of the Sobolev and Hardy constants relative to these operators of any real order $m \in (0, \frac{n}{2})$.

This talk is based on joint papers with Roberta Musina, see [1], [2], [3].

Author was supported by RFBR grant 14-01-00534 and by St.-Petersburg University grant 6.38.670.2013.

References

[1] R. Musina, A. I. Nazarov, "On fractional Laplacians", *Comm. in PDEs*, **39**:9 (2014), 1780–1790.

[2] R. Musina, A. I. Nazarov, *On fractional Laplacians*–2, 2014, arXiv: 1408.3568.

[3] R. Musina, A. I. Nazarov, "On the Sobolev and Hardy constants for the fractional Navier Laplacian", *Nonlinear Analysis*, 2014.

Norm convolution inequalities in L_p

E. D. Nursultanov[a], S. Yu. Tikhonov[b], N. T. Tleukhanova[c]

[a] *Kazakhstan Branch of Lomonosov Moscow State University*

[b] *Centre de Recerca Matematica*

[c] *L. N. Gumilyov Eurasian National University*

Let $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $L_p \equiv L_p(\mathbb{R})$ and let the convolution operator be given by

$$(Af)(x) = (K * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x-y)f(y)dy, \qquad K \in L_{\text{loc}}.$$

Let $d > 0$ and let

– M_1 be the set of all intervals of length $\leqslant d$;
– M_2 be the set of all measurable sets $e \subset [-d, d]$ such that $\operatorname{diam}(e) = \sup_{x,y \in e} |x-y| \leqslant d$;
– W_1 be the set of all finite arithmetic progressions of integer numbers;
– W_2 be the set of all finite sets $w \subset \mathbb{Z}$ such that $\min_{i,j \in w} |i-j| \geqslant 2$.

Now we define the sets $\mathfrak{L}_d, \mathfrak{U}_d, \mathfrak{V}_d$ as follows:

$$\mathfrak{L}_d = \left\{ E = \bigcup_{k \in w} (e + kd) : e \in M_1,\ w \in W_1 \right\},$$

$$\mathfrak{U}_d = \left\{ E = \bigcup_{k \in w} (e_k + kd) : e_k \in M_2,\ w \in W_2,\ |e_k| = |e_j|,\ k, j \in w \right\},$$

$$\mathfrak{V}_d = \left\{ E = \bigcup_{x \in e} (x + w(x)d) : e \in M_2,\ w(x) \in W_2,\ |w(x)| = |w(y)|,\ x, y \in e \right\},$$

where $|e|$ is the measure of a set $e \in M_i$ and $|w|$ is the number of elements of $w \in W_i$. Note that $\mathfrak{L}_d \subset \mathfrak{U}_d \cap \mathfrak{V}_d$. If $E \in \mathfrak{L}_d$, then $|E| = |e||w|$, where e, w are the sets from the representation of E. Similarly, this property holds for $E \in \mathfrak{U}_d$ and $E \in \mathfrak{V}_d$.

Theorem 1. *Let $1 < p < q < \infty$. If for some $d > 0$ we have either*

$$\sup_{E \in \mathfrak{U}_d} \frac{1}{|E|^{1/p - 1/q}} \int_E |K(x)|\, dx \leqslant D$$

or

$$\sup_{E \in \mathfrak{V}_d} \frac{1}{|E|^{1/p - 1/q}} \int_E |K(x)|\, dx \leqslant D,$$

then the operator $Af = K * f$ is bounded from $L_p(\mathbb{R})$ to $L_q(\mathbb{R})$ and

$$\|A\|_{L_p \to L_q} \leqslant C(p,q) D,$$

where $C(p,q)$ depends on p and q.

Theorem 2. *Let* $1 < p < q < \infty$, $d > 0$, *and the operator* $Af = K * f$ *be bounded from* $L_p(\mathbb{R})$ *to* $L_q(\mathbb{R})$. *If for any* $B > 0$ *we have*

$$\sup_{\substack{E\in\mathfrak{L}_d\\ |E|\leqslant B}} \frac{1}{|E|^{1/p-1/q}} \left| \int_E K(x)\,dx \right| \leqslant C(B) < \infty,$$

then

$$\sup_{E\in\mathfrak{L}_d} \frac{1}{|E|^{1/p-1/q}} \left| \int_E K(x)\,dx \right| \leqslant C(p,q)\|A\|_{L_p\to L_q}.$$

Corollary. *Let* $1 < p \leqslant q < \infty$ *and* $\lambda = 1 - (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$. *Let also*

$$\mathcal{K}(x) = \frac{e^{i|x|^a}}{|x|^b},$$

where $a \neq 0$, $a \neq 1$, *and* $b \neq \lambda$. *If*

$$\max(q, p') > \frac{a}{\lambda - b} > 0,$$

then the operator $Af = \mathcal{K} * f$ *is not bounded from* L_p *to* L_q.

References

[1] R. O'Neil, "Convolution operators and $L(p,q)$ spaces", *Duke Math. J.*, **30** (1963), 129–142.

[2] V. D. Stepanov, *Some topics in the theory of integral convolution operators*, Dalnauka, Vladivostok, 2000.

[3] P. Sjölin, "Regularity of solutions to the Schrödinger equation", *Duke Math. J.*, **55**:3 (1987), 699–715.

Rotation of coordinate axes and differentiation of integrals with respect to translation invariant bases

G. G. Oniani, K. A. Chubinidze
Akaki Tsereteli State University, Georgia

A mapping B defined on $\mathbb{R}^n$ is said to be a *differentiation basis* if for every $x \in \mathbb{R}^n$, $B(x)$ is a family of bounded measurable sets with positive measure and containing x, such that there exists a sequence $R_k \in B(x)$ $(k \in \mathbb{N})$ with $\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam} R_k = 0$.

For $f \in L(\mathbb{R}^n)$, the upper and the lower limit of integral means $\frac{1}{|R|}\int_R f$ as $R \in B(x)$, $\operatorname{diam} R \to 0$, are called *the upper and the lower derivative*, respectively, *of the integral of f at a point x*. If the upper and the lower derivative coincide, then their common value is called the *derivative of $\int f$ at a point x* and denoted by $D_B(\int f, x)$. We say that the *basis B differentiates* $\int f$ (or $\int f$ is differentiable with respect to B) if $\overline{D}_B(\int f, x) = \underline{D}_B(\int f, x) = f(x)$ for almost all $x \in \mathbb{R}^n$. If this is true for each f in the class of functions X we say that B differentiates X. The *maximal function $M_B(f)(x)$ corresponding to a basis B* is defined as the supremum of integral means $\frac{1}{|R|}\int_R |f|$, where $R \in B(x)$.

Denote by $\mathbf{I} = \mathbf{I}(\mathbb{R}^n)$ the basis of intervals, i.e., the basis for which $\mathbf{I}(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ consists of all n-dimensional intervals containing x. Note that differentiation with respect to $\mathbf{I}$ is called *strong differentiation.*

For a basis B, we denote by $\overline{B}$ the union of families $B(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$.

A basis B is called:

- *translation invariant* (briefly, TI-basis) if $B(x) = \{x + R : R \in B(0)\}$ for every $x \in \mathbb{R}^n$;
- *homothecy invariant* (briefly, HI-basis) if for every $x \in \mathbb{R}^n, R \in B(x)$ and a homothethy H with the centre at x we have that $H(R) \in B(x)$;
- *sub-basis of a basis B'*(denoted as $B \subset B'$) if $B(x) \subset B'(x)$ for every $x \in \mathbb{R}^n$;
- *formed of sets from the class* Δ if $\overline{B} \subset \Delta$;
- *Busemann–Feller basis* if $(x \in \mathbb{R}^n, R \in B(x), y \in R) \Rightarrow R \in B(y)$.

Let us introduce the following notation: $\mathfrak{B}_{\mathrm{TI}}$ is the class of all translation invariant bases; $\mathfrak{B}_{\mathrm{HI}}$ is the class of all homothecy invariant bases; $\mathfrak{B}_{\mathrm{BF}}$ is the class of all Busemann–Feller bases; $\mathfrak{B}_B$ is the class of all subbases of a basis B; $\mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$ is the class of all bases which does not differentiate $L(\mathbb{R}^n)$. Note that if $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{BF}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{HI}}$, then $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}}$.

For a basis B by F_B $(F_B(x))$ denote the class of all functions $f \in L(\mathbb{R}^n)$ the integrals of which are differentiable with respect to B (are differentiable with respect to B at a point x).

We say that a function f is *reduced in the class F by a transformation of a variable γ* if $f \circ \gamma \in F$.

A class of functions F is called *invariant with respect to a class of transformations of a variable* Γ if $(f \in F, \gamma \in \Gamma) \Rightarrow f \circ \gamma \in F$.

In what follows the dimension of the space $\mathbb{R}^n$ is assumed to be greater than 1.

Denote by Γ_n the family of all rotations in the space $\mathbb{R}^n$. Clearly, when $F = L(\mathbb{R}^n)$, the question of invariance of the class F with respect to rotations is trivial.

The dependence of the properties of functions of several variables on a choice of coordinate axes (i.eȯn a rotation of the standard orthogonal coordinate system) were studied by different authors.

A. Zygmund posed the following problem (see [3, Ch. IV, § 2]): *Can an arbitrary function* $f \in L(\mathbb{R}^2)$ *be reduced in the class* $F_{\mathbf{I}}$ *by means of rotation of coordinate axes*? J. Marstrand [7] gave the negative answer to this question by constructing a function $f \in L(\mathbb{R}^2)$, such that $f \circ \gamma \notin F_{\mathbf{I}}$ for any rotation $\gamma \in \Gamma_2$. Various generalizations of this result are established in the papers [6], [8] and [10].

In the works [5] by G. Lepsveridze, [9] by G. G. Oniani and [11] by A. Stokolos it was proved that the class $F_{\mathbf{I}}$ is not invariant with respect to linear changes of a variable, in particular with respect to rotations. An analogous result was established by O. Dragoshanski [1] for the class of continuous functions of two variables, having an a.e. converging Fourier series (Fourier integral) in Pringsheim sense.

G. Karagulyan [4] gave, in the two-dimensional case, a complete characteristic of singularities from the standpoint of differentiability with respect to a basis $\mathbf{I}$ which may have the integral of a fixed function for various choices of a coordinate system. The multi-dimensional aspect of this question was studied in [10].

M. Dyachenko [2] considered a problem of invariance with respect to Γ_2 of two-dimensional classes of functions with bounded variation in various senses.

For a basis B denote by S_B the class of all non-negative functions $f \in L(\mathbb{R}^n)$ such that $\overline{D}_{B(\gamma)}\left(\int f, x\right) = \infty$ almost everywhere for every $\gamma \in \Gamma_n$.

The theorem below extends the result of J. Marstrand to quite wide class of bases.

Theorem 1. *If* $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{BF}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{HI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$, *then the class* S_B *is non-empty.*

The result on the non-invariance of the class $F_{\mathbf{I}}$ with respect to rotations can be extended to bases from the class $\mathfrak{B}_{\mathbf{I}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$. In particular, the following theorem is true.

Theorem 2. *If* $B \in \mathfrak{B}_{\mathbf{I}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$, *then the class* F_B *is not invariant with respect to rotations, moreover, there exists a non-negative function* $f \in F_{\mathbf{I}}$ *such that* $f \circ \gamma \notin F_B$ *for some* $\gamma \in \Gamma_n$.

Let us consider the problem: *What kind of singularities from the standpoint of differentiability with respect to a given basis B may have the integral of a fixed function for various choices of coordinate axes*?

Let B be a basis in $\mathbb{R}^n$ and $\gamma \in \Gamma_n$. The γ-*rotated basis* B is defined as follows $B(\gamma)(x) = \{x + \gamma(R - x) : R \in B(x)\} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$. If B is translation invariant then it is easy to see that we can reduce the study of the behavior of functions $f \circ \gamma$ $(\gamma \in \Gamma_n)$ with respect to the basis B to the study of the behavior of f with respect to rotated bases $B(\gamma)$ $(\gamma \in \Gamma_n)$. This approach will be used in the sequel.

In connection to the posed problem let us introduce the following definitions:

Let B and H are bases in $\mathbb{R}^n$ and $E \subset \Gamma_n$. Let us call E a $W_{B,H}$-*set* ($W^+_{B,H}$-*set*), if there exists a function $f \in L(\mathbb{R}^n)$ $(f \in L(\mathbb{R}^n), f \geqslant 0)$ such that: 1) $f \notin F_{B(\gamma)}$ for every $\gamma \in E$; and 2) $f \in F_{H(\gamma)}$ for every $\gamma \notin E$.

Let B and H are bases in $\mathbb{R}^n$ and $E \subset \Gamma_n$. Let us call E an $R_{B,H}$-*set* ($R^+_{B,H}$-*set*), if there exists a function $f \in L(\mathbb{R}^n)$ $(f \in L(\mathbb{R}^n), f \geqslant 0)$ such that: 1) $f \notin F_{B(\gamma)}(x)$ almost everywhere for every $\gamma \in E$; and 2) $f \in F_{H(\gamma)}$ for every $\gamma \notin E$.

When $B = H$ we will use terms $W_B(W^+_B, R_B, R^+_B)$-set, and when $B = H = \mathbf{I}$ – terms $W(W^+, R, R^+)$-set.

The definitions of R, R^+ and W-sets were introduced in [9], [8] and [4], respectively.

Now the problem can be formulated as follows: *For a given basis B what kind of sets $E \subset \Gamma_n$ are $W_B(W^+_B, R_B, R^+_B)$-sets*?

The set of two-dimensional rotations Γ_2 can be identified with the circumference $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, if to a rotation γ we put into correspondence the complex number $z(\gamma)$

from $\mathbb{T}$, the argument of which is equal to the value of the angle by which the rotation about the origin takes place in the positive direction under the action of γ.

The distance $d(\gamma,\sigma)$ between points $\gamma,\sigma\in\Gamma_2$ is assumed to be equal to the length of the smallest arch of the circumference $\mathbb{T}$ connecting points $z(\gamma)$ and $z(\sigma)$.

The set of the rotations $\gamma_k (k\in\overline{0,3})$, where $z(\gamma_k)=e^{i\pi k/2}$ is denoted by Π.

For a non-empty set $E\subset\Gamma_n$, denote by $B(E)$ the basis, for which $B(E)(x)$ $(x\in\mathbb{R}^n)$ is the union of all families $B(\gamma)(x)$ where $\gamma\in E$.

For non-empty sets $E_1\subset\Gamma_2$ and $E_2\subset\Gamma_2$ denote $E_1E_2=\{\gamma_1\circ\gamma_2:\gamma_1\in E_1,\gamma_2\in E\}$. A set $E\subset\Gamma_2$ let us call symmetric if $E=\Pi E$.

A basis $B\in\mathfrak{B}_{\mathbf{I}(\mathbb{R}^2)}\cap\mathfrak{B}_{\mathrm{TI}}$ let us call *symmetric*, if $B(\gamma)=B$ for every $\gamma\in\Pi$.

It is not difficult to check that for arbitrary basis B in $\mathbb{R}^2$ each W_B-set has $G_{\delta\sigma}$ type and each R_B-set has G_δ type.

G. Karagulyan [4] established the following characterization of two-dimensional W and R-sets: *$E\subset\Gamma_2$ is W-set (R-set) if and only if E is symmetric and of $G_{\delta\sigma}$ type (is symmetric and of G_δ type).*

The following result gives a characterization of W_B and R_B-sets for symmetric bases from the class $\mathfrak{B}_{\mathbf{I}(\mathbb{R}^2)}\cap\mathfrak{B}_{\mathrm{BF}}\cap\mathfrak{B}_{\mathrm{HI}}\cap\mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$.

Theorem 3. *If B is symmetric and $B\in\mathfrak{B}_{\mathbf{I}(\mathbb{R}^2)}\cap\mathfrak{B}_{\mathrm{BF}}\cap\mathfrak{B}_{\mathrm{HI}}\cap\mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$, then:*

1) *a set $E\subset\Gamma_2$ is $W_{B,\mathbf{I}}(W_B)$-set if and only if E is symmetric and of $G_{\delta\sigma}$ type;*
2) *a set $E\subset\Gamma_2$ is $R_{B,\mathbf{I}}(R_B)$-set if and only if E is symmetric and of G_δ type.*

The proof of Theorem 3 uses the scheme of G. Karagulyan [4]. The additional argument is the lemma on non-regularness of spherical halo function of a basis B from the class $\mathfrak{B}_{\mathbf{I}(\mathbb{R}^2)}\cap\mathfrak{B}_{\mathrm{BF}}\cap\mathfrak{B}_{\mathrm{HI}}\cap\mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$. Namely, for a basis B of mentioned type we have that $|\{M_B(\chi_V)>\lambda\}|\neq O(1/\lambda)$ $(\lambda\to 0)$, where V is the unit ball.

For symmetric bases from the class $\mathfrak{B}_{\mathbf{I}(\mathbb{R}^2)}\cap\mathfrak{B}_{\mathrm{TI}}\cap\mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$ is is valid the following theorem.

Theorem 4. *Let B is a symmetric basis from the class $\mathfrak{B}_{\mathbf{I}(\mathbb{R}^2)}\cap\mathfrak{B}_{\mathrm{TI}}\cap\mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$. Then:*

1) *not more than countable set $E\subset\Gamma_2$ is a $W^+_{B,\mathbf{I}}(W_{B,\mathbf{I}},\ W^+_B,W_B)$-set if and only if E is symmetric;*
2) *not more than countable set $E\subset\Gamma_2$ is an $R^+_{B,\mathbf{I}}(R_{B,\mathbf{I}},\ R^+_B,R_B)$-set if and only if E is symmetric and of G_δ type.*
3) *there exists an $R^+_{B,\mathbf{I}}(R_{B,\mathbf{I}},R^+_B,R_B)$-set of the continuum cardinality.*

Theorem 4 for the case $B=\mathbf{I}$ was proved in [9].

References

[1] O. S. Dragoshanskii, "On the convergence of double Fourier series and Fourier integrals of functions on T^2 and $\mathbb{R}^2$ under rotations of the coordinate system", *Mat. Sb.*, **191**:11 (2000), 3–20 (in Russian); *Sb. Math.*, **191**:11-12 (2000), 1587–1606.

[2] M. I. Dyachenko, "The rotation of a coordinate system and two-dimensional classes of functions of generalized bounded variation", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, 2008, № 3, 26–29 (in Russian); *Moscow Univ. Math. Bull.*, **63**:3 (2008), 107–110.

[3] M. de Guzmán, *Differentiation of integrals in* $\mathbb{R}^n$, With appendices by Antonio Córdoba, and Robert Fefferman, and two by Roberto Moriyón, Lecture Notes in Math., **481**, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[4] G. A. Karagulyan, "A complete characterization of R-sets in the theory of differentiation of integrals", *Studia Math.*, **181**:1 (2007), 17–32.

[5] G. L. Lepsveridze, "On strong differentiability of integrals along different directions", *Georgian Math. J.*, **2**:6 (1995), 613–630.

[6] B. López Melero, "A negative result in differentiation theory", *Studia Math.*, **72**:2 (1982), 173–182.

[7] J. Marstrand, "A counter-example in the theory of strong differentiation", *Bull. London Math. Soc.*, **9**:2 (1977), 209–211.

[8] G. G. Oniani, *Differentiation of Lebesgue integrals*, Tbilisi Univ. Press, Tbilisi, 1998 (in Russian).

[9] G. G. Oniani, "On the differentiability of integrals with respect to the bases $B_2(\theta)$", *East J. Approx.*, **3**:3 (1997), 275–301.

[10] G. G. Oniani, "On the strong differentiation of multiple integrals along different frames", *Georgian Math. J.*, **12**:2 (2005), 349–368.

[11] A. M. Stokolos, "An inequality for equimeasurable rearrangements and its application in the theory of differentiation of integrals", *Anal. Math.*, **9**:2 (1983), 133–146.

[12] A. M. Stokolos, "On a problem of A. Zygmund", *Mat. Zametki*, **64**:5 (1998), 749–762 (in Russian); *Math. Notes*, **64**:5-6 (1998), 646–657.

Traces of Sobolev functions

L. Pick
Charles University in Prague

The talk will focus on the classical problem of traces of functions from Sobolev spaces, which had originated in connection with some specific problems in PDEs and then mushroomed into a separate field of research in functional analysis and the function spaces theory. One important property enjoyed by functions from the Sobolev space $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, where $m \in \mathbb{N}$ and $p \in [1, \infty]$, is that their restrictions, called traces, to lower dimensional spaces $\mathbb{R}^d$ can be properly defined, provided that the dimension d of the relevant subspaces is not too small, depending on the values of n, m and p. In such case one can ask whether some properties such as a certain degree of integrability of a trace can be expected, and, naturally, which of these properties are the best possible. We shall survey both classical and recent results concerning traces of Sobolev functions. We shall consider basic questions concerning the very existence of trace as well as deeper problems such as optimal trace embeddings involving specific function spaces.

Weighted inequalities for sublinear integral operators on the semiaxis and applications to Lorentz analysis

D. V. Prokhorov[a], V. D. Stepanov[b,c]

[a] *Computer Centre Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences*
[b] *Steklov Institute of Mathematics of Russian Academy of Sciences*
[c] *Peoples' Friendship University of Russia*

Weighted L^p–L^r inequalities with arbitrary measurable non-negative weights for positive quasilinear integral operators with Oinarov's kernel on the semiaxis are characterized. Application to the boundedness of maximal operator in the Lorentz Γ-spaces is given.

The symmetry of a spectrum of nuclear operators in subspaces of L_p-spaces

O. I. Reinov

[a] *Saint Petersburg State University*

It was proved in the paper [1] that the spectrum of a nuclear operator A acting on a separable Hilbert space is central-symmetric if and only if trace $A^{2n-1} = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

We prove:

THEOREM. *Let Y be a subspace of a quotient (or a quotient of a subspace) of an L_p-space, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ and $T \in N_s(Y, Y)$ (s-nuclear), where $1/s = 1 + |1/2 - 1/p|$. The spectrum of T is central-symmetric if and only if* trace $A^{2n-1} = 0, n = 1, 2, \ldots$.

REMARK. T is s-nuclear, if T admits a representation

$$T = \sum_i \lambda_i y_i' \otimes y_i,$$

where $(\lambda_i) \in l_s$, (y_i') and (y_i) are bounded.

References

[1] M. I. Zelikin, "A criterion for the symmetry of a spectrum", *Dokl. Akad. Nauk*, **418**:6 (2008), 737–740.

Estimations of classes of integrals constructed with the help of the classical warping function

R. G. Salakhudinov

Kazan (Volga Region) Federal University

Let G be a multiply connected plane domain. We denote by Γ_0 the outer boundary curve of G, and by $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ the internal boundary curves. The boundary-value problem that defines the warping function $u(x, G)$ of G is

$$\begin{aligned} \Delta u = -2 \qquad & \text{in } G, \\ u = 0 \qquad & \text{on } \Gamma_0, \\ u = c_i \qquad & \text{on } \Gamma_i,\ i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

where the constants c_i are determined by the conditions

$$\oint_{\Gamma_i} \frac{\partial u}{\partial n}\, \mathrm{d}s = -2a_i, \qquad i = 1, \dots, n,$$

$\partial/\partial n$ is the inward normal derivative, and a_i is the area enclosed by Γ_i.

In the next two assertions we give estimates for a class of integrals of the warping function.

Let a function $F(t)$ have the representation

$$F(t) := p \int_0^t s^{p-1} f(s) \mathrm{d}s,$$

where $p > 0$, and $f(s)$ is another function, whose properties play an important role, as we see below.

Theorem 1. *Let G be a multiply connected domain and let $p > 0$ such that $\mathbf{T}_p(G) < +\infty$. Then*:

1) *If $f(s)$ is a non-decreasing function, then*

$$\int_G F(u(x, G))\, \mathrm{dA} \leqslant \int_{R_p} F(u(x, R_p))\, \mathrm{dA}.$$

2) *if $f(s)$ is a non-increasing function, then an inverse inequality holds*

$$\int_G F(u(x, G))\, \mathrm{dA} \geqslant \int_{R_p} F(u(x, R_p))\, \mathrm{dA}.$$

Here R_p is a concentric ring with the same joint area of the holes as on G, and the ring R_p satisfy the equality $\mathbf{T}_p(R_p) = \mathbf{T}_p(G)$. Both equalities hold if and only if G is a ring bounded by two concentric circles.

Using the functionals $\mathbf{T}_p(G)$ and $\mathbf{u}(G)$ we can get explicit bounds for integrals of the warping function.

Theorem 2. *Under the assumptions of Theorem 1 the following estimates hold*

$$\int_G F(u(x,G))\,\mathrm{dA} \leqslant \frac{\mathbf{T}_p(G)}{\mathbf{u}(G)^p} F(\mathbf{u}(G)) - \frac{2\pi \mathbf{u}(G) F(\mathbf{u}(G))}{p+1} + 2\pi \int\limits_0^{\mathbf{u}(G)} F(t)\,\mathrm{d}t,$$

where $f(s)$ is a non-decreasing function, and

$$\int_G F(u(x,G))\,\mathrm{dA} \geqslant \frac{\mathbf{T}_p(G)}{\mathbf{u}(G)^p} F(\mathbf{u}(G)) - \frac{2\pi \mathbf{u}(G) F(\mathbf{u}(G))}{p+1} + 2\pi \int\limits_0^{\mathbf{u}(G)} F(t)\,\mathrm{d}t,$$

here $f(s)$ is a non-increasing function.

Equalities hold if and only if G is a concentric ring.

My Japanese book, Theory of Besov spaces, including a remark on the space S' over P

Y. Sawano
Tokyo Metropolitan University

Let $\mathcal{S}'$ denote the set of all Schwartz distributions and $\mathcal{P}$ the set of all polynomials. If we define $\mathcal{S}_\infty$ to be the set of all $f \in \mathcal{S}$ such that $\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha f(x)\,dx = 0$ for all α, we can consider the dual space $\mathcal{S}'_\infty$.

We know that $\mathcal{S}'_\infty$ is isomorphic to $\mathcal{S}'/\mathcal{P}$ as linear spaces. But it seems to me that this is true topologically. In my Japanese book, I wrote a proof but I have commited the mistake. But recently I modified the proof. My result is as follows.

THEOREM. *Equip $\mathcal{S}'$ and $\mathcal{S}'_\infty$ with the weak star topology. Then the restriction mapping from $\mathcal{S}'$ to $\mathcal{S}'_\infty$ is open.*

References

[1] S. Nakamura, T. Noi, Y. Sawano, "Generalized Morrey spaces and trace operator" (to appear).
[2] Y. Sawano, *Theory of Besov Spaces*, Nihon-Hyoronsha, 2011 (in Japanese), 440 pp.

On an analogue of Gauss–Lucas theorem for a non-convex set on the complex plane

B. H. Sendov

Bulgarian Academy of Sciences

Let $S(\phi) = \{z : |\arg(z)| \geqslant \phi\}$ be a sector on the complex plane $\mathbb{C}$. If $\phi \geqslant \pi/2$, then $S(\phi)$ is a convex set and, according to the Gauss-Lucas theorem, if a polynomial $p(z)$ has all its zeros on $S(\phi)$, then the same is true for the zeros of all its derivatives. In this paper is proved that if the polynomial $p(z)$ is with real and non-negative coefficients, then the same is true also for $\phi < \pi/2$, when the sector is not a convex set.

A weighted Hardy-type inequality for $0 < p < 1$ with sharp constant

A. Senouci
Ibnou Khaldoun University, Algeria

Let Ω be a Lebesgue measurable set in $\mathbb{R}^n$, u be a non-negative Lebesgue measurable function on Ω (weight function), and $0 < p < \infty$. We denote by $L_{p,u}(\Omega)$ the space of all Lebesgue measurable functions f on Ω for which

$$\|f\|_{L_{p,u}(B_r)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p u(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

and by H the n-dimensional Hardy operator.

Theorem. *Let $C_1 > 0$, $0 < p < 1$ and u, v be weight functions on $\mathbb{R}^n$, $(0, \infty)$ respectively. Suppose that*

$$\int_{B_r} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx = \infty \qquad \textit{for some} \quad r > 0 \tag{1}$$

and

$$V(r) := \int_r^\infty v(\rho)\rho^{-np}\, d\rho < \infty \qquad \textit{for all} \quad r > 0. \tag{2}$$

Consider the set of all Lebesgue measurable functions f on $\mathbb{R}^n$ satisfying the inequality

$$|f(x)| \leqslant C_1 u^{\frac{1}{1-p}}(x) \|f\|_{L_{p,u}(B_{(|x|)}.)} \tag{3}$$

for almost all $x \in \mathbb{R}^n$.

Then for all functions f in this set

$$\|Hf\|_{L_{p,v}(0,\infty)} \leqslant C_2 \|f\|_{L_{p,w}(\mathbb{R}^n)} \tag{4}$$

where

$$w(x) = u(x)V(|x|), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

and

$$C_2 = v_n^{-1} p C_1^{1-p}.$$

If, in addition,

$$\int_{B_{r_2} \setminus B_{r_1}} u^{\frac{1}{1-p}}(x)\, dx < \infty \qquad \textit{for all} \quad 0 < r_1 < r_2 < \infty, \tag{5}$$

and

$$\int_0^1 \exp\left(-C_1^p \int_{B_1 \setminus B_{|x|}} u^{\frac{1}{1-p}}(y)\, dy\right) v(r) r^{-np} dr < \infty, \tag{6}$$

then the constant C_2 is sharp and there exists a functions $f \in L_{p,w}(\mathbb{R}^n)$ not equivalent to 0, satisfying inequality (3) and such that there is equality in inequality (4).

Joint work with Professor V. I. Burenkov and N. Azzouz.

B_w^u-function spaces and their interpolation

T. Sobukawa
Waseda University, Japan

Let $\mathbb{R}^n$ be the n-dimensional Euclidean space. We denote by Q_r the open cube centered at the origin and sidelength $2r$, or the open ball centered at the origin and of radius r, that is,

$$Q_r = \left\{ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |y_i| < r \right\} \qquad \text{or}$$
$$Q_r = \{ y \in \mathbb{R}^n : |y| < r \}.$$

For each $r \in (0, \infty)$, let $E(Q_r)$ be a function space on Q_r with quasi-norm $\| \cdot \|_{E(Q_r)}$. Let $E_Q(\mathbb{R}^n)$ be the set of all measurable functions f on $\mathbb{R}^n$ such that $f|_{Q_r} \in E(Q_r)$ for all $r > 0$.

We assume the following *restriction property*:

$$f|_{Q_r} \in E(Q_r) \text{ and } 0 < t < r < \infty \quad \Longrightarrow \quad f|_{Q_t} \in E(Q_t) \text{ and } \|f\|_{E(Q_t)} \leqslant C_E \|f\|_{E(Q_r)}, \tag{1}$$

where C_E is a positive constant independent of r, t and f.

Definition. Let $w \colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ be a weight function and let $u \in (0, \infty]$. We define function spaces $B_w^u(E) = B_w^u(E)(\mathbb{R}^n)$ and $\dot{B}_w^u = \dot{B}_w^u(E)(\mathbb{R}^n)$ as the sets of all functions $f \in E_Q(\mathbb{R}^n)$ such that $\|f\|_{B_w^u(E)} < \infty$ and $\|f\|_{\dot{B}_w^u(E)} < \infty$, respectively, where

$$\|f\|_{B_w^u(E)} = \|w(r) \|f\|_{E(Q_r)}\|_{L^u([1,\infty), dr/r)},$$
$$\|f\|_{\dot{B}_w^u(E)} = \|w(r) \|f\|_{E(Q_r)}\|_{L^u((0,\infty), dr/r)}.$$

In the above we abbreviated $\|f|_{Q_r}\|_{E(Q_r)}$ to $\|f\|_{E(Q_r)}$.

If $E = L^p$, then $\dot{B}_w^u(L^p)(\mathbb{R}^n)$ is the local Morrey-type space introduced by Burenkov and Guliyev [6], Example 5, below.

Here, we always assume that w has some decreasing condition. Note that, if $w(r) \to \infty$ as $r \to \infty$, then $B_w^u(E) = \dot{B}wu = \{0\}$.

In particular, if $w(r) = r^{-\sigma}$, $\sigma \geqslant 0$ and $u = \infty$, we denote $B_w^u(E)(\mathbb{R}^n)$ and $\dot{B}_w^u(E)(\mathbb{R}^n)$ by $B_\sigma(E)(\mathbb{R}^n)$ and $\dot{B}_\sigma(E)(\mathbb{R}^n)$, respectively, which were introduced recently by Komori-Furuya, Matsuoka, Nakai and Sawano [17]. These B_σ-function spaces unify several function spaces, see the following Examples 1–4.

Example 1. $B^p(\mathbb{R}^n)$, the dual of Beuling algebra $A^p(\mathbb{R}^n)$ (Beurling [2], Feichtinger [12]).

Example 2. The central mean oscillation space $\mathrm{CMO}^p(\mathbb{R}^n)$, the central bounded mean oscillation space $\mathrm{CBMO}^p(\mathbb{R}^n)$ (Chen and Lau [11] and García-Cuerva [13] , Lu and Yang [19], [20]).

Example 3. The central Morrey spaces, the λ-central mean oscillation space and the λ-central bounded mean oscillation space as an extension of $B^p(\mathbb{R}^n)$, $\dot{B}^p(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{CMO}^p(\mathbb{R}^n)$ and $\mathrm{CBMO}^p(\mathbb{R}^n)$ (García-Cuerva and Herrero [14] and Alvarez, Guzmán-Partida and Lakey [1]).

Example 4. If $E = L_{p,\lambda}$ (Morrey space) or $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ (Campanato space), then the function spaces $B_\sigma(L_{p,\lambda})(\mathbb{R}^n)$, $\dot{B}_\sigma(L_{p,\lambda})(\mathbb{R}^n)$, $B_\sigma(\mathcal{L}_{p,\lambda})(\mathbb{R}^n)$ and $\dot{B}_\sigma(\mathcal{L}_{p,\lambda})(\mathbb{R}^n)$ unify the function spaces in above examples and the usual Morrey-Campanato and Lipschitz spaces. Actually, if $\lambda = -n/p$, then $L_{p,\lambda} = L^p$. If $\sigma = 0$, then

$$B_0(L_{p,\lambda})(\mathbb{R}^n) = \dot{B}_0(L_{p,\lambda})(\mathbb{R}^n) = L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n),$$
$$B_0(\mathcal{L}_{p,\lambda})(\mathbb{R}^n) = \dot{B}_0(\mathcal{L}_{p,\lambda})(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n).$$

If $\lambda = 0$, then $\mathcal{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ for all $p \in [1,\infty)$ (John and Nirenberg [15]). If $\lambda = \alpha \in (0,1]$, then $\mathcal{L}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ for all $p \in [1,\infty)$ (Campanato [10], Meyers [22], Spanne [24]). B_σ-Morrey-Campanato spaces were investigated in [16], [17], [18], [21].

Example 5. Local Morrey-type space $LM_{p\theta,w}(\mathbb{R}^n)$ with the (quasi-)norm

$$\|f\|_{LM_{p\theta,w}} = \|w(r)\|f\|_{L^p(Q_r)}\|_{L^\theta(0,\infty)},$$

(Burenkov and Guliyev [6]). $LM_{p\theta,\widetilde{w}}(\mathbb{R}^n)$ is expressed by $\dot{B}^u_w(E)(\mathbb{R}^n)$ with $E = L^p$ and $\widetilde{w}(r) = w(r)/r$. For recent progress of local Morrey-type spaces, see [3], [4]. See also [5], [9] for interpolation spaces for local Morrey-type spaces.

In this talk, we treat the interpolation property of B^u_w-function spaces. To do this, we also the following decomposition property: For any $f \in E_Q(\mathbb{R}^n)$ and for any $r > 0$, there exists a decomposition $f = f^r_0 + f^r_1$ such that

$$\|f^r_0\|_{E(Q_t)} \leqslant \begin{cases} C_E\|f\|_{E(Q_t)} & (0 < t < r), \\ C_E\|f\|_{E(Q_{ar})} & (r \leqslant t < \infty), \end{cases} \tag{2}$$

and

$$\|f^r_1\|_{E(Q_t)} \leqslant \begin{cases} 0 & (0 < t < cr), \\ C_E\|f\|_{E(Q_{bt})} & (cr \leqslant t < \infty), \end{cases} \tag{3}$$

where C_E, a, b, c are positive constants independent of r, t and f.

Theorem. *Assume that a family* $\{(E(Q_r), \|\cdot\|_{E(Q_r)})\}_{0<r<\infty}$ *has the restriction and decomposition properties above. Let* $u_0, u_1, u \in (0,\infty]$, $w_0, w_1 \in \mathcal{W}^\infty$, *and*

$$w = w_0^{1-\theta} w_1^\theta.$$

Assume also that, for some positive constant ϵ, $(w_0(r)/w_1(r))r^{-\epsilon}$ *is almost increasing, or,* $(w_1(r)/w_0(r))r^{-\epsilon}$ *is almost increasing. Then*

$$(\dot{B}^{u_0}_{w_0}(E)(\mathbb{R}^n), \dot{B}^{u_1}_{w_1}(E)(\mathbb{R}^n))_{\theta,\,u} = \dot{B}^u_w(E)(\mathbb{R}^n),$$

and

$$(B^{u_0}_{w_0}(E)(\mathbb{R}^n), B^{u_1}_{w_1}(E)(\mathbb{R}^n))_{\theta,\,u,\,[1,\infty)} = B^u_w(E)(\mathbb{R}^n).$$

Here, $(A_0, A_1)_{\theta,\,u}$ is the usual K-real interpolation space, and we define the quasi-norm of $(A_0, A_1)_{u,\,[1,\infty)}$ as

$$\|a\|_{(A_0,A_1)_{u,\,[1,\infty)}} = \left[\int_1^\infty \left(\frac{K(t,a;A_0,A_1)}{t^\theta}\right) \frac{dt}{t}\right]^{1/u}$$

As applications of the interpolation property, we also give the boundedness of linear and sublinear operators. It is known that the Hardy–Littlewood maximal operator, fractional maximal operators, singular and fractional integral operators are bounded on B_σ-Morrey–Campanato spaces, see [16], [17], [18], [21]. Interpolate these function spaces, the we get the boundedness of these operators on $B^u_w(L_{p,\lambda})$,$\dot{B}^u_w(L_{p,\lambda})$, $B^u_w(\mathcal{L}_{p,\lambda})$ and $\dot{B}^u_w(\mathcal{L}_{p,\lambda})$, which are also generalization of the results on the local Morrey-type spaces $LM_{pu,w}(\mathbb{R}^n)$.

References

[1] J. Alvarez, M. Guzmán-Partida and J. Lakey, "Spaces of bounded λ-central mean oscillation, Morrey spaces, and λ-central Carleson measures", *Collect. Math.*, **51** (2000), 1–47.

[2] A. Beurling, "Construction and analysis of some convolution algebra", *Ann. Inst. Fourier*, **14** (1964), 1–32.

[3] V. I. Burenkov, "Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. I", *Eurasian Math. J.*, **3**:3 (2012), 8–27.

[4] V. I. Burenkov, "Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. II", *Eurasian Math. J.*, **4**:1 (2013), 21–45.

[5] V. I. Burenkov, D. K. Darbayeva, E. D. Nursultanov, "Description of interpolation spaces for general local Morrey-type spaces", *Eurasian Math. J.*, **4**:1 (2013), 46–53.

[6] V. I. Burenkov, H. V. Guliyev, "Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in local Morrey-type spaces", *Studia Math.*, **163**:2 (2004), 157–176.

[7] V. I. Burenkov, V. S. Guliyev, "Necessary and sufficient conditions for the boundedness of the Riesz potential in local Morrey-type spaces", *Potential Anal.*, **30**:3 (2009). 211–249.

[8] V. I. Burenkov, V. S. Guliyev, A. Serbetci, T. V. Tararykova, "Necessary and sufficient conditions for the boundedness of genuine singular integral operators in local Morrey-type spaces", *Eurasian Math. J.*, **1**:1 (2010), 32–53.

[9] V. I. Burenkov, E. D. Nursultanov, "Description of interpolation spaces for local Morrey-type spaces", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **269**:1 (2010), 46–56.

[10] S. Campanato, "Propriet'a di hölderianità di alcune classi di funzioni", *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3), **17** (1963), 175–188 (in Italian).

[11] Y. Chen, K. Lau, "Some new classes of Hardy spaces", *J. Func. Anal.*, **84** (1989), 255–278.

[12] H. Feichtinger, "An elementary approach to Wiener's third Tauberian theorem on Euclidean n-space", *Proceedings of Conference at Cortona* 1984, Symposia Mathematica, **29**, Academic Press, New York, 1987, 267–301,.

[13] J. García-Cuerva, "Hardy spaces and Beurling algebras", *J. London Math. Soc.* (2), **39** (1989), 499–513.

[14] J. García-Cuerva, M.J. L. Herrero, "A theory of Hardy spaces assosiated to the Herz spaces", *Proc. London Math. Soc.*, **69** (1994), 605–628.

[15] F. John, L. Nirenberg, "On functions of bounded mean oscillation", *Comm. Pure Appl. Math.*, **14** (1961), 415–426.

[16] Y. Komori-Furuya, K. Matsuoka, "Strong and weak estimates for fractional integral operators on some Herz-type function spaces", *Proceedings of the Maratea Conference FAAT* 2009, Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo, Serie II, Suppl., **82**, 2010, 375–385.

[17] Y. Komori-Furuya, K. Matsuoka, E. Nakai and Y. Sawano,, "Integral operators on B_σ-Morrey–Campanato spaces", *Rev. Mat. Complut.*, **26**:1 (2013), 1–32.

[18] Y. Komori-Furuya, K. Matsuoka, E. Nakai, Y. Sawano, "Littlewood–Paley theory for B_σ spaces", *J. Funct. Spaces Appl.*, 2013, 859402.

[19] S. Lu, D. Yang, "The Littlewood–Paley function and ϕ-transform characterizations of a new Hardy space HK_2 associated with the Herz space", *Studia Math.*, **101**:3 (1992), 285–298.

[20] S. Lu and D. Yang,, “The central BMO spaces and Littlewood-Paley operators”, *Approx. Theory Appl.*, **11** (1995), 72–94.

[21] K. Matsuoka, E. Nakai, “Fractional integral operators on $B^{p,\lambda}$ with Morrey-Campanato norms,”, *Function Spaces IX*, Banach Center Publ., **92**, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2011, 249–264.

[22] N. G. Meyers, “Mean oscillation over cubes and Hölder continuity”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15** (1964), 717–721.

[23] E. Nakai, T. Sobukawa, *B^u_w-function spaces and their interpolation*, 2014, arXiv: 1410.6327.

[24] S. Spanne, “Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3), **19** (1965), 593–608.

Sparse approximation with respect to the trigonometric system

V. N. Temlyakov

University of South Carolina, USA

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences

Sparse approximation with respect to dictionaries is a very important topic in the high-dimensional approximation. The main motivation for the study of sparse approximation is that many real world signals can be well approximated by sparse ones. Sparse approximation automatically implies a need for nonlinear approximation, in particular, for greedy approximation. We give a brief description of a sparse approximation problem and present a discussion of the obtained results and their relation to previous work. In a general setting we are working in a Banach space X with a redundant system of elements $\mathcal{D}$ (dictionary $\mathcal{D}$). There is a solid justification of importance of a Banach space setting in numerical analysis in general and in sparse approximation in particular. Let X be a real Banach space with norm $\|\cdot\| := \|\cdot\|_X$. We say that a set of elements (functions) $\mathcal{D}$ from X is a dictionary if each $g \in \mathcal{D}$ has norm one ($\|g\| = 1$), and the closure of span $\mathcal{D}$ is X. A symmetrized dictionary is $\mathcal{D}^{\pm} := \{\pm g : g \in \mathcal{D}\}$. For a nonzero element $g \in X$ we let F_g denote a norming (peak) functional for g:

$$\|F_g\|_{X^*} = 1, \qquad F_g(g) = \|g\|_X.$$

The existence of such a functional is guaranteed by the Hahn-Banach theorem.

An element (function, signal) $s \in X$ is said to be m-sparse with respect to $\mathcal{D}$ if it has a representation $s = \sum_{i=1}^{m} c_i g_i$, $g_i \in \mathcal{D}$, $i = 1, \dots, m$. The set of all m-sparse elements is denoted by $\Sigma_m(\mathcal{D})$. For a given element f we introduce the error of best m-term approximation

$$\sigma_m(f, \mathcal{D})_X := \inf_{s \in \Sigma_m(\mathcal{D})} \|f - s\|_X.$$

Let $t \in (0, 1]$ be a given nonnegative number. We define the Weak Chebyshev Greedy Algorithm (WCGA) that is a generalization for Banach spaces of Weak Orthogonal Greedy Algorithm .

Weak Chebyshev Greedy Algorithm (WCGA).

We define $f_0 := f$. Then for each $m \geqslant 1$ we inductively define

1) $\varphi_m \in \mathcal{D}$ is any element satisfying

$$|F_{f_{m-1}}(\varphi_m)| \geqslant t \sup_{g \in \mathcal{D}} |F_{f_{m-1}}(g)|;$$

2) define

$$\Phi_m := \operatorname{span}\{\varphi_j\}_{j=1}^{m},$$

and define G_m to be the best approximant to f from Φ_m;

3) denote

$$f_m := f - G_m.$$

We demonstrated that the Weak Chebyshev Greedy Algorithm (WCGA) is very good for m-term approximation with respect to a special class of dictionaries, in particular, for the trigonometric system. The trigonometric system is a classical system that is known to be difficult to study. We studied among other problems the problem of nonlinear sparse approximation with respect to it. Let $\mathcal{RT}$ denote the real trigonometric system $1, \sin 2\pi x, \cos 2\pi x, \dots$ on $[0,1]$ and let $\mathcal{RT}_p$ to be its version normalized in $L_p([0,1])$. Denote $\mathcal{RT}_p^d := \mathcal{RT}_p \times \cdots \times \mathcal{RT}_p$ the d-variate trigonometric system. We need to consider the real trigonometric system because the algorithm WCGA is well studied for the real Banach space. We proved the following Lebesgue-type inequality for the WCGA.

THEOREM. *Let $\mathcal{D}$ be the normalized in L_p, $2 \leqslant p < \infty$, real d-variate trigonometric system. Then for any $f \in L_p$ the WCGA with weakness parameter t gives*

$$\|f_{C(t,p,d)m\ln(m+1)}\|_p \leqslant C\sigma_m(f,\mathcal{D})_p.$$

The above Lebesgue-type inequality guarantees that the WCGA works very well for each individual function f.

New Besov-type space of variable smoothness and the problem of traces for the weighted Sobolev space

A. I. Tyulenev
Steklov Mathematical Institute

For the weighted Sobolev space $W_p^l(\mathbb{R}^n, \gamma)$ a complete description of the trace spaces for planes of dimension $1 \leqslant d < n$ is obtained. The weight γ depends on all variables and locally satisfies the Muckenhoupt condition. It appears that in the case $1 \leqslant r < p < \infty$ the trace space for $W_p^l(\mathbb{R}^n, \gamma)$, $\gamma \in A_{\frac{p}{r}}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ is the Besov type space $\widetilde{B}_{p,p,r}^l(\mathbb{R}^d, \{\gamma_k\})$ with variable smoothness $\{\gamma_k\}$. The norm in $\widetilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^d, \{\gamma_k\})$ is defined with the help of local best approximations in the L_r-metric.

Various properties of the space $\widetilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^d, \{\gamma_k\})$ are studied by using the method of nonlinear spline approximation for all values of the parameters $0 < p, q, r < \infty$, $l \in \mathbb{N}$ under the minimal assumptions on the variable smoothness $\{\gamma_k\}$. For example we present the atomic decomposition theorem, embedding theorems and description of the trace space of $\widetilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^d, \{\gamma_k\})$. The space $\widetilde{B}_{p,q,r}^l(\mathbb{R}^d, \{\gamma_k\})$ is compared with 2-microlocal Besov space $B_{p,q}^{\{\gamma_k\}}(\mathbb{R}^d)$ intensively studied by many mathematicians.

Interpolation of Morrey and related smoothness spaces

W. Yuan[a], D. Yang[a], W. Sickel[b]
[a] *Beijing Normal University*
[b] *Institute of Mathematics*, *Friedrich Schiller University Jena*

We study the interpolation of Morrey spaces and some smoothness spaces based on Morrey spaces, e.g., Besov-type and Lizorkin–Triebel-type spaces. Various interpolation methods, including the complex method, the ±-method and the Peetre–Gagliardo method, are studied in such a framework.

Слабо локализуемые главные подмодули в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси

Н. Ф. Абузярова

Башкирский государственный университет

Пусть $[a_1; b_1] \Subset [a_2; b_2] \Subset \cdots$ – последовательность отрезков, исчерпывающая конечный или бесконечный интервал $(a; b) \subset \mathbb{R}$. Обозначим через $\mathcal{P}(a; b)$ индуктивный предел последовательности банаховых пространств $\{P_k\}$, каждое из которых состоит из всех целых функций φ с конечной нормой

$$\|\varphi\|_k = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{(1+|z|)^k \exp(b_k y^+ - a_k y^-)}, \qquad y^{\pm} = \max\{0, \pm y\}, \quad z = x + \mathrm{i}y.$$

Пространство $\mathcal{P}(a; b)$ – топологический модуль над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$).

Для замкнутого подмодуля $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(a; b)$ положим $c_{\mathcal{J}} = \inf_{\psi \in \mathcal{J}} c_\psi$, $d_{\mathcal{J}} = \sup_{\psi \in \mathcal{J}} d_\psi$, где $\mathrm{i}\,[c_\psi; d_\psi]$ – индикаторная диаграмма функции ψ. Множество $[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}]$ – *индикаторный отрезок* подмодуля $\mathcal{J}$. *Дивизор* n_ψ *функции* $\psi \in \mathcal{P}(a; b)$:

$$n_\psi(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если } \psi(\lambda) \neq 0, \\ m, & \text{если } \lambda \text{ – нуль } \psi \text{ кратности } m. \end{cases}$$

Дивизор подмодуля $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(a; b)$ определяется как $n_{\mathcal{J}}(\lambda) = \min_{\psi \in \mathcal{J}} n_\psi(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Подмодуль $\mathcal{J}$ *слабо локализуем*, если он содержит все функции $\psi \in \mathcal{P}(a; b)$, удовлетворяющие условиям: 1) $n_\psi(z) \geqslant n_{\mathcal{J}}(z)$, $z \in \mathbb{C}$; 2) индикаторная диаграмма функции ψ содержится в множестве $\mathrm{i}[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}]$.

Для функции $\varphi \in \mathcal{P}(a; b)$ обозначим через $\mathcal{J}_\varphi$ *главный подмодуль*, порожденный этой функцией, т.е. замыкание в $\mathcal{P}(a; b)$ множества $\{p\varphi : p \in \mathbb{C}[z]\}$, $\varphi \in \mathcal{P}(a; b)$. Обозначение $\mathcal{J}(\varphi)$ будем использовать для слабо локализуемого подмодуля с дивизором, равным n_φ и индикаторным отрезком, равным $[c_\varphi; d_\varphi]$. Легко проверить, что $\mathcal{J}_\varphi \subset \mathcal{J}(\varphi)$. Равенство $\mathcal{J}_\varphi = \mathcal{J}(\varphi)$ эквивалентно слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ и, как показывает пример, построенный в работе [1], не всегда справедливо.

Здесь мы приводим одно достаточное условие слабой локализуемости главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ для случая, когда множество $\mathcal{J}(\varphi) \setminus \{p\varphi : p \in \mathbb{C}[z]\}$ не пусто.

Теорема. *Пусть образующая подмодуля имеет вид $\varphi = \Phi/\omega$, где $\Phi \in \mathcal{P}(a; b)$ – функция типа синуса, ω – целая функция нулевого порядка и сильно регулярного роста* (см. [2]) *с дивизором n_ω, удовлетворяющим условию*: *для некоторых положительных постоянных C_0 и r_0 справедливо неравенство*

$$n_\omega(r) \ln r < C_0 \int_0^r \frac{n_\omega(t)\,\mathrm{d}\,t}{t}, \quad r > r_0.$$

Тогда подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ слабо локализуем.

Работа выполнена при поддержке гранта №01201456408 Минобрнауки РФ.

Список литературы

[1] A. Aleman, A. Baranov, Yu. Belov, *Subspaces of C^∞ invariant under the differentiation.*, arXiv: 1309.6968v2.

[2] Н. В. Заболоцкий, "Сильно регулярный рост целых функций нулевого порядка", *Матем. заметки*, **63**:2 (1998), 196–208.

Весовые оценки для одного класса субаддитивных операторов и их приложения

А. М. Абылаева[a], А. О. Байарыстанов[a], А. А. Калыбай[a,b], Р. Ойнаров[a]

[a] *Евразийский национальный университет имени Л. Н. Гумилева*

[b] *Университет КИМЕП*

Пусть $1 \leqslant r, p, q \leqslant \infty$, u, w и v-весовые т.е. неотрицательные измеримые на $I = (0,\infty)$ функции.

Установливаются необходимые и достаточные условия выполнения неравенства

$$\|uTf\|_q \leqslant C\|vf\|_p, \qquad f \geqslant 0, \tag{1}$$

где $\|\cdot\|_p$ – обычная норма $L_p(I)$, а оператор T один из операторов

$$T^-_{r,\mu}f(x) = \left(\int_0^x \left(\frac{w(s)}{(x-s)^\mu}\int_s^x f(t)\,dt\right)^r ds\right)^{\frac{1}{r}}, \qquad x \in I$$

или

$$T^+_{r,\mu}f(x) = \left(\int_x^\infty \left(\frac{w(s)}{(s-x)^\mu}\int_x^s f(t)\,dt\right)^r ds\right)^{\frac{1}{r}}, \qquad x \in I, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1.$$

В случае $r = 1$ операторы $T^-_{r,\mu}$, $T^+_{r,\mu}$ становятся линейными и, например, действие оператора $T^-_{1,\mu}$ для функции $f \geqslant 0$ имеет вид

$$T^-_{1,\mu}f(x) = \int_0^x f(t)\int_0^t \frac{w(s)}{(x-s)^\mu}\,ds\,dt, \qquad x \in I.$$

Откуда при $w(\cdot) \equiv 1$, $\mu = 1$ имеем

$$T^-_{1,1}f(x) = \int_0^x f(t)\ln\frac{x}{x-t}\,dt, \qquad x \in I,$$

для которого оценка в вида (1) при $v^p(t) = t^\gamma$, $\gamma > -1$ исследована в [1].

В случае $\mu = 0$ неравенство (1) для оператора $T^\pm_{r,0}$ исследовано в [2].

В случае $r = q$ одновременного выполнения неравенства (1) для операторов $T^-_{r,\mu}$ и $T^+_{r,\mu}$ эквивалентно выполнению неравенства

$$\left(\int_0^\infty\int_0^\infty \left|\frac{g(x)-g(s)}{(x-s)^\mu}\right|^q u^q(x)w^q(s)\,dx\,ds\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\left(\int_0^\infty v^p(t)|g'(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

для локально абсолютно непрерывных на I функций g.

Это неравенство в частном случае исследовано в [3, теорема 5.3], а в общем случае, как открытая задача поставлена в [4, с. 83].

Список литературы

[1] А. М. Абылаева, М. Ж. Омирбек, "Весовая оценка для интегрального оператора с логарифмической особенностью", *Известия НАН РК, Серия физико-математическая*, 2005, № 1, 38–47.

[2] R. Oinarov, A. Kalybay, "Three-parameter weighted Hardy type inequalities", *Banach J. Math. Anal.*, **2**:2 (2008), 85–93.

[3] A.Kufner, L.-E. Persson, *Weighted Inequalities of Hardy Type*, World Scientific, New Jersey, 2003.

[4] A. Kufner, L. Maligranda. L.-E. Persson, *The Hardy Inequality. About its History and Some Related Results*, Vydavatelsky Servis Publishing House, Pilsen, 2007.

Геометрическое описание областей с максимальными константами Харди

Ф. Г. Авхадиев

Казанский (Приволжский) федеральный университет

Пусть $d \geqslant 2$ — натуральное число, $p \in [1, \infty)$ и $s \in (1, \infty)$, $\Omega \subset R^d$ — область, не совпадающая со всем пространством. Рассмотрим следующее неравенство Харди: для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \frac{|\nabla f(x)|^p}{\delta^{s-p}(x)}\, dx \geqslant c_p(s, \Omega) \int_\Omega \frac{|f(x)|^p}{\delta^s(x)}\, dx.$$

Здесь $\delta(x)$ — расстояние от точки x до границы области, постоянная $c_p(s, \Omega) \in [0, \infty)$ выбрана оптимальной, т.е. определена однозначно как максимальная величина, допустимая в этом вариационном неравенстве.

Хорошо известно, что существуют области, для которых приведенное неравенство не является содержательным, т.е. существуют области для которых $c_p(s, \Omega) = 0$ при $1 < s \leqslant d$. С другой стороны, $c_p(s, \Omega) = (s-1)^p/p^p$ для любой выпуклой области $\Omega \neq R^d$ при любых допустимых значениях параметров d, p и s. Известно также, что $c_p(s, \Omega) \leqslant (s-1)^p/p^p$ для любой области, граница которой содержит хотя бы одну "регулярную" граничную точку, в этом смысле константы Харди для выпуклых областей являются максимальными из возможных. Рядом авторов были найдены экзотические примеры невыпуклых областей, для которых константы Харди $c_2(2, \Omega)$ также максимальны, т.е. равны $1/4$.

Нами обнаружены и геометрически описаны широкие семейства невыпуклых плоских и пространственных областей, в которых указанное неравенство Харди справедливо с этой максимальной константой $(s-1)^p/p^p$. Эти семейства существенно зависят от размерности области и параметров $p \in [1, \infty)$ и $s \in (1, \infty)$. Отметим, что аналитической основой наших построений являются новые одномерные неравенства типа Харди со специальными весами и новые константы, связанные с этими неравенствами и гипергеометрическими функциями. В докладе будут приведены как опубликованные (см. список литературы), так и новые результаты автора, относящиеся к этой тематике.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 14-01-00351-а)

Список литературы

[1] Авхадиев Ф. Г., "Геометрическое описание областей, для которых константа Харди равна 1/4", *Известия РАН. Сер. матем.*, **78**:5 (2014), 3–26.

[2] Авхадиев Ф. Г., "L_p – неравенства типа Харди в областях, r-близких к выпуклым", *Известия вузов. Матем.*, 2015, № 1, 84–88.

О неравенствах в суперрефлексивных пространствах Бесова

А. Н. Агаджанов

Институт проблем управления РАН

Среди банаховых пространств важное место занимают пространства Бесова [1], [2]. В настоящем докладе пространства Бесова рассматриваются с позиций теории суперрефлексивных банаховых пространств [3], [4]. Такой подход позволяет получить неравенства для норм в суперрефлексивных пространствах Бесова. Прежде чем переходить к описанию результатов данного доклада, приведем необходимые определения. Пусть задана пара банаховых пространств Xи Y. Зафиксируем натуральное n и рассмотрим совокупность всех n-мерных нормированных подпространств $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$. Между пространствами X_n и Y_n всегда можно установить изоморфизм, то есть линейное биективное и взаимно непрерывное соответствие. Мерой близости между X_n и Y_n принято считать дистанцию Банаха–Мазура $d(X_n,\, Y_n) = \inf\{\|T\| \cdot \left\|T^{-1}\right\|\}$, где нижняя грань берется по всем изоморфизмам T между X_n и Y_n.

Определение 1 [3], [4]. Пусть $\varepsilon > 0$. Нормированное пространство Y называется ε-финитно представимым в нормированном пространстве X, если для каждого конечномерного подпространства $Y_n \subset Y$ найдется подпространство той же размерности $X_n \subset X$ такое, что $d(X_n, Y_n) \leqslant 1 + \varepsilon$.

Определение 2 [3], [4]. Банахово пространство Y называется финитно представимым в банаховом пространстве X, если оно ε-финитно представимо при любом $\varepsilon > 0$.

Определение 3 [3], [4]. Банахово пространство X называется суперрефлексивным, если любое банахово пространство Y, финитно представимое в X, является рефлексивным. Проверить факт финитной представимости банахова пространства Y в банаховом пространстве Xдовольно часто является далеко не простой задачей. Вот почему особое место в теории суперрефлексивных банаховых пространств занимает Теорема Энфло [5]. Банахово пространство X с уперрефлексивно тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих равносильных условий:

а) среди норм, эквивалентных на X, существует равномерно выпуклая норма;
б) среди норм, эквивалентных на X, существует равномерно гладкая норма.

Напомним определения равномерно выпуклой и равномерно гладкой норм в банаховых пространствах. Пусть $B_X = \{u \in X : \|u\|_X = 1\}$ — единичная сфера в банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$. Модулем выпуклости этого пространства называют функцию

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left(1 - \frac{\|u-v\|_X}{2} : u, v \in B_X,\, \|u-v\|_X \geqslant \varepsilon\right),$$

где $0 < \varepsilon \leqslant 2$. Банахово пространство X называется равномерно выпуклым, если $\delta_X(\varepsilon) > 0$ при $0 < \varepsilon \leqslant 2$. Модулем гладкости пространства X называется функция

$$\rho_X(\tau) = \sup\left\{\frac{\|u+\tau v\|_X + \|u-\tau v\|_X}{2} - 1 : u, v \in B_X\right\}.$$

Банахово пространство X называется равномерно гладким, если $\lim_{\tau\to 0^+} \frac{\rho_X(\tau)}{\tau} = 0$. Пусть $-\infty < s < +\infty$, $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$.

Определение 4 [1], [2]. Пространством Бесова $B^s_{p,\,q}(R^n)$ назовем банахово пространство вида

$$(B^s_{p,q}(R^n), \|u\|_{p,q,s}) = \left\{ u \in S'(R^n) : \|u\|_{p,q,s} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jqs} \|u * \varphi_j\|^q_{L_p(R^n)} \right)^{1/q} < +\infty \right\},$$

где $S'(R)$ — пространство медленно растущих обобщенных функций, а $\{\varphi_j\}$ — специально выбранная система функций (способ построения таких функций приведен, например, в [2]). Норму $\|\cdot\|_{p,\,q,\,s}$ в дальнейшем будем называть канонической.

Прежде чем сформулировать основную Теорему доклада, приведем необходимые факты, связанные с неравенством Кларксона–Боаса [6]. Пусть X — банахово пространство. Будем говорить, что на X выполняется неравенство Кларксона–Боаса, если для любых элементов u, $v \in X$ справедливо неравенство

$$(\|u+v\|^r_X + \|u-v\|^r_X)^{1/r} \leqslant 2^{1/t'} \left(\|u\|^t_X + \|v\|^t_X \right)^{1/t},$$

где r, t, t' — некоторые константы, причем $1 < r$, $t' < \infty$ и $\frac{1}{t} + \frac{1}{t'} = 1$. Имеет место

Теорема. *Пространства Бесова $(B^s_{p,q}(R^n), \|u\|_{p,\,q,\,s})$ являются равномерно выпуклыми и равномерно гладкими банаховыми пространствами. В этих пространствах выполняются неравенства Кларксона–Боаса, а для модулей выпуклости $\delta_{p,q,s}(\varepsilon)$ и модулей гладкости $\rho_{p,q,s}(\tau)$ канонической нормы $\|\cdot\|_{p,q,s}$ имеют место следующие соотношения*:

$$\text{а)}\quad \left(\|u+v\|^q_{p,q,s} + \|u-v\|^q_{p,q,s}\right)^{1/q} \leqslant 2^{1/q} \left(\|u\|^{q'}_{p,q,s} + \|v\|^{q'}_{p,q,s} \right)^{1/q'},$$

$$\delta_{p,q,s}(\varepsilon) = 1 - (1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q)^{1/q}, \qquad \rho_{p,q,s}(\tau) = (1+\tau^{q'})^{1/q'} - 1,$$

где $1 < p \leqslant 2$, $p' \leqslant q$;

$$\text{б)}\quad \left(\|u+v\|^{p'}_{p,q,s} + \|u-v\|^{p'}_{p,q,s}\right)^{1/p'} \leqslant 2^{1/p'} \left(\|u\|^{p}_{p,q,s} + \|v\|^{p}_{p,q,s} \right)^{1/p},$$

$$\delta_{p,q,s}(\varepsilon) = 1 - (1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p'})^{1/p'}, \qquad \rho_{p,q,s}(\tau) = (1+\tau^{p})^{1/p} - 1,$$

где $1 < p \leqslant 2$, $p \leqslant q \leqslant p'$;

$$\text{в)}\quad \left(\|u+v\|^{q'}_{p,q,s} + \|u-v\|^{q'}_{p,q,s}\right)^{1/q'} \leqslant 2^{1/q'} \left(\|u\|^{q}_{p,q,s} + \|v\|^{q}_{p,q,s} \right)^{1/q},$$

$$\delta_{p,q,s}(\varepsilon) = 1 - (1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{q'})^{1/q'}, \qquad \rho_{p,q,s}(\tau) = (1+\tau^{q})^{1/q} - 1,$$

где $1 < p \leqslant 2$, $1 < q \leqslant p$;

$$\text{г)}\quad \left(\|u+v\|^q_{p,q,s} + \|u-v\|^q_{p,q,s}\right)^{1/q} \leqslant 2^{1/q} \left(\|u\|^{q'}_{p,q,s} + \|v\|^{q'}_{p,q,s} \right)^{1/q'},$$

$$\delta_{p,q,s}(\varepsilon) = 1 - (1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q)^{1/q}, \qquad \rho_{p,q,s}(\tau) = (1+\tau^{q'})^{1/q'} - 1,$$

где $2 \leqslant p < +\infty$, $p \leqslant q < +\infty$;

$$\text{д)}\quad \left(\|u+v\|^{p}_{p,q,s} + \|u-v\|^{p}_{p,q,s}\right)^{1/p} \leqslant 2^{1/p}\left(\|u\|^{p'}_{p,q,s} + \|v\|^{p'}_{p,q,s}\right)^{1/p'},$$

$$\delta_{p,q,s}(\varepsilon) = 1 - (1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p})^{1/p}, \qquad \rho_{p,q,s}(\tau) = (1+\tau^{p'})^{1/p'} - 1,$$

где $2 \leqslant p < +\infty$, $p' \leqslant q \leqslant p$;

$$\text{е)}\quad \left(\|u+v\|^{q'}_{p,q,s} + \|u-v\|^{q'}_{p,q,s}\right)^{1/q'} \leqslant 2^{1/q'}\left(\|u\|^{q}_{p,q,s} + \|v\|^{q}_{p,q,s}\right)^{1/q},$$

$$\delta_{p,q,s}(\varepsilon) = 1 - (1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{q'})^{1/q'}, \qquad \rho_{p,q,s}(\tau) = (1+\tau^{q})^{1/q} - 1,$$

где $2 \leqslant p < +\infty$, $1 < q \leqslant p'$.

Следствие 1. *Пространство Бесова* $B^s_{p,\,q}(R^n)$ *является суперрефлексивным банаховым пространством.*

Определение 5 [7]. Константой Неймана–Джордана n-го порядка ($n \geqslant 2$) для банахова пространства X называется величина

$$C^{(n)}_{NJ}(X) = \sup\left\{\sum_{\theta_j=\pm 1} \frac{\left\|\sum_{j=1}^{n}\theta_j u_j\right\|^2_X}{2^n\sum_{i=1}^{n}\|u_i\|^2_X};\ \sum_{i=1}^{n}\|u_i\|^2_X \neq 0,\ u_i \in X\right\}.$$

Какой будет константа Неймана – Джордана для суперрефлексивных пространств Бесова, например, при $1 < p \leqslant 2$, $p' \leqslant q$? (Остальные случаи могут быть рассмотрены аналогично.)

Следствие 2. *При* $1 < p \leqslant 2$, $p' \leqslant q$ *имеет место*

$$C^{(n)}_{NJ}(B^s_{p,q}(R^n), \|\cdot\|_{p,q,s}) = n^{\frac{2}{q'}-1}.$$

При каждом $n \geqslant 2$ *справедливы неравенства*

$$\sum_{\theta_j=\pm 1}\|\theta_j u_j\|^2_{p,q,s} \leqslant 2^n \cdot n^{\frac{2}{q'}-1} \cdot \sum_{i=1}^{n}\|u_i\|^2_{p,q,s},$$

где $\sum_{i=1}^{n}\|u_i\|^2_{p,q,s} \neq 0$, $u_i \in B^s_{p,q}(R^n)$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Пусть $|\cdot|_{p,q,s}$ — произвольная норма на $B^s_{p,q}(R^n)$, эквивалентная канонической норме $\|\cdot\|_{p,q,s}$. Зафиксируем $1 < p \leqslant 2 - \Delta$, $p < q$ (остальные случаи могут быть рассмотрены аналогично), где Δ – сколь угодно малое положительное число.

Следствие 3. *Существует константа* $D > 0$, *зависящая, вообще говоря, от параметров* n, p, q, s, Δ *и нормы* $|\cdot|_{p,q,s}$, *но не зависящая от* u *и* v *такая, что выполняется неравенство*

$$|\,u+v\,|^{p+\Delta}_{p,q,s} + D\,|u-v|^{p+\Delta}_{p,q,s} \leqslant (1+\Delta)\cdot 2^{p+\Delta-1}\left(|u|^{p+\Delta}_{p,q,s} + |v|^{p+\Delta}_{p,\,q,\,s}\right).$$

Список литературы

[1] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980.

[2] Х. Трибель, *Теория функциональных пространств*, Мир, М., 1986.

[3] R. C. James, *Canad. J. Math.*, **24,**:5 (1972), 896–904.

[4] И. Кадец, "Геометрия банаховых пространств", Итоги науки и техники. Математический анализ, **13**, 1975.

[5] P. Enflo, *Israel J. Math*, **3** (1972), 281–288.

[6] R. P. Boas, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **46** (1940), 304–311.

[7] M. Kato, Y. Takahashi, K. Hashimoto, *Bull Kyushu Inst. Tech. Pure Appl. Math*,, 1998, №45, 25–33.

Об одной оценке чисел Гельфанда

М. Азизов

[a] *Таджикский государственный педагогический университет имени С. Айни*

Пусть V, E и K – линейные нормированные пространства. Пространство непрерывных операторов действующих из V в E с обычной нормой $\|H\|_{X\to E}$ обозначим через $\mathcal{L}(V,E)$.

Рассматривается вопрос об оценке числа Гельфанда некоторого оператора Ψ, который будет определен ниже.

Определение. Для каждого оператора $S \in \mathcal{L}(V,E)$ его n-е число Гельфанда определяется соотношением

$$G_n(S\colon V\to E) = \inf_{\substack{a_i\in V^\star \\ i=1,2,\ldots,n-1}} \sup_{\substack{f\in V,\ \|f\|_V\leqslant 1 \\ a_i(f)=0,\ i=1,2,\ldots,n-1}} \|Sf\|_E.$$

Положим $E = L_2$, $V = A^h$, $K = \mathcal{A}^h$, где A^h и $\mathcal{A}^h$ – пространства 2π-периодических функций одной и двух переменных, допускающих по каждой переменной аналитическое продолжение в полосу $\{z = x+iy, -h < y < h\}$ комплексной плоскости (см., [1, с. 186]). Кроме того, оператор T, ставящий в соответствие каждому элементу $k \in \mathcal{A}^h$ оператор $T_k \in \mathcal{L}(L_2)$, определим в виде

$$T_k g(t) = \int_0^{2\pi} k(t,\tau)\cdot g(\tau)d\tau \tag{1}$$

и рассмотрим множества $K = K_h(\alpha)$ ядер $k \in \mathcal{A}^h$, для которых выполнено условие

$$\|(I-T_k)^{-1}\|_{L_2\to L_2} \leqslant \alpha_2, \qquad \|k\|_{\nu,\nu} \leqslant \alpha_1, \quad \alpha = (\alpha_1,\alpha_2).$$

Пусть теперь $\Psi_k = T_k J_{\mathcal{A}^h}$, где $J_{\mathcal{A}^h}$ – оператор вложения $\mathcal{A}^h$ в L_2, а T_k определен соотношением (1). Тем самым определен оператор (функтор) $\Psi\colon \mathcal{A}^h \to \mathcal{L}(\mathcal{A}^h, L_2)$, ставший в соответствие каждой функции $k(t,\tau) \in \mathcal{A}^h$ оператор $\Psi \in \mathcal{L}(\mathcal{A}^h, L_2)$. Доказан следующая

Теорема. *Для чисел Гельфанда оператора Ψ справедлива оценка*

$$G_n(\Psi : \mathcal{A}^h \to \mathcal{L}(\mathcal{A}^h, L_2)) \geqslant \frac{c}{\sqrt{n}} \exp(-\sqrt{nh}),$$

где постоянная c зависит лишь от α и h.

Замечание. Установленная в теореме оценка асимптотически не улучшаема в логарифмической шкале.

Список литературы

[1] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, МГУ, М., 1976.

Оптимальное восстановление аналитической функции по заданным с погрешностью граничным значениям

Р. Р. Акопян

Уральский федеральный университет
Озерский технологический институт, Филиал Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ"

Будут обсуждаться несколько взаимосвязанных экстремальных задач для классов функций, аналитических в ограниченной области G с границей — жордановой кривой Γ:

– задача оптимального восстановления аналитической функции по ее граничным значениям, заданным с погрешностью δ на измеримом подмножестве γ границы Γ;
– задача наилучшего приближения оператора аналитического продолжения с γ линейными ограниченными операторами на классе функции;
– задача о модуле непрерывности оператора аналитического продолжения с γ на классе функции.

Будут приведены решение задач и конструкции экстремальных операторов для широкого круга областей и классов функций.

Исследования выполнены при поддержке РФФИ (проект 15-01-02705) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение №02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Квадратурные формулы с наименьшей оценкой остатка для некоторых классов дифференцируемых функций

А. Р. Алиев[a], Р. М. Алиев[b], С. Г. Гасымова[c]

[a] *Бакинский государственный университет*

[b] *Азербайджанский архитектурно-строительный университет*

[c] *Азербайджанский технический университет*

В работе среди квадратурных формул С. М. Никольского [1]

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=0}^{\rho} A_k^{(l)} f^{(l)}(x_k) + R_N(f), \tag{1}$$

получены наилучшие формулы для классов $W_0^r L_q$ и $W^r L_q$, где

$$W_0^r L_q = \left\{ f(x) : f(x) \in W^r L_q,\, f^{(l)}(0) = 0,\, l = 0, 1, \ldots, r-1 \right\},$$

$W^r L_q$ – класс заданных на отрезке $[0,1]$ функций, которые на нем имеют абсолютно непрерывные производные $r-1$-го порядка и производную r-го порядка, удовлетворяющую условию $\left\| f^{(r)} \right\|_{L_q} \leqslant 1$ $(1 \leqslant q \leqslant \infty)$.

Теорема. *Среди квадратурных формул вида* (1), *точных для всех алгебраических многочленов степени не выше* $r - \rho - 3$, *при* $\rho = \frac{r-1}{2}$ *и* $\rho = \frac{r-3}{2}$ (r *– нечетное число,* $r \geqslant 3$) *наилучшей для класса* $W_0^r L_q$ *является единственная формула, определяемая узлами* x_k^* *и коэффициентами* $A_k^{*(l)}$:

$$x_1^* = h(c_\alpha + 1), \qquad x_N^* = (1 - z_0 + 2(N-1)c_\alpha)h,$$
$$x_k^* = x_1^* + 2(k-1)c_\alpha h, \quad k = 2, 3, \ldots, N-1,$$
$$A_k^{*(2j)} = \frac{2h^{2j+1}}{r!} T_{rp}^{(r-2j-1)}(c_\alpha), \qquad k = 1, 2, \ldots, N, \quad j = 0, 1, \ldots, \frac{\rho}{2},$$
$$A_k^{*(2j+1)} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, N, \quad j = 0, 1, \ldots, \frac{\rho - 1}{2},$$
$$A_N^{*(l)} = \frac{h^{l+1}}{r!} \left\{ \frac{r!}{(l+1)!} \left[T_{rp}(z_0) \right]^{\frac{l+1}{r}} - T_{rp}^{(r-l-1)}(z_0) \right\}, \qquad l = 0, 1, \ldots, \rho,$$

где $T_{rp}(u)$ *– многочлен вида* $u^r + \sum_{i=1}^{r-1} \beta_i u^i$, *наименее уклоняющийся от нуля в метрике* L_q $\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1\right)$ *на отрезке* $[-1,1]$, z_0 *– наименьший корень уравнения*

$$(\rho + 3) \sqrt[\rho+3]{\frac{r!}{(\rho+3)!}} \left[T_{rp}^{(r-\rho-3)}(z) \right]^{\frac{\rho+2}{\rho+3}} = T_{rp}^{(r-\rho-2)}(z),$$

c_α *– наименьший корень многочлена* $T_{rp}^{(r-\rho-3)}(u)$,

$$h = \left(\sqrt[r]{T_{rp}(z_0)} + 2(N-1)c_\alpha - z_0 + 1 \right)^{-1}.$$

При этом

$$\sup_{f\in W_0^r L_q} |R_N(f)|$$
$$= \frac{h^{r+\frac{1}{p}}}{r!\sqrt[p]{rp+1}} \left([T_{rp}(z_0)]^p \sqrt[r]{T_{rp}(z_0)} + 2\,[T_{rp}(1)]^p \left((N-1)c_\alpha^{rp+1} + \left(\frac{c_\alpha - z_0}{2} \right)^{rp+1} \right) \right)^{1/p}.$$

Аналогичная теорема имеет место и для класса $W^r L_q$.

Список литературы

[1] С. М. Никольский, *Квадратурные формулы*, Наука, М., 1988.

Связность строгих солнц в конечномерных банаховых пространствах

А. Р. Алимов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Для подмножества $M \neq \varnothing$ линейного нормированного или несимметрично нормированного пространства X точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если

$$y \in P_M\big((1-\lambda)y + \lambda x\big) \qquad \text{для всех} \quad \lambda \geqslant 0,$$

где $P_M x$ – множество ближайших точек из M для x. Геометрически это условие означает, что из точки y исходит "солнечный" луч, проходящий через x, для каждой точки которого y является ближайшей из M. Точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой строгой солнечности*, если $P_M x \neq \varnothing$ и условие $y \in P_M\big((1-\lambda)y + \lambda x\big)$ при всех $\lambda \geqslant 0$ выполнено для любой точки $y \in P_M x$. Замкнутое непустое множество $M \subset X$ называется *солнцем* (соответственно, *строгим солнцем*), если каждая точка $x \in X \setminus M$ является точкой солнечности (соответственно, строгой солнечности) для M. Понятие солнца было введено Н. В. Ефимовым и С. Б. Стечкиным в 1958 г. при изучении изучении чебышёвских множеств.

Следуя Л. П. Власову, если Q обозначает некоторое свойство (например, "связность"), мы будем говорить, что множество M обладает свойством

B-Q, если $M \cap B(x,r)$ обладает свойством Q при всех $x \in X$, $r > 0$;
$\mathring{B}$-Q, если $M \cap \mathring{B}(x,r)$ обладает свойством Q при всех $x \in X$, $r > 0$;

здесь $B(x,r)$ и $\mathring{B}(x,r)$ – замкнутый и открытый шар с центром x и радиусом r.

В. А. Кощеев показал, что в конечномерном линейном нормированном пространстве всякое солнце связно. А. Л. Браун установил, что солнце в конечномерном линейном нормированном пространстве линейно связно и локально линейно связно. Кощеев также установил, что в линейном нормированном пространстве компактное солнце связно, а строгое солнце не имеет собственных связных компонент, являющихся множествами существования. Он также построил пример несвязного солнца (в конкретном бесконечномерном пространстве). Также отметим, что ограниченно компактное строгое солнце в нормированном пространстве B-связно (B-линейно связно, если пространство банахово), а в пространстве Ефимова–Стечкина всякое строгое солнце $\mathring{B}$-связно.

Изучая солнца в конечномерных пространствах Х. Беренс и Л. Хетцельт охарактеризовали солнца в пространствах $\ell^\infty(n)$ и показали, используя эту характеризацию, что солнца в $\ell^\infty(n)$ B-клеточноподобны (являются B-R_δ-множествами по Ароншайну). А. Л. Браун установил связность по Менгеру солнц в так называемых (BM)-пространствах конечной размерности – полиэдральные (BM)-пространства суть в точности $\oplus_\infty$-прямые суммы 1- или 2-мерных пространств. Используя этот результат, автор установил, что в конечномерных (BM)-пространствах любое солнце B-стягиваемо и на него для любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывная аддитивная (мультипликативная) ε-выборка (непрерывная выборка из почти наилучшего ε-приближения). Отметим, что непрерывной выборки из метрической проекции (т.е. 0-выборки) на строгое солнце может не существовать даже в трехмерном случае.

Теорема. *Пусть* X *– линейное нормированное или несимметрично нормированное пространство размерности* 2 *или* 3 *и пусть* $M \subset X$ *– строгое солнце. Тогда* M *B-стягиваемо и на него для любого* $\varepsilon > 0$ *существует непрерывная аддитивная (мультипликативная)* ε*-выборка.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00022).

О разрешимости начально-краевой задачи сложного теплообмена с краевыми условиями диффузного отражения и преломления для излучения

А. А. Амосов

Национальный исследовательский университет “Московский энергетический институт”

Рассматривается начально-краевая задача

$$c_p \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda(x,u)\nabla u) + 4\pi \int_0^\infty \varkappa_\nu k_\nu^2 h_\nu(u)\, d\nu$$

$$= \int_0^\infty \varkappa_\nu \int_\Omega I_\nu \, d\omega\, d\nu + f, \qquad (x,t) \in G \times (0,T), \tag{1}$$

$$\omega \cdot \nabla I + (\varkappa_\nu + s_\nu) I_\nu = s_\nu \mathcal{S}_\nu(I_\nu) + \varkappa_\nu k_\nu^2 h_\nu(u), \qquad (\omega, x, t) \in \Omega \times G \times (0,T), \tag{2}$$

$$\lambda(x,u)\nabla u \cdot n = 0, \qquad (x,t) \in \partial G \times (0,T), \tag{3}$$

$$I_\nu|_{\Gamma^-} = \mathfrak{B}_{d,\nu}(I_\nu|_{\Gamma^+}), \qquad (\omega,x,t) \in \Gamma^- \times (0,T), \quad 0 < \nu < \infty, \tag{4}$$

$$u|_{t=0} = u^0, \qquad x \in G, \tag{5}$$

описывающая радиационно – кондуктивный теплообмен в системе $G = \bigcup_{j=1}^{m} G_j$, состоящей из полупрозрачных тел $G_j \subset \mathbb{R}^3$, разделенных вакуумом. Искомые функции $u(x,t)$, $I_\nu(\omega,x,t)$ имеют физический смысл абсолютной температуры и интенсивности излучения на частоте ν, распространяющегося в направлении $\omega \in \Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 \mid |\omega| = 1\}$.

Здесь $0 < c_p$, $0 < \lambda(x,u)$, $0 \leqslant \varkappa_\nu$, $0 \leqslant s_\nu$ и $1 < k_\nu$ – коэффициенты теплоемкости, теплопроводности, поглощения, рассеяния и показатель преломления. Функция $h_\nu(u)$ отвечает спектральному распределению Планка: $h_\nu(u) = \dfrac{2\nu^2}{c_0^2} \dfrac{\hbar\nu}{\exp(\hbar\nu/(ku)) - 1}$ при $u > 0$. В уравнении переноса излучения (2) $\mathcal{S}_\nu$ – оператор рассеяния:

$$\mathcal{S}_\nu(\varphi)(\omega,x) = \int_\Omega \theta_{j,\nu}(\omega' \cdot \omega)\varphi(\omega',x)\, d\omega', \quad (\omega,x) \in \Omega \times G_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Краевое условие (4) описывает диффузное отражение и диффузное преломление излучения на границах тел. В нем $\Gamma^- = \{(\omega,x) \in \Omega \times \partial G \mid \omega \cdot n(x) < 0\}$, $\Gamma^+ = \{(\omega,x) \in \Omega \times \partial G \mid \omega \cdot n(x) > 0\}$. Подробное описание условия (4) и доказательство однозначной разрешимости задачи (2), (4) даны в [1], [2].

В данной работе доказаны существование и единственность обобщенного решения задачи (1)–(5). Установлена теорема сравнения. Приведены достаточные условия регулярности обобщенного решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 13-01-00201) и в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект N 1553).

Список литературы

[1] A. A. Amosov, “Boundary value problem for the radiation transfer equation with diffuse reflection and refraction conditions”, *Journal of Mathematical Sciences* (*United States*), **193**:2 (2013), 151–176.

[2] A. A. Amosov, “Some Properties of Boundary Value Problem for Radiative Transfer Equation with Diffuse Reflection and Refraction Conditions”, *Journal of Mathematical Sciences* (*United States*), **207**:5 (2013), 118–141.

Поведение на множестве полной меры кратных прямоугольных сумм Фурье

Н. Ю. Антонов

Институт математики и механики Уральского отделения РАН

Пусть $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$, $S_{m,n}(f, x, y)$ — значение (m, n)-ой прямоугольной частичной суммы двойного тригонометрического ряда Фурье функции $f \in L(\mathbb{T}^2)$ в точке $(x, y) \in \mathbb{T}^2$, $\Lambda = \{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел. Двойной ряд Фурье функции f назовем Λ-сходящимся в точке $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ если существует

$$\lim_{\min\{m,n\}\to\infty} S_{m,n}(f, x, y),$$

рассматриваемый только по тем парам натуральных чисел (m, n) для которых $1/(1 + \lambda_m) \leqslant m/n \leqslant 1 + \lambda_n$. Планируется обсудить ряд задач об условиях Λ-сходимости почти всюду тригонометрических рядов Фурье непрерывных функций двух переменных, а также некоторые другие вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов Фурье.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00496) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4538.2014.1).

Приближение оператора дифференцирования линейными ограниченными операторами в пространстве L_2 на полуоси

В. В. Арестов

Уральский федеральный университет

Будет обсуждаться задача Стечкина [1] о наилучшем приближении оператора дифференцирования порядка k на классе n раз дифференцируемых функций ($0 \leqslant k < n$) линейными ограниченными операторами в пространствах $L_p(I)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, на числовой оси $I = (-\infty, \infty)$ и полуоси $I = [0, \infty)$ и родственная задача об оптимальном дифференцировании гладких функций, заданных с известной погрешностью.

На числовой оси для всех $0 < k < n$ решение задачи Стечкина известно лишь в классических пространствах C, L_1 (С. Б. Стечкин, В. В. Арестов, А. П. Буслаев) и L_2 (Ю. Н. Субботин, Л. В. Тайков); см. библиографию в [2]. На полуоси задача Стечкина решена лишь в нескольких случаях для малых k, n. С. Б. Стечкин [1] нашел ее решение в равномерной норме для $n = 2, 3$, $1 \leqslant k < n$. В. И. Бердышев [3] решил задачу Стечкина в пространстве $L(0, \infty)$ при $k = 1$, $n = 2$. В сообщении будет приведено решение задачи Стечкина в пространстве $L_2(0, \infty)$ для $k = 1$, $n = 2$; этот результат получен автором совместно с М. А. Филатовой [4].

Исследования выполнены при поддержке РФФИ (проект 15-01-02705) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Список литературы

[1] С. Б. Стечкин, “Наилучшее приближение линейных операторов”, *Мат. заметки*, **1**:2 (1967), 137–148.

[2] В. В. Арестов, “Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи”, *Успехи мат. наук*, **51**:6 (1996), 89–124.

[3] В. И. Бердышев, “Наилучшее приближение в $L[0, \infty)$ оператора дифференцирования”, *Мат. заметки*, **9**:5 (1971), 477–481.

[4] V. V. Arestov, M. A. Filatova, “Best approximation of the differentiation operator in the space L_2 on the semiaxis”, *JAT*, **187** (2014), 65–81.

О формуле регуляризованного следа одного дифференциального оператора в частных производных

Э. Ф. Ахмерова

Башкирский государственный университет

Рассмотрим возмущенный оператор $H = H^0 + V$, где возмущение V таково, что оператор $VR^0(\lambda)$ компактен $\forall\lambda \notin \sigma\left(H^0\right)$ и $\|VR^0(\lambda)\| < 1$. Тогда оператор H замкнут в области определения H^0 и имеет дискретный спектр.

Пусть $d_n = \min(\lambda_{n+1} - \lambda_n,\, \lambda_n - \lambda_{n-1})/2$ и существует последовательность ρ_n, такая, что

$$0 < \rho_n \leqslant d_n, \quad \inf_{n\geqslant 2} \rho_n > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{|\lambda-\lambda_n|\leqslant\rho_n} \|R_n^0(\lambda)V\| = 0,$$

где $R_n^0(\lambda) = R^0(\lambda) - P_n(\lambda_n - \lambda)^{-1}$.

Тогда, согласно рассуждениям работы [1], спектр оператора $H = H^0 + V$ определяется из уравнения

$$\lambda = \lambda_n + P_nVP_n - P_nVR_n(\lambda)VP_n, \tag{1}$$

где $R_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left[R_n^0(\lambda)V\right]^k R_n^0(\lambda)$.

Выражение (1) представляет собой формулу для спектра $\det(A_n - \lambda) = 0$ конечномерного оператора A_n в окрестности собственнного числа λ_n, $|\lambda - \lambda_n| < \rho_n$ при фиксированных n. Тогда, используя тот факт, что для конечномерных операторов спектральный след равен матричному, из уравнения (1) легко следует представление

$$\nu_n\lambda_n + \mathrm{sp}P_nVP_n - \gamma_{\nu_n}^{(n)} = \sum_{k=1}^{v_n} \mu_k^{(n)}, \tag{2}$$

где $\mu_k^{(n)}$ – собственные числа оператора H, $\ |\lambda_n - \mu_k^{(n)}| < \rho_n$,

$$\mathrm{sp}\, P_nVP_n = \sum_{k=1}^{\nu_n} \left(V\varphi_k^{(n)}, \varphi_k^{(n)}\right), \qquad \gamma_{\nu_n}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\nu_n} \left(VR_n(\mu_k^{(n)})V\varphi_k^{(n)}, \varphi_k^{(n)}\right).$$

Если возмущение V таково, что последовательность $\sum_{n=1}^{m} \gamma_{\nu_n}^{(n)} \to 0$ при $m \to \infty$, то из формулы (2) непосредственно следует справедливость формулы регуляризованного следа оператора H

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k^{(n)} - \nu_n\lambda_n - \sum_{k=1}^{\nu_n} \left(V\varphi_k^{(n)}, \varphi_k^{(n)}\right) \right) = 0.$$

Для конкретных дифференциальных операторов в частных производных задача усложняется в связи со сложной структурой спектра, необходимостью разложением в ряд по собственным функциям резольвенты невозмущенного оператора. В качестве примера рассматривается оператор $H^0 = T \otimes I_1 + I_2 \otimes L$ в гильбертовом пространстве $\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$, где $\mathbb{H}_1 = L^2(0, \infty)$, $\mathbb{H}_2 = L^2[0, \pi]$, I_1 и I_2 – единичные операторы в соответствующих пространствах,

$$\begin{aligned} &Tf = -f'' + x^2 f, \qquad f(0) = 0, \quad f \in L^2[0, \infty),\\ &Lg = -g'', \qquad g(0) = g(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Список литературы

[1] Ахмерова Э. Ф., Муртазин Х.Х., “Спектральная асимптотика для негладких возмущений дифференциальных операторов и формулы следов”, *Доклады РАН*, **388**:6 (2003), 731–733.

Неравенства Винера — Ингама для лакунарных тригонометрических рядов

А. Г. Бабенко[a], В. А. Юдин

[a] *Институт математики и механики Уральского отделения РАН*

Тема, рассматриваемая в докладе, впервые появилась в исследованиях Н. Винера (1934) и существенно была развита А.Е. Ингамом (1936) и А. Сельбергом (1974).

Пусть $\mathbb{T} = [-\pi, \pi)$ — период длины 2π, $L^2 = L^2(\mathbb{T})$ — пространство 2π-периодических измеримых комплекснозначных функций с обычной нормой $\|f\| = \|f\|_{L^2}$. Для натурального числа $q \geqslant 2$ обозначим через D_q класс функций из L^2 с рядами Фурье вида

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_{\nu_k} e^{i\nu_k x}, \quad \text{все} \quad \nu_k \in \mathbb{Z}, \quad \nu_{k+1} - \nu_k \geqslant q.$$

Зафиксируем $h \in (0, \pi)$. Нас интересует в каких пределах может изменяться отношение

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx \Big/ \int_{-h}^{h} |f(x)|^2 \, dx$$

для $f \in D_q$? Здесь анонсируются оценки этого отношения в терминах величин

$$\mathcal{E}_n^+(h) := \inf_{\tau\in\mathcal{T}_n,\, \chi_h \leqslant \tau} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \{\tau(x) - \chi_h(x)\} \, dx,$$

$$\mathcal{E}_n^-(h) := \inf_{\tau\in\mathcal{T}_n,\, \tau\leqslant \chi_h} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \{\chi_h(x) - \tau(x)\} \, dx$$

наилучшего интегрального приближения соответственно сверху и снизу характеристической функции χ_h интервала $(-h, h)$ подпространством $\mathcal{T}_n$ тригонометрических полиномов порядка не выше n; неравенство $\chi_h \leqslant \tau$ означает, что $\chi_h(x) \leqslant \tau(x)$ при всех $x \in \mathbb{T}$.

Теорема. *Пусть $q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 2$, $\pi/q < h \leqslant \pi$, $f \in D_q$. Тогда*

$$\frac{1}{\frac{h}{\pi} + \mathcal{E}_{q-1}^+(h)} \leqslant \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx}{\displaystyle\int_{-h}^{h} |f(x)|^2 \, dx} \leqslant \frac{1}{\frac{h}{\pi} - \mathcal{E}_{q-1}^-(h)}.$$

Заметим, что $\mathcal{E}_n^+(h) = \mathcal{E}_n^-(\pi - h)$ для $n \in \mathbb{N}$, $h \in (0, \pi)$; поэтому достаточно исследовать лишь одну из этих величин. Дж.Д. Ваалер (1985) доказал, что величина $\mathcal{E}_n^-(h)$ не превосходит $1/(n+1)$ при любых $n \in \mathbb{N}$, $h \in (0, \pi]$. Точное значение этой величины было найдено совместно авторами и Ю.В. Крякиным (2012), с помощью этого результата и теоремы получаем

Следствие. *Пусть $q \in \{2, 3, 4, \ldots\}$, $h = \frac{\pi+\varepsilon}{q}$, $0 < \varepsilon < \pi$, $f \in D_q$. Тогда*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leqslant \Big(q + \operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2} \operatorname{ctg}\frac{h}{2}\Big) \int_{-h}^{h} |f(x)|^2 \, dx.$$

Положим

$$\alpha_q(h) := \sup_{f\in D_q,\, \|f\|>0} \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx}{\displaystyle\int_{-h}^{h} |f(x)|^2\,dx}.$$

Справедливы равенства

$$\lim_{h\to\frac{2\pi}{q}-0} \alpha_q(h) = q, \qquad \lim_{h\to\frac{2\pi}{q+1}-0} \alpha_q(h) = q+1.$$

Из первого равенства следует, что $\alpha_2(h)$ терпит разрыв в точке $h=\pi$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-11-00702).

Список литературы

[1] Wiener N., “A class of gap theorems”, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* 2^e *série*, **3**:3-4 (1934), 367–372.

[2] Ingham A.E., “Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series”, *Math. Z.*, **41**:1 (1936), 367–379.

[3] Selberg A., *Collected papers*, Volume II, Springer-Verlag, Berlin, 1991, viii+253 c.

[4] Vaaler J.D., “Some extremal functions in Fourier analysis”, *Bull. Amer. Math. Soc.* (*New Series*), **12**:2 (1985), 183–216.

[5] Бабенко А.Г., Крякин Ю.В., Юдин В.А., “Одностороннее приближение в L характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами”, *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **18**:1 (2012), 82–95.

Единственность в классе Тихонова решения задачи Коши для параболических систем

Е. А. Бадерко[a], М. Ф. Черепова[b]

[a] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова*
[b] *Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»*

Рассмотрена задача Коши для параболической по Петровскому системы 2-го порядка, коэффициенты которой непрерывны и ограничены в $\overline{D} = \mathbb{R} \times [0, T], 0 < T < +\infty$, при этом старшие коэффициенты удовлетворяют условию Дини в $\overline{D}$. Доказана единственность решения этой задачи в классе Тихонова [1].

Работа второго автора выполнена в рамках исполнения государственного задания Минобрнауки России (проект №1553) и при финансовой поддержке РФФИ (проект №13-01-00201-а).

Список литературы

[1] А. Н. Тихонов, "Теоремы единственности для уравнения теплопроводности", *Мат. сборник*, **42**:2 (1935), 199–216.

[2] Л. И. Камынин, "О проблеме Тихонова-Петровского для параболических уравнений 2-го порядка", *Сиб. мат. журн.*, **22**:5 (1981), 78–109.

Нелинейные методы восстановления псевдодифференциальных операторов на компактах периодических функций многих переменных

Д. Б. Базарханов

[a] *Институт математики и математического моделирования*, *Казахстан*

Для приближенного восстановления некоторых классов псевдодифференциальных операторов типа произведения на соответствующих компактах периодических функций многих переменных по некоторой информации об операторе и функции предлагается конструктивный нелинейный метод, использующий общую теорию жадных алгоритмов в банаховом пространстве. Кроме того. устанавливаются оценки погрешности восстановления таких операторов на этих компактах, точные в степенной шкале на всем классе операторов.

О плотности множества $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $L_{p(x)}(\Omega)$ для $0 < p(x) < 1$

Р. А. Бандалиев[a], С. Г. Гасанов[b]

[a] *Институт математики и механики НАН Азербайджана*
[b] *Гянджинский государственный университет*

Теорема. *Пусть Ω измеримое по Лебегу открытое подмножество в R^n. Предположим, что $p\colon \Omega \mapsto \left[\underline{p}, \overline{p}\right]$, $p \in C^\infty\left(R^n\right)$, где*

$$\underline{p} = \operatorname{ess\,inf}_{x \in R^n} p(x) > 0, \qquad \overline{p} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in R^n} p(x) < 1.$$

Тогда множество $C_0^\infty\left(\Omega\right)$ плотно в $L_{p(x)}\left(\Omega\right)$.

Замечание. Отметим, что в случае $p(x) = p = const \in (0,1)$, Теорема доказана в работе [1]. Недавно структурные свойства пространства Лебега $L_{p(x)}\left(\Omega\right)$ при $0 < p(x) < 1$ приведены в работе [2].

Работа выполнена при финансовой поддержки Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики (грант EIF-2014-9(15)-46/10/1) и Президиума Национальной Академии Наук Азербайджана (грант-2015).

Список литературы

[1] Б. Е. Батыров, В. И. Буренков, “Об операторе усреднения в пространствах L_p $0 < p < 1$”, *Матем. заметки*, **43**:1 (1988), 38–43.

[2] Р. А. Бандалиев, “О структурных свойствах весового пространства $L_{p(x),\omega}$ для $0 < p(x) < 1$”, *Матем. заметки*, **95**:4 (2014), 492–506.

Минимальное идеальное пространство для конуса обобщенно двояко монотонных функций

Э. Г. Бахтигареева

Российский университет дружбы народов

Пусть $T_0 \in (0,\infty]$, M – множество вещественнозначных измеримых функций, $M_+ = \{f \in M : f \geqslant 0\}$.

Теорема. *Пусть $Y = Y(0,T_0)$ есть идеальное пространство (ИП), порожденное идеальной квазинормой (ИКН) ρ, причем ρ согласована со следующим отношением порядка: для $f, g \in M_+(0,T_0)$*

$$\int\limits_0^t f d\tau \leqslant \int\limits_0^t g d\tau \Rightarrow \rho(f) \leqslant \rho(g). \tag{1}$$

Фиксируем $\beta \in (0,1)$ и введем конус

$$K_0 = \left\{ h \in Y : h \geqslant 0; \quad t^{-1} \int\limits_0^t h d\tau \downarrow, \quad t^{-\beta} \int\limits_0^t h d\tau \uparrow \right\}, \tag{2}$$

снабженный функционалом ρ:

$$\rho_{K_0}(h) = \rho(h), \quad h \in K_0. \tag{3}$$

Для $f \in M_+(0,T_0)$ введем функционал $\rho_0(f) = \rho(A_0 f)$, где оператор $A_0 : M \to M_+$ (норма по τ):

$$(A_0 f)(t) = \left\| \tau^{-\beta}(t+\tau)^{\beta-1} \int\limits_0^\tau |f| d\xi \right\|_{L_\infty(0,T_0)}, \quad t \in (0,T_0).$$

Тогда, ρ_0 есть ИКН, согласованная с отношением порядка (1), а порожденное ею пространство

$$X_0 = X_0(0,T_0) = \{f \in M(0,T_0) : \rho_0(|f|) < \infty\}$$

является оптимальным ИП с нормой, согласованной с отношением порядка (1), для вложения $K_0 \longmapsto X$.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект № 14-11-00443).

Список литературы

[1] C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, New York, 1988.

Минимальное идеальное пространство, содержащее конус неотрицательных измеримых функций

Э. Г. Бахтигареева, М. Л. Гольдман

Российский университет дружбы народов

1. *Пусть* (A, μ) – *пространство с неотрицательной* σ – *конечной мерой* μ, M – *множество* μ - *измеримых функций*, $M_+ = \{f \in M : f \geqslant 0\}$. *Пусть* ρ – *идеальная квазинорма* (*кратко*: *ИКН*), $Y = Y(A, \mu)$- *порожденное ею идеальное пространство* (*ИП*, *см.* [1]); $A_0 : M \to M_+$- *оператор со следующими свойствами*:

$$A_0(|f|) = A_0 f; \quad A_0(\alpha f) = \alpha A_0 f, \quad f \in M, \alpha \geqslant 0;$$

$$(A1). \quad \exists c_1 \in \mathbb{R}_+ : \rho(f) \leqslant c_1 \rho(A_0 f), f \in M.$$

$$(A2). \quad \exists c_2 \in \mathbb{R}_+ : \quad \rho(A_0(f+g)) \leqslant c_2[\rho(A_0 f) + \rho(A_0 g)],$$

$$(A3). \quad |f| \leqslant |g| \quad \mu\text{-п.в.} \Rightarrow \rho(A_0 f) \leqslant \rho(A_0 g), \quad f, g \in M;$$

$$(A4). \quad 0 \leqslant f_n \uparrow f \quad \mu\text{-п.в.} \Rightarrow A_0 f_n \uparrow A_0 f \quad \mu\text{-п.в.}$$

Тогда, *отображение* $\rho_0(f) := \rho(A_0 f), \quad f \in M_+$, *есть ИКН*, *а порожденное ею ИП* $X_0 = X_0(A, \mu)$ *с* $\|f\|_{X_0} = \rho_0(|f|)$ *вложено в* Y.

2. *Пусть еще* $K_0 \subset Y_+ = \{g \in Y, \quad g \geqslant 0\}$ *-конус*, *снабженный функционалом* $\rho_{K_0} := \rho$, *и согласованный с оператором* A_0 *условиями*:

$$(A5). \quad \exists c_3 \in \mathbb{R}_+ : h \in K \Rightarrow \rho(A_0 h) \leqslant c_3 \rho(h); \quad (A6). \quad A_0(X_0) \subset K_0.$$

Тогда $X_0 = X_0(A, \mu)$ *есть минимальное ИП*, *содержащее* K_0, *среди всех ИП* $X = X(A, \mu)$, *обладающих свойством*: $K_0 \subset X$ *и*

$$\exists c_X \in \mathbb{R}_+ : \quad \|f\|_X \leqslant c_X \|A_0 f\|_X, \quad f \in M.$$

Этот результат влечет ряд конкретных конструкций минимальных ИП для различных конусов из M_+.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект № 14-11-00443).

Список литературы

[1] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.

Оценка остаточного члена в асимптотическом решении одной экстремальной задачи на множестве неотрицательных тригонометрических полиномов

А. С. Белов

Ивановский государственный университет

Для всех вещественных чисел $\gamma \geqslant 1$ обозначим

$$K(\gamma) = \inf\Big\{ -\min_x \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kx) \Big\}, \tag{1}$$

где нижняя грань берется по всем действительным $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ таким, что либо $\alpha_k = 0$, либо $\alpha_k \geqslant 1$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \gamma$. Величину (1) рассматривал Одлыжко [1], который показал, что $K(\gamma) = \mathrm{O}\,((\gamma \ln \gamma)^{1/4})$ при $\gamma \to +\infty$.

Также при всех $\gamma \geqslant 1$ определим функцию

$$K^{\downarrow}(\gamma) = \inf\Big\{ -\min_x \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos(kx) \Big\}, \tag{2}$$

где нижняя грань берется по всем действительным $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ таким, что либо $\alpha_k = 0$, либо $\alpha_k \geqslant 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \gamma$ и $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_3 \geqslant \ldots$. Из этих определений ясно, что

$$K^{\downarrow}(\gamma) \geqslant K(\gamma) \geqslant 1 \qquad \text{при всех} \quad \gamma \geqslant 1$$

и

$$K^{\downarrow}(\gamma) = K(\gamma) = \gamma \qquad \text{при} \quad \gamma \in [1, 2)\,,$$

поскольку в этом случае и в сумме (1), и в сумме (2) будет только одно из $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ отлично от нуля и равно γ.

В 2003 году автор доказал, что существует положительная абсолютная постоянная C такая, что

$$C\,(1 + \ln \gamma) \leqslant K(\gamma) \leqslant K^{\downarrow}(\gamma) \leqslant \frac{1}{\pi}\,(\,\ln \gamma + 2\pi - \ln 2) \qquad \text{при всех} \;\; \gamma \geqslant 1 \tag{3}$$

и

$$K^{\downarrow}(\gamma) = \frac{1}{\pi}\,\ln \gamma + O(\,\ln \ln(\gamma + 2)\,) \qquad \text{при} \;\; \gamma \geqslant 1\,. \tag{4}$$

Отметим, что в (3) оценка снизу для величины (1) вытекает из положительного решения гипотезы Литтлвуда Конягиным С.В. и Мак Геем, Пино и Смитом в 1981 году.

В 2004 году автор анонсировал оценку

$$K^{\downarrow}(\gamma) = \frac{1}{\pi}\,\ln \gamma + O(1) \qquad \text{при всех} \;\; \gamma \geqslant 1\,,$$

которая несколько улучшает оценку (4). Дальнейшее развитие и некоторое усложнение рассуждений позволило в [2] уточнить последнюю оценку. Оказывается, для величины (2) справедлива оценка

$$K^{\downarrow}(\gamma) = \frac{1}{\pi}\,\ln \gamma + \frac{C_0 + \ln 2 + \ln \pi}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\,\frac{\ln \gamma}{\gamma} + \frac{O(1)}{\gamma} \qquad \text{при всех} \;\; \gamma \geqslant 1\,, \tag{5}$$

где через

$$C_0 = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \Big)$$

обозначена известная постоянная Эйлера. Из приводимого в статье [2] доказательства можно при желании получить в асимптотическом соотношении (5) конкретную оценку остаточного члена $O(1)$. Оказывается, верна следующая

Теорема 1. *Для величины (2) справедлива оценка*

$$K^{\downarrow}(\gamma) = \frac{1}{\pi}\ln\gamma + \frac{C_0 + \ln 2 + \ln\pi}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\frac{\ln\gamma}{\gamma} + \frac{\alpha(\gamma)}{\gamma} \qquad \text{при всех} \quad \gamma \geqslant 1\,,$$

где

$$0 < \alpha(\gamma) < C_1 = 4 - 2\,\pi^{-1}\,(C_0 + \ln(4\,\pi)) - \pi^{-2}\ln 2 = 1{,}95100252\ldots$$

при всех $\gamma \geqslant 1$ *и* C_0 *обозначает постоянную Эйлера.*

Более того, $\sup\{|\alpha(\gamma)| : \gamma \geqslant 1\} = C_1$,

$$\varlimsup_{\gamma\to\infty} \alpha(\gamma) \leqslant \pi^{-2}\,(16 + C_0 + \ln(2\,\pi)) = 1{,}8658389924\ldots$$

и $\alpha(\gamma) < 1{,}95$ *при всех* $\gamma \geqslant 2$.

В связи с теоремой 1 особый интерес представляет вопрос о взаимоотношении функций (1) и (2) : не известно ни одного значения γ, при котором функции (1) и (2) принимают различные значения.

Верна следующая теорема.

Теорема 2. *При всех* $\gamma \in [1, 3)$ *справедливо равенство* $K(\gamma) = K^{\downarrow}(\gamma)$.

В статье [2] найдено точное значение функции (2) при всех $\gamma \in [1, 6]$. Это может оказаться полезным при попытке найти такое γ, если, конечно, оно существует, при котором функции (1) и (2) принимают различные значения. Если существуют вещественное число $\gamma \geqslant 3$, натуральное $m \geqslant 2$, вещественные числа $a_k \geqslant 1$, $k = 1, \ldots, m$, $\sum_{k=1}^{m} a_k = \gamma$ и натуральные числа $1 \leqslant n_1 < \cdots < n_m$, для которых полином

$$T(x) = K^{\downarrow}(\gamma) + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos(n_k\, x)$$

положителен во всех точках $x \in [0, \pi]$, то, очевидно, значения $K^{\downarrow}(\gamma)$ и $K(\gamma)$ различны. Поэтому детальное изучение функции (2) важно и для изучения функции (1).

Далее, для удобства изложения, положим

$$g(\gamma) = \frac{1}{\pi}\ln\gamma + \frac{1}{\pi^2}\frac{\ln\gamma}{\gamma} + \frac{C_0 + \ln 2 + \ln\pi}{\pi} \qquad \text{при} \qquad \gamma \geqslant 1\,.$$

Тогда по теореме 1

$$K^{\downarrow}(\gamma) > g(\gamma) \qquad \text{при всех} \qquad \gamma \geqslant 1\,.$$

Пусть взяты произвольные натуральное число $m \geqslant 2$, вещественные числа $a_k \geqslant 1$, $k = 1, \ldots, m$, и натуральные числа $1 \leqslant n_1 < \cdots < n_m$. Рассмотрим при $\gamma = \sum_{k=1}^{m} a_k$ полином

$$T(x) = g(\gamma) + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos(n_k x)\,. \tag{6}$$

Если бы нашелся неотрицательный полином такого вида, то величина $K(\gamma)$ не превосходила бы $g(\gamma)$ и, значит, была бы меньше величины $K^{\downarrow}(\gamma)$, т.е. значения $K(\gamma)$ и $K^{\downarrow}(\gamma)$ не совпадали бы. Однако найти неотрицательный полином вида (6) не удается. Доказать, что любой полином вида (6) отрицателен в некоторой точке x, своей для каждого полинома, также пока не удается.

Доказательство теоремы 1 основано на изучении (см. [3]) экстремальной задачи о минимуме свободного члена неотрицательного четного тригонометрического полинома при некоторых условиях на коэффициенты.

Список литературы

[1] Odlyzko A.M., “Minima of cosine sums and maxima of polynomials on the unit circle”, *J. London Math. Soc.*, **26**:3 (1982), 412–420.

[2] Белов А.С., “Об асимптотическом решении одной экстремальной задачи, связанной с неотрицательными тригонометрическими полиномами”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **18**:5 (2013), 27–67.

[3] Белов А.С., “Об экстремальной задаче о минимуме свободного члена неотрицательного тригонометрического полинома”, *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **17**:3 (2011), 105–121.

Пространства мультипликаторов для пространств бесселевых потенциалов: эквивалентные нормы и характеризация в шкале пространств $H^s_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n)$

А. А. Беляев

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

В работе исследуются мультипликаторы из пространства бесселевых потенциалов $H^k_p(\mathbb{R}^n)$ с положительным индексом гладкости в пространство бесселевых потенциалов $H^{-l}_{q'}(\mathbb{R}^n)$ с отрицательным индексом гладкости и возможность описания пространств мультипликаторов $M(H^k_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-l}_{q'}(\mathbb{R}^n))$ в шкале равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов $H^s_{p,\,unif}(\mathbb{R}^n)$.

Несложно показать, что для произвольных $k, l \geqslant 0,\ p, q > 1$ имеет место непрерывное вложение

$$M(H^k_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-l}_{q'}(\mathbb{R}^n)) \subset H^{-l}_{q',\,unif}(\mathbb{R}^n) \cap H^{-k}_{p',\,unif}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство же обратного вложения возможно лишь при выполнении дополнительных ограничений на индексы k, l, p, q. В случае $p \leqslant q'$ на пространстве мультипликаторов $M(H^k_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-l}_{q'}(\mathbb{R}^n))$ можно ввести равномерную мультипликаторную норму, эквивалентную стандартной норме этого пространства. В этом случае, опираясь на методы, развитые в работах [1] и [2], автором в статье [3] получен критерий вложения пространств $H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ в пространство $M(H^k_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-l}_{q'}(\mathbb{R}^n))$ в терминах выполнения функциональных мультипликативных оценок.

С помощью этого подхода автором получено описание пространства мультипликаторов в следующем важном частном случае.

Теорема. *Пусть $p,\ q > 1,\ p \leqslant q'$ и $k > \frac{n}{\max(p,q)}$. Тогда*

$$M(H^k_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-k}_{q'}(\mathbb{R}^n)) = H^{-k}_{\max(p',\,q'),\,unif}(\mathbb{R}^n),$$

причем соответствующие нормы эквивалентны.

Накладываемые в условии этой теоремы ограничения являются естественными. Действительно, в случае $p > q'$ непрерывное вложение

$$H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M(H^k_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-l}_{q'}(\mathbb{R}^n))$$

не имеет места ни при каких значениях $\gamma \in \mathbb{R},\ p > 1$. Поэтому задача описания пространства мультипликаторов из $H^k_p(\mathbb{R}^n)$ в $H^{-l}_{q'}(\mathbb{R}^n)$ в терминах равномерно локализованных пространств бесселевых потенциалов имеет смысл лишь при $p \leqslant q'$.

При отказе от условия $k > \frac{n}{\max(p,q)}$ дать полную характеризацию пространства мультипликаторов $M(H^k_p(\mathbb{R}^n) \to H^{-l}_{q'}(\mathbb{R}^n))$ в шкале пространств $H^\gamma_{r,\,unif}(\mathbb{R}^n)$ невозможно даже в простейшем случае $k = l, p = q = 2$. В этом случае в работе [2] при $k < \frac{n}{2}$ были установлены двусторонние непрерывные вложения

$$H^{-k}_{\frac{n}{k},\,unif}(\mathbb{R}^n) \subset M(H^k_2(\mathbb{R}^n) \to H^{-k}_2(\mathbb{R}^n)) \subset H^{-k}_{2,\,unif}(\mathbb{R}^n).$$

В докладе будут рассмотрены обобщения этого результата для пространства

$$M(H_p^k(\mathbb{R}^n) \to H_{q'}^{-k}(\mathbb{R}^n))$$

при $k < \frac{n}{\max(p,q)}$.

Список литературы

[1] Дж. Г. Бак, А. А. Шкаликов, “Мультипликаторы в дуальных соболевских пространствах и операторы Шрёдингера с потенциалами-распределениями”, *Матем. заметки*, **71 5** (2002), 643–651.

[2] M. I. Neiman-Zade, A. A. Shkalikov, “Strongly Elliptic Operators With Singular Coefficients”, *Russian Journal Of Mathematical Physics*, **13 1** (2006), 70–78.

[3] A. A. Belyaev, “Characterization of Spaces of Multipliers for Bessel Potential Spaces”, *Math. Notes*, **96 5** (2014), 634–646.

О структуре множества сходимости равномерно ограниченной последовательности полиномов

В. А. Беляев

Калужский филиал Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана

Проблема состоит в следующем: описать структуру множества E, принадлежащего компакту K комплексной плоскости, для которого существует последовательность полиномов, равномерно ограниченная на K, сходящаяся поточечно на E и расходящаяся вне E. Компакт K не разбивает комплексной плоскости в том смысле, что $\mathbb{C} \setminus K$ состоит из одной области, содержащей бесконечно удаленную точку.

Рассматриваемая проблема примыкает к проблеме П. М. Монтеля о харрактеристике иррегулярных точек и описания функций, представимых сходящейся последовательностью полиномов. Некоторые результаты в этом направлении получены М. А. Лаврентьевым, М. В. Келдышем, С. Н. Мергеляном, С. В. Колесниковым, В. А. Беляевым (см., например, [1]–[6]).

Введем некоторые обозначения: ∂K - граница K, $O\,(\partial K)$ – совокупность ограниченных, связных составляющих $\mathbb{C} \setminus \partial K$. Через $\{B\}$ обозначим совокупность всех тех областей из $O\,(\partial K)$, каждая из которых полностью принадлежит E, а $\{G\} = O\,(\partial K) \setminus \{B\}$.

Теорема. *Для того, чтобы существовала последовательность полиномов равномерно ограниченная на K, которая поточечно сходится на E, $E \subset K$, и расходится в каждой точке $\mathbb{C} \setminus E$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1. *E – типа $F_{\sigma\delta}$*
2. $\omega\,(E \cap \partial G_m, G_m, z) = 0, \forall G_m \in \{G\}$, *где* $\omega\,(E \cap \partial G_m, G_m, z)$ *- гармоническая мера*
3. $\sum (1 - |\varphi\,(z_n)|) < \infty, \forall G_m \in \{G\}$ *где* $w = \varphi_m\,(z)$ *конформное и однолистное отображение области* G_m *на круг* $|w| < 1$, *а суммирование берется по всем точкам множества* $E \cap G_m$.

Следствие. *Пусть* $\mathring{K} \subset E \subset K$, *где* $\mathring{K}$ *– множество внутренних точек* K. *Для того, чтобы существовала последовательность полиномов, равномерно ограниченная на* K, *которая поточечно сходится на* E *и расходится в каждой точке* $\mathbb{C} \setminus E$, *необходимо и достаточно, чтобы* E *имело тип* $F_{\sigma\delta}$.

Список литературы

[1] P. M. Montel, “Lecons sur les series de polinomes d’une variable complexe”, *Collect. Borel*, **1** (1910), 1–128.

[2] M. A. Lavrentieff, “Sur les fonctions d’une variable complexe representatles par des series de polinomes”, *Actual. sci. et. industr.*, **441** (1936), 1–62.

[3] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Гостехиздат, Москва, 1952.

[4] С. Н. Мергелян, “О некоторых классах множеств и их приложениях”, *Некоторые проблемы математики и механики*, 1961, 133–172.

[5] С. Н. Мергелян, А. А. Даниелян, “О последовательностях полиномов, сходящихся на множествах типа F_σ”, *ДАН Арм ССР*, 1988, 54–56.

[6] В. А. Беляев, “Описание структуры множества полиномиальной сходимости в комплексной плоскости”, *ДАН АНСССР*, 1990, 1296–1298.

О необходимом условии ступенчатой функции, порождающей ортогональный КМА на группе Виленкина

Г. С. Бердников

Саратовский государственный университет

Пусть p – простое число. Мы рассматриваем кратномасштабный анализ на локально-компактных группах Виленкина

$$\mathfrak{G} = \{x = (\ldots, 0, 0, \ldots, 0, x_n, x_{n+1}, \ldots) | \forall n \in \mathbb{Z}, \forall x_i = \overline{0, p-1}, x_n \neq 0\}.$$

На группе определена операция покоординатного сложения по модулю p и она может быть представлена в виде $\mathfrak{G} = \bigcup_n \mathfrak{G}_n$, где

$$\mathfrak{G}_n = \{x = (\ldots, 0, 0, \ldots, 0, x_n, x_{n+1}, \ldots) | n \in \mathbb{Z}, \forall x_i = \overline{0, p-1}, x_n \neq 0\},$$

и выполняется вложение

$$\cdots \supset \mathfrak{G}_{-n} \supset \cdots \supset \mathfrak{G}_0 \supset \mathfrak{G}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{G}_n \supset \cdots$$

Также мы рассматриваем аннуляторы $\mathfrak{G}_n^{\perp}$ – множества характеров, обращающих группы $\mathfrak{G}_n$ в единицу.

Для построения кратномасштабного анализа на $\L_2(\mathfrak{G})$ необходимо найти масштабирующую функцию $\varphi(x)$, которая является решением масштабирующего уравнения. для преобразования Фурье $\hat{\varphi}(\chi)$ которой выполняется условие

$$\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi A^{-1}),$$

где A – оператор растяжения, а функция $m_0(\chi)$ называется маской.

Ю. Фарков [2] нашел необходимые и достаточные условия на масштабирующую функцию, при которых она порождает кратномасштабный анализ на группах Виленкина. Но в его работах нет алгоритма построения такой масштабирующей функции. В данной работе исследование этого вопроса ведется в терминах, пригодных для создания такого алгоритма.

Мы будем рассматривать функции $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(\mathfrak{G}_M^{\perp})$, то есть постоянные на смежных классах вида $G_{-N}^{\perp}\zeta$ и с компактным носителем $supp(\hat{\varphi}(\chi)) \subset \mathfrak{G}_M^{\perp}$.

Тогда возможно сформулировать необходимое условие для такой функции, порождающей ортогональный КМА на группе Виленкина, выраженное в терминах теории графов.

В работе [1] было выяснено, что маска $m_0(\chi)$ такой функции обладает следующими свойствами:

1) $m_0(\chi)$ постоянна на смежных классах вида $\mathfrak{G}_{-N}^{\perp}\zeta$.

2) $m_0(\chi)$ периодична с любым периодом $r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \ldots r_s^{\alpha_s}$, где $\alpha_i = \overline{0, p-1}$.

3) $m_0(\mathfrak{G}_{-N}^{\perp}) = 1$.

Укажем способ построения ориентированного графа по масштабирующей функции.

Алгоритм.

1) Пусть вершины графа имеют вид $\overline{\alpha}^j = (\alpha_i^j)_{i=1}^N$. Множество всех вершин графа будем обозначать $\{\overline{\alpha}^j\}$.

2) Пусть $\hat{\varphi}(\mathfrak{G}_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} \dots r_0^{\alpha_0} \dots r_{s-1}^{\alpha_{s-1}}) \neq 0$, где $s \leqslant M$. Это условие, пользуясь равенством

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{n=0}^{\infty} m_0(\chi A^{-n}),$$

периодичностью маски и переобозначением

$$m_0(\mathfrak{G}_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} \dots r_0^{\alpha_0}) = \lambda_{\alpha_{-N},\alpha_{-N+1},\dots,\alpha_0},$$

можно переписать в виде:

$$\hat{\varphi}(\mathfrak{G}_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} \dots r_0^{\alpha_0} \dots r_{s-1}^{\alpha_{s-1}}) = \lambda_{\alpha_{-N},\alpha_{-N+1},\dots,\alpha_0} \lambda_{\alpha_{-N+1},\alpha_{-N+2},\dots,\alpha_1} \dots$$

$$\dots \lambda_{\alpha_{s-N-1},\alpha_{s-N},\dots,\alpha_{s-1}} \lambda_{\alpha_{s-N},\alpha_{s-N+1},\dots,\alpha_{s-1},0} \dots \lambda_{\alpha_{s-1},0,\dots,0} \neq 0.$$

Неравенство нулю выполняется только в том случае, если все значения маски $\lambda_{\alpha_{i-N},\dots,\alpha_i}$, участвующие в данном произведении, отличны от нуля. Для каждого такого λ мы строим дугу

$$(\alpha_{i-N}, \alpha_{i-N+1} \dots, \alpha_{i-1}) \to (\alpha_{i-N+1}, \alpha_{i-N+2}, \dots, \alpha_i).$$

3) Перебирая все смежные классы, на которых преобразование Фурье $\hat{\varphi}(\chi)$ отлично от нуля и производя аналогичные операции, мы получаем орграф Γ, в котором каждая дуга соответствует ненулевому значению маски.

Теорема. *Пусть $\varphi(x)$ – масштабирующая функция, причем $\hat{\varphi}(\chi) \in \mathfrak{D}_{-N}(\mathfrak{G}_M^{\perp})$. Тогда орграф Γ, построенный по алгоритму 1, обладает следующими свойствами:*

1) *Если имеется дуга $\overline{\alpha}^j \to \overline{\alpha}^k$, это означает, что $N-1$ последняя компонента $\overline{\alpha}^j$ совпадает с первыми $N-1$ компонентами $\overline{\alpha}^k$. Иными словами $\forall i = \overline{1, N-1},\ \alpha_{i+1}^j = \alpha_i^k$.*

2) *Из любой вершины орграфа, отличной от $\overline{0} = (0, 0, \dots, 0)$, есть путь в вершину $\overline{0}$.*

3) *Граф не содержит контуров, то есть замкнутых путей.*

4) *Из вершины $\overline{0}$ не исходит дуг.*

Список литературы

[1] Lukomskii S.F., "Step refinable functions and orthogonal MRA on p-adic Vilenkin groups", *JFAA*, **20**:1 (2014), 42–65.

[2] Фарков Ю.А., "Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп.", *Матем. заметки*, 2007, 934–952.

Локальные пространства Морри

Е. И. Бережной

Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова

Пусть X идеальное пространство функций на R^n, L идеальное пространство на R_+, l идеальное пространство последовательностей: $x = \sum_{-\infty}^{\infty} x_i e^i$, где e^i, $(i \in Z)$ стандартный базис в пространстве последовательностей, символом $\|x|X\|$ будем обозначать норму элемента $x \in X$. Зафиксируем множество $U \subset R^n$, для которого $0 \in U$, $\mu(U) > 0$, $\chi(U)$ его характеристическая функция. Через $U(r)$ будем обозначать растяжение U в r раз $(r > 0)$.

Пространство Морри $M_{L,X}$ состоит из тех $f \in L^{1,loc}(R^n)$, для которых конечна норма

$$\|f|M_{L,X}\| = \|\|f(\,\cdot\,)\chi(U(r),\,\cdot\,)|X\||L\|$$

(внешняя норма вычисляется по переменной r).

Зафиксируем монотонную последовательность радиусов $\tau = \{r_i\}_{-\infty}^{\infty}$ такую, что $\lim_{i\to\infty} r_i = \infty$, $\lim_{i\to-\infty} r_i = 0$.

Пространство $M^{\tau}_{l,X}$ состоит из тех $f \in L^{1,loc}(R^n)$, для которых конечна норма

$$\|f|M^{\tau}_{l,X}\| = \|\sum_{-\infty}^{\infty} e^i \|f(.)\chi(U(r_i)\backslash U(r_{i-1}))|X\||l\|.$$

Опишем дуальное пространство для пространства $M^{\tau}_{l,X}$.

Теорема 1. *Пусть задано пространство $M^{\tau}_{l,X}$. Тогда справедливо равенство*

$$\{M^{\tau}_{l,X}\}' = M^{\tau}_{l',X'},$$

причем дуальная норма совпадает с нормой в пространстве $M^{\tau}_{l',X'}$.

Обратимся теперь к проблеме описания интерполяционных пространств для пространств $M^{\tau}_{l,X}$.

Теорема 2. *Пусть задана интерполяционная пара пространств $(M^{\tau}_{l_0,X_0},\ M^{\tau}_{l_1,X_1})$. Пусть F – интерполяционный функтор.*

Тогда справедливо равенство

$$F(M^{\tau}_{l_0,X_0}, M^{\tau}_{l_1,X_1}) = M^{\tau}_{F(l_0(X_0),l_1(X_1))},$$

причем нормы в этих пространствах совпадают.

Заметим, что для звездных относительно нуля множеств U при некоторых условиях на L для пространства Морри $M_{L,X}$ можно найти пространство $M^{\tau}_{l,X}$ такое, что $M_{L,X}$ и $M^{\tau}_{l,X}$ естественно изоморфны. Поэтому переход от $M_{L,X}$ к $M^{\tau}_{l,X}$ дает новый подход даже для исследования классических пространств Морри.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, код проекта 14-01-00417

Теорема вложения пространства Соболева для предельного показателя

О. В. Бесов

Математический институт имени В. А. Стеклова РАН

Будет приведено уточнение теоремы Соболева о вложении пространства Соболева в пространство Лебега, а также видоизменение теоремы Соболева для нерегулярных областей в зависимости от их геометрических свойств.

Список литературы

[1] О. В. Бесов, "К теореме вложения Соболева для предельного показателя", *Функциональные пространства и смежные вопросы анализа*, К 80-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Олега Владимировича Бесова, Тр. МИАН, **284**, Сборник статей, МАИК, М., 2014, 89–104; O. V. Besov, "To the Sobolev Embedding Theorem for the Limiting Exponent", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **284** (2014), 81–96.

[2] О. В. Бесов, "Вложение пространства Соболева и свойства области", *Матем. заметки*, **96**:3 (2014), 343–349; O. V. Besov, "Embedding of Sobolev spaces and properties of the domain", *Math. Notes*, **96**:3 (2014), 326–331.

О τ-измеримых операторах, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана

А. М. Бикчентаев

Казанский (Приволжский) федеральный университет

Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, $\widetilde{\mathcal{M}}$ – $*$-алгебра всех τ-измеримых операторов, $L_1(\mathcal{M},\tau)$ – банахово пространство τ-интегрируемых операторов и число $1 \geqslant q > 0$. Получены обобщения задач 163 и 139 из [1] на τ-измеримые операторы: установлено, что

1) каждый τ-компактный q-гипонормальный оператор нормален;

2) если оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ нормален и для некоторого натурального числа n оператор A^n τ-компактен, то и оператор A τ-компактен.

Нами показано, что если оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ гипонормален и оператор A^2 τ-компактен, то и оператор A τ-компактен. Установлено новое свойство невозрастающих перестановок произведения гипонормального и когипонормального τ-измеримых операторов. Для нормальных операторов $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}$ показано совпадение невозрастающих перестановок операторов AB и BA. Из известного свойства перестановок имеем: неотрицательный оператор $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ τ-компактен тогда и только тогда, когда τ-компактен A^p для всех $p > 0$. Нами показано, что аналогичная картина имеет место и для произведения неотрицательных операторов $A, B \in \widetilde{\mathcal{M}}$: τ-компактность AB эквивалентна τ-компактности операторов A^pB^r для всех $p, r > 0$. Получены приложения полученных результатов к F-нормированным симметричным пространством на $(\mathcal{M},\tau)$.

Если $A = A^*$, $B = B^*$ – τ-измеримые операторы и $AB \in L_1(\mathcal{M},\tau)$, то $BA \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ и $\tau(AB) = \overline{\tau(BA)} \in \mathbb{R}$. Если $A \in L_1(\mathcal{M},\tau)$, то $\tau(A^*) = \overline{\tau(A)}$.

Пусть $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Если оператор A τ-компактен и $V \in \mathcal{M}$ является сжатием, то из $V^*AV = A$ следует, что $VA = AV$. Имеем $A = A^2$ тогда и только тогда, когда $A = |A^*||A|$. Это представление является новым и для ограниченных идемпотентов в $\mathcal{H}$. Если $A = A^2 \in L_1(\mathcal{M},\tau)$, то $\tau(A) = \tau(\sqrt{|A|}|A^*|\sqrt{|A|}) \in \mathbb{R}^+$.

Если $A = A^2$ и A (или A^*) полу-гипонормален, то A нормален, тем самым A является проектором. Если $A = A^3$ и A гипонормален или когипонормален, то A нормален, тем самым $A = A^* \in \mathcal{M}$ и является разностью двух взаимно ортогональных проекторов $(A + A^2)/2$, $(A^2 - A)/2$. Если $A, A^2 \in L_1(\mathcal{M},\tau)$ и $A = A^3$, то $\tau(A) \in \mathbb{R}$.

Список литературы

[1] П. Халмош, *Гильбертово пространство в задачах*, Мир, Москва, 1970.

[2] А. М. Бикчентаев, “О нормальных τ-измеримых операторах, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана”, *Математические заметки*, **96**:3 (2014), 348–358.

[3] А. М. Бикчентаев, “К теории τ-измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана” (в печати).

Сходимость лакунарной последовательности частичных сумм кратных тригонометрических рядов Фурье

И. Л. Блошанский[a], Д. А. Графов[b]

[a] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова*

[b] *Московский государственный областной университет*

Пусть $S_n(x;f)$, $n \in \mathbb{Z}_1^N$, — последовательность прямоугольных частичных сумм кратного тригонометрического ряда Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{T}^N)$, $\mathbb{T}^N = [-\pi,\pi)^N$, $N \geqslant 2$. Пусть k $(1 \leqslant k \leqslant N-2)$ компонент вектора $n = (n_1,\dots,n_N)$ — номера $S_n(x;f)$ — являются лакунарными последовательностями ($\{n^{(s)}\}, n^{(s)} \in \mathbb{Z}_1^1$, – лакунарная последовательность, если $n^{(1)} = 1$ и $\frac{n^{(s+1)}}{n^{(s)}} \geqslant q > 1$, $s = 1,2,\dots$).

П. Шёлиным [1] было доказано, что для любой лакунарной последовательности $\{n_1^{(\lambda_1)}\}$, $n_1^{(\lambda_1)} \in \mathbb{Z}_1^1$, $\lambda_1 = 1,2,\dots$, и для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$, $S_{n_1^{(\lambda_1)},\, n_2}(x;f)$ сходится почти всюду (п.в.) на $\mathbb{T}^2$. М. Кожима [2] обобщил этот результат, доказав, что если $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $N \geqslant 3$, и $\{n_j^{(\lambda_j)}\}$, $n_j^{(\lambda_j)} \in \mathbb{Z}_1^1, \lambda_j = 1,2,\dots, j = 1,\dots,N-1$, — лакунарные последовательности, то

$$\lim_{\lambda_1,\,\dots,\,\lambda_{N-1},\, n_N \to \infty} S_{n_1^{(\lambda_1)},\dots,n_{N-1}^{(\lambda_{N-1})},\, n_N}(x;f) = f(x) \ \text{ п.в. на } \ \mathbb{T}^N.$$

Как заметил М. Кожима (см. [2; теорема 2]), используя функцию Ч. Феффермана из работы [3], легко доказать, что сформулированный выше результат не может быть усилен в следующем смысле: для любой последовательности $\widetilde{n} = (n_3,\, n_4,\dots,n_N) \in \mathbb{Z}_0^{N-2}$ (в частности, каждая компонента вектора $\widetilde{n}$ может быть элементом лакунарной последовательности) существует непрерывная функция $f \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, такая, что

$$\varlimsup_{n_1,\, n_2,\, \widetilde{n} \to \infty} |S_{n_1,\, n_2,\, \widetilde{n}}(x;f)| = +\infty \ \text{ п.в. на } \ \mathbb{T}^N.$$

Последний результат, в частности, показывает, что, как только мы оставляем две компоненты вектора $n = (n_1,\dots,n_N) \in \mathbb{Z}^N$ – номера $S_n(x;f)$ — “свободными” (в частности, не являющимися элементами никаких лакунарных последовательностей), класс функций $\mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, $N \geqslant 3$, уже не является “классом сходимости п.в.” указанного разложения.

В таком случае, возникает вопрос: можно ли вообще говорить о сходимости п.в. кратных ($N \geqslant 3$) тригонометрических рядов Фурье функций f из классов L_p, $p > 1$, “в рамках” прямоугольного метода суммирования, когда последовательности частичных сумм этих рядов $S_n(x;f)$ имеют номера n, в которых две или более компонент являются “свободными”. Некоторый ответ на этот вопрос дают следующие теоремы.

Пусть $N \geqslant 1$, $M = \{1,\dots,N\}$ и $s \in M$. Обозначим: $J_s = \{j_1,\dots,j_s\}$, $j_q < j_l$ при $q < l$, и (в случае $s < N$) $M \setminus J_s = \{m_1,\dots,m_{N-s}\}$, $m_q < m_l$ при $q < l$, — непустые подмножества множества M. Будем считать также, что $J_0 = M \setminus J_N = \emptyset$.

Фиксируем произвольное k, $1 \leqslant k < N$, $N \geqslant 2$, и определим два вектора: вектор $\lambda = \lambda[J_k] = (\lambda_{j_1},\dots,\lambda_{j_k}) \in \mathbb{Z}_1^k$, $j_s \in J_k$, $s = 1,\dots,k$, и вектор $m = m[J_k] = (m_{j_1},\dots,m_{j_{N-k}}) \in \mathbb{Z}_1^{N-k}$, $j_s \in M \setminus J_k$, $s = 1,\dots,N-k$.

Символом $n^{(\lambda,m)} = n^{(\lambda,m)}[J_k] = (n_1,\dots,n_N) \in \mathbb{Z}_1^N$ будем обозначать вектор, у которого компоненты n_j, $j \in J_k$, являются элементами некоторых (однократных) лакунарных последовательностей, а компоненты n_j, $j \in M \setminus J_k$, имеют вид: $n_j = n_0 \cdot m_j$, где m_j компоненты вектора $m[J_k]$, $n_0 \in \mathbb{Z}_0^1$.

Теорема 1. *Пусть J_k — произвольная “выборка” из M, $1 \leqslant k \leqslant N-2$, $N \geqslant 3$. Тогда для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $1 < p < \infty$, и для любого вектора $m[J_k]$*

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty, j \in J_k, \\ n_j = n_0 \cdot m_j, j \in M \setminus J_k, n_0 \to \infty}} S_{n^{(\lambda,m)}[J_k]}(x; f) = f(x) \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{T}^N.$$

В свою очередь, символом $n^{(\lambda,m(\nu))} = n^{(\lambda,m(\nu))}[J_k] = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_1^N$ будем обозначать такой N-мерный вектор, у которого компоненты n_j, $j \in J_k$, являются, как и раньше, элементами некоторых (однократных) лакунарных последовательностей $n_j^{(\lambda_j)} \in \mathbb{Z}_1^1$, $\lambda_j = 1, 2, \dots$, а компоненты n_j, $j \in M \setminus J_k$, имеют вид $n_j = m_j = n_j(\nu)$, где $n_j(\nu) \in \mathbb{Z}_0^1$, $\nu = 1, 2, \dots$.

Теорема 2. *Пусть J_k — произвольная “выборка” из M, $1 \leqslant k \leqslant N-2$, $N \geqslant 3$. Тогда для любой функции $f \in L_2(\mathbb{T}^N)$ и для любых последовательностей $n_j(\nu) \in \mathbb{Z}_0^1$, $\nu = 1, 2, \dots$, $n_j(\nu) \to \infty$ при $\nu \to \infty$, $j \in M \setminus J_k$,*

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty, j \in J_k, \\ n_j(\nu), j \in M \setminus J_k, \nu \to \infty}} S_{n^{(\lambda,m(\nu))}[J_k]}(x; f) = f(x) \quad \text{п.в. на} \quad \mathbb{T}^N.$$

Список литературы

[1] Sjölin, “Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series”, *Arkiv Matem.*, **9**:1 (1971), 65–90.

[2] M. Kojima, “On the almost everywhere convergence of rectangular partial sums of multiple Fourier series”, *Sci. Repts. Kanazawa Univ.*, **22**:2 (1977), 163–177.

[3] C. Fefferman, “On the divergence of multiple Fourier series”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **77**:2 (1971), 191–195.

О приближении непрерывных функций полиномами по системам типа Фабера–Шаудера

Н. А. Бокаев, А. Т. Сыздыкова

Евразийский национальный университет имени Л. Н. Гумилева, Казахстан

В данной работе приводятся оценка приближения непрерывных функций полиномами по системам типа Фабера-Шаудера и некоторые результаты о свойствах разложения функций в ряды по этим системам.

Пусть задана последовательность $\{p_n\}$ натуральных чисел таких, что $p_0 = 1$, $p_n \geqslant 2$, $n = 1, 2, \dots$. Положим $m_n = p_0 p_1 \cdots p_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда для любой точки $x \in [0, 1] \backslash Q$, где $Q = \left\{ \frac{l}{m_n} \right\}, \quad 0 \leqslant l \leqslant m_n \ , \quad n \geqslant 0, \quad l \in Z$, существует единственное разложение:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(x)}{m_k},$$

$0 \leqslant \alpha_k(x) \leqslant p_k - 1$, $\alpha_k(x)$-целые.

Любое целое число $k \geqslant 2$ единственным образом представляется в виде

$$k = m_n + r(p_{n+1} - 1) + s, n = 0, 1, 2, \dots, r = 0, 1, \dots, m_n - 1, s = 1, 2, \dots, p_{n+1} - 1. \qquad (1)$$

Определим систему функций $\Phi\{p_n\} = \{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$, $x \in [0, 1]$, в которой $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$, $x \in [0, 1]$,

$$\varphi_k(x) = \varphi_{n,r}^{(s)}(x) =$$

$$\begin{cases} (m_{n+1}x - p_{n+1}r - \alpha_{n+1}(x)) \exp \frac{2\pi i s \alpha_{n+1}(x)}{p_{n+1}} + \frac{1 - \exp \frac{2\pi i s \alpha_{n+1}(x)}{p_{n+1}}}{1 - \exp \frac{2\pi i s}{p_{n+1}}}, & x \in \left(\frac{r}{m_n}, \frac{r+1}{m_n} \right) \backslash Q \\ 0, & x \bar{\in} \left[\frac{r}{m_n}, \frac{r+1}{m_n} \right] \end{cases} \qquad (2)$$

где $k \geqslant 2$, n, r, s из (1).

Пользуясь тем, что множество $[0, 1] \backslash Q$ всюду плотно в $[0, 1]$, продолжим функцию $\varphi_{n,r}^{(s)}(x)$ по непрерывности на отрезок $\left[\frac{r}{m_n}, \frac{r+1}{m_n} \right]$.

Таким образом, система $\Phi\{p_n\}$ полностью определена и состоит из непрерывных, кусочно-линейных функций. Приведенные системы функций определены в [1]. При $p_n = 2$, $n = 1, 2, \dots$ система функций $\Phi\{p_n\}$ совпадает с известной системой Фабера-Шаудера [2].

Рассмотрим ряд по системе $\Phi\{p_n\}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{m_n - 1} \sum_{s=1}^{p_{n+1} - 1} a_{n,r}^{(s)} \varphi_{n,r}^{(s)}(x) \qquad (3)$$

и предположим, что он сходится в каждой точке отрезка $[0, 1]$ к некоторой функции $f(x)$. Тогда коэффициенты a_k однозначно определяются функцией $f(x)$.

Пусть $\omega(\delta, f)$ – модуль непрерывности функции $f \in C[0,1]$, $\omega_2(\delta, f)$ – модуль гладкости функции $f \in C[0,1]$:

$$\omega_2(\delta, f) = \sup_{0<h<\delta} \max_{x\in[0,1]} |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)|,$$

где $h \leqslant x \leqslant 1-h$, $0 < \delta < 1$.

Теорема 1. *Система* $\Phi\{p_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ *является базисом в пространстве* $C[0,1]$. *При этом, если* $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$, $f(x) \in C[0,1]$, *то справедливы следующие оценки*

$$|a_k(f)| = \left|a_{n,r}^{(s)}(f)\right| \leqslant C\omega\left(\frac{1}{m_{n+1}}, f\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\left\|f(x) - \sum_{k=0}^{l} a_k(f)\varphi_k(x)\right\|_{C[0,1]} \leqslant \omega_2\left(\frac{1}{m_n}, f\right), \quad l = m_n + r(p_{n+1} - 1).$$

Теорема 2. *Для того чтобы ряд* (3) *являлся разложением функции* $f(x) \in \operatorname{Lip}\alpha$, $0 < \alpha < 1$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$|a_k| \leqslant ck^{-\alpha}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для системы $\Phi\{p_n\}$, определяемой ограниченной последовательностью $\{p_n\}$, подобные утверждения доказаны в [1].

В следующей теореме показывается, что для каждой функции $f(x) \in C[0,1]$ можно так подобрать замену переменной $\tau(x)$, чтобы функция $f \circ \tau(x) \equiv f(\tau(x))$ имела лакунарный ряд по системе типа Фабера-Шаудера. Для системы Фабера-Шаудера ранее аналогичный результат получен в [3].

Теорема 3. *Пусть* $f(x) \in C[0,1]$, $f(0) = f(1) = 0$ *и* $1 < n_0 < n_1 < \cdots$ *– последовательность натуральных чисел. Тогда существуют целые числа* r_k, $0 \leqslant r_k \leqslant m_{n_k - 1}$, $k = 0, 1, \dots$ *и непрерывная на* $[0,1]$ *функция* $\tau(x)$ *с условием*

$$0 = \tau(0) < \tau(x) < \tau(y) < \tau(1) = 1,$$

при $0 < x < y < 1$ *такие, что разложение суперпозиции* $F(x) = f \circ \tau(x)$ *по системе функций* $\Phi\{p_n\}$ *имеет вид*

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{p_{n_k+1}-1} a_{n_k, r_k}^{(s)} \varphi_{n_k, r_k}^{(s)}(x).$$

Список литературы

[1] Т. У. Аубакиров, Н. А. Бокаев, “О новом классе систем функций типа Фабера–Шаудера”, *Мат. заметки*, **82**:5 (2007), 643–651.

[2] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Наука, М., 1984.

[3] А. А. Саакян, “О свойствах коэффициентов Фурье у суперпозиции функций”, *ДАН СССР*, **248**:2 (1979), 302–306.

Абстрактная теорема Колмогорова, приложение к метрическим пространствам и топологическим группам

С. В. Бочкарев

Математический институт имени В. А. Стеклова РАН

Одним из наиболее ярких фактов гармонического анализа является результат А. Н. Колмогорова
о расходящемся тригонометрическом ряде, установленный в 1923 году (см. [1]).

Теорема I. *Существует функция $F \in L_1(0, 2\pi)$, тригонометрический ряд Фурье которой расходится почти всюду.*

Долгое время оставался открытым вопрос, привлекавший внимание специалистов ещё в 30-ых годах прошлого века, о распространении этой фундаментальной теоремы Колмогорова на все ограниченные ортонормированные системы. Но так как при построении расходящегося почти всюду ряда Фурье использовались тонкие специфические свойства тригонометрической системы, то представлялось невозможным осуществить подобную конструкцию в общей ситуации, где необходимо оценивать связанную с распределением знаков интерференцию заданных неявно ядер Дирихле, соответствующих δ - функциям с различными носителями.

В 1975 году автор [2] разработал новый метод построения расходящихся рядов Фурье, применимый к любой ограниченной ортонормированной системе.

Теорема II. *Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ортонормированная на $[0, 1]$ система, удовлетворяющая при некотором $A \geqslant 1$ условию*

$$\|f_n\|_\infty \leqslant A, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Тогда существует такая функция $F \in L_1(0, 1)$, ряд Фурье которой по системе $\{f_n\}$ неограниченно расходится на множестве E, $\mu(E) \geqslant \gamma(A) > 0$.

Замечание 1. Множество E точек расходимости здесь необязательно имеет полную меру (даже для полной системы $\{f_n\}$). Однако в классических случаях (тригонометрическая система, система Уолша, системы характеров, а также любые перестановки указанных систем) из расходимости на множестве положительной меры непосредственно выводится существование рядов Фурье, расходящихся почти всюду (см. [3, с. 247-249]), поскольку указанные системы допускают сдвиги.

В настоящей статье теореме Колмогорова придана наиболее общая форма. Здесь рассматриваются любые ограниченные биортонормированные системы комплекснозначных функций, определенных на произвольном измеримом пространстве. Для этих систем установлен результат, дающий точную нижнюю логарифмическую оценку мажоранты отрезков частных сумм двух сопряженных рядов Фурье, взятых от набора δ -функций со специально подобранными носителями. Полученная абстрактная теорема применена для построения расходящихся на множестве положительной меры рядов Фурье-Лебега по ограниченным биортонормированным системам комплекснозначных функций, определенных на метрических пространствах и топологических группах.

Пусть (X, S, μ) - пространство с мерой, S есть σ-алгебра μ-измеримых множеств, $\mu X = 1$, и пусть $f_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$ - биортонормированная система комплекснозначных функций, определенных на X, т.е.

$$\int_X f_n(x)\overline{g_m(x)}\, d\mu(x) = \delta_{n,m}; \quad n, m = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

где $\delta_{n,m}$ -символ Кронекера.

Через $L_p(X, \mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, обозначим пространство Лебега комплекснозначных функций на X (см. [4, гл. 1], а также [5]).

В статье рассматриваются такие системы $\{f_n, g_n\}$, для которых $f_n, g_n \in L_\infty$, $n = 1, 2, \dots$.

Для любой $F \in L_1(X, \mu)$, система $\{f_n, g_n\}$ порождает два ряда Фурье, называемых сопряженными рядами:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(F, g_n) f_n(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty}(F, f_n) g_n(x). \tag{2}$$

Через $\asymp$ и $\ll$ обозначаются эквивалентность и неравенство с абсолютными постоянными, $C(\,\cdot\,)$ и $\gamma(\,\cdot\,)$ обозначают положительные постоянные, которые зависят от указанных параметров и могут быть разными в разных формулах, $\mu(E)$ есть μ - мера измеримого множества $E \subset X$, log - натуральный логарифм.

Имеет место общая теорема, дающая нижнюю оценку L_1 - норм частных сумм двух рядов по сопряженным системам $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ с произвольными комплексными коэффициентами (см. (1), (2)).

Теорема 1. *Пусть $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ - две последовательности комплексных чисел. Тогда для любого $N = 2, 3, \dots$ выполняется неравенство*

$$\max_{1\leqslant n\leqslant N}(\|a_n f_n\|_\infty + \|b_n g_n\|_\infty) \sum_{m=1}^{N} \int_X \left(\left| \sum_{n=1}^{m} a_n f_n(x) \right| + \left| \sum_{n=1}^{m} b_n g_n(x) \right| \right) d\mu(x)$$
$$\gg \log N \left| \sum_{n=1}^{N} \lambda_n a_n \bar{b}_n \left(1 - \frac{n}{N+1}\right) \right|, \tag{3}$$

где $\{\lambda_n\}$ - последовательность положительных чисел, причем

$$\lambda_n \asymp 1, \qquad n = 1, 2, \dots . \tag{4}$$

Из теоремы 1 выводятся логарифмические нижние оценки средних арифметических от симметризованных функций Лебега для системы $\{f_n, g_n\}$ в точке и на множестве положительной меры (см. (3)).

Теорема 2. *Для почти всех $x \in X$ при любом $N = 2, 3, \dots$ выполняется неравенство*

$$\max_{1\leqslant n\leqslant N}(\|f_n\|_\infty \|g_n\|_\infty) \sum_{m=1}^{N} \int_X \left(\left| \sum_{n=1}^{m} f_n(x)\overline{g_n(\theta)} \right| + \left| \sum_{n=1}^{m} g_n(x)\overline{f_n(\theta)} \right| \right) d\mu(\theta)$$
$$\gg \log N \left| \sum_{n=1}^{N} \lambda_n f_n(x)\overline{g_n(x)} \left(1 - \frac{n}{N+1}\right) \right|, \tag{5}$$

где $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет соотношению(4).

Определение. Назовем биортонормированную систему $\{f_n, g_n\}$ ограниченной, если существует положительная постоянная $A \geqslant 1$, для которой

$$\|f_n\|_\infty \cdot \|g_n\|_\infty \leqslant A; \qquad n = 1, 2, \dots . \tag{6}$$

Используя (1), (5), (6) получим оценку средних арифметических от функций Лебега ограниченной биортонормированной системы $\{f_n, g_n\}$.

Теорема 3. *Пусть $\{f_n, g_n\}$ - комплекснозначная ограниченная биортонормированная система. Тогда для любого $N = 2, 3, \dots$ существует множество $E_N \subset X$,*

$$\mu(E_N) \geqslant \gamma(A), \tag{7}$$

для которого при всех $x \in E_N$ справедлива оценка

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}\int_X\left(\left|\sum_{n=1}^{m} f_n(x)\overline{g_n(\theta)}\right| + \left|\sum_{n=1}^{m} g_n(x)\overline{f_n(\theta)}\right|\right) d\mu(\theta) \gg \frac{1}{A}\log N. \tag{8}$$

В вещественном случае теоремы 1-3 установлены в работах автора [2], [6], [7].

Следующий результат содержит абстрактную формулировку теоремы Колмогорова для любой ограниченной биортонормированной системы, определенной на произвольном измеримом пространстве.

Теорема 4. *Для любой ограниченной биортонормированной системы комплекснозначных функций $\{f_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$, определенных на измеримом пространстве X, при каждом $N = 2, 3, \dots$ существует множество $\Omega_N \subset X^{8N+1}$, состоящее из точек $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{8N}; x)$, для которого выполняется неравенство (см. (6))*

$$\mu(\Omega_N) \geqslant \gamma(A), \tag{9}$$

и существует последовательность номеров $\{m_p(x)\}$, $Np \leqslant m_p(x) < N(p+1)$, зависящая от точки $x \in X$, а также существуют функции $\eta_j(\theta) = 0, 1$; где $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{8N})$, $j = 1, \dots, 8N$; такие что при всех

$$(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{8N}; x) \in \Omega_N$$

выполняется следующее соотношение:

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\frac{1}{N}\left|\sum_{j=1}^{4N}\left(\eta_{2j-1}(\theta)\sum_{n=Np}^{m_p(x)} f_n(x)\overline{g_n(\theta_{2j-1})} + \eta_{2j}(\theta)\sum_{n=Np}^{m_p(x)} g_n(x)\overline{f_n(\theta_{2j})}\right)\right|$$
$$\geqslant C(A)\log N. \tag{10}$$

Подобная теорема в вещественном случае была установлена в работе автора [7].

Доказательство комплексного варианта позволяет значительно расширить область применения теоремы и дает возможность использовать ее для исследования характеров топологических групп, а также биортонормированных систем, образованных функциями комплексного переменного. Это потребовало существенного усложнения и переработки вещественной конструкции. Кроме того, удалось убрать следующее дополнительное ограничение на биортонормированную систему $\{f_n, g_n\}$ (см. [7]):

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty}\int_X F(x) f_n(x)\, d\mu(x) = 0, \\ \lim_{n\to\infty}\int_X F(x) g_n(x)\, d\mu(x) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

для любой $F \in L_\infty$.

Соотношения типа (11) использовались в первоначальной конструкции, разработанной для ортонормированных систем (см. [2]). Но в случае биортонормированной системы соотношения (11) могут не выполняться (см. [7]), и поэтому они были введены в качестве дополнительного условия на систему $\{f_n, g_n\}$, от которого в этой работе удалось освободиться.

Для того, чтобы на основе теоремы 4 получить ряд Фурье-Лебега, расходящийся на множестве положительной меры, нужно аппроксимировать δ -функции Дирака ступенчатыми функциями, а для этого в пространстве X должна иметь место теорема о дифференцировании неопределенного интеграла. Тогда в силу соотношений (9) и (10) можно выбрать такую систему δ-функций с носителями в точках $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{8N}$, где

$$(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{8N}; x) \in \Omega, \qquad N = 2, 3, \ldots,$$

соответствующая аппроксимация которых позволяет построить расходящийся ряд Фурье-Лебега.

Пусть теперь X - метрическое пространство, в котором задана борелевски регулярная внешняя мера μ^*. Согласно Каратеодори внешняя мера μ^* порождает на X полную меру μ (см. [8, с. 44-49]).

Далее, пусть $\{P_m\}_{m=1}^\infty$ - регулярная последовательность сетей в X, где каждая сеть P_m образует борелевское разбиение пространства X на ячейки S, для которых выполняется соотношение (см. [4, с. 230])

$$\lim_{m\to\infty} \sup\{\operatorname{diam}(S) : S \in P_m\} = 0.$$

Тогда эта последовательность сетей образует μ^* - покрытие Витали и для любой функции $F \in L_1(X, \mu)$ при почти всех $x \in X$ имеет место равенство

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\mu(S_m(x))} \int_{S_m(x)} F(\theta)\, d\mu(\theta) = F(x),$$

где $S_m(x)$ - ячейка сети P_m, содержащая точку x (см. [9, с. 168-173]).

Теорема 5. *Если X - метрическое пространство, в котором задана борелевски регулярная внешняя мера μ^*, $\mu^*(X) = 1$, то для любой ограниченной биортонормированной системы комплекснозначных функций $\{f_n, g_n\}_{n=1}^\infty$ найдутся функции $F_1, F_2 \in L_1(X, \mu)$ и найдется множество $E \in X$, такие что*

$$\mu(E) \geqslant \gamma(A)$$

и при всех $x \in E$ выполняется соотношение

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \left| \sum_{n=1}^{N} \Big((F_1, g_n) f_n(x) + (F_2, f_n) g_n(x) \Big) \right| = \infty.$$

В частности для евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ и классической меры Лебега получаем следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть E - измеримое множество в $\mathbb{R}^m$, где $m = 1, 2, \ldots$, и $\mu(E) < \infty$. Тогда для любой ограниченной биортонормированной на E системы комплекснозначных функций $\{f_n, g_n\}_{n=1}^\infty$ существует ряд Фурье, неограниченно расходящийся на множестве*

$$E_1 \subset E, \qquad \mu(E_1) \geqslant \gamma(A, \mu(E)).$$

Отметим, что вещественный вариант теорем 5 и 6 при дополнительном условии (11) был установлен в работе [7].

Применим абстрактную теорему Колмогорова (теорема 4) к топологическим группам. Пусть G - компактная абелева группа и пусть μ - инвариантная нормированная мера Хаара на G (см. [10, гл. 5], [11, гл. 2], [12, гл. 4], [13, гл. 3]).

Будем использовать следующую теорему о дифференцировании неопределенного интеграла, которую доказали Э. Хьюитт и и Р. Эдвардс (см. [14], [13, т. 2, с. 762-770]) для локально компактных групп с левоинвариантной мерой Хаара.

Через D' обозначим последовательность борелевских множеств U_n, таких что

$$U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_n \supset \cdots$$

и для некоторой положительной постоянной C при всех $n = 1, 2, \ldots,$ выполняется неравенство

$$0 < \mu(U_n U_n^{-1}) \leqslant C\mu(U_n).$$

Предположим также, что каждая окрестность единицы группы G содержит некоторое U_n. (В частности, конечномерный тор и все группы Ли допускают D' - последовательность (см. [14]).)

Тогда для любой комплекснозначной функции $f \in L_1(G, \mu)$ при почти всех $x \in G$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mu(U_n)} \int_{xU_n} f(\theta)\, d\mu(\theta) = f(x).$$

В силу теоремы 4 соответствующим образом произведенная аппроксимация δ - функций на группе G с применением теоремы о дифференцировании неопределенного интеграла позволяет для любой ограниченной комплексной биортонормированной системы построить ряд Фурье, расходящийся на множестве положительной меры.

Теорема 7. *Пусть G - компактная абелева группа и μ - инвариантная нормированная мера Хаара на G. Предположим, что в группе G существует D' - последовательность. Тогда, если $\{f_n, g_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограниченная биортонормированная система комплекснозначных функций, определенных на G, то найдутся $F_1, F_2 \in L_1(G, \mu)$ для которых найдется такое множество $E \subset G$*

$$\mu(E) \geqslant \gamma(A),$$

что при всех $x \in E$ выполняется соотношение

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \left| \sum_{n=1}^{N} \Big((F_1, g_n) f_n(x) + (F_2, f_n) g_n(x) \Big) \right| = \infty.$$

Группа характеров $\{\chi_\alpha\}$ компактной абелевой группы G образует полное ортонормированное семейство, т.е. любая $f \in L_2(G, \mu)$ разлагается в обобщенный ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{\alpha} (f, \chi_\alpha) \chi_\alpha(x),$$

где ряд сходится к f в $L_2(G, \mu)$ и для каждой функции f не более чем счетное число коэффициентов отличны от нуля (см. [15, с. 194-196]).

Поэтому в силу теоремы 7, учитывая замечание 1, получаем, в частности, что справедлив следующий результат.

Теорема 8. *Если компактная абелева группа G допускает D' - последовательность и ее группа характеров $\{\chi_\alpha\}$ бесконечна и счетна, то существует функция $F \in L_1(G,\mu)$, ряд Фурье которой неограниченно расходится μ - почти всюду на G.*

Работа выполнена за счет Российского научного фонда (проект 14-50-00005).

Список литературы

[1] А. Н. Колмогоров, *Fund. Math.*, **4** (1923), 324–328.
[2] С. В. Бочкарев, *Мат. сб.*, **98** (1975), 436–449.
[3] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Т. 2, Мир, М., 1965.
[4] С. Сакс, *Теория интеграла*, Факториал, М., 2004.
[5] E. Hewitt, K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1965.
[6] С. В. Бочкарев, *ДАН*, **223**:1 (1975), 16–19.
[7] С. В. Бочкарев, *Тр. МИАН*, **260** (2008), 44–56.
[8] Р. Халмош, *Теория меры*, Факториал, М., 2004.
[9] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, М., 1987.
[10] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, ОНТИ, М.–Л., 1938.
[11] А. Вейль, *Интегрирование в топологических группах и его применения*, ИЛ, М., 1950.
[12] Э. Хьюит, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*, Т. 1, 2, Мир, М., 1975.
[13] М. А. Наймарк, *Теория представлений групп*, Наука, М., 1976.
[14] R. Edwards, E. Hewitt, *Acta Math.*, **113** (1965), 181–218.
[15] Л. Люмис, *Введение в абстрактный гармонический анализ*, ИЛ, М., 1956.

О смешанной задаче для волнового уравнения на графе

М. Ш. Бурлуцкая

Воронежский государственный университет

Рассматривается простейший геометрический граф, состоящий из двух ребер-колец, касающихся в одной точке (узле графа). Параметризуя каждое ребро графа отрезком $[0,1]$, изучаем на таком графе следующую смешанную задачу для волнового уравнения:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_j(x,t)}{\partial x^2} - q_j(x)u_j(x,t), \quad (j=1,2),\\ x\in[0,1], t\in(-\infty,\infty),\end{gathered} \tag{1}$$

$$u_1(0,t) = u_1(1,t) = u_2(0,t) = u_2(1,t), \tag{2}$$

$$u'_{1x}(0,t) - u'_{1x}(1,t) + u'_{2x}(0,t) - u'_{2x}(1,t) = 0, \tag{3}$$

$$u_1(x,0) = \varphi_1(x), \quad u_2(x,0) = \varphi_2(x), \quad u'_{1t}(x,0) = u'_{2t}(x,0) = 0, \tag{4}$$

где $q_j \in C[0,1]$ (условия (2), (3) порождены структурой графа).

Решение задачи ищется методом Фурье. Используется подход, предложенный в [1, 2], который позволяет с помощью специального преобразования формального ряда получить классическое решение задачи при минимальных условиях на начальные данные, и более того, избежать при этом трудоемкого исследования асимптотики собственных функций соответствующего оператора. Предполагаем для $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$ (T — знак транспонирования) выполненными требования: $\varphi_j(x) \in C^2[0,1]$ и комплекснозначные,

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(1) = \varphi_2(0) = \varphi_2(1), \ \varphi'_1(0) - \varphi'_1(1) + \varphi'_2(0) - \varphi'_2(1) = 0, \tag{5}$$

$$\varphi''_1(0) = \varphi''_1(1) = \varphi''_2(0) = \varphi''_2(1). \tag{6}$$

Кроме того, для простоты ограничимся случаем: $q_1(0) = q_2(0) = q_1(1) = q_2(1)$.

Метод Фурье приводит к спектральной задаче: $Ly = \lambda y$, где $Ly = (-y''_1 + q_1(x)y_1, -y''_2 + q_2(x)y_2)^T$ с краевыми условиями (5).

Собственные значения λ_n оператора L асимптотически приближаются к числам $\lambda_n^0 = (\pi n)^2$ при $n \to \infty$, причем они могут быть и кратными. Обозначим $\widetilde{\gamma}_n = \{\rho \mid |\rho - \pi n| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и достаточно мало, γ_n — образ $\tilde{\gamma_n}$ в λ-плоскости ($\lambda = \rho^2$, $\mathrm{Re}\rho \geqslant 0$).

Формальное решение $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))^T$ задачи (1)–(4) можно записать в виде:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)(R_\lambda\varphi)\cos\rho t\, d\lambda,$$

где $r > 0$ и фиксировано, γ_n вне $|\lambda| = r$, собственные значения $|\lambda_n| > r$ попадают в γ_n при $n \geqslant n_0$; $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L (E – единичный оператор, λ – спектральный параметр).

Преобразование решения строится следующим образом: полагаем $u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t)$, где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda-\mu_0}(R_\lambda^0 g)\cos\rho t\, d\lambda,$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geqslant n_0}\int\limits_{\gamma_n}\right)\frac{1}{\lambda-\mu_0}[R_\lambda g - R^0_\lambda g]\cos\rho t\,d\lambda,$$

$|\mu_0| > r$ и μ_0 не является собственным значением операторов L и L_0, причем μ_0 вне γ_n при $n \geqslant n_0$; $g = (L-\mu_0 E)\varphi$, L_0, есть оператор L при $q(x)\equiv 0$, $R^0_\lambda = (L_0 - \lambda E)^{-1}$.

Ряд $u_0(x,t)$, представляющий формальное решение задачи (1)–(4) при $q(x)\equiv 0$, суммируется, его сумма представляет аналог формулы Даламбера [3].

Исследуя резольвенту оператора L и используя методы [1], [2] доказывается, что ряд $u_1(x,t)$ и ряды, получающиеся из него почленным дифференцированием по x и t до второго порядка, сходятся абсолютно и равномерно по $x\in[0,1]$ и $t\in[-T,T]$, где $T>0$ любое.

Теорема. *Формальное решение $u(x,t)$ есть классическое решение задачи* (1)–(4) *при $\varphi_j\in C^2[0,1]$, удовлетворяющих условиям* (5)–(6).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-01-00238, 14-01-00867).

Список литературы

[1] М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов, "Резольвентный подход в методе Фурье", *Докл. РАН*, **458**:2 (2014), 138–140.

[2] М. Ш. Бурлуцкая, А. П. Хромов, "Резольвентный подход для волнового уравнения", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **55**:2 (2015), 51–63.

[3] М. Ш. Бурлуцкая, "Об одной смешанной задаче для волнового уравнения на графе", *Современные методы теории функций и смежные проблемы*, материалы межд. конферен. : Воронеж. зимн. мат. школы., Издат. дом ВГУ, Воронеж, 2015, 180–182.

Поперечники весовых классов Соболева в весовом пространстве Лебега: случай сильной особенности в точке у второго веса

А. А. Васильева

Московский государственый университет имени М. В. Ломоносова

Пусть $B \subset \mathbb{R}^d$ — открытый шар с центром в нуле радиуса $R < 1$, $g, v : B \to (0, \infty)$, $g(x) = |x|^{-\beta_g} |\log |x||^{-\alpha_g}$, $v(x) = |x|^{-\beta_v} |\log |x||^{-\alpha_v}$, $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $r \in \mathbb{N}$. Предположим, что $\delta := r + \frac{d}{q} - \frac{d}{p} > 0$. Ранее автором рассматривался случай $\beta_v < \frac{d}{q}$. Теперь предполагаем, что $\beta_v \in \left(\frac{d}{q}, \infty\right) \setminus \left\{\frac{d}{q} + 1, \ldots, \frac{d}{q} + r - 1\right\}$.

Пусть $W^r_{p,g}(B) = \left\{f : B \to \mathbb{R} | \ \left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(B)} \leqslant 1\right\}$. Обозначим через $W^r_{p,g}(B, \Gamma_0)$ замыкание в $W^r_{p,g}(B)$ множества бесконечно гладких функций, равных 0 в некоторой окрестности нуля (относительно полуметрики, порожденной полунормой $\left\| \frac{\nabla^r f}{g} \right\|_{L_p(B)}$). Также положим $L_{q,v}(B) = \{f : \|f\|_{L_{q,v}(B)} := \|vf\|_{L_q(B)} < \infty\}$.

Теорема. *Пусть $\delta > 0$, $\beta_g + \beta_v = \delta$,*

$$\beta_v \in \left(\frac{d}{q}, \infty\right) \setminus \left\{\frac{d}{q} + 1, \ldots, \frac{d}{q} + r - 1\right\},$$

$\alpha := \alpha_g + \alpha_v > \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+$.

1. *Пусть $p \geqslant q$ или $p \leqslant q \leqslant 2$. Предположим, что $\alpha \neq \frac{\delta}{d}$. Тогда*

$$d_n(W^r_{p,g}(B, \Gamma_0), L_{q,v}(B)) \asymp n^{-\min\left\{\frac{\delta}{d}, \alpha\right\} + \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)_+}.$$

2. *Пусть $p < q$, $q > 2$. Положим $\theta_1 = \frac{\delta}{d} + \min\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}, \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right\}$, $\theta_2 = \frac{q\delta}{2d}$, $\theta_3 = \alpha + \min\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}, \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right\}$, $\theta_4 = \frac{q\alpha}{2}$. Предположим, что существует $j_* \in \{1, 2, 3, 4\}$ такое, что $\theta_{j_*} < \min_{j \neq j_*} \theta_j$. Тогда*

$$d_n(W^r_{p,g}(B, \Gamma_0), L_{q,v}(B)) \asymp n^{-\theta_{j_*}}.$$

Потенциалы–обобщённые функции в задаче об априорных оценках оператора Штурма–Лиувилля

А. А. Владимиров

Вычислительный центр имени А. А. Дородницына РАН

Рассматривается класс граничных задач

$$-y'' + qy = \lambda y,$$
$$y(0) = y(1) = 0,$$

где потенциал пробегает область

$$A_{1,r} \rightleftharpoons \left\{ q \in L_1[0,1] \;:\; q \geqslant 0,\; \int_0^1 rq\,dx = 1 \right\},$$

заданную некоторой положительной весовой функцией $r \in C(0,1)$. Устанавливается, что на замыкании $\Gamma_{1,r}$ класса $A_{1,r}$ в пространстве обобщённых функций $\mathring{W}^{-1}_{2,loc}(0,1)$ существует и однозначно определён потенциал $\hat{q}$ со свойством $\lambda_0(\hat{q}) = M_{1,r} \rightleftharpoons \sup_{q \in A_{1,r}} \lambda_0(q)$. При этом характеристическим свойством такого потенциала является соотношение

$$\sup_{x \in (0,1)} \frac{y_{\hat{q}}^2(x)}{r(x)} = \langle \hat{q}, y_{\hat{q}}^2 \rangle,$$

где $y_{\hat{q}}$ — отвечающая потенциалу $\hat{q}$ неотрицательная собственная функция.

Результаты доклада обобщают относящиеся к случаю $r(x) \equiv 1$ результаты работы [1].

Работа поддержана РНФ, грант № 14-11-00754.

Список литературы

[1] Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев, “Об оценках первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля”, *Успехи матем. наук*, **39**:2 (1984), 151–152.

[2] В. А. Винокуров, В. А. Садовничий, “О границах изменения собственного значения при изменении потенциала”, *Доклады Акад. Наук*, **392**:5 (2003), 592–597.

[3] А. А. Владимиров, *О мажорантах собственных значений задач Штурма–Лиувилля с потенциалами из шаров весовых пространств*, arXiv: 1412.7992.

О свойствах собственных функций задачи Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом и весом

В. Е. Владыкина

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

В работе изучается задача Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом и положительным весом:

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda^2\rho(x)y(x), \qquad y(0)=y(1)=0, \tag{1}$$

где $q\in W_2^{-1}[0;1]$, $\rho\in BV[0;1]$, $m\leqslant\rho(x)\leqslant M$ при некоторых положительных m и M.

В классическом случае, когда потенциал q суммируемый, а вес $\rho\in C^2[0;1]$, задача хорошо изучена. При $q\in W_2^{-1}[0;1]$, $\rho\equiv 1$ эта задача была корректно поставлена и изучена в работе Савчука и Шкаликова [1].

Для рассматриваемых весов $\rho\in AC[0;1]$ задача (1) не сводится к уже рассмотренным случаям заменой и требует отдельного изучения. В работе получены асимптотические фомулы для фундаментальных решений, собственных функций и собственных значений задачи (1).

Теорема 1. *Пусть* $\rho\in AC[0;1]$. *Тогда в области* $\{\operatorname{Re}\lambda>-\lambda_0\}$ *фундаментальные решения задачи* (1) *имеют вид*

$$y_1=e^{i\lambda ht}(e^{\Phi}+o(1)), \qquad y_2=e^{-i\lambda ht}(e^{\Phi}+o(1)) \quad \text{при} \quad |\lambda|\to\infty,$$

где

$$t=\frac{1}{h}\int\limits_0^x\sqrt{\rho(\xi)}d\xi,\ h=\int\limits_0^1\sqrt{\rho(\xi)}d\xi,\ \Phi=\frac{1}{2}\int\limits_0^t\phi(\xi)d\xi,\ \phi=-\frac{\rho'(t)}{2\rho(t)}.$$

Также верна

Теорема 2. *Собственные функции задачи* (1) *при* $\rho\in AC[0;1]$ *в области* $\{\operatorname{Re}\lambda>-\lambda_0\}$ *имеют вид*

$$y_k=e^{\Phi(t)}\sin\pi kt+o(1) \quad \text{при } k\to\infty$$

Если же ρ — *функция ограниченной вариации, то для собственных функций задачи* (1) *верны оценки*

$$\|y_n\|_{C[0;1]}\leqslant C(\rho)\|y_n\|_{L_p[0;1]}, \quad \forall p\geqslant 1.$$

Работа выполнена при поддержке РНФ, грант № 14-11-00754

Список литературы

[1] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами”, *Математические заметки*, **66**:6 (1999), 897–911.

Спектральный анализ и корректная разрешимость гиперболических вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений

В. В. Власов, Н. А. Раутиан

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Исследуются интегро-дифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Главная часть рассматриваемых уравнений представляет собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное суммами вольтерровых интегральных операторов. Указанные абстрактные интегро-дифференциальные уравнения могут рассматриваться как операторные модели задач, возникающих в линейной теории вязкоупругости, теории усреднений, теплопроводности в средах с памятью и т.д. Примером конкретной актуальной проблемы является задача для системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных линейной теории вязкоупругости:

$$\rho\ddot{u}(x,t) - (L_1 + L_2)u(x,t) + \int\limits_0^t K_1(t-s)L_1u(x,s)ds + \int\limits_0^t K_2(t-s)L_2u(x,s)ds = f(x,t),$$

где $u = \vec{u}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ – вектор перемещений вязкоупругой наследственной среды, $t > 0$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с гладкой границей, вектор u удовлетворяет условию Дирихле на границе области Ω, $L_1u = \mu\cdot(\Delta u + \operatorname{grad}\operatorname{div}u)$, $L_2u = \lambda\cdot\operatorname{grad}\operatorname{div}u$, λ, μ – постоянные коэффициенты Ламе, $L = L_1 + L_2$ – оператор Ламе теории упругости, K_1, K_2 – функции релаксации памяти, представляющие собой ряды убывающих экспонент с положительными коэффициентами, характеризующие наследственные свойства среды.

Установлена локализация и структура спектра оператор-функций, являющихся символами указанных интегро-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Получены результаты о корректной разрешимости эти уравнений в весовых пространствах Соболева вектор-функций со значениями в гильбертовом пространстве, заданных на положительной полуоси.

Полученные результаты являются естественным обобщением и развитием результатов, опубликованных в работах [1], [2].

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00754).

Список литературы

[1] В. В. Власов, Н. А. Раутиан, “Корректная разрешимость и спектральный анализ абстрактных гиперболических интегродифференциальных уравнений”, *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, **28** (2011), 75–113.

[2] V. V. Vlasov, N. A. Rautian, “Spectral Analysis and Representations of Solutions of Abstract Integro-differential Equations in Hilbert Space”, *Operator Theory*: *Advances and Applications. Springer Basel AG*, **235** (2013), 519–537.

Пространства Соболева, геометрическая теория функций и их применения

С. К. Водопьянов

Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН

В докладе будут показаны результаты и идеи, полученные в ряде недавних работ, в основании которых лежит описание соболевских гомеоморфизмов $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$ открытых областей евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, обратный к которым также принадлежит классу Соболева [1]. Этот результат описывает двухиндексную шкалу гомеоморфизмов, зависящих от вещественных параметров $n-1 < q \leqslant p < \infty$.

Такие гомеоморфизмы при некоторых условиях на функцию искажения и только такие индуцируют ограниченный оператор $\varphi^*\colon L^1_p(\Omega') \to L^1_q(\Omega)$ пространств Соболева (включая весовые) по правилу композиции: $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ [2].

Результаты работ [1,2,3] мотивируют следующее

Определение. Пусть $\theta\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ — измеримая функция: $0 < \theta < \infty$ п. вс. Отображение $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, называется *отображение с ограниченным θ-весовым (p,q)-искажением*, $n-1 < q \leqslant p < \infty$, если:

1) $\varphi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$;
2) φ имеет конечное искажение: $D\varphi(x) = 0$ п. вс. на множестве нулей якобиана $J(x,\varphi) = \det D\varphi(x)$;
3) φ непрерывно открыто и дискретно, и $J(x,\varphi) \geqslant 0$;
4) θ-весовая функция (q,p)-искажения

$$\Omega \ni x \mapsto K^\theta_q(x,\varphi) = \begin{cases} \dfrac{\theta^{\frac{1}{q}}(x)|D\varphi(x)|}{J(x,\varphi)^{\frac{1}{p}}}, & \text{если} \quad J(x,\varphi) > 0, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

принадлежит $L_\kappa(\Omega)$, где $\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\kappa = \infty$ при $p = q$).

Очевидно, что в случае $\theta \equiv 1$, $q = p = n$ мы получаем отображение с ограниченным искажением, начала теории которых были заложены Ю. Г. Решетняком в 1960-ые годы прошлого века [3]. Если дополнительно φ — гомеоморфизм, то φ — квазиконформное отображение.

Метод работы [1] позволяет исследовать свойства отображений с ограниченным θ-весовым (p,q)-искажением без обременительных аналитических предположений (в ряде работ предполагалось дополнительно выполнение $\mathcal{N}$-свойства Лузина). Показано, что новый класс отображений наследует многие свойства отображений с ограниченным искажением:

1) обобщенную лемму Полецкого [4];
2) оценки для емкости образа кольцевой области [5], доказательство которых основывается на работах [1,4];
3) теорему Лиувилля [5];
4) устранимость множеств [5]

и др. результаты.

Упомянутые выше результаты применяются для исследовании задача минимизации функционала $I(\varphi) = \int_\Omega W(x, D\varphi)\,dx$ на новом классе отображений сравнительно с классами, исследуемыми ранее Дж. Боллом [6]. Ослаблены условия суммируемости допустимых деформаций до $\varphi \in W_n^1(\Omega)$ и условия роста подынтегральной функции $W(x, F)$. Компенсацией за ослабление вышеперечисленных условий является требование на характеристику искажения $\frac{|D\varphi(x)|}{J(x,\varphi)^{\frac{1}{n}}} \leqslant M(x) \in L_{ns}(\Omega)$. В условиях поливыпуклости и коэрцитивности подынтегральной функции $W(x, F)$ получена теорема существования задачи минимизации функционала $I(\varphi)$ на новом семействе допустимых деформаций $\mathcal{A}$ [7]. Приводится пример поливыпуклой функции $W(x, F)$, не удовлетворяющей условиям работы [6], для которой, тем не менее, можно решить задачу минимизации для функционала $I(\varphi)$.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (код проекта № 14-01-00552).

Список литературы

[1] С. К. Водопьянов, “О регулярности отображений, обратных к соболевским”, *Матем. сб.*, **203**:10 (2012), 3–32.

[2] С. К. Водопьянов, А. Д. Ухлов, “Операторы суперпозиции в пространствах Соболева”, *Известия ВУЗов. Математика*, **486**:10 (2002), 11–33.

[3] Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Наука, Новосибирск, 1982.

[4] С. К. Водопьянов, “О регулярности функции Полецкого при слабых аналитических предположениях исходного отображения”, *Докл. РАН*, **455**:2 (2014), 130–134.

[5] А. Н. Байкин, С. К. Водопьянов, “Емкостные оценки, теоремы типа Лиувилля и об устранении особенностей для отображений с ограниченным (p, q)-искажением”, *Сиб. мат. журн.*, **56**:2 (2015), 290–321.

[6] J. M. Ball, “Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity”, *Arch. Ration. Mech. and Analys*, **63** (1977), 337–403.

[7] С. К. Водопьянов, А. О. Молчанова, “Вариационные задачи нелинейной теории упругости в некоторых классах отображений с конечным искажением”, *Докл. РАН*, 2015 (в печати).

О нелокальной краевой задаче для уравнения Лапласа на прямоугольном параллелепипеде

Е. А. Волков

Математический институт имени В. А. Стеклова РАН

Формулировка нелокальной краевой задачи.
Сопутствующая система нелинейных уравнений и её решение.
Теоремы существования и единственности решения нелокальной краевой задачи.
Приближенный метод решения нелокальной краевой задачи.
Представление решения нелокальной краевой задачи в виде суммы двух функций.

Кратные коэффициенты Фурье и обобщенные классы Липшица в равномерной метрике

С. С. Волосивец

Саратовский государственный университет

Пусть $\{c_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ and $\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_{jk}| < \infty$. Тогда $f(x,y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{jk}e^{i(jx+ky)}$ является непрерывной 2π-периодической по каждому аргументу функцией. Пусть

$$\triangle_{t,\tau}^{m,n} f(x,y) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{j+k}\binom{m}{j}\binom{n}{k} f(x+(m-2j)t/2, y+(n-2j)\tau/2)$$

является смешанной разностью порядков m,n с шагом t,τ. Легко видеть, что справедливо равенство

$$\triangle_{t,\tau}^{m,n} f(x,y) = (2i)^{m+n}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\sin jt/2)^m(\sin k\tau/2)^n c_{jk}e^{i(jx+ky)}.$$

Пусть класс $\Phi^{(2)}$ состоит из положительных на $[0,2\pi]^2\setminus\{(0,0)\}$ функций ω, где $\omega(0,0)=0$, $\omega(x_2,y_2)-\omega(x_2,y_1)-\omega(x_1,y_2)+\omega(x_1,y_1)\geqslant 0$ and $\omega(x_2,y_2)\geqslant\omega(x_1,y_1)$ if $x_2\geqslant x_1$, $y_2\geqslant y_1$, $x_i,y_i\in[0,2\pi]$, $i=1,2$. Если $\omega\in\Phi^{(2)}$ такова, что

$$\sum_{i=m}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}(ij)^{-1}\omega\left(\frac{2\pi}{i},\frac{2\pi}{j}\right) = O\left(\omega\left(\frac{2\pi}{m},\frac{2\pi}{n}\right)\right), \quad m,n\in\mathbb{N},$$

то ω принадлежит классу BB. Если же $m,n>0$ и для $\omega\in\Phi^{(2)}$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{j}\sum_{k=1}^{l} i^{m-1}j^{n-1}\omega\left(\frac{2\pi}{i},\frac{2\pi}{k}\right) = O\left(j^m l^n\omega\left(\frac{2\pi}{j},\frac{2\pi}{l}\right)\right), \quad j,l\in\mathbb{N},$$

то ω принадлежит классу B_mB_n. Одномерные аналоги этих классов введены Н.К.Бари и С.Б.Стечкиным [1]. Будем писать $f\in H^{\omega,m,n}$ для $m,n\in\mathbb{N}$ и $\omega\in\Phi^{(2)}$, если для всех $\delta_1,\delta_2\in[0,2\pi]$ верно неравенство $\omega_{mn}(f,\delta_1,\delta_2) = \sup\{|\triangle_{t,\tau}^{m,n} f(x,y) : 0\leqslant t\leqslant\delta_1, 0\leqslant\tau\leqslant\delta_2\}\leqslant C\omega(\delta_1,\delta_2)$. Соответственно, $h^{\omega,m,n} = \{f\in H^{\omega,m,n} : \omega_{mn}(f,\delta_1,\delta_2) = o(\omega(\delta_1,\delta_2)), \delta_1,\delta_2\to 0+0\}$. Будем писать $\omega\in\Delta_2$, если $\omega(2t,\tau)\leqslant C_1\omega(t,\tau)$ для всех $2t,\tau\in[0,2\pi]$ and $\omega(t,2\tau)\leqslant C_1\omega(t,\tau)$ for all $t,2\tau\in[0,2\pi]$.

Теорема 1. (i) *Пусть $\{c_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ и $f(x,y)$ определены выше. Если $m,n\in\mathbb{N}$, $\omega\in BB\cap\Delta_2$ и имеет место соотношение*

$$\sum_{|j|\leqslant M}\sum_{|k|\leqslant N}|j^m k^n c_{jk}| = O\left(M^m N^n\omega\left(\frac{2\pi}{M},\frac{2\pi}{N}\right)\right), \quad M,N\in\mathbb{N}, \tag{1}$$

то $f\in H^{\omega,m,n}$.

(ii) *Если $\{c_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ и $f(x,y)$ определены выше, $m,n\in\mathbb{N}$ and $j^mk^nc_{jk}\geqslant 0$ for all $|j|,|k|\geqslant 1$, то из $f\in H^{\omega,m,n}$ следует выполнение соотношения* (1).

Следствие. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}$, $\omega \in BB \cap B_n B_m$, $j^m k^n c_{jk} \geqslant 0$ *для всех* $j.k \in \mathbb{Z}$. *Если* $\{c_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ *и* $f(x,y)$ *определены выше, то следующие четыре соотношения попарно эквивалентны*:

1) $f \in H^{\omega,m,n}$;
2) (1);
3) $\sum\limits_{|j|=M}^{\infty} \sum\limits_{|k|=N}^{\infty} |c_{jk}| = O\left(\omega\left(\frac{2\pi}{M}, \frac{2\pi}{N}\right)\right)$, $M, N \in \mathbb{N}$;
4) $\sum_{j=[M/2]}^{M} \sum_{k=[N/2]}^{N} |c_{jk}| = O\left(\omega\left(\frac{2\pi}{M}, \frac{2\pi}{N}\right)\right)$, $M, N \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty)$.

Теорема 2. *Пусть* $\{c_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ *и* $f(x,y)$ *определены выше.*

(i) *Если* $m, n \in \mathbb{N}$, $\omega \in BB \cap \Delta_2$ *и выполнено условие*

$$\sum_{|j|\leqslant M} \sum_{|k|\leqslant N} |j^m k^n c_{jk}| = o\left(M^m N^n \omega\left(\frac{2\pi}{M}, \frac{2\pi}{N}\right)\right), \quad M, N \to \infty, \tag{2}$$

то $f \in h^{\omega,m,n}$.

(ii) *Если* $j^m k^n c_{jk} \geqslant 0$ *for all* $|j|, |k| \geqslant 1$ *и* $f \in h^{\omega,m,n}$, *то* (2) *имеет место.*

Результаты выше уточняют и обобщают результаты Ф. Морица из [2].

Список литературы

[1] Н.К.Бари, С.Б.Стечкин, “Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций”, *Труды Моск. мат. об-ва*, **5** (1956), 483–522.

[2] F. Moricz, “Absolutely convergent multiple Fourier series and multiplicative Lipschitz classes of functions”, *Acta Math. Hung.*, **121**:1-2 (2008), 1–19.

Об обратной задаче о резонансах для оператора Шредингера на полуоси

В. Л. Гейнц

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Пусть $SE(\gamma), \gamma > 0$ – пространство, состоящее из всех измеримых функций $q : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ таких, что

$$\|q\|_{SE(\gamma)} := \int_0^\infty |q(x)| \exp(x^\gamma) dx < \infty.$$

Рассматривается одномерное уравнение Шредингера

$$-y''(x) + q(x)y(x) = z^2 y(x),\ x \in [0, \infty), z \in \mathbb{C},\ q \in SE(\gamma),\ \gamma > 1.$$

Пусть $\psi_q(z) = y_q(0, z) = 1 + \int\limits_0^\infty K_q(0, t) \exp(izt) dt$, где $K_q(x, t)$ — ядро оператора преобразования [1], а $y_q(x, z)$ — решение Йоста. Тогда $\psi_q(z)$ есть целая функция порядка, не превосходящего $\rho(\gamma) \leqslant \frac{\gamma}{\gamma-1}$. Нули этой функции, лежащие в нижней полуплоскости, называются резонансами оператора Шредингера. Множество всех нулей функции ψ_q (с учетом кратности) определяет потенциал q однозначно.

В работе [2] рассматривается задача об устойчивости восстановления потенциала q с компактным носителем по резонансам из круга $|z| < R$. В данной работе обобщены результаты [2].

Теорема 1. *Существуют такие положительные константы $R_0 = R_0(\gamma, N)$, $C_0 = C_0(\gamma, N)$, $\alpha = \alpha(\gamma)$, что при всех $R > R_0$ из совпадения в круге $|z| < R$ нулей функций Йоста $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ для потенциалов q_1, q_2, удовлетворяющих условию*

$$\|q_j\|_{SE(\gamma)} \leqslant N,$$

следует, что для всех z из круга $|z| < R^\alpha$

$$|\psi_2(z) - \psi_1(z)| < C_0 R^{-\alpha}.$$

Теорема 2. *Существуют положительные константы R_1, C_1, зависящие от γ, $p \in (1, 2]$, N, M, и константа β, зависящая от γ и p, такие, что при всех $R > R_1$ из совпадения в круге $|z| < R$ нулей функции Йоста $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ для потенциалов q_1, q_2, удовлетворяющих условию*

$$\|q_j\|_{SE(\gamma)} \leqslant N, \|q_2 - q_1\|_{L^p[0,\infty)} \leqslant M,$$

следует, что

$$\sup_{x \geqslant 0} \left| \int_x^\infty (q_2(s) - q_1(s)) ds \right| \leqslant C_1 R^{-\beta}.$$

Список литературы

[1] В. А. Марченко, *Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля*, Наукова Думка, Киев, 1972.

[2] M. Marletta, R. Shterenberg, R. Weikard, “On the inverse resonance problem for Schrodinger operators”, *Comm. Math. Phys.*, **295**:2 (2010), 465–484.

Теорема вложения пространств анизотропных пространств Соболева для областей с нерегулярной границей

А. Ю. Головко

Московский физико-технический институт (государственный университет)
Математический институт имени В. А. Стеклова РАН

В 1938 году С.Л. Соболев (см., например, [1]) для ограниченных областей $G \subset \mathbb{R}^n$ с условием конуса установил теорему вложения $W_p^s(G) \subset L_q(G)$, характеризуемую неравенством

$$\|f\|_{L_q(G)} \leqslant C\|f\|_{W_p^s(G)} = C\left(\sum_{|\alpha|=s} \|D^\alpha f\|_{L_p(G)} + \|f\|_{L_p(G)}\right),$$

где $1 < p < q < \infty$, $s \in \mathbb{N}$ при выполнении соотношения

$$s - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geqslant 0.$$

В дальнейшем эта теорема распространялась на области более общего вида. В 2001 году в [2] О.В. Бесов доказал эту теорему для областей, удовлетворяющих условию гибкого σ-конуса, при выполнении соотношения

$$s - \frac{\sigma(n-1)+1}{p} + \frac{n}{q} \geqslant 0.$$

В 2010 году в [3] О.В. Бесов обобщил эту теорему на случай норм более общего вида (в которые входят сумма норм не всех обобщенных частных производных порядка s).

В данной работе мы обобщаем этот результат на анизотропный по порядку производных и показателям суммируемости случай.

Определение [2]. При $\sigma \geqslant 1$ область $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *областью с условием гибкого σ-конуса*, если при некоторых $T > 0, \varkappa > 0$ для любого $x \in G$ существует кусочно гладкий путь $\gamma : [0,T] \to G, \gamma(0) = x, |\gamma'| \leqslant 1$ почти всюду, и такой, что $\rho(\gamma(t)) \geqslant \varkappa t^\sigma$ при $0 < t \leqslant T$.

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$; $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, $1 \leqslant m \leqslant n$, $i_0 = 0$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m = n$ — натуральные числа, $n_j = i_j - i_{j-1}$, $\chi_j : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{0,1\}$,

$$\chi_j(i) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i_{j-1}+1 \leqslant i \leqslant i_j, \\ 0 & \text{при} \quad 1 \leqslant i \leqslant i_{j-1} \quad \text{и при} \quad i_j + 1 \leqslant i \leqslant i_m = n. \end{cases}$$

При $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ положим $\alpha^j := \chi_j\alpha = (0, \ldots, \alpha_{i_{j-1}+1}, \ldots, \alpha_{i_j}, 0, \ldots, 0)$.

Теорема 1. *Пусть G — область с условием гибкого σ-конуса, $\sigma \geqslant 1$; $s_j, m \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $l < s_j$, $1 \leqslant q, r < \infty$, $p_j < q$, $r \leqslant q$, $1 < p_j < \infty$ при $j = \overline{1,m}$. Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha f\|_{L_q(G)} \leqslant C\left(\sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=\alpha^j, |\alpha|=s_j} \|D^\alpha f\|_{L_{p_j}(G)} + \|f\|_{L_r(G)}\right)$$

для функций f с конечной правой частью при выполнении для всех $j=\overline{1,m}$ соотношений

$$l-\frac{n}{q}\leqslant s_j-(\sigma-1)\sum_{i=1,i\neq j}^{m}(s_i-1)-\frac{\sigma(n-1)+1}{p_j}.$$

Показано, что теорема 1 является неулучшаемой на классе областей с условием гибкого σ-конуса.

Получена также и мультипликативная оценка (неравенство типа Гальярдо-Ниренберга).

Теорема 2. *Пусть G — область с условием гибкого σ-конуса, $\sigma\geqslant 1$; $s_j,m\in\mathbb{N}$, $l\in\mathbb{Z}_+$, $0<\theta<1$, $1\leqslant m\leqslant n$, $l<s_j$, $1\leqslant q,r<\infty$, $p_j<q$, $r\leqslant q$, $1<p_j<\infty$ при $j=\overline{1,m}$. Пусть $r<q$ в случае $l=0$, $\sigma=1$. Тогда мультипликативное неравенство типа Гальярдо-Ниренберга*

$$\sum_{|\alpha|=l}\|D^\alpha f\|_{L_q(G)}\leqslant C\left(\|f\|^{1-\theta}_{L_r(G)}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{\alpha=\alpha^j,|\alpha|=s_j}\|D^\alpha f\|_{L_{p_j}(G)}\right)^{\theta}+\|f\|_{L_r(G)}\right)$$

справедливо для всех функций f с конечной правой частью при выполнении для всех $j=\overline{1,m}$ соотношений

$$l-\frac{n}{q}\leqslant\theta\left(s_j-(\sigma-1)\sum_{i=1,i\neq j}^{m}(s_i-1)-\frac{\sigma(n-1)+1}{p_j}\right)+$$
$$(1-\theta)\left(-\frac{n\sigma}{r}-(\sigma-1)\left(\sum_{i=1}^{m}s_i-m\right)\right).$$

При $m=1$ для областей с гладкой границей ($\sigma=1$) теорема 2 совпадает с результатом Гальярдо-Ниренберга для $q>p$, $q\geqslant r$, полученным ими в 1959 году ([4]).в

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00443) в МИАН им. В.А. Стеклова.

Список литературы

[1] Соболев С.Л., *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.*, Наука, Москва, 1988.

[2] Бесов О.В., “Теорема вложения Соболева для областей с нерегулярной границей”, *Математический сборник*, **192**:3 (2001), 3–26.

[3] Бесов О.В., “Интегральные оценки дифференцируемых функций на нерегулярных областях”, *Математический сборник*, **201**:12 (2010), 69–82.

[4] Nirenberg L., “On elliptic partial differential equations”, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, **13(3)**:2 (1959), 115–162.

Краевая задача для системы уравнений Пуассона в двумерной области

Е. В. Голубева

Национальный исследовательский университет “Московский энергетический институт”

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с липшицевой и кусочно-гладкой границей Γ. В области G рассматривается задача: найти решение $u(x) = \big(u_1(x), u_2(x)\big)$ системы уравнений Пуассона

$$\Delta u = h, \quad x \in G, \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u_n = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_\tau = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{2}$$

Здесь $h(x) = \big(h_1(x), h_2(x)\big)$ – заданная вектор-функция, $\frac{\partial u}{\partial n} = \big(\frac{\partial u_1}{\partial n}, \frac{\partial u_2}{\partial n}\big)$ – производная по нормали $n(x) = (n_1(x), n_2(x))$ вектор-функции $u(x),\ x \in \Gamma$, $\cdot_n$ – нормальная составляющая вектора, $\cdot_\tau$ – тангенциальная составляющая вектора.

Через $W^1_{2,tang}$ обозначено пространство $\{u : G \to \mathbb{R}^2 \mid u \in W^1_2(G)\ \&\ u_n = 0,\ x \in \Gamma\}$.

Устанавливается корректная разрешимость задачи (1), (2) в пространстве $W^1_{2,tang}(G)$.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (соглашение №14-11-00306).

Список литературы

[1] Ю. А. Дубинский, “О некоторых краевых задачах для системы уравнений Пуассона в трёхмерной области”, *Дифференциальные уравнения.* Т. 45, 2014, 610–614.

Точные константы в (q_1, q_2)-обобщенном неравенстве треугольника для Box-квазиметрик некоторых канонических групп Карно

А. В. Грешнов, М. В. Трямкин

Институт математики Сибирского отделения РАН

Неотрицательная функция d_X, определенная на декартовом произведении $X \times X$, где X – некоторое множество, называется (q_1, q_2)-квазиметрикой [1], если выполняются условия

1^0 $d_X(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v \quad \forall u, v \in X$ (аксиома тождества),

2^0 $d_X(u,w) \leqslant q_1 d_X(u,v) + q_2 d_X(v,w) \forall u,v,w \in X$, где q_1, $q_2 > 0$ – некоторые константы ((q_1, q_2)- обобщенное неравенство треугольника).

Пара (X, d_X) называется (q_1, q_2)-квазиметрическим пространством. Если функция d_X дополнительно удовлетворяет условию $d_X(u,v) = d_X(v,u) \forall u, v \in X$, то (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство называется симметрическим.

Эквирегулярные пространства Карно–Каратеодори [2] с Box-квазиметриками [3] являются симметрическими $(1, q_2)$-квазиметрическими пространствами [4]. Примерами эквирегулярных пространств Карно–Каратеодори являются канонические группы Карно. Нами найдены точные (неулучшаемые) значения константы q_2 для Box-квазиметрик канонических групп Карно $\mathbb{H}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$, которые определяются, см. [5], в стандартном пространстве $\mathbb{R}^{2n+1}$ при помощи таблицы коммутаторов $[e_i, e_{n+i}] = \alpha_i e_{2n+1}$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, и их важных частных случаев – одномерной $\mathbb{H}^1_\alpha$ $(n = 1)$ и n-мерной $\mathbb{H}^n_\alpha$ $(\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \alpha)$ канонических групп Гейзенберга, а также для канонических групп Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$, которые определяются в стандартном пространстве $\mathbb{R}^4$ при помощи таблицы коммутаторов $[e_1, e_2] = \alpha e_3$, $[e_1, e_3] = \beta e_4$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Работа выполнена при частичной поддержке Гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (Договор № 14.B25.31.0029).

Список литературы

[1] Арутюнов А. В., Грешнов А. В., "Накрывающие отображения в квазиметрических пространствах и пространствах Карно — Каратеодори", *Известия РАН*, 2015 (в печати).

[2] Gromov M., "Carnot-Caratheodory spaces seen from within", *Sub-Reimannian geometry*, Birkhäuser, Basel, 1996, 79–323.

[3] Nagel A., Stein E. M., Wainger S., "Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties", *Acta Math*, 1985, 103–47.

[4] Грешнов А. В., "Доказательство теоремы Громова об однородной нильпотентной аппроксимации для векторных полей класса C^1", *Мат. труды*, **15**:2 (2012), 72–88.

[5] Agrachev A., Barilari D., Boscain U., "On the Hausdorff volume in sub-Riemannian geometry", *Calc. Var.*, **43** (2012), 355–388.

Неравенство Никольского для алгебраических многочленов на отрезке

М. В. Дейкалова
Уральский федеральный университет

Будет обсуждаться неравенство Никольского для алгебраических многочленов на отрезке $[-1,1]$ между равномерной нормой и нормой пространства $L_q^{(\alpha)}$, $1 \leqslant q < \infty$, с ультрасферическим весом $\phi^{(\alpha,\alpha)}(x) = (1-x^2)^\alpha$ при $\alpha \geqslant -1/2$. Будет показано, что многочлен с единичным старшим коэффициентом, наименее уклоняющийся от нуля в пространстве $L_q^{(\alpha+1,\alpha)}$ с весом Якоби $\phi^{(\alpha+1,\alpha)}(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^\alpha$, является экстремальным в неравенстве Никольского. При обосновании результата используется обобщенный сдвиг, порожденный ультрасферическим весом. Будет исследована норма этого оператора в пространстве $L_q^{(\alpha)}$.

Результаты получены совместно с В.В.Арестовым; для $\alpha = (m-3)/2$, m – целое, $m \geqslant 3$, они другим способом получены в [1].

Исследования выполнены в рамках Программы государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации (соглашение №02.A03.21.0006 от 27.08.2013) и при поддержке РФФИ (проект 15–01-02705).

Список литературы

[1] В. В. Арестов, М. В. Дейкалова, “Неравенство Никольского для алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере”, *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **19**:2 (2013), 34–47.

Квазиэллиптические операторы и псевдогиперболические уравнения

Г. В. Демиденко

Институт математики имени С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН
Новосибирский государственный университет

Рассматриваются классы квазиэллиптических операторов $L(D_x)$ во всем пространстве R^n. Эти классы операторов входят в класс квазиэллиптических операторов, введенных Л. Р. Волевичем [1] и С. М. Никольским [2], и содержат, в частности, однородные эллиптические операторы, эллиптические и параболические операторы по Петровскому, эллиптические операторы по Дуглису – Ниренбергу и др. Для рассматриваемых операторов при условии квазиоднородности символов мы устанавливаем теоремы об изоморфизме в специальных шкалах весовых соболевских пространств $W^l_{p,\sigma}(R^n)$. Из этих результатов вытекает ряд известных теорем об изоморфизме для однородных эллиптических операторов, ряд новых теорем об изоморфизме для эллиптических и параболических операторов, а также теоремы об однозначной разрешимости задачи Коши для класса псевдогиперболических уравнений [3]

$$L(D_x)D_t^m u + \sum_{k=0}^{m-1} L_{m-k}(D_x)D_t^k u = f(t,x).$$

Работа продолжает исследования [4–7].

Список литературы

[1] Л. Р. Волевич, “Локальные свойства решений квазиэллиптических систем”, *Мат. сб.*, **59**:3 (1962), 3–52.

[2] С. М. Никольский, “Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения”, *ДАН*, **146**:4 (1962), 767–769.

[3] Г. В. Демиденко, С. В. Успенский, *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной*, Научная книга, Новосибирск, 1998.

[4] G. V. Demidenko, “On solvability of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations”, *Sib. Adv. Math.*, **11**:4 (2001), 25–40.

[5] Г. В. Демиденко, “Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа. I”, *Сиб. мат. журн.*, **49**:5 (2008), 1064–1076.

[6] Г. В. Демиденко, “Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа. II”, *Сиб. мат. журн.*, **50**:5 (2009), 1060–1069.

[7] Г. В. Демиденко, “Матричные квазиэллиптические операторы в R^n”, *ДАН*, **431**:4 (2010), 443–446.

О росте решений при большом времени параболических уравнений и неравенств

В. Н. Денисов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

В полупространстве $\overline{D} = R^N \times [0, \infty), N \geqslant 3$ рассмотрим задачу Коши

$$\Delta u + q(x,t)u - u_t = 0, \quad \text{в} \quad R^N \times (0, \infty), \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), x \in R^N, \tag{2}$$

где $q(x,t) \geqslant 0$ в $D, u_0(x)-$ ограниченная, непрерывная функция.

Будем говорить, что решение задачи (1), (2) дестабилизируется, если существует предел:

$$\lim_{t \to \infty} u(x,t) = +\infty, \tag{3}$$

равномерно по x на каждом компакте K в R^N.

Теорема. *Если коэффициент $q(x,t)$ удовлетворяет условию*:

$$q(x,t) \geqslant \alpha^2 \min(1, r^{-2}), \tag{4}$$

при

$$\alpha^2 > \Big(\frac{N-2}{2}\Big)^2,$$

то для любой непрерывной, ограниченной неотрицательной функции $u_0(x)$ решение задачи Коши (1), (2) *дестабилизируется.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15-01-00471).

Список литературы

[1] В. Н. Денисов, “О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени”, *УМН*, **60**:4 (2005), 145–212.

[2] В. Н. Денисов, “О дестабилизации решений параболических уравнений”, Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского, **49**, Казань, 2014, 149–152.

О регуляризации решения задачи Коши для уравнения Гельмгольца

Х. Ш. Джураев

Таджикский национальный университет

Пусть $R = (-\infty, \infty)$–действительная ось, $D = \{-\infty < x < \infty,\ 0 \leqslant y \leqslant y_0\,(y \geqslant 0)\}$ – полоса или полуплоскость. $C(D)$ – пространство непрерывных функций $u(x, y)$: $(x, y) \in D$ с нормой

$$\|u(x, y)\| = \sup_D |u(x, y)|.$$

Требуется найти функцию $u(x, y)$, непрерывную при $x \in R$ и $y > 0$ из класса $C^2(D)$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0, \quad \lambda = const \tag{1}$$

и начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \psi(x), \tag{2}$$

где Δ - оператор Лапласа, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - заданные функции.

Известно, что при произвольных $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ задача (1)-(2) неразрешима. Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – аналитические функции и аналитически продолжимы, то, согласно фундаментальной теореме теории уравнений в частных производных, продолжение осуществимо и единственно. Одноко можно построить пример, подобный примеру Адамара для уравнения Лапласа (см.[1]), который показывает, что полученное продолжение будет неустойчивым к малым изменениям исходных данных. Поэтому задача (1)-(2) относится к числу некорректно поставленных задач.

Пусть в (2) $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям: 1) $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - бесконечно дифференцируемые функции; 2) производные $\varphi^{(k)}(x)$ и $\psi^{(k)}(x)\,(k = 1, 2, \cdots)$ стремятся к нулю при $|x| \to \infty$ быстрее любой отрицательной степени $|x|$. Решение $u(x, y)$ будем искать в классе функций, для которых: а) функции $u(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ абсолютно интегрируемы на всей оси x при любом фиксированном $y \geqslant 0$: б) функции $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ имеют в каждом конечном интервале $0 \leqslant y \leqslant y_0$ интегрируемую мажоранту $n(x)$. Выполним в задаче (1)–(2) преобразование Фурье по x. В силу условий а)–б) и свойств преобразования Фурье в $S(R)$– пространстве Шварца, получаем:

$$\frac{d^2 v(s, y)}{dy^2} - (s^2 - \lambda^2) v(s, y) = 0. \tag{3}$$

По предположению, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям 1)-2). Учитывая свойства преобразования Фурье в $S(R)$, из (2) имеем:

$$v(s, 0) = \Phi(s), \quad \frac{dv(s, y)}{dy}\Big|_{y=0} = \Psi(s), \tag{4}$$

где $\Phi(s)$ и $\Psi(s)$ – преобразования Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответственно. Согласно известной теореме (см. стр. 153 в [1]), функции $\Phi(s)$ и $\Psi(s)$ также являются бесконечно дифференцируемыми и каждая из их производных стремится к нулю при $|s| \to \infty$ быстрее любой отрицательной степени $|s|$. Таким образом, преобразование Фурье задачи (1)-(2) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению (3) с условиями (4). Решение задачи (3)-(4) имеет вид

$$v(s,y)=\Phi(s)cosh(y\sqrt{s^2-\lambda^2})+\Psi(s)\frac{sinh(y\sqrt{s^2-\lambda^2})}{\sqrt{s^2-\lambda^2}}.$$

При каждом фиксированном y это есть функция из пространства $S(R)$ (см. гл. IV в [1], стр. 29 в [2]), следовательно, принадлежит классам $L_1(R)$ и $L_2(R)$. Действительно, так как, по предположению, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям 1)-2), то они принадлежат пространству $S(R)$ (функций от x). Известно также (см. стр. 4 в [3]), что всякая функция $m(x)$ $(x{\in}R)$ из $S(R)$ принадлежит классам $L_1(R)$ и $L_2(R)$. Тогда на основе свойств преобразования Фурье (см. стр. 153–156 в [1]) функции $\Phi(s)$ и $\Psi(s)$ принадлежат пространству $S(R)$ (функций от s), то есть классам $L_1(R)$ и $L_2(R)$. Следовательно, $v(s,y)$ принадлежит пространству $S(R)$ (функций от s), и значит, классам $L_1(R)$ и $L_2(R)$ для любого фиксированного $y>0$. Обратное преобразование Фурье от $v(s,y)$ есть обычная функция, выражаемая в виде

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\Phi(s)\cosh(y\sqrt{s^2-\lambda^2})+\Psi(s)\frac{\sinh(y\sqrt{s^2-\lambda^2})}{\sqrt{s^2-\lambda^2}}\Big)\exp(ixs)dx. \qquad (5)$$

Следовательно, функция $u(x,y)$ вида (5) при всяком фиксированном $y>0$ есть функция класса $S(R)$ и является решением задачи (1)–(2), поскольку (см. стр. 153–156 в [1]) операторы Фурье F и F^{-1} взаимооднозначно отображают пространство $S(R)$ на себя. Таким образом, мы получили, что если в (2) $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям 1)-2), то решение задачи (1)–(2) существует и выражается в виде (5). Пусть, далее, вместо $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы их приближенния $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ из $L_2(R)$ такие, что

$$\|\tilde{\varphi}(x)-\varphi(x)\|_{L_2(R)}\leqslant\delta,\quad \|\tilde{\psi}(x)-\psi(x)\|_{L_2(R)}\leqslant\delta. \qquad (6)$$

Тогда вместо нахождения $u(x,y)$ можно ставить лишь задачу о нахождении приближенного решения, то есть приближения к $u(x,y)$ с точными исходными данными $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Следуя [5], покажем, что в качестве искомых приближений в этих случаях можно брать значения однопараметрического семейства операторов

$$R_r(\tilde{\varphi},\tilde{\psi},x,y,\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}r(s,\alpha)\Big(\Phi(s)\cosh(y\sqrt{s^2-\lambda^2})+\Psi(s)\frac{\sinh(y\sqrt{s^2-\lambda^2})}{\sqrt{s^2-\lambda^2}}\Big)\exp(ixs)dx. \qquad (7)$$

с стабилизирующими множительями $r(s,\alpha)$, удовлетворяющими следующим условиям: 1) $r(s,\alpha)$ определена в области $\{\alpha\geqslant 0,\ -\infty<s<\infty\}$; 2) $0\leqslant r(s,\alpha)\leqslant 1$ для всех значений $\alpha\geqslant 0$ и $s\in R$; 3) $r(s,0)=1$; 4) $\forall\alpha>0$, $r(s,\alpha)$ четная по s и $r(s,\alpha){\in}L_2(R)$; 5) $\forall\alpha>0$, $r(s,\alpha)\to 0$ при $|s|\to\infty$; 6) при $\alpha\to 0$ $r(s,\alpha)\to 0$, не убывая, причем на всяком отрезке $|s|{\leqslant}s_1$, эта сходимость равномерная; 7) $\forall s\neq 0$ $r(s,\alpha)\to 0$ при $\alpha\to\infty$, и эта сходимость равномерная на каждом отрезке $[s_1,s_2]$. Этим условиям отвечает, например, стабилизирующий множитель вида

$$r(s,\alpha)=exp(-\alpha|s|);\quad r(s,\alpha)=exp(-\alpha s^{2n});\quad r(s,\alpha)=\frac{1}{1+\alpha s^{2n}}$$

для каждого $n{\geqslant}1$.

Теорема. *Пусть функция* $u(x, y)$ *вида* (5) *есть точное решение уравнения* (1) *с точными условиями* (2)*,в а* $\tilde{\varphi}(x)$ *и* $\tilde{\psi}(x)$ *– известные приближения из* $L_2(R)$, *удовлетворяющие при данном* $\delta > 0$ *неравенствам* (6), *и* $y > 0$ *– заданное число. Тогда для каждой функции* $r(s, \alpha)$, *удовлетворяющей условиям* 1)–7), *оператор* R_r *вида* (7) *является регуляризирующим для задачи* (1)–(2), *и если параметр* $\alpha = \alpha(\delta)$ *есть корень уравнения*

$$\sqrt{\omega(y, \alpha)} + \sqrt{\nu(y, \alpha)} = \frac{\varepsilon}{2\delta},$$

причем $\lim_{\delta \to 0} \alpha(\delta) = 0$, *то при* $\delta \to 0$ $R_r(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, x, y, \alpha)$ *сходится к функции* $u(x, y)$.

Список литературы

[1] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, 3-е изд., Наука, М., 1986, 288 pp.

[2] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действвия над ними*, Вып. 1, Физматгиз, М., 1958, 440 pp.

[3] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Пространства основных и обобщонных функций*, Вып. 2, Физматгиз, М., 1958, 308 pp.

[4] Г. Е. Шилов, *Некоторые вопросы теории преобразования Фурье*, Изд. МГУ, М., 1968, 10 pp.

[5] Х. Ш. Джураев, “Регуляризация граничных задач для гиперболического уравнения”, *Матем. заметки*, **93**:2 (2013), 202–208

О некоторых интегральных неравенствах и соответствующих краевых задачах.

Ю. А. Дубинский

Национальный исследовательский университет “Московский энергетический институт”

Рассматриваются краевые задачи для систем уравнений Пуассона и Стокса в областях трёхмерного пространства :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = h(x), \ x \in G, \\ (u,n)_\Gamma = 0, \\ \left[\frac{\partial u}{\partial n}, n\right]_\Gamma = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta u(x) = h(x), \ x \in G, \\ [u,n]_\Gamma = 0, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n}, n\right)_\Gamma = 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + \nabla p(x) = h(x), \ x \in G, \\ (u,n)_\Gamma = 0, \\ \left[\frac{\partial u}{\partial n} - p(x)n, n\right]_\Gamma = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta u(x) + \nabla p(x) = h(x), \ x \in G, \\ [u,n]_\Gamma = 0, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} - p(x)n, n\right)_\Gamma = 0 \end{cases}$$

Рассмотрена также краевая задача с условием непротекания для системы уравнений Навье-Стокса.

Основной результат – корректность поставленных задач в смысле Адамара–Петровского.

Ключевыми моментами доказательства являются аналоги неравенства Фридрихса, адекватные краевым условиям, аналог теоремы Де Рама и разложение пространств Соболева в сумму соленоидальных и потенциальных подпространств.

Предполагается обсудить вычислительные аспекты решения указанных задач и физический смысл краевых условий.

Результаты работы получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1553).

Список литературы

[1] Ю. А. Дубинский, “О некоторых краевых задачах для системы уравнений Пуассона в трёхмерной области”, *Дифференциальные уравнения.* Т. 49, 610–613.

[2] Ju. A. Dubinskii, “Some Coercive Problems for the System of Poisson Equations”, *Russian Journal of Mathematical Physics.* V. 20, 402–412.

Критерии вложения анизотропных классов Соболева–Морри

М. А. Жайнибекова, Г. Т. Джумакаева

Институт теоретической математики и научных вычислений
Евразийского национального университета имени Л. Н. Гумилева

Классическая теорема С.Л. Соболева [1] утверждает, что при $rp \neq s$ для вложения класса Соболева $W_p^r\left(0,1\right)^s$в пространство равномерно непрерывных на $\left(0,1\right)^s$ функций $C\left(0,1\right)^s$ необходимо и достаточно выполнение неравенства $rp > s$.

С позиций теории вложений функциональных пространств и их приложений интересен вопрос о переходе к более узким классам r раз дифференцируемых функций с производными из лебегова пространства $L^p\left(0,1\right)^s$, для которых выполнено вложение в $C\left(0,1\right)^s$ при $rp < s$.

В определениях и обозначениях из [1-2] справедлива

Теорема 1. *Пусть даны целые положительные числа $s, r_1, \ldots, r_s$, положительные числа $\aleph_j$ $(j = 1, \ldots, s)$, действительное число $1 \leqslant p < \infty$ и неубывающая на $[0,1]$ положительная функция $\Phi(\delta)$, удовлетворяющая условию $\Phi(2\delta) \ll \Phi(\delta)$. Тогда для того чтобы имело место вложение*

$$W^{r_1,\ldots,r_s}_{p;\Phi;\aleph_1,\ldots,\aleph_s}\left(0,1\right)^s \subset C\left(0,1\right)^s$$

достаточно, а в случае выполнения условий $\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j} \neq 1,\ \ r_\tau\aleph_\tau = 1 \quad (\tau = 1, \ldots, s)$ и $\eta\omega\left(\delta\right) \leqslant C\delta\omega\left(\eta\right)$ $(0 < \eta < \delta < 1)$ необходимо, чтобы

$$\int_0^1 \delta^{\left(1-\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j}\right)\frac{\max\limits_{\tau=1,\ldots,s} r_\tau\aleph_\tau}{\aleph_1+\ldots+\aleph_s}}\Phi(\delta)\frac{d\delta}{\delta} < +\infty.$$

При $r_1 = \ldots = r_s = r$, $\aleph_1 = \ldots = \aleph_s$ эта теорема сводится к теореме из [2]:

$$W^r_{p;\Phi;1,\ldots,1}\left(0,1\right)^s \subset C\left(0,1\right)^s \Leftrightarrow \int_0^1 \delta^{\frac{r}{s}-\frac{1}{p}} \cdot \Phi(\delta)\frac{d\delta}{\delta} < +\infty.$$

Достаточное условие для вложения

$$W^{r_1,\ldots,r_s}_{p;\Phi;\aleph_1\ldots\aleph_s}(0,1)^s \subset D^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)}L^q(0,1)^s \tag{1}$$

при $1 \leqslant p < q < \infty$ состоит в сходимости интеграла

$$\int_0^1 \vartheta^{-\sum_{j=1}^{s}\frac{\alpha_j}{r_j}-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j}}\Phi^{1-\frac{p}{q}}\left(\vartheta^{\frac{\aleph_1+\ldots+\aleph_s}{\max\limits_{\tau=1,\ldots,s} r_\tau\aleph_\tau}}\right)d\vartheta < +\infty. \tag{2}$$

Не исключено, что условие (2) и необходимо для вложения (1), во всяком случае в ряде случаев это действительно так.

Теперь обратимся к случаю $rp = s$, впервые изученному в [3], краткий обзор последующих результатов дан в [1, стр. 133-134].

Теорема 2. *Пусть* $\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j} = 1$. *В случае* $\Phi(\delta) = \log^{-\beta}\frac{1}{\delta} \quad (0<\delta<1;\ \beta>0)$ *вложение*

$$W^{r_1,\ldots,r_s}_{p=\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j},\Phi,\aleph_1,\ldots,\aleph_s}(0,1)^s \subset (0,1)^s,$$

имеет место при $\beta > 1$ *и при всех* $\aleph_j > 0$ $(j=1,\ldots,s)$ *и не имеет места при* $\beta \leqslant 1-\frac{1}{p}$ $(p>1)$, $\aleph_j = \frac{1}{r_j}$ $(j=1,...,s)$.

Замечание. Теорему 2 можно рассматривать как распространение теоремы 10.4 из [1, стр. 129-130] на случай $\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{r_j} = p$, $1\leqslant p\leqslant+\infty$. Здесь случай $1-\frac{1}{p}<\beta\leqslant 1$ остается открытым. Не исключено, что вложение (3) имеет место во всех этих случаях.

В заключение отметим, что полученные здесь результаты частично анонсированы в [4].

Список литературы

[1] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1996.

[2] Г. Т. Джумакаева, “Интегральные представления функций и теоремы вложения”, *Матем. заметки*, **37**:3 (1985), 399–406.

[3] С. Л. Соболев, “Об одной теореме функционального анализа”, *Мат. сб.*, **4**:3 (1938), 471–497.

[4] Н. Темиргалиев, М. А. Жайнибекова, Г. Т. Джумакаева, “Критерии вложения классов типа Морри”, *Изв. вузов. Матем.*, 2015, № 5, 80–85.

О перестановочно-инвариантной оболочке пространства Кальдерона-Орлича

Д. Ж. Жамсранжав

Институт математики Монгольского государственного университета

Введем пространство Кальдерона–Орлича $\Lambda_{\Phi,\nu}(\mathbb{R}^n;\nu)$ как подпространство в перестановочно-инвариантном пространстве $E = E(\mathbb{R}^n)$, состоящее из функций $f \in E$, для которых их наилучшие приближения по норме E с помощью целых функций экспоненциального типа:

$$e_t(f)_E = \inf\left\{\|f-q\|_E : q \in \mathfrak{M}_{t,E}(\mathbb{R}^n)\right\}, t > 0$$

принадлежат (как функции от t) идеальному пространству $F = L_{\Phi,\nu} \cap L_\infty$.

Пусть $F = L_{\Phi,\nu} \cap L_\infty$ идеальное пространство (квази) норма в котором задается соотношением

$$\|g\|_F = \|g\|_{\Phi,\nu} + \|g\|_\infty.$$

Введем (квази) нормированный конус

$$\Omega_F = \{0 \leqslant g \downarrow; g \in F\}, \quad \|g\|_{\Omega_F} := \|g\|_F = g(+0) + \|g\|_{\Phi,\nu}.$$

Получено конкретное описание ассоциированного пространства Ω'_F для конуса Ω_F:

$$\|f\|_{\Omega'_F} = \sup\left\{\int\limits_0^\infty f(x)g(x)dx; g \in \Omega, \|g\|_F \leqslant 1\right\}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что $V(\infty) = \infty$. Пусть функция Юнга Φ удовлетворяет Δ_2 условию. Тогда для измеримых функций $f \geqslant 0$*

$$\|f\|_{\Omega'_F} \approx \left\|\Phi\left(\frac{1}{w(t)}\right)\int\limits_0^t f(x)dx\right\|_{\Psi,\nu},$$

где

$$w(t) = 1 + \frac{1}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{V(t)}\right)}$$

функция гладкости пространства F.

С точки зрения описания оптимального перестановочно-инвариантного пространства для вложения

$$\Lambda_{E,\Phi}(\mathbb{R}^n;\nu) \hookrightarrow X$$

имеется два существенно различных случая

$$\psi_E \in \Omega'_F, \qquad \psi_E \notin \Omega'_F,$$

где

$$\psi_E = \mu'_E; \quad \mu_E(t) = \frac{1}{\varphi_E(t^{-1})}.$$

Здесь $\varphi_E(t) = \|\chi_{[0,t]}\|_{\tilde{E}}, (t \geqslant 0)$ фундаментальная функция перестановочно-инвариантного пространства E.

Как результат приведенной теоремы имеет место эквивалентность

$$\psi_E \in \Omega'_F \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{1}{w(t)}\right)\psi_E(t) \in L_{\Psi,\nu}.$$

Из этих утверждений и известных результатов об оптимальном вложении пространств Кальдерона непосредственно вытекает следущая теорема

Теорема 2. *Пусть $F = L_{\Phi,\nu} \cap L_\infty$ и функция Юнга Φ удовлетворяет Δ_2 условию. Тогда*

1. *Если $V(\infty) < \infty$ то*

$$\Lambda_{E,\Phi}(\mathbb{R}^n;\nu) = E(\mathbb{R}^n).$$

2. *Если $V(\infty) = \infty$ и*

$$\Phi\left(\frac{1}{w(t)}\right)\psi_E(t) \in L_{\Psi,\nu}$$

то пространство $X_0 = E \cap L_\infty$ с нормой

$$\rho_{X_0}(f) = f^*(+0) + \rho_E(f^*\chi_{(T^{-1},\infty)})$$

есть оптимальное перестановочно-инвариантное пространство для вложения.

Список литературы

[1] Bennett C., Sharpley R., *Interpolatoin of Operators*, Pure and Applied Math., **129**, Acad. Press, 1988.

[2] Calderon A.P., "Intermediate spaces and interpolation, the complex method", *Studia Math.*, **24** (1964), 113–190.

[3] Goldman M.L., Heinig H.P., Stepanov V.D., "On the principle of duality in Lorentz spaces", *Can. J. Math.*, **48** (1996), 959–979.

[4] Goldman M.L., Kerman R., "On the principle of duality in Orlicz-Lorentz spaces", *Proc. of the international conference "Functional spaces. Differential operators. Mathematical education"*. V. 1, Moscow, 1998, 179–183.

[5] Goldman M.L., Kerman R., "On optimal embeddings of the generalized Besov, Calderon spaces", *Trudy Math. Inst. Steklova*, **243** (2003), 161–193 (in Russian).

О нормах производных функций с нулевыми значениями заданного набора линейных функционалов и их применения к поперечниковым задачам

А. Ж. Жубанышева, Ш. К. Абикенова

Евразийский национальный университет имени Л. Н. Гумилева

В ряде вопросов теории приближений полезной оказывается следующая (случай $p=2$ см. в [1])

Лемма. *Пусть даны целые положительные числа s и $N=n^s$ $(n=5,6,...)$, функция $\omega(t)$ из C^∞ $(-\infty,+\infty)$ такая, что $supp\omega=[0,1]$, $0\leqslant\omega(t)\leqslant 1=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\omega(t)$. Определим на $[0,1]^s$ ортогональную систему (с 1-периодическим продолжением по каждой переменной)*

$$\psi_k(x)=\prod_{j=1}^{s}\omega\left(4n\left(x_j-\frac{k_j}{4n}\right)\right),(k\in A_N\equiv\{k=(k_1,...,k_s)\in Z^s,0\leqslant k_j\leqslant 4n-1\ (j=1,...,s)\}).$$

Тогда для всякого набора линейных функционалов $l_1,...,l_N$, определенных, по крайней мере, на множестве всех многочленов по системе ψ_k, существует конечная последовательность $\{b_k:\,k\in A_N\}$ такая, что для функции $B_N(x)\equiv B_N(x;l_1,...,l_N)=\sum_{k\in A_N}b_k\psi_k(x)$ выполнены равенства $l_1(B_N)=...=l_N(B_N)=0$ и для всякого набора целых неотрицательных чисел $\lambda_1,...,\lambda_s$ и всякого $1\leqslant p\leqslant\infty$ имеют место соотношения

$$\left\|B_N^{(\lambda_1,...,\lambda_s)}\right\|_{L^p(0,1)^s}\succ\prec N^{\frac{\lambda_1+...+\lambda_s}{s}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k\in A_N}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\ \text{при}\ 1\leqslant p<\infty,$$

$$\left\|B_N^{(\lambda_1,...,\lambda_s)}\right\|_{L^p(0,1)^s}\succ\prec N^{\frac{\lambda_1+...+\lambda_s}{s}+1},\ p=\infty$$

В качестве следствия при $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$ и $s=1,2,...$ получаем известные оценки снизу для поперечников «кодирования» функций из соболевских классов $W_p^r(0,1)^s$ (условия на задействованные параметры считаются такими, что все показатели при N отрицательны):

$$\lambda^N\left(W_p^r(0,1)^s\right)_{L^q(0,1)^s}\equiv\inf_{\substack{l_1,...,l_N-\text{всевозможные}\\ \text{линейные функционалы}}}\ \sup_{\substack{f\in W_p^r(0,1)^s\\ l_\tau(f)=0,\\ (\tau=1,...,N)}}\|f\|_{\ L^q(0,1)^s}$$

$$\ll\begin{cases}N^{-\frac{r}{s}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)},\ \text{если}\ 2\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty,\\ N^{-\frac{r}{s}+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}},\ \text{если}\ 1\leqslant p<2\leqslant q\leqslant+\infty,\\ N^{-\frac{r}{s}},\ \text{если}\ 1\leqslant p\leqslant q<2.\end{cases}$$

Еще одним следствием является другое доказательство порядковых соотношений для поперечников по Колмогорову функциональных классов, в которых основной метод решения заключается в редуцировании к конечномерным задачам о поперечниках обобщенных конечномерных октаэдров (порядковые соотношения для поперечников по Колмогорову при различных соотношениях параметров получены в работах В. М. Тихомирова, Р. С.

Исмагилова, Б. С. Кашина, Ю. И. Маковоза, М. Ш. Бирмана, М. З. Соломяка, В. Н. Темлякова, Э. М. Галеева, Е. Д. Куланина и др.). Здесь же, применением принципа двойственности для поперечников по Колмогорову $d_N(\tilde{W}_p^r(0,1)^s)_{L^q(0,1)^s}$ и «кодирования» функций $\lambda^N(\tilde{W}_{q'}^r(0,1)^s)_{L^{p'}(0,1)^s}$ (благодарим Э. М. Галеева за указание на нее для периодических классов Соболева $\tilde{W}_p^r(0,1)^s$ функций с нулевым средним) и из теоремы 1 в [1] в случае $1 < p \leqslant q \leqslant 2$ приходим к соотношениям (см. также [2-3])

$$2\lambda^N(\tilde{W}_{q'}^r(0,1)^s)_{L^{p'}(0,1)^s} = d_N(\tilde{W}_p^r(0,1)^s)_{L^q(0,1)^s} \succ\prec N^{-\frac{r}{s}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \left(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{\theta'}=1\right).$$

Список литературы

[1] Ш. У. Ажгалиев, Н. Темиргалиев, *Матем. заметки*, **3**:6 (2003), 803–812.

[2] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, “Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи”, *УМН*, **23**:6 (144) (1968), 51–116.

[3] http://galeevem.math.msu.su/get_file-uuid=5abf5305-5cf3-4868-8b18-25b0b8205f50&groupId=3557763.pdf.

Приближенное дифференцирование функций по информации, полученной со всех линейных функционалов в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника (К(В)П)

А. Ж. Жубанышева, Н. Темиргалиев

Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л. Н. Гумилева

Отправным результатом К(В)П-исследования (здесь придерживаемся определений и обозначений из [1-2]) задачи приближенного дифференцирования является следующая оценка снизу, полученная для всех возможных вычислительных агрегатов, построенных по произвольной линейной информации (все естественные условия корректности считаются наложенными):

$$\inf_{\substack{l_1,\dots,l_N-\text{все возможные}\\ \text{линейные функционалы};\varphi_N}} \sup_{f\in W_p^r(0,1)^s} \left\| f^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}(\cdot) - \varphi_N\left(l_1(f),\dots,l_N(f);\cdot\right)\right\|_{L^q(0,1)^s}$$

$$\ll \begin{cases} N^{-\frac{r}{s}+\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_s}{s}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}, & \text{если } 2\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty \\ N^{-\frac{r}{s}+\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_s}{s}+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}, & \text{если } 1\leqslant p<2\leqslant q\leqslant+\infty \\ N^{-\frac{r}{s}+\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_s}{s}}, & \text{если } 1\leqslant p\leqslant q<2 \end{cases}.$$

Каждый вычислительный агрегат, подтверждающий оценку снизу по всем вычислительным агрегатам, построенным по произвольной линейной информации, сразу же попадает в разряд неулучшаемых по порядку (разумеется при своих заданных условиях). Установлено, что к таковым в случае $2\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$ относятся $(\alpha_1,\dots,\alpha_s)$ − производные частичных сумм по кубам тригонометрического ряда Фурье (что есть решение задачи К(В)П-1). Далее показано, что с сохранением порядка $\succ\prec N^{-\frac{r}{s}+\frac{\alpha_1+\dots+\alpha_s}{s}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}$ восстановления по точной информации, при восстановлении по неточной информации произвольными вычислительными агрегатами $\varphi_N(z_1,\dots,z_N;x)$ функционалы $l_1,\dots,l_N$ можно вычислять с погрешностью

$$|l_\tau(f)-z_\tau|\leqslant\tilde\varepsilon_N\equiv N^{-\frac{r}{s}-\left(1-\frac{1}{p}\right)}\qquad(\tau=1,\dots,N),$$

причем эта погрешность является предельной (что есть решение задачи К(В)П-2). Наконец, и это составляет содержание задачи К(В)П-3, установлено, что во всех вычислительных агрегатах вида $\varphi_N(\hat f\left(m^{(1)}\right),\dots,\hat f\left(m^{(N)}\right);x)$ построенных по неточной информации об $\hat f\left(m^{(\tau)}\right)$, величину ошибки $\tilde\varepsilon_N$ в К(В)П-2, вообще говоря, нельзя заменить на $\eta_N\tilde\varepsilon_N$ при любом неограниченно возрастающем η_N.

С вычислительных позиций можно отметить продолжение исследований: строятся конкретные вычислительные агрегаты, пусть и не подтверждающие оценки снизу, но покрывающие эти потери за счет выигрыша в вычислениях. Подлежащим к таким заменам можно отнести частичные суммы тригонометрических рядов Фурье со спектром из "'больших"' коэффициентов класса или индивидуальной функции, свидетельствующие о высоких аппроксимативных возможностях гармонического анализа, но с низким вычислительным потенциалом,-хорошее в теории может быть не совсем удовлетворительным на практике.

Список литературы

[1] Н. Темиргалиев, К. Е. Шерниязов, М. Е. Берикханова, “Точные порядки компьютерных (вычислительных) поперечников в задачах восстановления функций и дискретизации решений уравнения Клейна–Гордона по коэффициентам Фурье”, *Математика и информатика*. 2, К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Современные проблемы математики, **17**, МИАН, 2013, 179–207.

[2] Н. Темиргалиев, Ш. К. Абикенова, А. Ж. Жубанышева, Г. Е. Таугынбаева, “Задачи дискретизации решений волнового уравнения, численного дифференцирования и восстановления функций в контексте компьютерного (вычислительного) поперечника”, *Изв. ВУЗов. Математика*, 2013, № 8, 86–93.

Феномен свободного взаимодействия в теории усточивости пограничного слоя

В. И. Жук

Вычислительный цент имени А. А. Дородницына РАН

Несмотря на беспрецедентное развитие вычислительных технологий, описание (понимаемое в глубоком смысле) течений вязкой жидкости и газа при больших числах Рейнольдса по-прежнему остается исключительно сложной задачей. Сингулярный характер вхождения числа Рейнольдса в уравнения Навье-Стокса делает иллюзорной не только возможность перейти к более простым уравнениям Эйлера, но и к уравнениям классической теории пограничного слоя Прандтля для решения таких принципиальных вопросов, как отрыв, неустойчивость, ламинарно-турбулентный переход, ближняя и дальняя структура следа, бафтинг (при трансзвуковом обтекании), передача возмущений вверх по потоку при отражении ударных волн и обтекании неровностей поверхности тела. Ряд перечисленных явлений может быть продолжен, их анализ привел к обобщению классических представлений Прандтля и созданию теории пограничного слоя с самоиндуцированным давлением.

Предмет настоящего рассмотрения составляет применение и развитие данной асимптотической теории (называемой также теорией свободного взаимодействия) с точки зрения фундаментальной проблемы анализа трансзвуковых движений при больших (в пределе — стремящихся к бесконечности) числах Рейнольдса. Анализ нацелен на разрешение вопросов о роли вязких эффектов (при исчезающее малой вязкости) и неклассических пограничных слоев на глобальную и локальную структуру потока с учетом механизмов взаимодействия, отрыва, неустойчивости и восприимчивости по отношению к возмущениям различной природы.

Следует отметить, что изучение структуры возмущенного движения классическими методами невозможно в условиях, когда продольные градиенты функций течения уже не являются малыми по сравнению с поперечными градиентами (то есть нарушаются условия применимости теории Прандтля). Но именно такая ситуация имеет место при возникновении различного рода вторичных структур и волновых образований даже при малых возмущающих факторах. Картина поля потока в рассматриваемых режимах взаимодействующего пограничного слоя оказывается столь же сложной, сколь и многообразной; при этом важно подчеркнуть, что несмотря на впечатляющие успехи теоретического анализа сопровождающих данное явление эффектов, в настоящее время появляются новые модификации асимптотических теорий для описания упомянутых процессов. В частности, предлагается вывод интегро-дифференіального уравнения, переходящего в предельных случаях в уравнения Бюргерса и Бенджамина-Оно и содержащего нелинейные периодические, а также солитонные решения.

Список литературы

[1] В. Я. Нейланд, “К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке”, *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1969, № 4, 53–57.

[2] В. В. Сычев, “О ламинарном отрыве”, *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1972, № 3, 47–59.

[3] В. И. Жук, *Волны Толлмина–Шлихтинга и солитоны*, Наука, М., 2001, 167 с.

Двухточечная Эрмитова интерполяция класса G^1 в биангулярной системе координат

Р. А. Зиатдинов[a], Р. И. Набиев[b]

[a] *Университет Фатих, Турция*

[b] *Уфимский государственный авиационный технический университет*

Биангулярные координаты позволяют элегантным образом задавать уравнения кривых, которые могут быть громоздкими в других системах координат [1]. В некоторых случаях они также позволяют увеличить быстроту вычисления и визуализации сегментов кривых. В работе [2] исследуется задача двуточечной Эрмитовой интерполяции класса G^1 в биангулярной системе координат, а также приводятся необходимые условия для выпуклости интерполяционных кривых. Простейшее линейное уравнения вида $\gamma = ((1-t)\alpha, t\beta)$ в биангулярных координатах соответствует сектрисе Маклорена, которая была обобщена в работе [2] путем введения в ее уравнения двух параметров формы. Кроме того, в [2] исследуется класс интерполяционных кривых с постоянной суммой биангулярных координат, анализируется их форма и кривизна. Недавние исследования авторов, основанные на вычислительном эксперименте, показали преимущества использования таких кривых в научной визуализации эстетических форм.

Список литературы

[1] M. Naylor, B. Winkel, “Biangular coordinates redux: discovering a new kind of geometry”, *The College Mathematics Journal*, **41**:1 (2010), 29–41.

[2] R. Ziatdinov, T. Kim T., R. I. Nabiyev, “Two-point G^1 Hermite interpolation in biangular coordinates”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **287** (2015), 1–11.

Нестандартные банаховы пространства гладких функций многих переменных

Г. Г. Исламов

Удмуртский государственный университет

Пусть Ω — область на плоскости переменной $t = (t_1, t_2)$, ограниченная замкнутой кривой $\partial\Omega$ с непрерывной кривизной в каждой точке контура, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $B = B_1 \times B_2 \times B_3, B_1 = C(\bar{\Omega}), B_2 = B_3 = C(\partial\Omega)$. Пусть, далее, конечномерное подпространство E есть линейная оболочка гармонических полиномов степени $\leqslant m$ и Λ есть алгебраическая сумма логарифмического потенциала и логарифмического потенциала простого и двойного слоя с непрерывными плотностями.

Для элементов x банахового пространства $D = \Lambda B \oplus E$ получено каноническое разложение $x = \Lambda\delta x + \sum\limits_{j=1}^{n} u_j(t) r_j(x)$ с явным представлением линейных операторов $\delta : D \to B$, элементов $u_1, \ldots, u_n$ из D и системы функционалов $r_1(x), \ldots, r_n(x)$, биортогональной системе $\{u_j\}_1^n$, где норма $\|x\|_D = \|\delta x\|_B + \sum\limits_{j=1}^{n} |r_j(x)|$, причём $\delta\Lambda f = f, r_j(\Lambda f) = 0$ при любом $f \in B$ и $\delta u_j = 0, j = 1, \ldots, n$.

Аналогичное разложение получено для гладких функций трёх и более независимых переменных $t = (t_1, \ldots, t_k)$ (см. [1],[2]).

Список литературы

[1] Г. Г. Исламов, “Некоторые задачи теории линейных уравнений”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Комп. науки*, 2013, № 1, 17–28.

[2] Г. Г. Исламов, “Нестандартные краевые задачи в теории потенциала”, *Материалы Междунар. науч. конф. “Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций* (29 сент. – 1 окт. 2014. Казань), Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского, Изд–во Казан. ун–та, 2014, 175–178.

Внешняя вариационная задача Дирихле для вырождающегося эллиптического оператора с суммируемыми коэффициентами

С. А. Исхоков

Институт математики Академии наук Республики Таджикистан

Пусть Ω - ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве R^n с $(n-1)$-мерной гладкой границей $\partial\Omega$ и пусть $\Omega^* = R^n \setminus \overline{\Omega}$. Символом K_R обозначим открытый шар достаточно большого радиуса R с центром в начале координат такой, что $\overline{\Omega} \subset K_R$. Пусть $\rho(x)$ – регуляризованное расстояние от $x \in \Omega^*$ до $\partial\Omega$ и α, β - вещественные числа. Символом $\sigma(x)$ обозначим бесконечно дифференцируемую положительную в Ω^* функцию, которая ведет себя как $\rho^{\alpha}(x)$ вблизи $\partial\Omega$ и как $\rho^{\beta}(x)$ в $R^n \setminus K_R$. Пусть r - натуральное число, $1 \leqslant p < +\infty$ и φ - непрерывная в Ω^* положительная функция. Введем весовое пространство $W^r_{p;\alpha,\beta;\varphi}(\Omega^*)$ всех измеримых в Ω^* комплекснозначных функций $u(x)$ с конечной нормой

$$\left\| u;\, W^r_{p;\alpha,\beta;\varphi}(\Omega^*) \right\| = \left\{ \sum_{|k|=r} \int_{\Omega^*} \sigma^p(x) |u^{(k)}(x)|^p dx + \int_{\Omega^*} \varphi^p(x) |u(x)|^p dx \right\}^{1/p},$$

где $u^{(k)}(x)$ - обобщенная по С.Л.Соболеву производная функции $u(x)$ мультииндекса k. Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{p;\alpha,\beta;\varphi}(\Omega^*)$ пополнение класса $C_0^{\infty}(\Omega^*)$ в норме пространства $W^r_{p;\alpha,\beta;\varphi}(\Omega^*)$, а через $\left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{p;\alpha,\beta;\varphi}(\Omega^*)\right)'$ - пространство антилинейных непрерывных функционалов, определенных на $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{p;\alpha,\beta;\varphi}(\Omega^*)$, наделенное нормой сопряженного пространства.

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$B[u,\, v] = \sum_{|k|,\, |l| \leqslant r} \int_{\Omega^*} a_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx$$

с комплекснозначными коэффициентами $a_{kl}(x)$.

В докладе обсуждается вопрос о разрешимости следующей задачи Дирихле:

Задача D_λ. Для заданного функционала $F \in \left(\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta;\varphi}(\Omega^*)\right)'$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B[U,\, v] + \lambda \int_{\Omega^*} \varphi^2(x) U(x) \overline{v(x)}\, dx = \langle F,\, v \rangle \qquad (\forall v \in C_0^{\infty}(\Omega^*)),$$

принадлежащее пространству $\overset{\circ}{W}{}^{r}_{2;\alpha,\beta;\varphi}(\Omega^*)$.

Доказана однозначная разрешимость задачи D_λ для некоторых значений параметра λ, когда старшие коэффициенты a_{kl}, $|k| = |l| = r$, удовлетворяют условию эллиптичности

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|=|l|=r} a_{kl}(x) \xi^k \xi^l \geqslant c_0 \sigma(x) \xi^{2r} \quad (x \in \Omega^*,\, \xi \in R^n) \tag{1}$$

и младшие коэффициенты a_{kl}, $|k|+|l| \leqslant 2r-1$, принадлежат некоторым весовым $L_{p_{kl}}$-пространствам.

Разрешимость задачи D_λ ранее исследовалась в работах [1], [2] в предположении, что коэффициенты a_{kl}, $|k|,|l| \leqslant r$, имеют форму произведения ограниченной функции и некоторой степени функции $\rho(x)$ и такие, что

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|,|l| \leqslant r} a_{kl}(x)\zeta_k\overline{\zeta_l} \geqslant c_0\sigma(x) \sum_{|k|=r} |\zeta_k|^2 \tag{2}$$

для всех $x \in \Omega$ и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|\leqslant r}$. Условие (1) слабее условии (2).

Список литературы

[1] Мирошин Н.В., “Спектральные внешние задачи для вырождающегося эллиптического оператора”, *Известия вузов. Математика*, 1988, № 8, 47–55.

[2] Мирошин Н.В., “Внешняя вариационная задача Дирихле для эллиптического оператора с вырождением”, *Труды Математического института РАН*, **194** (1992), 179–195.

[3] Исхоков С.А., “Неравенство Гординга для эллиптических операторов с вырождением”, *Математические заметки*, **87**:2 (2010), 201- 216.

[4] Никольский С.М., Лизоркин П.И., Мирошин Н.И., “Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений”, *Известия Вузов. Математика*, 1988, № 8, 4–30.

Критерий безмонодромности для оператора Штурма–Лиувилля

Х. К. Ишкин

Башкирский государственный университет

Если функция q мероморфна в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, то говорят, что оператор $L = -\partial^2 + q$ ($\partial = d/dz$) *имеет тривиальную монодромию* или *безмонодромен* в области Ω, если любое решение $y(z,\lambda)$ уравнения $-y'' + qy = \lambda y$ при любом значении параметра λ является однозначной функцией $z \in \Omega$. При этом сам потенциал q также называют безмонодромным.

Рассмотрим оператор $L_0 = -\partial^2 + q_0$, с потенциалом $q_0(z)$, аналитичным в односвязной области Ω. Если f — некоторое решение уравнения Риккати $f' + f^2 = q_0 - \lambda_0$, то выражение L_0 допускает факторизацию: $L_0 = Q^*Q + \lambda_0$, где $Q = -\partial + f$, $Q^* = \partial + f$. Пусть $L_1 := QQ^* = -\partial^2 + q_1$, где $q_1 = q_0 - 2f' - \lambda_0$. Если $f = \varphi_0'/\varphi_0$, то $Q\varphi_0 = 0$, следовательно, $L_0\varphi = \lambda_0\varphi$. При этом оператор L_1 и соответствующий потенциал $q_1 = q_0 - 2(\ln\varphi)'' - \lambda_0$ называют *преобразованием Дарбу оператора* L_0 (или потенциала q_0) на уровне φ_0. Поскольку для любого (аналитичного в Ω) решения ψ уравнения $L_0\psi = \mu\psi$ функция $\chi = Q\psi$, мероморфная в Ω, является решением уравнения $L_1 u = (\mu - \lambda_0)u$, то потенциал q_1 безмонодромен в Ω. Ясно, что то же самое верно и для $D_n(q_0)$ — результата n итераций преобразований Дарбу на некоторых уровнях $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$.

Пусть Ω — односвязная область, $\mathcal{O}(\Omega)$ и $TM(\Omega)$ — множество соответственно аналитичных и безмонодромных в Ω функций, $B \subset \mathcal{O}(\Omega)$, $D(B,\Omega) = \{q :$ существуют $q_0 \in B$ и D_n такие, что $q = D_n(q_0)\}$. Тогда сказанное выше означает, что при любом $B \subset \mathcal{O}(\Omega)$ $\quad D(B,\Omega) \subset TM(\Omega)$. В [1] было доказано, что если $\Omega = \mathbb{C}$ и $B = \{0\}$, то верно и обратное включение: $TM(\mathbb{C}) = D(\{0\},\mathbb{C})$. Впоследствии (см. [2]) этот результат был распространен на класс $B = \{az^2 + bz + c,\ a,b,c \in \mathbb{C},\ a \neq 0\}$. Но оказалось, для $B = \{z^6 + \nu z^2,\ \nu \in \mathbb{Z}\}$ равенство $TM(\mathbb{C}) = D(B,\mathbb{C})$ неверно (см. [3]).

В связи со сказанным возникает вопрос: для каких областей Ω и каких классов $B \subset \mathcal{O}(\Omega)$ верно равенство $D(B,\Omega) = TM(\Omega)$?

Справедлива

Теорема. *Пусть функция $q(z)$ мероморфна в выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{C}$. Тогда для того, чтобы функция q принадлежала $TM(\Omega)$ необходимо и достаточно, чтобы для любой ограниченной области ω, такой, что $\overline{\omega} \subset \Omega$, $\quad q \in D(\mathcal{O}(\omega),\omega)$.*

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ (грант № 01201456408) и РФФИ (грант № 15-01-01095)

Список литературы

[1] J. J. Duistermaat, F. A. Grünbaum, “Differential equations in the spectral parameter”, *Commun. Math. Phys.*, **103** (1986), 177–240.

[2] А. А. Обломков, “Безмонодромные операторы Шредингера с квадратично растущим потенциалом”, *ТМФ*, **121**:3 (1999), 374–386.

[3] J. Gibbons, A. P. Veselov, “On the rational monodromy-free potentials with sextic growth”, *J. Math. Phys.*, **50**:1 (2009), 013513.

О поведениии на бесконечности почти гипоэллиптических многочленов

Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян

Российско-Армянский (Славянский) университет

Для $n \in N$ через I_n обозначим множество многочленов $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ таких, что $|P(\xi)| \to 0$ при $|\xi| \to 0$.

При изучении задачи Дирихле С.М.Никольский в [1] ввел класс дифференциальных операторов $P(D)$, характеристические многочлены (символи) которых удовлетворяют неравенству

$$\sum_{\alpha \in \Re} |\xi^\alpha| \leqslant C[|P(\xi)| + 1] \quad \forall \xi \in R^n, \tag{1}$$

где $\Re = \Re(P)-$ многогранник Ньютона многолена $P(\xi) = \sum\limits_{\alpha} \gamma_\alpha \xi^\alpha$, т.е. наименьший выпуклий многогранник, содержащий все мультииндексы $\alpha \in N_0^n$, для которых $\gamma_\alpha \neq 0$.

Легко показать, что многолен $P(\xi)$ удовлетворяющий неравенству (1) и имеющий полный многогранник Ньютона, т.е. многогранник, имеющий вершины на каждой координатной оси N_0^n, принадлежит I_n. Операторы, рассмотренные С.М.Никольским, содержат класс гипоэллиптических по Л. Хермандеру (см., например, [2]) и класс почти гипоэллиптических операторов.

В [3] В.П.Михайлов показал, что невырожденные многочлены с полным многогранник Ньютона удовлетворяют неравенству (1). В [4] описан класс вырожденных операторов, которые вместо условия (1) удовлетворяют более слабому условию, когда множество $\Re(P)$ заменяется некоторым множеством $\Re^* \subset \Re(P)$, но тем не менее принадлежат I_n.

В предлагаемой нами тезисе мы приводим необходимые и достаточные условия (алгоритм) прнадлежности I_2 для одного класса двумерных многочленов, а для многочленов $n \geqslant 2$ переменных доказываем (см. [5])

Теорема. *Пусть P почти гипоэллиптический многочлен. $P \in I_n$ тогда и только тогда, когда число переменных P инвариантно относительно любого линейного преобразования.*

Список литературы

[1] С. М. Никольский, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **27**:5 (1963), 1113–1134.

[2] L. Hormander, *The Analisis of Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, 1983.

[3] В. П. Михайлов, *Труды МИАН СССР*, **19** (1967), 59–81.

[4] Г. Г. Казарян, *Изв. НАН Армении*, **45**:4 (2011), 33–46.

[5] H. G. Ghazaryan, V. N. Margaryan, *Eurasian Math. J.*, **4**:4 (2013).

Об обратной задаче определения правой части в неравномерно параболическом уравнении

В. Л. Камынин

Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ"

Изучены вопросы существования, единственности и устойчивости относительно возмущения входных данных решения $u(t,x)$ обратной задачи в прямоугольнике $Q \equiv [0,T]\times[0,l]$ определения правой части для вырождающегося параболического уравнения

$$u_t - a(t,x)[u_{xx} + b(t,x)u_x + d(t,x)u] = a(t,x)[p(t)g(t,x) + h(t,x)],$$

с краевыми условиями

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u(t,0) = u(t,l) = 0$$

и дополнительном условии интегрального наблюдения

$$\int_0^l u(t,x)\omega(x)dx = \varphi(t).$$

Особенностью данной постановки является то, что функция $a(t,x)$ предполагается лишь неотрицательной, т.е. уравнение не является равномерно параболическми, а допускает вырождение.

В работе установлены достаточные условия, при которых рассматриваемая задача является корректно разрешимой (доказаны теоремы существования, единственности и устойчивости относительно изменения входных данных обобщенного решения). Также рассмотрен случай, допускающий неограниченность коэффициента $a(t,x)$ ($a(t,x) \in L_1(Q)$).

Получены оценки решения и оценки устойчивости решения в соотвествующих нормах, причем константы в этих оценках явно выписываются через входные данные задачи, что весьма важно для приложений, в том числе и для численных расчетов.

Коэрцитивные свойства и разделимость бигармонического оператора с матричным потенциалом

О. Х. Каримов

Институт математики Академии наук Республики Таджикистан

Проблемой разделимости дифференциальных операторов впервые занимались математики В.Н. Эверитт и М. Гирц. В своих работах [1,2] они достаточно подробно изучили разделимость оператора Штурма-Лиувилля и его степеней. Существенный вклад в дальнейшее развитие теории разделимости дифференциальных выражений внесли К.Х. Бойматов, М. Отелбаев и их ученики (см. [4,5] и имеющейся там ссылки).

Наш доклад посвящен изучению разделимости бигармонического оператора и примыкает к работе [3]. Пусть в пространстве $L_2(R^n)^l$, где l некоторое натуральное число, рассмотрим дифференциальный оператор

$$L[u] = \Delta^2 u(x) + q(x) \cdot u(x), \tag{1}$$

значения $q(x)$ $(x \in R^n)$ являются квадратными положительно определенными матрицами порядка l. За областью определения оператора (1) примем множество всех $u(x) \in L_2(R^n)^l \cap W^2_{2,loc}(R^n)^l$ таких, что $L[u] \in L_2(R^n)^l$. Предположим, что $q(x) = q^*(x) \in C^2(R^n, EndC^l)$. Вводим обозначение

$$G(x_1, x_2, ..., x_n) = q^{\frac{1}{2}}(x),$$

Теорема. *Пусть выполнены неравенства*

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| G^{-2}(x) \frac{\partial^2 G(x)}{\partial x_i^2} G^{\frac{3}{2}}(x) \right\|^2 \leqslant \sigma_1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| G^{-\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial G(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2 \leqslant \sigma_2 \left\| G^{\frac{3}{2}}(x) u \right\|^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| q^{-\frac{3}{2}}(x) \frac{\partial^2 q(x)}{\partial x_i^2} q^2(x) \right\|^2 \leqslant \sigma_3,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| q^{-\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial q(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2 \leqslant \sigma_4 \left\| q(x) u \right\|^2,$$

где $0 < \sigma_1 + 2\sigma_2 < 4$ и $0 < \sigma_3 + 2\sigma_4 < 4$. Тогда для вектор-функций $u(x) \in L_2(R^n)^l \cap W^2_{2,loc}(R^n)^l$ при условии $L[u] \in L_2(R^n)^l$ справедливы включения $\Delta^2 u$, $q(x)u$, $q^{\frac{1}{2}}(x) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in L_2(R^n)^l$, $(i = 1, 2, ..., n)$. При этом имеет место коэрцитивное неравенство

$$\|\Delta^2 u; L_2(R^n)^l\| + \|q(x)u; L_2(R^n)^l\| + \sum_{i=1}^{n} \left\| q^{\frac{1}{2}}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}; L_2(R^n)^l \right\| \leqslant$$

$$\leqslant M \|L[u]; L_2(R^n)^l\|,$$

где число $M > 0$ не зависит от $u(x)$.

Список литературы

[1] Everitt W.N., Gierz M., “An example concerning the separation property for differential operators”, *Proc. Roy. Soc. Edinburg A*, **71** (1973), 159–165.

[2] Everitt W.N., Gierz M., “A Dirichlet type result for ordinary differential operators”, *Math. Ann.*, **203**:2 (1973), 119- 128.

[3] Zayed E.M.E., “Separation for the biharmonic differential operator in the Hilbert space associated with existence and uniqueness theorem”, *J. Math. Anal. Appl.*, **337** (2008), 659–666.

[4] Бойматов К.Х., “Коэрцитивные оценки и разделимость для эллиптических дифференциальных операторов второго порядка”, *Математические заметки*, **46**:6 (1989), 110–112.

[5] Отелбаев М., “Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n”, *Труды Математического института АН СССР*, **161** (1983), 195–217.

О нижней оценке для минимального собственного значения одной задачи Штурма–Лиувилля

Е. С. Карулина

Московский государственный университет экономики, статистики и информатики (МЭСИ)

Рассматривается задача Штурма—Лиувилля

$$y'' - qy + \lambda y = 0,$$
$$y'(0) - k_0^2 y(0) = y'(1) + k_1^2 y(1) = 0,$$

где k_0, $k_1 \in \mathbb{R}$, а функция q принадлежит множеству

$$A_\gamma = \{q \in L_1[0,1] : q(x) \geqslant 0, \int_0^1 q^\gamma \, dx = 1\}$$

при $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Пусть $m_\gamma = \inf\limits_{q \in A_\gamma} \lambda_1(q)$.

1. Доказана достижимость m_γ при некоторых значениях параметра γ:

Теорема 1. *Если $\gamma \in [1/2, 1)$, то существует функция $q_* \in A_\gamma$, удовлетворяющая равенству $\lambda_1(q_*) = m_\gamma$.*

2. Уточнено значение m_γ для задачи Неймана при некоторых значениях параметра γ:

Теорема 2. *Пусть $k_0 = k_1 = 0$. При $\gamma \leqslant 1 - 2/\pi^2$ выполняется равенство $m_\gamma = 1$, а при $1 - 2/\pi^2 < \gamma < 1$ выполняется неравенство $m_\gamma < 1$.*

Аналогичные результаты для некоторых других значений γ получены в работах [4]-[5]. Подобные задачи рассматривались также в работах [1]-[3].

Доклад основан на совместной работе с А. А. Владимировым.

Работа автора поддержана РНФ, проект № 14-11-00754.

Список литературы

[1] Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев, “Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма–Лиувилля”, *Успехи матем. наук*, **51**:3 (1996), 73–144.

[2] В. А. Винокуров, В. А. Садовничий, “О границах изменения собственного значения при изменении потенциала”, *Доклады РАН*, **392**:5 (2003), 592–597.

[3] С. С. Ежак, “Об оценках минимального собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с интегральным условием”, *Соврем. матем. и её прилож.*, **36** (2007), 56-69.

[4] Е. С. Карулина, “Оценки первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с краевыми условиями третьего типа”, *Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа*, науч. издание, под ред. Асташовой И.В., ЮНИТИ-ДАНА, М., 2012, 560-607.

[5] E. S. Karulina, A. A. Vladimirov, “The Sturm–Liouville problem with singular potential and the extrema of the first eigenvalue”, *Tatra Mountains Mathematical Publications*, **54** (2013), 101–118.

Метрические свойства гармонической меры на жордановых кривых

И. Р. Каюмов

Казанский (Приволжский) федеральный университет

Пусть Ω - односвязная область на плоскости, ограниченная жордановой кривой $\partial\Omega$. Пусть E - произвольное борелевское множество на этой кривой. Через $\omega_z(E)$ обозначим гармоническую меру множества E относительно точки $z \in \Omega$. Зафиксируем точку $z_0 \in \Omega$ и будем рассматривать функцию $\omega(E) = \omega_{z_0}(E)$ как функцию на борелевских множествах кривой $\partial\Omega$. Полученная таким образом мера ω не зависит от выбора точки $z_0 \in \Omega$.

Из классической теоремы Рисса-Привалова следует, что если $\partial\Omega$ является спрямляемой кривой, то ω абсолютно непрерывна относительно линейной меры Лебега на этой кривой. М.А. Лаврентьевым построен пример такой жордановой кривой $\partial\Omega$, что ω не является абсолютно непрерывной мерой относительно линейной меры Лебега на этой кривой.

В 1972 году Л. Карлесон показал, что существует положительное число $\alpha > 0$ такое, что ω абсолютно непрерывна относительно $\Lambda_{1/2+\alpha}$, где $\Lambda_{1/2+\alpha}$ - φ-мера Хаусдорфа с функцией $\varphi(t) = t^{1/2+\alpha}$.

В 1985 году Н.Г. Макаров существенно усилил этот результат показав, что существует постоянная $C > 0$ такая, что ω абсолютно непрерывна относительно Λ_φ, где

$$\varphi(t) = t \exp\left(C\sqrt{\log\frac{1}{t} \log\log\log\frac{1}{t}} \right).$$

С. Роде и Х. Поммеренке (1991) показали, что в качестве C можно взять число 30. Автором эта константа была понижена до $6\sqrt{3}$.

Пусть C_M - минимальная константа для которой гармоническая мера абсолютно непрерывна относительно Λ_φ. Совместно со шведским математиком Х. Хеденмальмом удалось получить оценки

$$0.91 \leqslant C_{\mathrm{M}} \leqslant 2\sqrt{\frac{\sqrt{24}-3}{5}} = 1.2326\ldots.$$

Оценка снизу получена путем построения конформных снежинок с большой фрактальной размерностью границы.

Кроме того, в докладе предполагается обсудить и указать связь наших оценок C_M с недавними результатами К. Макмюллена [1], связанных с динамикой размерности жордановых кривых фрактального типа.

Список литературы

[1] C. T. McMullen, “Thermodynamics, dimension and the Weil–Petersson metric”, *Invent. math.*, **173** (2008), 365–425.

Оценка снизу спектра оператора Штурма–Лиувилля в $L^2(\mathbb{R}_+)$ с граничным условием $y'(0) = 0$.

А. И. Козко

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Исследуется нижняя граница спектра оператора $\mathbf{L}_q$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$, задаваемого дифференциальным выражением $-y'' + q(x)y$ и граничным условием $y'(0) = 0$. Предполагается, что $q \in L_{loc}(\mathbb{R}_+)$, $\lim_{x\to+\infty} q(x) = 0$. В этом случае спектр оператора $\mathbf{L}_q$ (обозначим его через σ_q) состоит из непрерывной части и дискретной. Луч $(0; +\infty)$ является непрерывным спектром, а на луче $(-\infty; 0)$ расположена дискретная часть, которая либо пуста, либо является конечным множеством отрицательных чисел (собственных значений) ([1], гл. 5, стр. 129).

Пусть $q_-(x) = -\min\{0, q(x)\}$. При $V > 0$ определим множество Q_V, состоящее из всех потенциалов q, для которых выполнено неравенство

$$\inf_{x\in\mathbb{R}_+} \int_x^{+\infty} e^{-\mu t}(\mu^2 - q_-(t))\, dt \geqslant 0,$$

Основной результат работы:

Теорема 1. *При любом $V > 0$ справедливо равенство*

$$\inf\{\sigma_q \,:\, q \in Q_V\} = -V^2.$$

Используя теорему 1 получаем:

Теорема 2. *При любом $V > 0$ и дополнительном условии $q_- \in L(\mathbb{R}_+)$ справедливо равенства*

$$\inf\{\sigma_q \,:\, \|q_-\|_{L(\mathbb{R}_+)} \leqslant V\} = -V^2.$$

Из теоремы 2 можно сделать вывод, что собственные значения оператора $\mathbf{L}_q$ оцениваются снизу величиной

$$-\left(\int_0^{+\infty} q_-(x)\, dx\right)^2,$$

причём данная оценка неулучшаема.

В.А. Марченко [2] доказал (это потребовалось ему в качестве вспомогательного утверждения), что в предположении $q \in L(\mathbb{R}_+)$ величина

$$\inf\{\sigma_q \,:\, \|q\|_{L(\mathbb{R}_+)} \leqslant V\}$$

не меньше $-2V^2$. В работе показано, что на самом деле справедливо равенство $\inf\{\sigma_q \,:\, \|q\|_{L(\mathbb{R}_+)} \leqslant V\} = -V^2$.

Для операторов Штурма-Лиувилля в $L^2(0, 1)$ с граничными условиями на концах отрезка $[0, 1]$ задачи аналогичные задаче (2) активно изучались в работах многих математиков. Большой список литературы по этому вопросу имеется в [3] и [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00022).

Список литературы

[1] Титчмарш Э. Ч., *Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка.* Т. 1, Изд-во иностранной литературы, М., 1960.

[2] Марченко В. А., "Оценка остаточного члена в асимптотической формуле для спектральной функции оператора Штурма–Лиувилля", *Теория функций, функцион. анализ и их прил.*, 1991, № 56, 14–29.

[3] Егоров Ю. В., Кондратьев В. А., "Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма–Лиувилля", *УМН*, **51**:3 (1996), 73—144.

[4] Винокуров В. А., Садовничий В. А., "О границах изменения собственного значения при изменении потенциала", *Доклады академии наук*, **392**:5 (2003), 592–597.

О сплайн-вейвлетном сжатии данных радиолокационного типа

О. М. Косогоров, А. А. Макаров

Санкт-Петербургский государственный университет

Современные РЛС комплектуются достаточно производительными ЭВМ и программным обеспечением (ПО), осуществляющим все основные этапы обработки радиолокационного сигнала в цифровой форме. При разработке алгоритмов обработки учитываются характеристики оборудования станции, что позволяет в наиболее полном объёме раскрыть его потенциал. Кроме того, ПО РЛС позволяет максимально автоматизировать работу операторов станции, что в целом повышает её эффективность при обнаружении и сопровождении целей, а также при любых других требуемых операциях. Применение цифровых технологий даёт возможность по-новому проектировать РЛС и достигать заданных целей. Например, становится возможной эксплуатация станций в автономном режиме, без оператора, на больших расстояниях. Становится актуальной задача передачи больших объёмов цифровой радиолокационной информации по узким каналам связи. Решение данной задачи также востребовано при передаче данных с нескольких РЛС в общий центр обработки/управления. Кроме того, в отдельных случаях возникает потребность в эффективном хранении больших объёмов радиолокационной информации, что является схожей задачей. Была решена актуальная задача передачи по каналам связи с ограниченной пропускной способностью первичной радиолокационной информации, поступающей с береговой РЛС. При этом выполняются следующие основные требования: низкая плотность сжатого потока; высокое качество восстановленных после сжатия данных; высокая скорость сжатия/восстановления, позволяющая передачу данных в режиме реального времени; невысокая ресурсоёмкость. Для решения данной задачи использовались иерархические методы сплайн-вейвлетной аппроксимации цифровых потоков данных, относящиеся к направлению исследований по сплайнам и вейвлетным разложениям, выводимым из аппроксимационных и калибровочных соотношений (см. [1-3]). Предварительный анализ структуры первичной радиолокационной информации показал целесообразность использования упомянутых методов.

Список литературы

[1] O. M. Kosogorov, A. A. Makarov, “Spline wavelet decomposition and parallel compression”, *Zbornik radova konferencije MIT* 2009, Beograd, 2010, 202–205.

[2] Yu. K. Demjanovich, O. M. Kosogorov, “Spline-wavelet decompositions on open and closed intervals”, *J. Math. Sci.*, **164**:3 (2010), 383–402.

[3] A. A. Makarov, “On construction of the splines of the maximal smoothness”, *J. Math. Sci., New York*, **178**:6 (2011), 589–604.

О числовом образе одного класса квадратичных форм и собственных значениях эллиптических операторов

А. Б. Костин

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

В унитарном пространстве V со скалярным произведением $(f,g)_V$ и нормой $\|f\|_V$ рассмотрим две полуторалинейные формы $\mathcal{L}_0\big(f,g\big)$ и $\mathcal{Q}\big(u,v\big)$ с областями определения $D\big(\mathcal{L}_0\big)\times D\big(\mathcal{L}_0\big)$ и $D\big(\mathcal{Q}\big)\times D\big(\mathcal{Q}\big)$ такими, что $D\big(\mathcal{L}_0\big)\subseteq D\big(\mathcal{Q}\big)\subseteq V$. Будем предполагать, что форма $\mathcal{L}_0$ является эрмитовой, т. е.

$$\forall f,\, g\in D\big(\mathcal{L}_0\big) \qquad \mathcal{L}_0\big(f,g\big)=\overline{\mathcal{L}_0\big(g,f\big)} \tag{1}$$

и, кроме того, найдутся числа $p>0$, $q\in\mathbb{R}$ такие, что для всех элементов $f\in D\big(\mathcal{L}_0\big)$ с нормой $\big\|f\big\|_V=1$ справедлива оценка

$$\mathcal{L}_0\big(f,f\big)\geqslant p\,\big|\mathcal{Q}\big(f,f\big)\big|^2+q\,\big(f,f\big)_V \tag{2}$$

Рассмотрим возмущённую форму $\mathcal{L}\big(f,g\big)=\mathcal{L}_0\big(f,g\big)+\mathcal{Q}\big(f,g\big)$ с областью определения $D\big(\mathcal{L}\big)\times D\big(\mathcal{L}\big)$, где $D\big(\mathcal{L}\big)=D\big(\mathcal{L}_0\big)$. Множество значений, которые принимает функция $\mathcal{L}\big(f,f\big)$, когда $f\in D\big(\mathcal{L}\big)$, $\big\|f\big\|_V=1$, будем называть числовым образом формы $\mathcal{L}$ и обозначать $\Theta\big(\mathcal{L}\big)$ (см. [1]). Собственным значением формы $\mathcal{L}\big(f,g\big)$, как обычно, называется число $\lambda\in\mathbb{C}$ такое, что существует ненулевой элемент $h\in D\big(\mathcal{L}\big)$, для которого выполнено равенство $\mathcal{L}\big(h,g\big)=\lambda\big(h,g\big)_V$ при любом элементе $g\in D\big(\mathcal{L}\big)$. Отметим, что всякое собственное значение $\lambda\in\Theta\big(\mathcal{L}\big)$.

Теорема. *Пусть выполнены условия* (1), (2). *Тогда числовой образ* $\Theta\big(\mathcal{L}\big)$ *квадратичной формы* $\mathcal{L}\big(f,f\big)$ *лежит во множестве*

$$\mathcal{D}_0(p,q)\equiv\bigcap_{\varepsilon\in(0,p]}\mathcal{D}(\varepsilon;p,q)\,, \qquad \text{где семейство множеств } \mathcal{D} \text{ имеет вид}$$

$$\mathcal{D}(\varepsilon;p,q)\equiv\Big\{\lambda=\alpha+i\beta\in\mathbb{C}\mid \alpha\geqslant(p-\varepsilon)|\beta|^2-\frac{1}{4\varepsilon}+q\Big\}.$$

Множество $\mathcal{D}_0$ может быть найдено прямым вычислением.

$$\mathcal{D}_0=\begin{cases}\alpha\geqslant p\,\beta^2-|\beta|+q, & \text{если } |\beta|\geqslant\dfrac{1}{2p};\\[2mm] \alpha\geqslant q-\dfrac{1}{4p}, & \text{если } |\beta|\leqslant\dfrac{1}{2p}.\end{cases}$$

Из этой теоремы в качестве следствия получен результат о расположении на плоскости $\mathbb{C}_\lambda$ собственных значений достаточно широкого класса линейных (не обязательно эллиптических) операторов. Приведены примеры эллиптических операторов, показывающие асимптотическую точность найденного множества $\mathcal{D}_0$, которое в свою очередь лежит внутри любой из парабол Гепперта–Карлемана ([2], [3]).

Список литературы

[1] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[2] H. Geppert, "Über Randwertprobleme bei linearen eliptischen Differential-gleichungen", *Mathematische Annalen*, **98**:2 (1927), 264–272.

[3] T. Carleman, "Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen", *Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Math.-Phys. Klasse*, **88** (1936), 119–132.

[4] В. А. Ильин, Е. И. Моисеев, "Об отсутсвии свойства базисности у системы корневых функций задачи с наклонной производной", *Дифференц. уравнения*, **30**:1 (1994), 128–143.

[5] А. Б. Костин, "О комплексных собственных значениях эллиптического оператора и примере неединственности решения обратной задачи", *Доклады Академии Наук*, **453**:2 (2013), 138–141.

Тонкие свойства функций из пространств Хайлаша–Соболева W^p_α, $p>0$

В. Г. Кротов, С. А. Бондарев

Белорусский государственный университет

Пусть (X,d,μ) — метрическое пространство с метрикой d и регулярной борелевской мерой μ и, причем меры шаров $B(x,r)=\{y\in X : d(x,y)<r\}$ положительны и конечны. Мы предполагаем выполненным условие удвоения с показателем $\gamma>0$, то есть

$$\mu(B(x,R)) \lesssim \left(\frac{R}{r}\right)^{\gamma} \mu(B(x,r)), \quad 0<r<R, \quad x\in X$$

(запись $A\lesssim B$ всегда будет означать, что $A\leqslant cB$, где c — некоторые положительные постоянные, зависящие, возможно, от несущественных параметров), γ выполняет роль размерности X.

Определим классы Хайлаша–Соболева W^p_α при $p>0$, $\alpha>0$, как

$$W^\alpha_p(X)=\{f\in L^p : D^\alpha(f)\cap L^p(X)\neq\varnothing\},$$

$$||f||_{W^p_\alpha}=\left(||f||^p_{L^p}+\inf_{g\in D_\alpha(f)}||g||^p_{L^p}\right)^{1/p},$$

$$D_\alpha(f)=\{g : |f(x)-f(y)|\leqslant d^\alpha(x,y)[g(x)+g(y)], g\,\text{измерима}\}.$$

Введем s–вместимость и размерность Хаусдорфа

$$H^s_\infty(E)=\inf\left\{\sum_{i=1}^\infty r_i^s : E\subset\bigcup_{i=1}^\infty B(x_i,r_i)\right\}$$

$$\dim_{\mathbb{H}}(E)=\inf\{s : H^s_\infty(E)=0\}.$$

Определим емкости, соответствующие классам W^p_α

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E)=\inf\left\{\|f\|^p_{W^p_\alpha(X)} : f\geqslant 1 \text{ в окрестности } E\subset X\right\},$$

и стандартно введем классы Гельдера: если $E\subset X$, то

$$H^\beta(E)=\left\{\phi : \sup_{x\neq y, x,y\in E}[d(x,y)]^{-\beta}|\phi(x)-\phi(y)|<+\infty\right\}.$$

Для функции $f\in L^p_{\mathrm{loc}}(X)$, $p>0$ и шара $B\subset X$ положим

$$A_p(f,B)=\inf_I\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B |f(y)-I|^p\,d\mu(y)\right)^{1/p}. \tag{1}$$

Легко видеть, что существует число $I^{(p)}_B f$, для которого достигается точная нижняя грань в (1).

Теорема 1. *Пусть* $\alpha > 0$, $0 < p < \gamma/\alpha$ *и* $f \in W^p_\alpha(X)$. *Тогда существует такое множество* $E \subset X$ *такое, что для любого* $x \in X \setminus E$ *существует предел*

$$\lim_{r\to+0} I^{(p)}_{B(x,r)} f = f^*(x)$$

и

$$\lim_{r\to+0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f - f^*(x)|^q \, d\mu = 0, \ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}.$$

При этом справедливы оценки

1) $\dim_{\mathbb{H}}(E) \leqslant \gamma - \alpha p$ *при* $\alpha > 0$,
2) $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0$ *при* $0 < \alpha \leqslant 1$.

Теорема 2. *При условиях теоремы 1 для* $0 < \beta < \alpha$ *существует такое множество* $E \subset X$, *что* $H^{\gamma-(\alpha-\beta)p}_\infty(E) = 0$ (*в частности* $\dim_{\mathbb{H}} E \leqslant \gamma - (\alpha-\beta)p$) *и при* $x \in X \setminus E$

$$\lim_{r\to+0} r^{-\beta} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f - f(x)|^q \, d\mu = 0, \ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Теоремы 1 и 2 получены нами при участии М.А.Прохоровича.

Ранее были известны случаи $p > 1$ [1] и $p = \alpha = 1$ [2] теоремы 1, а результат теоремы 2 известен при $p > 1$ [3]. Однако, в этих уже исследованных случаях на месте $I^{(p)}_B f$ использовались интегральные средние

$$f_B = \frac{1}{\mu(B)} \int_B f \, d\mu.$$

В случае $p \geqslant \dfrac{\gamma}{\gamma+\alpha}$ (тогда $q \geqslant 1$) в теоремах 1 и 2 можно заменить $I^{(p)}_{B(x,r)} f$ на средние f_B.

Теорема 3. *Пусть* $0 < \beta \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 < p < \gamma/\alpha$, $f \in W^p_\alpha(X)$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют функция* f_ε *и открытое множество* $O \subset X$ *такие, что*

1) $\mathrm{Cap}_{\alpha-\beta,p}(O) < \varepsilon$, $H^{\gamma-(\alpha-\beta)p}_\infty(O) < \varepsilon$,
2) $f = f_\varepsilon$ *на* $X \setminus O$,
3) $f_\varepsilon \in W^p_\alpha(X)$ *и* $f_\varepsilon \in H^\beta(B)$ *для любого шара* $B \subset X$,
4) $\|f - f_\varepsilon\|_{W^p_\alpha} < \varepsilon$.

При $p > 1$ и $p = \alpha = 1$ это утверждение было известно ранее, см. [4] и ссылки в этой работе, а также [2].

Доказательства теорем 1–3 основаны на методах работы [5].

Во время подготовки публикации появилась работа [6], в которой другими методами получена наша теорема 3 (без утверждения о емкостях $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}$), а также ее аналог для более широких шкал классов Бесова и Трибеля–Лизоркина

Список литературы

[1] Прохорович М.А., “Емкости и точки Лебега для классов Соболева”, *Вести НАН Беларуси, сер. физ.-мат.наук*, 2006, №1, 19–23.

[2] Kinnunen J., Tuominen H., “Pointwise behaviour of $M^{1,1}$ Sobolev functions”, *Math. Zeit.*, **257**:3 (2007), 613–630.

[3] Кротов В.Г., Прохорович М.А., “Скорость сходимости средних Стеклова на метрических пространствах с мерой и размерность Хаусдорфа”, *Матем. заметки*, **89**:1 (2011), 145–148.

[4] Кротов В.Г., Прохорович М.А., “Аппроксимация Лузина функций из классов W^p_α на метрических пространствах с мерой”, *Изв. вузов. Математика*, **8**:5 (2004), 55–66.

[5] Кротов В.Г., Порабкович А.И., “Оценки L^p-осцилляций функций при $p > 0$”, *Матем. заметки*, **97**:3 (2015), 407–420.

[6] Heikkinen T., Tuominen H., *Approximation by Hölder functions in Besov and Triebel–Lizorkin spaces*, arXiv: 1504.02585.

О построении масштабирующих функций, порождающих ортогональный КМА на локальных полях положительной характеристики.

Ю. С. Крусс

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Локальное поле $F^{(s)}$ положительной характеристики p изоморфно пространству бесконечных в обе стороны последовательностей $x = (..., \mathbf{0}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, ...)$, $\mathbf{x}_j \in GF(p^s)$, где $GF(p^s)$ конечное поле. Известно, что при $s = 1$: $F^{(1)+}$ (- аддитивная группа поля $F^{(1)}$) есть группа Виленкина с постоянной образующей последовательностью $p_n = p$. А при $s > 1$ аддитивная группа $F^{(s)+}$ изоморфна произведению групп Виленкина [1], т.е.

$$F^{(s)+} \cong F^{(1)+} \times F^{(1)+} \times ... \times F^{(1)+} = \left(F^{(1)+}\right)^s.$$

Обозначим через $F_k^{(s)} = \{(..., \mathbf{0}, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, ...), \mathbf{x}_i \in GF(p^s)\}$ подгруппы группы $F^{(s)+}$. Множество ступенчатых функций, постоянных на смежных классах по подгруппе $F_M^{(s)}$ с носителем $\mathrm{supp}(\varphi) \subset F_{-N}^{(s)}$ обозначим через $\mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$, $M, N \in \mathbb{N}$. Аналогично, $\mathfrak{D}_{-N}(F_M^{(s)\perp})$ есть множество ступенчатых функций, постоянных на смежных классах по подгруппе $F_{-N}^{(s)\perp}$ с носителем $\mathrm{supp}(\varphi) \subset F_M^{(s)\perp}$. Если функция $\varphi \in \mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$ порождает ортогональный КМА, то она удовлетворяет масштабирующему уравнению $\varphi(x) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h$ $\varphi(\mathcal{A}x \dot{-} h)$, которое можно записать в частотном виде

$$\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1}), \tag{1}$$

где $m_0(\chi) = \frac{1}{p} \sum\limits_{h \in H_0^{(N+1)}} \beta_h \overline{(\chi\mathcal{A}^{-1}, h)}$ - маска уравнения (1), $\mathcal{A}$ - оператор растяжения, χ - характер группы $F^{(s)+}$.

Известно, что на группах Виленкина задача построения ступенчатой масштабирующей функции сводится к построению некоторого дерева [2]. Однако рассматриваемый класс функций состоит только из (N, M)-элементарных функций [2] (т.е. функций, модуль которых принимает значения 0 или 1), и поэтому является довольно узким. Оказалось, что можно построить ступенчатую масштабирующую функцию, принимающую дробные значения, по прежнему используя теорию графов, а также обобщить это для локальных полей положительной характеристики.

Построим дерево $\tilde{T}$, ориентированное от листа к корню и удовлетворяющее следующим условиям:

1) Каждая вершина представляет собой элемент поля $GF(p^s)$: $\mathbf{a}_j = (a_j^{(0)}, a_j^{(1)}, \dots, a_j^{(s-1)})$ и встречается в дереве только один раз.

2) Нулевой элемент поля $GF(p^s)$ $\mathbf{0} = (0^{(0)}, 0^{(1)}, \dots, 0^{(s-1)})$ является корнем дерева.

Теперь по данному дереву построим взвешенный граф Γ, добавив некоторое количество ориентированных ребер от вершин более высокого уровня к вершинам более низкого уровня, таким образом, чтобы сумма весов всех ребер, исходящих из одной вершины, равнялась единице. Обозначим

$$\lambda_{\mathbf{a}_{-1},\mathbf{a}_0} = |m_0(F_{-1}^{(s)\perp} \mathbf{r}_{-1}^{\mathbf{a}_{-1}} \mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_0})|^2, \tag{2}$$

где ${F_{-1}^{(s)}}^{\perp}$ - аннулятор подгруппы $F_{-1}^{(s)}$, $\mathbf{r}_i^{\mathbf{a}_i} = r_{is}^{a_i^{(0)}} r_{is+1}^{a_i^{(1)}} \dots r_{is+s-1}^{a_i^{(s-1)}}$, $r_{is+l}(x) = e^{\frac{2\pi i}{p} x_i^{(l)}}$ – функция Радемахера.

Теорема. *Пусть построены дерево $\tilde{T}$, граф Γ и определены значения маски $m_0(\chi)$ так, как указано в равенствах* (2). *Тогда равенство*

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi \mathcal{A}^{-k}) \in \mathfrak{D}_{-1}({F_M^{(s)}}^{\perp})$$

определяет масштабирующую функцию $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_M(F_{-1}^{(s)})$, порождающую ортогональный КМА, причем M не превышает $H-1$, где H высота дерева $\tilde{T}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00102).

Список литературы

[1] S. F. Lukomskii, A. M. Vodolazov, *Non-Haar MRA on local field of positive characteristic*, arXiv: 1407.4069.

[2] G. S. Berdnikov, S. F. Lukomskii, *N-valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups*, arXiv: 1412.3096.

Об эллиптических операторах с разрывными коэффициентами в неограниченных областях с угловыми точками

Р. Лагерр

Российский университет дружбы народов

Для неограниченных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с компактными и некомпактными кусочно-C^1 границами $\partial\Omega$, имеющими конечное число конечных и бесконечных угловых точек, исследуются вопросы существования и единственности слабых решений краевой задачи Неймана для эллиптического уравнения в дивергентной форме: $div(a\nabla u) = div f$ с разрывными кусочно-постоянными коэффициентами a. Под конечной или бесконечной угловой точкой $\partial\Omega$ подразумевается конечная или бесконечно удаленная вершина отличного от π угла между парой кривых класса C^1, имеющих в вершине предельные нормали, тогда как вершина угла, равного π, считается точкой гладкости $\partial\Omega$. Бесконечные угловые точки называют также выходами на бесконечность.

Предполагается, что скалярные коэффициенты a имеют конечное число кусочно-гладких компактных и некомпактных линий разрыва коэффициентов, состоящих из замкнутых кусков гладких кривых Γ_k класса C^1, на которых заданы естественные условия сопряжения, т.е. непрерывности решения и его производной по конормали $\nu_a = a\nu$ к соответствующей кривой Γ_k с нормалью ν. Угловые точки $\partial\Omega$ могут оказаться точками разрыва коэффициентов — для бесконечной угловой точки это означает, что хотя бы две кривые Γ_k уходят на бесконечность, имея там предельные нормали. Краевая задача с однородными условиями Неймана на $\partial\Omega$ и с условиями сопряжения на Γ_k решается в обобщенной постановке в смысле стандартного интегрального тождества для класса слабых решений $\nabla u \in L_p(\Omega)$ с заданной векторнозначной $f \in L_p(\Omega)$. Такую постановку удобно рассматривать как обобщенную постановку краевой задачи Неймана для системы первого порядка, эллиптической по Дуглису-Ниренбергу. Важно, что при наличии двух и более бесконечных угловых точек (т.е., выходов на бесконечность) с ненулевыми углами, корректная обобщенная постановка задачи Неймана при $p > 2$ требует пробных функций, выходящих на свою произвольную константу по каждому выходу на бесконечность с ненулевым углом. Вычисление размерностей ядра и коядра соответствующего матричного дифференциального оператора и является главной целью настоящей работы, продолжающей исследования, начатые в [1,2], где рассмотрены случай $\Omega = \mathbb{R}^2$ и краевая задача с однородными условиями Дирихле в случае $\Omega \neq \mathbb{R}^2$. Краткое изложение истории вопроса можно найти в [1], а более подробное — в [2].

К особым точкам замыкания $\overline{\Omega}$ относятся все точки, характер которых определяет замкнутость или незамкнутость области значений рассматриваемого эллиптического оператора, а также размерности его ядра и коядра относительно всей шкалы значений показателя $p \in (1, \infty)$. Помимо конечных и бесконечных угловых точек $\partial\Omega$, особыми точками становятся все точки гладкости $\partial\Omega$, из которых выходят хотя бы две кривые Γ_k, тогда как в случае только одной кривой Γ_k точка гладкости $\partial\Omega$ будет особой, если только Γ_k выходит из нее под углом к $\partial\Omega$, отличным от прямого. Особыми будут также и все внутренние точки Ω, из которых выходят хотя бы две кривые Γ_k. При этом в случае только двух кривых, угол между ними отличен от π и особая точка является точкой излома линии разрыва коэффициентов. В случае компактной $\partial\Omega$ бесконечность рассматривается как внутренняя точка, которая может оказаться особой, если из нее выходят хотя бы две кривые Γ_k.

Каждой особой точке соответствует своя модельная задача Штурма–Лиувилля по полярному углу с условиями сопряжения и однородными условиями Неймана. Но для класса решений $\nabla u \in L_p(\Omega)$ интерес представляют только собственные числа модельных задач Штурма–Лиувилля $\lambda \in (-1, 0)$ — именно они увеличивают размерности ядра и коядра по шкале значений показателя $p \in (1, \infty)$, т.е., характер каждой особой точки определяется количеством именно таких ее собственных чисел.

Для рассматриваемого эллиптического оператора в случае условий Неймана установлено, что размерности его ядра и коядра по всей шкале значений показателя $p \in (1, \infty)$ совпадают с размерностями для случая условий Дирихле [2], за исключением областей, имеющих не менее двух выходов на бесконечность с ненулевыми углами, т.е., за исключением случая, который в [2] не рассматривался.

Список литературы

[1] Дудкина А.А., “К L_p-теории эллиптических операторов с разрывными коэффициентами”, *ДАН*, **430**:3 (2010), 304–307.

[2] Дудкина А.А., *К L_p-теории эллиптических краевых задач с разрывными коэффициентами*, Канд. дисс., РУДН, М., 2010.

Решение функционального уравнения для систем с медленно движущимися границами

В. Л. Литвинов

Самарский государственный технический университет

Пусть движение системы описывается волновым уравнением

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau) - U_{\xi\xi}(\xi,\tau) = 0 \tag{1}$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} &U(0,\tau) = 0\\ &U(l(\tau),\tau) = F(\tau)\\ &l(0) = 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь τ, ξ – безразмерное время ($\tau \geqslant 0$) и безразмерная пространственная координата, $l(\tau)$ – закон движения правой границы (левая граница неподвижна, но это не отменяет общности задачи), $F(\tau)$ – заданная функция класса C^1.

В работе [1] в результате решения исходной задачи (1) с помощью представления Даламбера получено функциональное уравнение

$$\varphi(\tau + l(\tau)) = \varphi(\tau - l(\tau)) + 1. \tag{3}$$

Для решения (3) А.И. Весницким [2] был использован обратный метод, т.е. по заданным находились законы движения границ. В данной статье для решения уравнения (3) предлагается использовать асимптотический метод.

При неподвижных границах ($l(\tau) = l$) решением уравнения (3) является линейная функция

$$\varphi_s(z) = \frac{z}{2l} + const. \tag{4}$$

В случае медленного движения границы $l(\tau)$, «фаза» волны $\varphi(z)$ за время ее пробега через систему изменяется незначительно относительно $\varphi_s(z)$. Предполагается, что $\varphi(z)$ имеет производные любого порядка, и записывая $\varphi(\tau + l(\tau))$ в виде степенных рядов по $l(\tau)$, после их подстановки в (3) получим дифференциальное уравнение для медленно изменяющейся «фазы» $\varphi(\tau)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{l^{k+1}}{(k+1)!}\frac{d^{k+1}\varphi}{d\tau^{k+1}} = 1. \tag{5}$$

Так как $\varphi(\tau)$ мало отклоняется от линейного закона $\varphi_s(z=\tau)$ за время пробега волны через резонатор, то каждый следующий член в левой части уравнения (4) много меньше предыдущего и его решение нужно искать в виде ряда

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\tau). \tag{6}$$

Подставляя (5) в (4) и приравнивая члены одинакового порядка малости по отдельности к нулю, получим для нулевого приближения

$$\frac{d\varphi_0}{d\tau}(\tau) = \frac{1}{l(\tau)}.$$

Отсюда

$$\varphi_0(\tau) = \int_0^\tau \frac{1}{l(t)}\,dt.$$

Обозначим $z_+ := \tau + \xi$, $z_- := \tau - \xi$.

В случае линейного закона движения границы $l(\tau) = 1 + \nu\tau$ фаза динамических собственных колебаний равна

$$\varphi_0(z_\pm) = \frac{1}{\nu} ln(l(\tau) \pm \nu\xi).$$

При этом точное решение выглядит следующим образом [1]:

$$\varphi(z_\pm) = \left(ln\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)^{-1} ln\frac{l(\tau \pm \nu\xi)}{1+\nu}.$$

Таким образом, асимптотический метод уже в нулевом приближении дает качественно совпадающие с точными результаты.

Список литературы

[1] В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов, *Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами*, монография, Самар. гос. техн. ун-т, Самара, 2009, 131 с.

[2] А. И. Весницкий, *Волны в системах с движущимися границами и нагрузками*, Физматлит, М., 2001, 320 с.

Задачи оптимизации коэффициентами полулинейных УМФ эллиптического типа с разрывными данными и их конечномерная аппроксимация

Ф. В. Лубышев, А. Р. Манапова

Башкирский государственный университет

Пусть

$$\Omega = \big\{ r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant r_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1, 2 \big\}$$

– прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega = \Gamma$. Пусть область Ω разделена прямой $r_1 = \xi$, где $0 < \xi < l_1$, на подобласти

$$\Omega_1 \equiv \Omega^- = \big\{ 0 < r_1 < \xi, \quad 0 < r_2 < l_2 \big\}, \qquad \Omega_2 \equiv \Omega^+ = \big\{ \xi < r_1 < l_1, \quad 0 < r_2 < l_2 \big\}$$

с границами $\partial\Omega_1 \equiv \partial\Omega^-$ и $\partial\Omega_2 \equiv \partial\Omega^+$. Через $\overline{\Gamma}_k$ будем обозначать границы областей Ω_k без S, $k = 1, 2$. Так что $\partial\Omega_k = \overline{\Gamma}_k \cup S$, где части Γ_k, $k = 1, 2$ – открытые непустые подмножества в $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$; $\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega = \Gamma$. Через n_α, $\alpha = 1, 2$ будем обозначать внешнюю нормаль к границе $\partial\Omega_\alpha$ области Ω_α, $\alpha = 1, 2$. Пусть, далее, $n = n(x)$ – единичная нормаль к S в какой-либо ее точке $x \in S$, ориентированная, например, таким образом, что нормаль n является внешней нормалью к S по отношению к области Ω_1, то есть нормаль n направлена внутрь области Ω_2. Ниже, при постановке краевых задач для состояний процессов управления, S – это прямая, вдоль которой разрывны коэффициенты и решения краевых задач, которые в областях Ω_1 и Ω_2 обладают некоторой гладкостью.

Пусть условия управляемого физического процесса позволяют моделировать его в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$, состоящей из двух частей (подобластей) Ω_1 и Ω_2, разбитой на части внутренней границей S, следующей задачей Дирихле для полулинейного уравнения эллиптического типа с разрывными коэффициентами и решениями: требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\overline{\Omega}$, удовлетворяющую в каждой из областей Ω_1 и Ω_2 уравнению

$$\begin{aligned}
&Lu(x) = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + d(x)q(u) = f(x), \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2,\\
&\text{и условиям} \quad u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2,\\
&\big[k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\big] = 0, \quad G(x) = \big(k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\big) = \theta(x_2)[u], \quad x \in S,
\end{aligned} \tag{1}$$

где

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in \Omega_1;\\ u_2(x), & x \in \Omega_2, \end{cases} \quad q(\xi) = \begin{cases} q_1(\xi_1), & \xi_1 \in \mathbb{R};\\ q_2(\xi_2), & \xi_2 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$$k_\alpha(x), d(x), f(x) = \begin{cases} k_\alpha^{(1)}(x), d_1(x), f_1(x), & x \in \Omega_1;\\ k_\alpha^{(2)}(x), d_2(x), f_2(x), & x \in \Omega_2, \ \alpha = 1, 2. \end{cases}$$

Здесь $\big[u\big] = u_2(x) - u_1(x)$ – скачок функции $u(x)$ на S; $k_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$, $f(x)$ – известные функции, определяемые по-разному в Ω_1 и Ω_2, претерпевающие разрыв первого рода на S; $q_\alpha(\xi_\alpha)$, $\xi_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = 1, 2$, $d_2(x)$, $x \in \Omega_2$ – заданные функции; $g(x) \equiv (\theta(x), d_1(x))$, – управление. Относительно заданных функций будем предполагать: $k_\alpha(x) \in W_\infty^1(\Omega_1) \times$

$W^1_\infty(\Omega_2)$, $\alpha = 1,2$, $d_2(x) \in L_\infty(\Omega_2)$, $f(x) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)$; $0 < \nu \leqslant k_\alpha(x) \leqslant \overline{\nu}$, $\alpha = 1,2$, $0 \leqslant d_0 \leqslant d_2(x) \leqslant \overline{d}_0$, $x \in \Omega_2$; $\nu, \overline{\nu}, d_0, \overline{d}_0$ – заданные константы; функции $q_\alpha(\xi_\alpha)$, определенные на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$, удовлетворяют условиям: $q_\alpha(0) = 0$, $0 < q_0 \leqslant \big(q_\alpha(\xi_\alpha) - q_\alpha(\overline{\xi}_\alpha)\big)/\big(\xi_\alpha - \overline{\xi}_\alpha\big) \leqslant L < \infty$, для всех ξ_α, $\overline{\xi}_\alpha \in \mathbb{R}$, $\xi_\alpha \neq \overline{\xi}_\alpha$, $\alpha = 1,2$.

Введем множество допустимых управлений $U = \prod\limits_{\alpha=1}^{2} U_\alpha$, $U_\alpha \subset H_\alpha$, $\alpha = 1,2$, $H = H_1 \times H_2$, $H_1 = L_2(S)$, $H_2 = L_2(\Omega_1)$ – пространства управлений,

$$\begin{aligned} U_1 &= \big\{ g_1(x) = \theta(x) \in L_2(S): \ 0 < g_0 \leqslant g(x) \leqslant \overline{g}_0 \text{ п.в. на } S \big\}, \\ U_2 &= \big\{ g_2(x) = d_1(x) \in L_2(\Omega_1): \ 0 < d_0 \leqslant d_1(x) \leqslant \overline{d}_0 \text{ п.в. на } \Omega_1 \big\}, \end{aligned} \tag{2}$$

где d_0, $\overline{d}_0$, g_0, $\overline{g}_0$ – заданные числа.

Зададим функционал цели $J: \ U \to \mathbb{R}^1$ в виде

$$g \to J(g) = \int\limits_{\Omega_1} \Big| u(r_1, r_2; g) - u_0^{(1)}(r) \Big|^2 \, d\Omega_1 = I(u(r;g)), \tag{3}$$

где $u_0^{(1)} \in W_2^1(\Omega_1)$ – заданная функция.

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такое управление $g_* \in U$, которое минимизирует на множестве $U \subset H$ функционал $g \to J(g)$, точнее, на решениях $u(r) = u(r;g)$ задачи (1), отвечающих всем допустимым управлениям $g = (\theta(x), d_1(x)) \in U$, требуется минимизировать функционал (3).

В работе построены и исследованы разностные аппроксимации экстремальных задач, установлены оценки скорости сходимости аппроксимаций по состоянию и функционалу, слабая сходимость по управлению. Проведена регуляризация аппроксимаций. При этом исследования аппроксимаций проводятся для дифференциальных уравнений, описывающих разрывные состояния процессов управления с обобщенными решениями из классов Соболева, при естественных незавышенных априорных требованиях к гладкости входных данных и управлений.

В теплофизических терминах поставленные задачи можно трактовать как задачи оптимального управления коэффициентом граничного условия сопряжения разнородных теплопроводящих сред $\theta(x)$ и коэффициентом теплоотдачи $d_1(x)$, входящим в нелинейное слагаемое $d_1(x)\, q_1(u)$, характеризующее мощность нелинейных стоков тепла, зависящих от температуры и распределенных в области Ω_1. При этом этот коэффициент граничного условия сопряжения характеризует термическое сопротивление неидеального контакта разнородных сред.

Работа второго автора выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (Конкурс – МК-2015).

Список литературы

[1] Ф. П. Васильев, *Методы оптимизации*, Факториал Пресс, М., 2002.

[2] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.

[3] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1986.

[4] Ф. В. Лубышев, А. Р. Манапова, "О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициетах", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **47**:3 (2007), 376–396.

[5] Ф. В. Лубышев, А. Р. Манапова, “Разностные аппроксимации задач оптимизации для полулинейных эллиптических уравнений в выпуклой области с управлениями в коэффициентах при старших производных”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **53**:1 (2013), 20–46.

[6] Ф. В. Лубышев, А. Р. Манапова, М. Э. Файрузов, “Аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями, с управлением в граничных условиях сопряжения”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **54**:11 (2014), 1767–1792.

Ортогональные системы сдвигов в поле p-адических чисел

С. Ф. Лукомский

Саратовский государственый университет

Пусть $G = Q_p^+$ аддитивная группа поля p-адических чисел, $(G_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ – основная цепочка подгрупп, $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ – базисная последовательность, т.е. $g_n \in G_n \setminus G_{n+1}$. Пусть далее X группа характеров в G, $G_n^\perp$ – последовательность аннуляторов, (r_n) –последовательность функций Радемахера, т.е. $r_n \in G_{n+1}^\perp \setminus G_n^\perp$. Обозначим через

$$H_0 = \{h = a_{-1}g_{-1}\dot{+}a_{-2}g_{-2}\dot{+}\dots\dot{+}a_{-s}g_{-s} : s \in \mathbb{N}, a_j = \overline{1, p-1}\}$$

множество сдвигов.

Нас будут интересовать условия на функцию $\varphi \in L_2(G)$, как необходимые так и достаточные, при которых система сдвигов $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ будет ортонормированной.

Пусть $M, N \in \mathbb{N}$. Через $\mathfrak{D}_M(G_{-N})$ обозначим совокупность ступенчатых функций, постоянных на смежных классах $G_M\dot{+}g$, носитель которых лежит в G_{-N}. Аналогично определим класс $\mathfrak{D}_{-N}(G_M^\perp)$. Отметим, что $\varphi \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$ т.и.т., когда $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{-N}(G_M^\perp)$ Определим систему $N+M$-мерных векторов

$$\mathbf{e}_l(\alpha) = \mathbf{e}_l(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}}\dots r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}),$$
$$l = l_{-N} + l_{-N+1}p + \dots + l_0p^N + \dots + l_{M-1}p^{N+M-1} = \overline{0, p^{N+M}-1}$$
$$\alpha = \alpha_{M-1} + \alpha_{M-2}p + \dots + \alpha_{-N}p^{N+M-1} = \overline{0, p^{N+M}-1}.$$

равенствами

$$\mathbf{e}_l(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}}\dots r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}) = \frac{1}{p^{\frac{M+N}{2}}}e^{\frac{-2\pi i}{p^{M+N}}l\alpha}$$
$$= \frac{1}{p^{\frac{M+N}{2}}}e^{\frac{-2\pi i}{p^{M+N}}(l_{-N}+\dots+l_{M-1}p^{N+M-1})(\alpha_{M-1}+\alpha_{M-2}p+\dots+\alpha_{-N}p^{N+M-1})}.$$

Ясно, что векторы $(\mathbf{e}_l)_{l=0}^{p^{N+M}-1}$ образуют ортонормированную систему. Поэтому для преобразования Фурье функции $\varphi \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$ можно записать равенство

$$|\hat{\varphi}(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}}\dots r_0^{\alpha_0}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}})|^2 = \sum_{l=0}^{p^{M+N}-1} c_l\mathbf{e}_l(G_{-N}^\perp r_{-N}^{\alpha_{-N}}\dots r_{M-1}^{\alpha_{M-1}}).$$

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$. Система сдвигов $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ будет ортонормированной системой тогда и только тогда, когда для коэффициентов Фурье c_l функции $|\hat{\varphi}|^2$ справедливы соотношения*

$$c_0 = p^{\frac{N-M}{2}}, c_1 = \dots = c_{p^N-1} = 0; \qquad c_{p^N(p^M-1)+j} = 0\ (j = 1, 2, \dots, p^N-1).$$

Используя эту теорему получаем следующее утверждение

Теорема 2. *Пусть $p=2$, $N \in \mathbb{N}$, $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{-N}(G_1^\perp)$. Если система сдвигов $(\varphi(x\dot{-}h))_{h\in H_0}$ есть ортонормированная система, то $\hat{\varphi}(G_1^\perp \setminus G_0^\perp) = 0$.*

В отличие от [1] в этой теореме отсутствует требование φ порождает КМА.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 13-01-00102а.

Список литературы

[1] S. Albeverio, S. Evdokimov, M. Skopina, “p-Adic Multiresolution Analysis and Wavelet Frames”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **16**:5 (2010), 693–714.

Оптимальное восстановление функции по ее неточно заданному спектру

Г. Г. Магарил-Ильяев[a], К. Ю. Осипенко[b]

[a] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова*
[b] *МАТИ – Российский государственный технологический университет имени К. Э. Циолковского*

В докладе будет рассказано о постановке задачи оптимального восстановления функций на прямой по их преобразованию Фурье, заданному точно или приближенно на произвольном измеримом множестве. Будут приведены явные выражения для оптимальных методов восстановления. Эти методы используют не всю доступную для измерения информацию, а ту, которую используют, подвергают определенному "сглаживанию". Постановка задачи берет свое начало от работ А.Н. Колмогорова о поперечниках множеств и работ С.М. Никольского о наилучших квадратурах на классах функций.

О спектральных разложениях оператора Штурма–Лиувилля с двухточечными краевыми условиями

А. С. Макин

Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики

Рассмотрим задачу на собственные значения для заданного на интервале $(0, \pi)$ уравнения Штурма–Лиувилля

$$u'' - q(x)u + \lambda u = 0 \tag{1}$$

с общими двухточечными краевыми условиями

$$B_i(u) = a_{i1}u'(0) + a_{i2}u'(\pi) + a_{i3}u(0) + a_{i4}u(\pi) = 0, \tag{2}$$

где $B_i(u)$ $(i = 1, 2)$ – линейно независимые формы с произвольными комплексными коэффициентами. Функция $q(x)$ есть произвольная комплекснозначная функция из класса $L_1(0, \pi)$.

Условия (2) подразделяются на 4 основных типа:

1) усиленно регулярные;

2) регулярные, но не усиленно регулярные;

3) нерегулярные;

4) вырожденные.

Известно, что в первом случае система корневых функций $\{u_n(x)\}$ задачи (1), (2) всегда является базисом Рисса в пространстве $L_2(0, \pi)$, в третьем случае она никогда не образует даже обычного базиса в указанном пространстве, а во втором случае в зависимости от конкретного вида краевых условий и функции $q(x)$ система $\{u_n(x)\}$ может обладать или не обладать свойством базисности в пространстве $L_2(0, \pi)$. Значительно менее исследованными являются задачи на собственные значения для уравнения (1) с вырожденными краевыми условиями.

Итак, пусть условия (2) являются вырожденными. Согласно [1], за исключением задачи Коши, где спектр отсутствует, они имеют вид

$$u'(0) + du'(\pi) = 0, \quad u(0) - du(\pi) = 0, \tag{3}$$

где $d \neq 0$. Пусть λ_n – занумерованные без учета кратности в порядке неубывания модуля собственные значения задачи (1), (3). Обозначим $m(\lambda_n)$ кратность собственного значения λ_n, $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$, $Re\mu_n \geqslant 0$.

Теорема. *Если* $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{m(\lambda_n)}{\sqrt{|\mu_n|}} = 0$, *то система собственных и присоединенных функций задачи* (1), (3) *не образует базис в* $L_2(0, \pi)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-01-00241).

Список литературы

[1] Lang P., Locker J., “Spectral theory of two-point differential operators determined by $-D^2$”, *J. Math. Anal. Appl.*, **146**:1 (1990), 148–191.

Сходимость по блокам рядов Фурье-Уолша

Ю. В. Малыхин[a], С. А. Теляковский[a], Н. Н. Холщевникова[b]

[a] *Математический институт имени В. А. Стеклова РАН*

[b] *Московский государственный технический университет "Станкин"*

Пусть $\{n_j\}$ — строго возрастающая последовательность номеров, f — функция ограниченной вариации на $[0,1)$ и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n w_n(x)$ — её ряд Фурье по системе Уолша $\{w_n\}$ в нумерации Пэли. Получено условие на последовательность $\{n_j\}$, при котором для всех функций ограниченной вариации ряды из модулей блоков $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\sum\limits_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} c_n w_n(x)|$ сходятся в $L[0,1)$. Аналогичная задача для рядов по тригонометрической системе была решена С.А. Теляковским и Р.М. Тригубом.

Всякое неотрицательное целое число n имеет двоичное разложение вида $n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k 2^k$, где $\varepsilon_k = 0$ или 1. Вариацией числа n называется величина $V(n) = \sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}| + \varepsilon_0$.

Пусть $n = 2^{l_1} + 2^{l_2} + \ldots + 2^{l_\nu} + 2^{l_{\nu+1}} + \ldots + 2^{l_s}$, $m = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \ldots + 2^{m_\mu} + 2^{l_{\nu+1}} + \ldots + 2^{l_s}$, где показатели записаны в возрастающем порядке, и $l_\nu \neq m_\mu$. Положим $\tilde{n} = 2^{l_1} + 2^{l_2} + \ldots + 2^{l_\nu}$, $\tilde{m} = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \ldots + 2^{m_\mu}$, $V(n,m) = V(\tilde{n}) + V(\tilde{m})$.

Теорема 1. *Пусть $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Для того, чтобы для каждой функции ограниченной вариации сумма ряда*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Big| \sum_{n=n_j}^{n_{j+1}-1} c_n w_n(x) \Big|,$$

где c_n — коэффициенты Фурье–Уолша этой функции, принадлежала пространству $L[0,1)$, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{V(n_j, n_{j+1})}{n_{j+1}}$.

Пусть $D_n = w_0 + \ldots + w_n$ — ядро Дирихле по системе Уолша, $L_n = \int_0^1 |D_n(x)|\,dx$ — константа Лебега системы Уолша. Известна оценка $V(n)/4 \leqslant L_n \leqslant V(n)$. Мы уточняем её.

Теорема 2. *При любом натуральном n справедливо двойное неравенство $\frac{V(n)+1}{3} \leqslant L_n < V(n)$, множители $\frac{1}{3}$ и 1 в котором точны.*

Теорема 3. *Для произвольных натуральных $n \neq m$ справедливо двойное неравенство $\frac{1}{67} V(n,m) < \int_0^1 |D_n(x) - D_m(x)|\,dx < V(n,m)$.*

Первый автор поддержан РФФИ, проект 14-01-00332.

Третий автор поддержан РФФИ, проект 14-01-00417.

Весовые соболевские пространства и разрешимость краевых задач для систем соболевского типа

И. И. Матвеева

Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН
Новосибирский государственный университет

Рассматриваются системы, не разрешенные относительно производной по времени,

$$A_0 D_t u + A_1(D_x)u = f(t,x),$$

где A_0 — вырожденная числовая матрица, $A_1(D_x)$ — матричный дифференциальный оператор по $x = (x_1, \ldots, x_n)$. В литературе такие системы называют системами соболевского типа, они возникают во многих прикладных задачах. В частности, примерами таких систем являются линеаризованная система Навье–Стокса, система Соболева, система внутренних волн и др.

Исследования задачи Коши и смешанных краевых задач в четверти пространства $R^{n+1}_{++} = \{(t,x) : \ t > 0, \ x \in R^n_+\}$ для систем соболевского типа показали [1], что зачастую не удается установить разрешимость во всей шкале весовых соболевских пространств $W^l_{p,\gamma}$ с экспоненциальным весом $e^{-\gamma t}$. Как правило, возникают ограничения на показатель суммируемости вида $p > p^*$, где число $p^* > 1$ зависит от порядка системы и размерности n. В случае, когда $p \leqslant p^*$, для разрешимости краевых задач необходимо требовать, чтобы данные удовлетворяли дополнительным условиям типа условий ортогональности некоторым полиномам (см., например, [1, 2]). Такие ограничения возникают при получении L_p-оценок решений, при этом для различных компонент решения ограничения на показатель суммируемости могут быть разными, т. е. L_p-оценки решений имеют анизотропный характер не только по гладкости, но и по степени суммируемости. Поэтому при исследовании разрешимости краевых задач для систем соболевского типа нужно учитывать такую анизотропную суммируемость и использовать функциональные пространства, более адаптированные к краевым задачам для таких систем.

В настоящей работе мы будем рассматривать специальную шкалу весовых соболевских пространств $W^l_{p,\gamma,\sigma}$, введенных в [3], с экспоненциальным весом по t и степенными весами по x. Мы покажем, как, управляя весовым параметром σ, т. е. выбирая подходящее функциональное пространство (см., например, [1, 4–6]), можно не только ослабить требования на данные, но и в ряде случаев установить безусловную разрешимость во всей шкале пространств $W^l_{p,\gamma,\sigma}$, $1 < p < \infty$.

Список литературы

[1] Г. В. Демиденко, С. В. Успенский, *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной*, Научная книга, Новосибирск, 1998.

[2] И. И. Матвеева, “Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для систем не типа Коши – Ковалевской”, *Сиб. журн. индустр. мат.*, **4**:2 (2001), 184–204.

[3] Г. В. Демиденко, “Задача Коши для уравнений и систем соболевского типа”, *Краевые задачи для уравнений с частными производными*, Ин-т математики АН СССР. Сиб. отд-ние, Новосибирск, 1986, 69–84.

[4] I. I. Matveeva, “On a class of boundary value problems for systems of Sobolev type”, *J. Anal. Appl.*, **3**:2 (2005), 129–150.

[5] И. И. Матвеева, “О разрешимости задачи Коши для псевдопараболических систем в весовых соболевских пространствах”, *Неклассические уравнения математической физики*, Институт математики СО РАН, Новосибирск, 2005, 177–185.

[6] Г. В. Демиденко, И. И. Матвеева, “О смешанных краевых задачах для псевдопараболических систем”, *Сиб. журн. индустр. мат.*, **8**:4 (2005), 34–50.

Задача Стеклова для бигармонического уравнения в неограниченных областях

О. А. Матевосян

Высшая школа науки
Научно-исследовательский университет “Московский авиационный институт”

В области Ω рассматривается задача Стеклова

$$\Delta^2 u(x) = 0,\ x \in \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = \left(\Delta u + \tau \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

ν – направление внешней нормали к $\partial\Omega$, $\tau \in C(\partial\Omega)$.

Условием, характеризующим поведение решения на бесконечности, является ограниченность интеграла Дирихле $D_a(u,\Omega) := \int\limits_\Omega |x|^a \sum\limits_{|\alpha|=2} |\partial^\alpha u(x)|^2 dx < \infty$ с весом $|x|^a, a \in \mathbb{R}^1$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

I. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus G$ с границей $\partial\Omega \in C^2$, где G – ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^n$ $(n > 4)$, $0 \in G$.

Теорема 1. *Задача Стеклова с условием $D_a(u,\Omega) < \infty$ имеет:*

(i) $n+1$ линейно независимых решений, если $-n \leqslant a < n-4$;

(ii) n линейно независимых решений, если $n-4 \leqslant a < n-2$;

(iii) лишь тривиальное решение, если $n-2 \leqslant a < \infty$;

(iv) $k(r,n)$ линейно независимых решений при $-2r+2-n \leqslant a < -2r+4-n$, $r > 1$, где $k(r,n) = \frac{(r+n)!}{n!r!} - \frac{(r+n-4)!}{n!(r-4)!}$.

II. Пусть $\Omega \equiv \mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 1\}$ с границей $\partial\Omega = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 1\}$, $n \geqslant 2$.

Теорема 2. *Задача Стеклова с условием $D_a(u,\Omega) < \infty$ имеет:*

(i) тривиальное решение, если $-n \leqslant a < \infty$;

(ii) $k(r,n)$ линейно независимых решений при $-2r+2-n \leqslant a < -2r+4-n$, $r > 1$, где $k(r,n) = \frac{(r+n)!}{n!r!} - \frac{(r+n-4)!}{n!(r-4)!} - \frac{(r+n-1)!}{(n-1)!r!} - \frac{(r+n-2)!}{(n-1)!(r-1)!}$.

Список литературы

[1] Stekloff W., “Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique”, *Annales Sci. de l'E.N.S.* 3^e *série*, **19** (1902), 191–259; 455–490.

О симметрии экстремали в некоторых одномерных теоремах вложения

Е. В. Мукосеева

Санкт-Петербургский государственный университет

Рассмотрим задачу о точной константе в теореме вложения

$$\lambda(r,k) = \min \frac{\|f^{(r)}\|_{L_2[-1,1]}}{\|f^{(k)}\|_{L_\infty[-1,1]}}, \tag{1}$$

где $r,k \in \mathbb{Z}_+$, $r > k$, минимум берется $f \in \overset{\circ}{W}{}^r_2(-1,1)$, т.е. по множеству

$$\left\{ f \in \mathcal{AC}^{r-1}[-1,1] \,\middle|\, f^{(r)} \in L_2(-1,1); \quad f^{(j)}(\pm 1) = 0,\ j = 0,1,\ldots,r-1. \right\}$$

Эта задача при $k = 0,1,2$ и произвольных $r > k$ рассматривалась Г.А.Калябиным в работе [1] (см. также [2]). Кроме точных констант, в [1] была установлена симметрия (чётность) экстремали при $k = 0,2$ и асимметрия при $k = 1$.

Мы устанавливаем следующий результат:

Теорема. 1. *Если k нечетное, то при всех $r > k$ экстремаль в задаче* (1) *симметрией не обладает.*

2. *Если k четное, то при всех $r > k$ четная функция дает функционалу* (1) *локальный минимум.*

При $k = 4,6$ получен окончательный результат: доказано, что при всех $r > k$ экстремаль в задаче (1) – четная функция, и вычислены точные константы.

Доклад основан на совместной статье с А. И. Назаровым [3].

Работа поддержана Лабораторией им. П.Л.Чебышева СПбГУ, грант Правительства РФ дог. 11.G34.31.0026 и грантом СПбГУ 6.38.670.2013.

Список литературы

[1] Г. А. Калябин, “Точные оценки для функций класса $\overset{\circ}{W}{}^r_2(-1,1)$”, *Труды МИАН*, **269** (2010), 143–149.

[2] K. Watanabe, Y. Kametaka, H. Yamagishi, A. Nagai, K. Takemura, “The best constant of Sobolev inequality corresponding to clamped boundary value problem”, Article ID 875057, *Bound. Value Probl.*, 2011, 17 pp.

[3] Е. В. Мукосеева, А. И. Назаров, “О симметрии экстремали в некоторых теоремах вложения”, *Записки научных семинаров ПОМИ*, **425** (2014), 35–45.

О весовых пространствах бесконечно дифференцируемых функций в неограниченных областях в $\mathbb{R}^p$

И. Х. Мусин

Институт математики с ВЦ Уральского научного центра РАН

Доклад посвящён проблемам теории приближения, анализа Фурье и теории операторов в весовых пространствах бесконечно дифференцируемых функций в неограниченных областях многомерного вещественного пространства. В частности, будет дано усиление и развитие результатов, ранее полученных в [1]-[3].

Одно из рассматриваемых пространств – следующее. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^k$, $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$ – совокупность компактных множеств $K_m \subset \mathbb{R}^k$ таких, что $K_m \subset int K_{m+1}$ и $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} K_m = \Omega$. Пусть $\varphi = \{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ – семейство непрерывных функций $\varphi_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ таких, что для любого $m \in \mathbb{N}$:

$$1) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi_m(x)}{\|x\|} = +\infty \quad (\|\cdot\| \text{ – евклидова норма в } \mathbb{R}^n);$$

$$2) \quad \lim_{x\to\infty} (\varphi_m(x) - \varphi_{m+1}(x)) = +\infty.$$

Обозначим через $\mathcal{E}_\varphi(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ пространство функций $f \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ таких, что для каждого $m \in \mathbb{N}$ найдётся постоянная $c_m(f) > 0$ такая, что

$$|(D_t^\alpha D_x^\beta f)(t,x)| \leqslant c_m(f) \exp(\varphi_m(x)),\ t \in K_m, x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leqslant m, |\beta| \leqslant m.$$

Наделим $\mathcal{E}_\varphi(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ локально выпуклой топологией, определяемой системой полунорм

$$p_m(f) = \sup_{\substack{(t,x)\in K_m\times\mathbb{R}^n,\\ |\alpha|\leqslant m, |\beta|\leqslant m}} \frac{|(D_t^\alpha D_x^\beta f)(t,x)|}{\exp(\varphi_m(x))} \ .$$

Теорема 1. *Полиномы плотны в* $\mathcal{E}_\varphi(\Omega \times \mathbb{R}^n)$.

В предположении выпуклости Ω и при дополнительных условиях на φ будет дано описание сопряженного пространства к $\mathcal{E}_\varphi(\Omega\times\mathbb{R}^n)$ в терминах преобразования Фурье-Лапласа функционалов как некоторого пространства целых функций в $\mathbb{C}^{k+n}$. Здесь же приведем одно простое применение теоремы 1. Напомним, что линейный непрерывный оператор T на сепарабельном локально выпуклом пространстве X называют *гиперциклическим*, если существует точка $x \in X$ такая, что ее орбита $Orb\{x,T\} = \{x, Tx, T^2x, \dots\}$ плотна в X.

Теорема 2. *Любой линейный непрерывный оператор на* $\mathcal{E}_\varphi(\Omega\times\mathbb{R}^n)$, *коммутирующий с операторами частного дифференцирования и не являющийся кратным тождественному оператору*, *является гиперциклическим.*

Список литературы

[1] И. Х. Мусин, “О преобразовании Фурье–Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$”, *Матем. сб.*, **195**:10 (2004), 83–108.

[2] И. Х. Мусин, С. В. Попёнов, “О весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^n$”, *Уфимск. матем. журн.*, **2**:3 (2010), 54–62.

[3] I. Kh. Musin, “Approximation by polynomials in a weighted space of infinitely differentiable functions with an application to hypercyclicity”, *Extracta Math.*, **27**:1 (2012), 75–90.

О восстановлении функций из классов Ульянова «методом Смоляка»

Н. Ж. Наурызбаев, А. А. Шоманова, Н. Темиргалиев

Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л. Н. Гумилева

Аппроксимативные задачи для функций из периодических классов F с доминирующими смешанными производными тесно связаны с так называемыми «гиперболическими крестами» ($\bar{m}_j = \max\{|m_j|; 1\}$)

$$\Gamma = \Gamma_R \equiv \{m = (m_1, \ldots, m_s) \in Z^s : \bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s \leqslant R\} \ (R \geqslant 1)\,, \qquad (1)$$

образующих «Спектр больших коэффициентов Фурье» этих классов ($\varepsilon > 0$)

$$\Gamma_\varepsilon(F) = \{m \in Z^s : \sup_{f \in F} \left|\hat{f}(m)\right| \geqslant \varepsilon > 0\},$$

в случае (1) – классов Коробова E_s^r состоящего из функций f с условием $\left|\hat{f}(m)\right| \leqslant (\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s)^{-r}$ $(m = (m_1, \ldots, m_s) \in Z^s, r > 1)$

Эти задачи органически примыкают к основной проблеме «Геометрии чисел», где требуется построить решетку с минимальным значением определителя, пересекающуюся с заданным множеством самое большее по нулевому элементу (см. [1]).

В случае «гиперболических крестов» такие задачи тесно связаны с сетками с малыми дискрепансами с порядками убывания $\ll \frac{\ln^{\beta(s)} N}{N}$ $(\beta(s) > 0)$, которые автоматически приводят к оптимальным коэффициентам, стало быть, к точным в степенной шкале квадратурным формулам с равными весами по сетке Коробова.

Как оказалось, существуют сетки узлов с «большими» дискрепансами $\asymp \frac{1}{\ln N}$, но для которых посредством надлежащего выбора весов квадратурные формулы по ним также для классов функций с доминирующими смешанными производными можно сделать оптимальными в степенной шкале (см. [2-7]).

Такого сорта результаты берут начало в работах Смоляка [4], впоследствии известных под общим названием «Метод Смоляка», где существенные продвижения принадлежат В.Н.Темлякову [5], группе математиков, работающих в области под названием „Information Based Complexity“ и др.

К классам функций, спектр больших коэффициентов Фурье которых образуют гиперболические кресты, относятся классы Ульянова $U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi)$ (см. [3]).

Заменой «тензорных произведений классов» из [4] на «тензорные произведения функционалов» в [6] (см. также [3]) получаем новые операторы, которые на классах Ульянова дают близкие к оптимальным порядки восстановления (частично изложено в [7]).

Так, если в шкале классов Коробова E_s^r $(r > 1, s = 1, 2, \ldots)$ погрешности восстановления функций по сеткам Коробова с малым дискрепансом $\ll N^{-1} \log^{\beta(s)} N$ в степенной шкале имеют скорость убывания не быстрее $\asymp N^{-\frac{r-1}{2}}$, то по сеткам Смоляка с плохим дискрепансом $\asymp \ln^{-1} N$ имеют неулучшаемую скорость $\asymp N^{-(r-1)}$, что мы относим к необъяснимому для нас феномену [2].

Заметим, что такие же скорости в степенной шкале для всех классов с доминирующей смешанной производной типа SW, SH и SB с дальнейшими уточнениями показателей логарифмов в их числителях.

Список литературы

RBibitem1E. А. Баилов, М. Б. Сихов, Н. Темиргалиев, “Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **54**:7 (2014), 1059–1077.

[1] N. Nauryzbayev, N. Temirgaliyev, “An Exact Order of Discrepancy of the Smolyak Grid and Some General Conclusions in the Theory of Numerical Integration”, *Found Comput Math.*, 2012, № 12, 139–172.

[2] Н. Темиргалиев, “Классы $U_s(\beta,\theta,\alpha;\psi)$ и квадратурные формулы”, *Докл. РАН*, **393**:5 (2003), 605–608.

[3] С. А. Смоляк, “Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций”, *Докл. АН СССР*, **148**:5 (2003), 1042–1045.

[4] В. Н. Темляков, “Приближенное восстановление периодических функций нескольких переменных”, *Матем. сб.*, **128**:2 (1985), 256–268.

[5] Н. Темиргалиев, “Тензорные произведения функционалов и их применения”, *Докл. РАН*, **430**:4 (2010), 460–465.

[6] Н. Темиргалиев, Н. Ж. Наурызбаев, А. А. Шоманова, “Аппроксимативные возможности вычислительных агрегатов “Типа Смоляка” с ядрами Дирихле, Фейера и Валле-Пуссена в шкале классов Ульянова”, *Известия вузов. Математика*, 2015, № 7, 75–81.

Точное количество измерительных векторов

С. Я. Новиков
Самарский государственный университет

Для вещественного дискретного сигнала $v \in \mathbb{R}^M$ известно точное минимальное количество измерительных векторов полной системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$, которое может обеспечить восстановление сигнала с точностью до унимодулярного множителя по числам $\{|\langle v, \varphi_n \rangle|\}_{n=1}^N$. Это число равно $N = 2M - 1$. Для комплексного сигнала выдвинута гипотеза, согласно которой соответствующее число равно $4M - 4$. Доклад посвящен современному состоянию дел по обоснованию (опровержению) этой гипотезы.

О правильном порядке поперечников «кодирования» функций из классов $H_p^\omega(0,1)$ в лебеговой метрике $L^q(0,1)$

Е. Е. Нурмолдин, Б. Б. Ахметов

Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л. Н. Гумилева

Поперечник «кодирования» функций и информативная мощность всех линейных функционалов, по определению, есть соответственно величины

$$\lambda^N(F) = \inf_{\substack{l_1,\dots,l_N \text{ – все} \\ \text{возможные линейные} \\ \text{функционалы}}} \ \sup_{\substack{f,g\in F:\, l_\tau(f)=l_\tau(g) \\ (\tau=1,\dots,N)}} \|f-g\|_Y,$$

$$\delta_N(F)_Y \equiv \inf_{\substack{l_1,\dots,l_N \text{ – все} \\ \text{возможные линейные} \\ \text{функционалы}, \varphi_N}} \ \sup_{f\in F} \|f(x)-\varphi_N(l_1(f),\dots,l_N(f);x)\|_Y,$$

где F – класс функций на $[0,1]^s$, Y – нормированное пространство, $l_1,\dots,l_N$ – линейные функционалы над F, $\varphi_N(z_1,\dots,z_N;x): R^N\times[0,1]^s\to R^1$ – алгоритм переработки информации.

Двойственное соотношение (здесь оценка снизу $\lambda^N \gg \delta_N$ к известной оценке сверху Н. П. Корнейчука принадлежит Ю. В. Малыхину) $\lambda^N(F)_Y \asymp \delta_N(F)_Y$ по решенным (К(В)П-1-задачам) $\delta_N(F)_Y \asymp \vartheta_N$ позволяет получать неулучшаемые порядковые оценки для $\lambda^N(F)_Y$, если только $\lambda^N(F)_Y \asymp \lambda_1^N(F)_Y$, где

$$\lambda_1^N(F)_Y = \sup\left\{\|f\|_Y : f\in F,\ l_\tau(f)=0\ (\tau=1,\dots,N)\right\}.$$

Как легко проверить, равенство $\lambda^N(F)_Y = 2\lambda_1^N(F)_Y$ выполнено для класса

$$F = H_p^\omega(0,1) \equiv \{f\in L^p(0,1) : \omega_p(\delta;f)\leqslant\omega(\delta)\ (0\leqslant\delta\leqslant1)\}$$
$$(1\leqslant p\leqslant\infty,\ \ L^\infty(0,1)\equiv C(0,1)),$$

где $\omega_p(\delta;f)$ и $\omega(\delta)$ – модули непрерывности функции f из $L^p(0,1)$ и в общем определении С. М. Никольского соответственно. Поэтому, применяя результаты из [1], приходим к порядковым соотношениям для поперечника по «кодированию» функций: если $2\leqslant p<q<\infty$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2}\omega^q\left(\frac1n\right)<\infty$, то

$$\lambda^N\left(H_p^\omega\right)_{L^q} \asymp \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2}\omega^q\left(\frac1n\right)\right)^{\frac1q}$$

и если $2\leqslant p<\infty$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\frac1p-1}\omega\left(\frac1n\right)<\infty$, то

$$\lambda^N\left(H_p^\omega\right)_{L^\infty} \asymp \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{\frac1p-1}\omega\left(\frac1n\right).$$

В заключение отметим, что в случае $2 \leqslant p < q < \infty$ в $\delta_N\big(H_p^\omega(0,1)\big)_{L^q(0,1)}$ согласно соответствующему результату П. Л. Ульянова (1964 год), среди всех вычислительных агрегатов наилучше приближают частичные суммы ряда Фурье–Хаара, коэффициенты Фурье которых, без потери порядковой точности, можно вычислять с точностью $\frac{1}{N}\left(\sum_{n=N}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2}\omega^q\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{q}}$, но никак не (порядково) больше (что есть решение задачи К(В)П-2).

Список литературы

[1] Ш. У. Ажгалиев, Н. Темиргалиев, “Информативная мощность всех линейных функционалов при восстановлении функций из классов H_p^ω”, *Матем. сб.*, **198**:11 (2007), 3–20.

О проблеме мультипликаторов тригонометрических рядов Фурье

Е. Д. Нурсултанов, Н. Т. Тлеуханова

[a] *Казахстанский филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова*

Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T}^n)$, $f \approx \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(k)e^{ikx}$. Последовательность комплексных чисел $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ назовем мультипликатором из $L_p(\mathbb{T}^n)$ в $L_q(\mathbb{T}^n)$ ($\lambda \in m(L_p \to L_q)$), если найдется $f_\lambda \in L_q(\mathbb{T}^n)$ с рядом Фурье $f_\lambda \approx \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} \lambda_k \hat{f}(k)e^{ikx}$ для которых верно неравенство

$$\|f_\lambda\|_{L_q} \leqslant c\|f\|_{L_p}.$$

Особый интерес представляет мультипликаторы вида $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, где каждое λ_k принимает значение 1 или 0. Здесь важным является неравенство М. Рисса-Никольского. Для параллелепипеда Q из $\mathbb{Z}^n$ верно неравенство

$$\|\sum_{k\in Q} \hat{f}(k)e^{ikx}\|_{L_q} \leqslant c_{p,q}|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_{L_p}\,\text{при}\, r \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty. \tag{1}$$

В докладе мы приводим некоторые результаты, связанные с неравенствами (1), а также верхние и нижние оценки норм для классов мультипликаторов $m(L_p \to L_q)$.

Список литературы

[1] С. М. Никольский, “Неравенства для целых функций конечной степени и их приложения в теории дифференцируемых функций”, *Труды МИАН*, **38** (1951), 244–278.

Регрессии как наилучшие приближения

К. Б. Нуртазина

Институт теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета имени Л. Н. Гумилева

Пусть в метрическом пространстве E с метрикой d дан элемент B и подмножество M, тогда элемент $m^* \in M$ называется наилучшим приближением B, если $d(B, m^*) = \inf\limits_{m \in M} d(B, m)$. Такой элемент называется также ближайшим к B элементом подмножества M. Совокупность элементов наилучшего приближения обозначим $P_M(B)$. Множество M называется множеством существования, если для любого $B \in M$ множество $P_M(B)$ непусто. Известно [1], что непустое ограниченно компактное подмножество метрического пространства является множеством существования, т.е. для любого элемента пространства существует элемент из M, являющийся его наилучшим приближением.

Задача 1.
$\nu \to min$
$d(X, B_k) \leqslant \nu, k = 1, ..., n.$
где B_k, $k = 1, ..., n$ точки из метрического пространства (E, d). Если M множество существования, то найдется точка $m^* \in M$, являющаяся решением Задачи 1, которую назовем центром системы точек B_k $k = 1, ..., n$ во множестве M.

Теорема 1. *Пусть в метрическом пространстве дано непустое подмножество M, в котором каждое замкнутое ограниченное подмножество компактно. Тогда для любой системы точек B_k, $k = 1, ..., n$ пространства (E, d) найдется центр $m^* \in M$ этой системы.*

Пусть Y, X – случайные величины (с. в.). Обычно коэффициенты a, b линейной регрессии $Y = a + bX$ находятся минимизацией $M[(Y - (a + bX))^2]$.

Здесь продемонстрируем другой путь. Пусть с. в. X, Y заданы в некотором пространстве Ω с вероятностной мерой μ. Можно определить их скалярное произведение $X \cdot Y = \int_\Omega XY d\mu$, т.е. $M[XY]$, а также норму $||X|| = \sqrt{X \cdot X}$,т.е.$\sqrt{M[X^2]}$.

Зададим несколько с. в. X_j , $j = 1, ..., n$ и пусть L-порожденное ими (плюс константа) (конечномерное) линейное подпространство. Тогда согласно теореме 1 для любой случайной величины Y существует в L ближайший к Y элемент по указанной норме. Заметим, что он будет ближайшим и в смысле квадрата нормы. Этот элемент назовем множественной L-регрессией Y. Разумеется, он имеет вид $a_0 + b_1^0 X_1 + ... + b_n^0 X_n$.

Далее, рассмотрим несколько с. в. Y_j, $j = 1, ..., n$, тогда согласно Теореме 1 в любом конечномерном линейном подпространстве L найдется центр системы этих с. в., то есть найдется с. в. $X \in L$, являющаяся решением следующей задачи:

Задача 2.
$\nu \underset{X \in L}{\to} min$
$M[(X - Y_k)^2] \leqslant \nu, k = 1, ..., n.$

Теорема 2. *Если L - линейное подпространство, порожденное $X \cup \{1\}$, то центр системы с. в. Y_j $j = 1, ..., n$ в L идентифицируется с линейной регрессией одновременно каждой с. в. Y_j, $j = 1, ..., n$ на с. в. X.*

Такие задачи в регрессионном анализе ранее не рассматривались. Новый взгляд позволяет осуществить единый подход [2] к задачам математической экономики с точки зрения теории приближений.

Список литературы

[1] В. И. Бердышев, Л. В. Петрак, *Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения*, УрО РАН, Екатеринбург, 1999.

[2] К. Б. Нуртазина, *Оптимизация портфеля ценных бумаг и управление в условиях неопределенности*, Государственный Университет Управления, Москва, 2011.

Спектр банаховой пары

В. И. Овчинников

Воронежский государственный университет

Введение. При анализе оптимальных интерполяционных теорем в весовых пространствах L_p функций, измеримых на пространствах с произвольными мерами, обнаружилось, что оптимальные интерполяционные теоремы, полученные для пространств функций на $\mathbb{R}^n$ с мерой Лебега не переносятся прямо на случаи, когда в образах и прообразах рассматриваются разные пространства с мерой. Простейший крайний случай – это две пары пространств L_p, где одна пара рассматривается на дискретном пространстве, а другая на непрерывном пространстве с мерой. Если в первом случае рассматривается пара пространств последовательностей, а во втором пространства функций на отрезке с мерой Лебега, то пространства в парах вложены противоположно, и в силу этого оптимальные интерполяционные теоремы становятся тривиальными. В данной работе показано, что для решения вопроса об оптимальных интерполяционных теоремах в общем случае требуется привлечь новое понятие спектра банаховой пары. Сравнение спектров различных пар позволяет понять причины значительного улучшения, возникающего в оптимальных интерполяционных теоремах. В частности, если говорить об интерполяции в шкалах пространств, то легко увидеть сдвиги по шкале в сторону улучшения оценок. В дальнейшем мы будем придерживаться определений и обозначений, следуя [1].

1. Определение спектра банаховой пары. Пусть $\overline{X} = \{X_0, X_1\}$ банахова пара, $s, t > 0$. Напомним, что K-функционалом $x \in X_0 + X_1$ называется

$$K(s,t,x,\overline{X}) = \inf_{\substack{x = x_0 + x_1,\\ x_0 \in X_0, x_1 \in X_1}} s\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1}.$$

Определение 1. Собственным вектором пары $\overline{X}$ будем называть такой элемент $e \in X_0 \cap X_1$, что

$$K(\|e\|_{X_0}, \|e\|_{X_1}, e, \overline{X}) = 1.$$

Нетрудно проверить, что на собственных векторах единичные сферы пространств X_0 и X_1 имеют параллельные касательные гиперплоскости. Кроме того

$$K(s,t,e,\overline{X}) = \min(s/\|e\|_{X_0}, t/\|e\|_{X_1}).$$

Если e – это собственный вектор пары, то элемент одномерного проективного пространства $\mathbb{RP}^1$, порождённый парой чисел $(\|e\|_{X_0}, \|e\|_{X_1})$, будем называть собственным числом пары $\overline{X}$.

Если пара пространств $\overline{X}$ порождена самосопряженным оператором A в некотором гильбертовом пространстве H, то есть $X_0 = H$, а X_1 – это пополнение $D(A)$ по норме $\|A(x)\|_H$, то собственные вектора этой пары совпадают с собственными векторами оператора A. В частности, отсюда следует, что многие гильбертовы пары не будут иметь собственных векторов и собственных чисел.

Поэтому более естественным в теории интерполяции линейных операторов ввести менее жестокий аналог собственного вектора и собственного числа.

Определение 2. Вектор $e \in X_0 \cap X_1$ будем называть псевдо-собственным вектором, если для некоторой константы $C < 1$ справедливо

$$C \min(s/\|e\|_{X_0}, t/\|e\|_{X_1}) \leqslant K(s, t, e, \overline{X}) \leqslant \min(s/\|e\|_{X_0}, t/\|e\|_{X_1}).$$

Соответствующая точка $(\|e\|_{X_0}, \|e\|_{X_1}) \in \mathbb{RP}^1$ будет называться псевдо-собственным числом. Множество всех псевдо-собственных чисел псевдо-собственных векторов с фиксированной константой C будем обозначать $\sigma_C(\overline{X})$ и называть C-спектром пары.

Обозначим через $K(\overline{X})$ множество всех функций вида $K(s, t, x, \overline{X})$, где x пробегает все множество $(X_0 + X_1)^o$, равное замыканию $X_0 \cap X_1$ в $X_0 + X_1$.

Пусть S подмножество $\mathbb{RP}^1$, порождённое некоторым подмножеством пар чисел (A, B), где $A, B > 0$.

Определение 3. Множество S будем называть спектральным множеством пары $\overline{X}$, если каждая функция из $K(\overline{X})$ эквивалентна некоторой функции вида

$$\sup_{\substack{A,\,B > 0 \\ (A,B) \in E \subset S}} \min(s/A, t/B)$$

для некоторого $E \subset S$.

Теорема 1. *Существует такая константа C, что $\sigma_C(\overline{X})$ является спектральным множеством любой пары $\overline{X}$.*

Эта теорема позволяет определить спектр пары как любое спектральное множество пары $\overline{X}$ состоящее из псевдо-собственных чисел этой пары при некотором фиксированном $C < 1$.

2. Интерполяционные теоремы. Положительная функция $\varphi(s, t)$ двух положительных переменных называется интерполяционной функцией, если она возрастает по s и t, и однородна первой степени.

Пусть S спектральное множество некоторой пары. Через $\varphi_S(s, t)$ мы будем обозначать интерполяционную функцию, которая является наименьшим расширением сужения φ на подмножество, порождающее $S \subset \mathbb{RP}^1$.

Через $\overline{X}_{\varphi,q}$ обозначим обобщённое пространство Лоренца, где $1 \leqslant q \leqslant \infty$. В терминах обобщенной конструкции Лионса–Петре $\overline{X}_{\varphi,q} = \varphi(X_0, X_1)_{q,q}$ (см. [2]). Пусть $\sigma(\overline{X})$ спектральное подмножество пары $\overline{X}$.

Теорема 2. *Пусть $\overline{X}$ произвольная банахова пара, φ невырожденная интерполяционная функция. Тогда*

$$\overline{X}_{\varphi,q} = \overline{X}_{\varphi_{\sigma(\overline{X})},q}$$

при любом $1 \leqslant q \leqslant \infty$.

Отсюда следует, что если линейный ограниченный оператор T действует из пары $\overline{X}$ в пару $\overline{Y}$, то

$$T : \overline{X}_{\varphi_{\sigma(\overline{X})},q} \to \overline{Y}_{\varphi_{\sigma(\overline{Y})},q}.$$

Если спектральные множества пар $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ существенно отличаются, то приходим к нетипичным интерполяционным теоремам. Напомним, что если φ степенная функция $s^{1-\theta}t^{\theta}$, то $\overline{X}_{\varphi,q} = \overline{X}_{\theta,q}$. Используя теорему 2 нетрудно построить такие вложенные пары $X_0 \subset X_1$ и $Y_0 \subset Y_1$, что из $T : \overline{X} \to \overline{Y}$ следует, например, что $T : \overline{X}_{1/2,q} \to \overline{X}_{1/3,q}$.

Список литературы

[1] Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980, 284 с.

[2] В. И. Овчинников, “Интерполяционные функции и интерполяционная конструкция Лионса–Петре”, *Успехи математических наук*, **69(418)**:4 (2014), 88–151.

О разложениях по многочленам, ортогональным в непрерывно-дискретных пространствах Соболева

Б. П. Осиленкер

Московский государственный строительный университет

В докладе будут изложены результаты о рядах Фурье по многочленам, ортогональным в непрерывно-дискретных пространствах Соболева S (и их частного случая – нагруженных пространствах), которые определяются с помощью скалярного произведения

$$f, g = \int_a^b f(x)\, g(x)\, w(x)\, dx + A_1 f(1)\, g(1) + B_1 f(-1)\, g(-1) + A_2 f'(1)\, g'(1) +$$

$$B_2 f'(-1)\, g'(-1) \qquad (A_1 \geqslant 0, B_1 \geqslant 0, A_2 \geqslant 0, B_2 \geqslant 0),$$

$w(x)$ – весовая функция. Задача изучения этих пространств была поставлена в классической монографии Р.Куранта и Д.Гильберта «Методы математи-ческой физики». Пространства S возникают в ряде проблем функциональ-ного анализа, теории функций, математической физики и вычислительной математики. Например, при исследовании краевых задач с параметром в граничных условиях.

В теоретической физике они возникают при исследо вании оператора Шредингера с точечными потенциалами (потенциалами нулевого радиуса, дельта-потенциалами).

В прикладных задачах пространства S применяются при исследовании процессов с сосредоточенными нагрузками и сосредоточенными моментами. Например, в задачах о колебании нагруженных стержней и о распространении тепла в неоднородном стержне, на конце которого помещена сосредоточенная теплоемкость.

В непрерывно-дискретных пространствах Соболева вводятся системы ортогональных многочленов. Следует отметить, что ряд свойств этих многочленов существенно отличаются от соответствующих свойств классических ортогональных многочленов.

В докладе будут изложены результаты о поведении частных сумм и линей-ных методах суммирования рядов Фурье по многочленам, ортонормирован-ным в пространствах Соболева, в частности, для методов Чезаро и Пуассона-Абеля.Основную роль в доказательстве играют полученные представления ядер Фейера, Пуассона и Валле-Пуссена.Общие результаты демонстрируют-ся на симметричных ортогональных многочленах Гегенбауэра-Соболева и нагруженных многочленах Якоби.

Представление решений одного класса интегро-дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами

Р. Перез Ортиз

Mexican Center for Economic and Social Studies (CEMEES)
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Изучаются интегро-дифференциальные уравнения с неограничеными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве, представляющие собой абстрактное волновое уравнение, возмущенное вольтерровыми интегральными операторами с ядрами, зависящими от параметра. К исследованию указанных уравнений приводят многочисленые задачи, возникающие в приложениях: в теории вязкоупругости, в теории распространения тепла в средах с памятью, и в теории усреднения. В работе получены представления решений следующей задачи для интегродифференциального уравнения вида

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A^2u - \int_0^t K(t-s)A^{2\xi}u(s)\,ds = f(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \qquad u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \tag{2}$$

в виде рядов по экспонентам, отвечающим точкам спектра оператор-функции $L(\lambda)$, являющейся символом уравнения (1). Здесь A – самосопряженный положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий компактный обратный, а параметр $\xi \in (0,1)$. Пусть $K(t)$ допускает представление $K(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \mathrm{e}^{-\gamma_j t}$, где $c_j > 0$, $\gamma_{j+1} > \gamma_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$, $\gamma_j \to +\infty$ $(j \to +\infty)$ и выполнены условия

a) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} < 1$,
b) $\sum_{j=1}^{\infty} c_j < +\infty$,
c) $\sup_k \{\gamma_k(\gamma_{k+1} - \gamma_k)\} = +\infty$.

Теорема. *Пусть $f(t) = 0$ при $t \in \mathbb{R}_+$, вектор-функция $u(t) \in W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$, $\gamma >$ nobreak0, является сильным решением задачи (1)–(2), и выполнены условия* a) *и* c). *Тогда для любого $t \in \mathbb{R}_+$ решение $u(t)$ задачи (1)–(2) представимо в виде*

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(\varphi_{1n} + \lambda_n^{\pm}\varphi_{0n})\mathrm{e}^{\lambda_n^{\pm} t}}{\ell'_n(\lambda_n^{\pm})} \right) e_n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{1n} + \lambda_{n,k}\varphi_{0n})\mathrm{e}^{\lambda_{n,k} t}}{\ell'_n(\lambda_{n,k})} \right) e_n$$

сходящегося по норме пространства H, где $\varphi_{0n} = (\varphi_0, e_n)$, $\varphi_{1n} = (\varphi_1, e_n)$, $Ae_n = a_n e_n$ ($\{e_n\}$ – ортонормированный базис, составленный из собственных векторов оператора A), а $\lambda_{n,k}$ – действителньные нули мероморфной функции $\ell_n(\lambda) = (L(\lambda)e_n, e_n)$, удовлетворяющие неравенствам,

$$\cdots - \gamma_k < \lambda_{n,k} < \cdots < -\gamma_1 < \lambda_{n,1} < 0, \qquad u \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_{n,k} = -\gamma_k \tag{3}$$

а $\lambda_n^{\pm}$ – пара комлексно-сопряженных нулей, $\lambda_n^{+} = \overline{\lambda_n^{-}}$, асимптотически предстамимых в виде:

1) *если выполнено условие* b), *то*

$$\lambda_n^{\pm}(\xi) = -\frac{1}{2}\frac{1}{a_n^{\delta_1(\xi)}}\sum_{j=1}^{\infty} c_j + O\left(\frac{1}{a_n^{\delta_2(\xi)}}\right) \pm i\left(a_n + O\left(\frac{1}{a_n^{\delta_3(\xi)}}\right)\right), \qquad a_n \to +\infty,$$

где все $\delta_k(\xi)$ *положительны* (*см.* [1], [2]).

2) *если условие* b) *не выполнено*, *то*

$$\lambda_n^{\pm}(\xi) = \frac{C_k}{a_n^{\beta_1(\xi)}} \pm i\left(a_n + \frac{C_k}{a_n^{\beta_1(\xi)}}\right) + O\left(\frac{1}{a_n^{\beta_3(\xi)}}\right), \qquad a_n \to +\infty,$$

где не все $\beta_k(\xi)$ *положительны* (*см.* [1], [2]).

Локализация спектра оператор-функции $L(\lambda)$, являющейся символом уравнения (1) приведена в работах [1], [2].

Список литературы

[1] В. В. Власов, Р. Перез Ортиз, “Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости и теплофизике”, *Матем. заметки* (в печати).

[2] R. Perez Ortiz, V. V. Vlasov, *Spectra of the Gurtin–Pipkin type equations with the kernel*, *depending on the parameter*, arXiv: 1403.4382.

[3] R. Perez Ortiz, V. V. Vlasov, *Correct solvability of hyperbolic Volterra equations with kernels depending on the parameter*, arXiv: 1412.1067.

[4] Н. А. Раутиан, “О структуре и свойствах решений интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике”, *Матем. заметки*, **90**:3 (2011), 470–473.

[5] G. Amendola, M. Fabrizio, J. M. Golden, *Thermodynamics of Materials with Memory*, *Theory and Applications*, Springer, New York, 2012.

К теории нелинейных переопределенных систем трех и четырех дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией в пространстве

Р. Пиров

Таджикский государственный педагогический университет имени Садриддина Айни

В монографии [1] рассматривались системы уравнений в частных производных первого порядка. В §5 работы [2] подробно щучены квазилинейные системы второго порядка с одной неизвестной функцией. Эти исследования продолжены в работе [3]. В данном сообщении рассматриваются некоторые типы систем, указанные в заглавии. Оговоримся сразу, что в исследуемых системах правые части заданные, а U-неизвестная функции, которые ищутся в классе $C^4(\Pi)$, где Π-некоторая односвязная ограниченная область пространства R^3, содержащая внутри себя начало координат. Основной метод исследования состоит в замене производных первого и второго порядка правых частей на новые неизвестные функции, переходе к системам с большим числом неизвестных функций и в установлении связей с достаточно изученными системами в полных дифференциалах (п.д.-система) [4].

I. Системы с тремя уравнениями. Здесь исследуются системы

$$U_{xx}, U_{yy}, U_{zz} = f^i(x,y,z;U,U_x,U_y,U_z,U_{xy},U_{yz},U_{zx}), \qquad i=\overline{1,3} \tag{1}$$

$$U_{xy}, U_{yz}, U_{zx} = f^j(x,y,z;U,U_x,U_y,U_z,U_{xx},U_{yy},U_{zz}), \qquad j=\overline{1,3} \tag{2}$$

$$U_{xx}, U_{yy}, U_{xz} = f^k(x,y,z;U,U_x,U_y,U_z,U_{xz},U_{yz},U_{zz}), \qquad k=\overline{1,3} \tag{3}$$

1. Пусть дана система (1). В силу замен $U_x = p(x,y,z), U_y = q(x,y,z), U_z = R(x,y,z), U_{xx} = p_y = Q(x,y,z), U_{yz} = q_z = \tau(x,y,z), U_{zx} = R_x = t(x,y,z)$ операции перекрестного дифференцированная $p_{xy} = p_{yx}, p_{yz} = p_{zy}, p_{zx} = p_{xz}, q_{xy} = q_{yx}, q_{yz} = q_{zy}, q_{zx} = q_{xz}, R_{xy} = R_{yx}, R_{yz} = R_{zy}, R_{zx} = R_{xz}$ и некоторыми несложными преобразованиями получим по отношению к исходной эквивалентную п.д.-систему

$$\begin{cases} U_x = p(x,y,z), U_y = q(x,y,z), U_z = R(x,y,z), \\ p_x = f^1(x,y,z;U,p,q,R,Q,t,\tau), p_y = Q(x,y,z), p_z = t(x,y,z) \\ q_x = Q(x,y,z), q_y = f^2(x,y,z;U,p,q,R,Q,t,\tau), q_z = \tau(x,y,z) \\ R_x = \tau(x,y,z), R_y = t(x,y,z), R_z = f^3(x,y,z;U,p,q,R,Q,t,\tau). \\ Q_x, Q_y, Q_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z, t_z, t_y, t_z = f^i, \quad i=\overline{4,12} \end{cases} \tag{4}$$

где правые части $f^4 - f^{12}$ явно выражаются через $f^i, i=\overline{1,3}$ и их производные с первого до третьго порядка. Уравнения (4), (6) составляют п.д. -систему относительно семи неизвестных функций U,p,q,R,Q,τ,t и девяти тождественно выполненых условиий полной интегрируемости (у.п.и). Для (4) будет девять тождественно выполненных соотношений

$$H^i(x,y,z;U,p,q,R,Q,\tau,t) = 0, \qquad i=\overline{1,9}, \tag{5}$$

где $H^i, i=\overline{1,9}$ явно выражаются через правые части (4) и их частные производные с первого до четвертого порядка.

Для исходной системы будет корректна следующая задача с начальными данными:

$$[U]_0 = c_1, [U_x] = c_2, [U_y]_0 = c_3, [U_z]_0 = c_4, [U_{xy}]_0 = c_5, [U_{yz}]_0 = c_6, [U_{zx}]_0 = c_7 \tag{6}$$

для которой можно считать доказанной следующую теорему:

Теорема. *Пусть в системе* (1) $f^i, i = \overline{1,3}, U \in C^4, f^2 \neq 0$ *и* $\alpha < min(a, b/M), M = max|f^i|, i = \overline{1,3}$.

Если соотношения (5) *в некоторой окрестности точки* $(x_0, y_0, z_0; U_0, U_x^0, U_y^0, U_z^0, U_{xx}^0, U_{yz}^0, U_{zx}^0,)$ *выполняются тождественно, то задача* (1),(6) *разрешима единственным образом.*

Иными словами многообразие решений содержит семь произвольных постоянных. Если хотя бы одно из условий $H^i = 0, i = \overline{1,9}$ не выполняется тождественно, а разрешено в виде $t = \varphi(x, y, z; U, p, q, R, Q, \tau), \varphi \in C^1$, то приходим к п.д. системе относительно шести неизвестных функций и шести явных условиях совместности.

2. Теперь рассмотрим систему (2). Здесь осуществленные замены $U_x = p, U_y = q, U_z = R, q_x = Q, R_z =, p_z = t$ с учетом тождественного выполнения равенств $p_y = q_x, q_z = R_y, p_z = R_x$ приводят к квазилинейной системе

$$\begin{cases} U_x = p(x, y, z), U_y = q(x, y, z), U_z = R(x, y, z), \\ p_x, p_y = f^k(x, y, z; U, p, q, R, Q, \tau, t), k = 1, 2, p_z = t(x, y, z), \\ q_x, q_y = f^k(x, y, z; U, p, q, R, Q, \tau, t), k = 1, 2, q_z = Q(x, y, z), \\ R_x = t(x, y, z), R_y = f^3(x, y, z; U, p, q, R, \tau, t), R_z = \tau(x, y, z). \end{cases} \tag{7}$$

Имея систему (7) приходим к ситуации, сходной с той, что наблюдалась в пункте 1, т.е. для нее можем утверждать, что многообразие решений содержит соответственно семь или шесть произвольных постоянных.

3. В отличие от систем (1) и (2) в левых частях системы (3) нет частных производных по z (U_{xx}, U_{yy}, U_{xy}). Осуществляя замены $U_x = p, U_y = q, U_z = R, U_{yz} = q_z = Q, U_{xz} = p_z = , U_{zz} = R_z = t$ придем к системе

$$\begin{cases} U_x = p, U_y = q, U_z = R, p_x = f^1, p_y = f^3, p_z = \tau \\ q_x = f^3, q_y = f^2, q_z = Q, R_x = \tau, R_y = Q, R_z = t. \end{cases}$$

Повторяя процедуру аналогичную пунктам 1 и 2, получим еще девять неразрешенных относительно $\tau_x, \tau_y, \tau_z, Q_x, Q_y, Q_z, t_x, t_y, t_z$ уравнений. Разрешая их, опять-таки приходим к п.д.- системе относительно семи неизвестных функций, для которой имеет место аналогичная как п. 1 и 2 теорема с девятью явными условиями совместности, совершенно отличающимися от (5).

II. Системы с четырьмя уравнениями. Рассматриваются системы вида

$$U_{xx}, U_{xy}, U_{xz}, U_{yz} = f^i(x, y, z, U, U_x, U_y, U_z, U_{yy}), \qquad i = \overline{1,4}$$

и

$$U_{xx}, U_{xy}, U_{zz}, U_{yz} = f^k(x, y, z, U, U_x, U_y, U_z, U_{yy}, U_{zz}), \qquad k = \overline{1,4}$$

Следуя схеме исследования первой части работы выяснено, что многообразия решения этих систем соответственно содержать пять и шесть произвольных постоянных.

Список литературы

[1] E. Goursat, *Lecons sur l'inteqration des equations aux derivees partielles du premier ordre*, Paris, 1921, 454 pp.

[2] Л. Г. Михайлов, *Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями*, Душанбе, 1986, 116 с.

[3] Р. Пиров, "Исследование некоторых нелинейных систем уравнений в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией на плоскости", Крайові задачі для диференціальних рівнянь, **14**, выдавництво "Прут", Чернівці, 2006, 313–320.

[4] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970, 719 с.

О некоторых задачах теории приближения функций на бесконечномерном торе

С. С. Платонов

Петрозаводский государственный университет

Пусть G — компактная абелева группа (если не оговорено противное, то операцию в G будем задавать аддитивно), dx — мера Хаара на группе G. При $1 \leqslant p < \infty$ пусть $L_p(G)$ — лебегово пространство, состоящее из всех комплекснозначных функций $f(x)$. для которых конечна норма

$$\|f\|_p := \left(\int\limits_G |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

(функции рассматриваются с точностью до значений на множестве меры 0). При $p = \infty$ будем считать, что нормированное пространство $L_\infty(G) = C(G)$ состоит из всех непрерывных комплекснозначных функций на G и снабжается равномерной нормой

$$\|f\|_C = \|f\|_\infty := \sup_{x \in G} |f(x)|.$$

Характером группы G называется любая непрерывная комплекснозначная функция $\xi(x)$ на группе G, удовлетворяющая условиям: 1) $\xi(x + y) = \xi(x)\xi(y) \quad \forall x, y \in G$; 2) $|\xi(x)| = 1 \quad \forall x \in G$. Обозначим через $\widehat{G}$ множество всех характеров группы G. Множество $\widehat{G}$ является полной ортогональной системой в гильбертовом пространстве $L_2(G)$. Характеры служат основой для построения гармонического анализа на группе G (см., например, [1]). Линейные комбинации характеров могут использоваться в качестве средства приближения функций на группе G и на их основе можно изучать аналоги классических задач теории приближения.

Будем считать, что одномерный тор совпадает с фактор-группой $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Элемент $x + 2\pi\mathbb{Z} \in \mathbb{T}$, $x \in \mathbb{R}$, будем обозначать через $\bar{x}$, при этом число x будем называть представителем элемента $\bar{x}$. В частности, $\bar{0}$ — нулевой элемент группы $\mathbb{T}$.

Пусть $\mathbb{T}^\infty$ — прямое произведение счетного числа групп $\mathbb{T}$. Элементами группы $\mathbb{T}^\infty$ являются последовательности $\mathbf{x} = \{\bar{x}_k\}_{k=1}^\infty$, где $\bar{x}_k \in \mathbb{T}$. Снабженная тихоновской топологией группа $\mathbb{T}^\infty$ является компактной топологической группой.

Пусть $d\mathbf{x}$ — элемент группы Хаара на группе $\mathbb{T}^\infty$, нормированной условием $\int_G 1 \, d\mathbf{x} = 1$. Банаховы пространства $L_p(\mathbb{T}^\infty)$, $1 \leqslant p < \infty$, и $L_\infty(\mathbb{T}^\infty) = C(\mathbb{T}^\infty)$ являются частным случаем пространств $L_p(G)$ и $L_\infty(G)$, определенных выше.

Опишем характеры группы $\mathbb{T}^\infty$. Пусть $\mathbb{Z}^\infty$ — множество всех целочисленных последовательностей. Элементы из $\mathbb{Z}^\infty$ имеют вид $\mathbf{n} = \{n_k\}_{k=1}^\infty$, $n_k \in \mathbb{Z}$. Через $\mathbb{Z}^{(\infty)}$ обозначим подмножество в $\mathbb{Z}^\infty$, состоящее из всех финитных последовательностей, т. е. таких последовательностей $\mathbf{n}$ для которых $n_k = 0$ при достаточно больших k.

Характеры группы $\mathbb{T}^\infty$ задаются формулами

$$\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \exp(i(\sum_{k=1}^\infty n_k x_k)),$$

где $i = \sqrt{-1}$, $\mathbf{n} = \{n_k\} \in \mathbb{Z}^{(\infty)}$, $\mathbf{x} = \{\bar{x}_k\} \in \mathbb{T}^\infty$.

Обозначим через $\mathcal{P}(\mathbf{T}^\infty)$ комплексную линейную оболочку функций $\chi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})$ при $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^{(\infty)}$. Функции из $\mathcal{P}(\mathbf{T}^\infty)$ (будем называть их тригонометрическими полиномами на группе $\mathbb{T}^\infty$) будут служить средством приближения для функций из нормированных пространств $L_p(\mathbb{T}^\infty)$. Из теоремы Стоуна – Вейерштрасса вытекает, что $\mathcal{P}(\mathbb{T}^\infty)$ является всюду плотным подмножеством в $L_p(\mathbb{T}^\infty)$.

Для $\bar{s} \in \mathbb{T}$ пусть

$$|\bar{s}|_{\mathbb{T}} := \min_{m \in \mathbb{Z}} |s - 2\pi m|.$$

Если $\mathbf{x} = \{\bar{x}_k\} \in \mathbb{T}^\infty$, то полагаем

$$|\mathbf{x}| := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |\bar{x}_k|_{\mathbb{T}}.$$

Отображение $\mathbf{x} \mapsto |\mathbf{x}|$ задает квазинорму на группе $\mathbb{T}^\infty$, т. е. выполняются условия: 1) $|\mathbf{x}| = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = 0$; 2) $|-\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$; 3) $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{T}^\infty$.

Для любой функции $f(\mathbf{x})$ на группе $\mathbb{T}^\infty$ и для любого $\mathbf{h} \in \mathbb{T}^\infty$ пусть

$$(\tau_{\mathbf{h}} f)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x} - \mathbf{h}).$$

Оператор $\tau_{\mathbf{h}}$ называется оператором сдвига.

Для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^\infty)$ конечная разность $\Delta_{\mathbf{h}} f$ с шагом $\mathbf{h} \in \mathbb{T}^\infty$ и модуль непрерывности $\omega(f; \delta)_p$ определяются формулами

$$\Delta_{\mathbf{h}} f := f - \tau_{\mathbf{h}} f;$$
$$\omega(f;\delta)_p := \sup\{\|\Delta_{\mathbf{h}} f\|_p : \mathbf{h} \in \mathbb{T}^\infty, |\mathbf{h}| < \delta\},$$

где $\delta > 0$ — произвольное число.

Для любого натурального числа N обозначим через $\mathcal{P}_N^*(\mathbb{T}^\infty)$ линейную оболочку всех характеров $\chi_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{n} = \{n_k\} \in \mathbb{Z}^{(\infty)}$, которые удовлетворяют условиям $|n_k| \leqslant N/2^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Линейное подпространство $\mathcal{P}_N^*(\mathbb{T}^\infty)$ конечномерное, так как $n_k = 0$ при $k > \log_2 N + 1$.

Для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^\infty)$ пусть

$$E_N^*(f)_p := \sup\{\|f - \Phi\|_p : \Phi \in \mathcal{P}_N^*(\mathbb{T}^\infty)\}$$

— наилучшее приближение функции f функциями из $\mathcal{P}_N^*(\mathbb{T}^\infty)$.

Следующая теорема является аналогом теоремы Джексона классической теории приближений функций (см., например, [2]).

Теорема. *Если $f \in L_p(\mathbb{T}^\infty)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то для любого $N = 1, 2, 3, \ldots$ справедливо неравенство*

$$E_N^*(f)_p \leqslant C\,(\log_2 N + 1)\,\omega\left(f; \frac{1}{N}\right)_p,$$

где C — некоторая постоянная.

Другие аналоги теорем Джексона на бесконечномерном торе см. в [3].

Список литературы

[1] Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*, Т. 1, Мир, М, 1978.

[2] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М, 1977.

[3] С. С. Платонов, “О некоторых задачах теории приближения функций на бесконечномерном торе: аналоги теорем Джексона”, *Алгебра и анализ*, **26**:6 (2014), 99–120.

Оценки оператора сумм Римана для классов функций определяемых k-ми модулями непрерывности на «массивных» множествах

И. Е. Преображенский

Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова

Пусть I— отрезок [0,1] с обычной мерой Лебега и X симметричное пространство функций на I. Пусть $I = [0;1]$, $f : I \to R$ периодическая функция с периодом 1. Рассмотрим оператор сумм Римана $R_n f(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x + \frac{k}{n}), x \in I$.

Через $\psi(X,t) = \|\chi(D)|X\|$, где $t = \mu(D)$ обозначим фундаментальную функцию X. Для каждой $f : I \to R$ определим k-модуль непрерывности $\omega_k(f,\delta;X) = \sup_{0<h\leqslant\delta} \left\|\Delta_h^k(f,\cdot)|X\right\|$, где $\Delta_h^k(f;t) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} C_k^i f(t+ih)$. Через U обозначим множество квазивогнутых функций $\varphi : I \to R_+$, т.е. функций, которые не убывают и для которых $t^{-1}\varphi(t)$ не возрастает и $\lim_{t\to 0}\varphi(t) = 0$. Через $U(k)$, $k = 2,3,\ldots$ обозначим множество функций $\varphi : [0,1] \to R_+$, состоящее из функций, которые не убывают, но для которых отношение $\varphi(t)/t^k$ не возрастает. Пусть $\varphi \in U(k)$. Через $H_X^{\varphi,k}$ обозначим пространство функций, норма в котором задаётся равенством $\left\|f|H_X^{\varphi,k}\right\| = \|f|X\| + \sup\limits_{h>0,h\in I} \frac{\omega_k(f,h;X)}{\varphi(h)}$.

Теорема 1. Зафиксируем натуральное число k и функцию φ типа k-го модуля непрерывности. Пусть $f \in H_X^{\varphi,k}$. Пусть ψ — фундаментальная функция пространства X. Зафиксируем $m \in N$ и $\epsilon > 0$ такое, что m взаимнопросто с числами $2,3,\ldots,k$. Выберем последовательности $\delta_i \downarrow 0$ и $\epsilon_i \downarrow 0$ так, чтобы выполнялись условия $\sum \epsilon_i < \epsilon$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_k(f,\delta_i;X)}{\psi(X;\epsilon_i)} < \infty$ и построим функцию

$$\Omega_\epsilon(f,h,X) = \inf_q \left\{ h^k \sum_{i=1}^{q} \frac{\omega_k(f,\delta_{i+1},X)}{\delta_{i+1}^k \psi(X,\epsilon_i)} + \sum_{i=q+1}^{\infty} \frac{\omega_k(f,\delta_i,X)}{\psi(X,\epsilon_i)} \right\}.$$

Тогда если ψ— строго возрастающая функция, то для любых $n \in N$ и $\epsilon > 0$ существует множество W, $\mu(W) < \epsilon$ такое, что для каждого $x \in I \setminus W$ выполняется

$$|R_n f(x) - R_{nm} f(x)| \leqslant c\Omega_\epsilon(f, \frac{1}{n}, X),$$

где константа c не зависит от f, n, m, ϵ, x.

Доказательство теоремы в существенном базируется на конструкциях из [1].

Список литературы

[1] Е. И. Бережной, “Оценки равномерного модуля непрерывности функций из симметричных пространств”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **60**:2 (1996), 3–20.

Управляемость и наблюдаемость в банаховых пространствах

А. И. Прилепко

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Рассматриваются абстрактные уравнения первого рода в банаховых пространствах. На основании соответствующих теорем Банаха формулируются задачи аппроксимативного и точного управления, а также приводятся соответствующие критерии. Эти проблемы рассматриваются в разных функциональных пространствах, в том числе, в пространствах О. В. Бесова, С. М. Никольского, С. Л. Соболева (см. [1]). Задачи рассматриваются как для систем с сосредоточенными параметрами (см. [2]), так и для систем с распределенными параметрами (см. [3], [4] и цитированную там литературу). В гильбертовых пространствах исследуются спектральные обратные задачи для нахождения точных оптимальных управлений (управлений с минимальной нормой). В этом случае доказывается принцип максимума, справедливый для систем ОДУ, а также и для целого ряда задач управления для уравнений с частными производными (см. [3], [4] и др.)

Список литературы

[1] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, Москва, 1996.

[2] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Ф. Е. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Физматлит, Москва, 1961.

[3] Ф. П. Васильев, М. А. Куржанский, М. М. Потапов, А. В. Разгулин, *Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения*, Макс-пресс, Москва, 2010.

[4] А. В. Фурсиков, *Оптимальное управление распределеннными системами. Теория и приложения*, Научная книга, Новосибирск, 1999.

Точные теоремы о следах и продолжениях в бесселевых шкалах банаховых пространств

М. Д. Рамазанов

Институт математики с ВЦ Уральского научного цента РАН

Уточняются понятия бесселевых шкал банаховых пространств. Изучаются свойства новых шкал. Выписывается универсальный линейный оператор продолжения функций с $(n-1)$-мерной гиперплоскости на все $\mathbb{R}^n$, который устанавливает точные по порядкам гладкостей теоремы продолжения в бесселевых шкалах пространств. Вычисляется нелинейный оператор продолжения, устанавливающий точные теоремы продолжения в общих банаховых пространствах.

К аппроксимации модифицированных функций Бесселя комплексного порядка

Ю. М. Раппопорт

Институт автоматизации проектирования РАН

Рассмотрены вопросы полиномиальной аппроксимации решений линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами и построения полиномиальных приближений ядер интегральных преобразований типа Лебедева. Предложена модификация Тау метода с минимальной невязкой для нахождения полиномиальных приближений решений дифференциальных уравнений второго порядка с полиномиальными коэффициентами. Показано, что предлагаемая нами в Тау методе невязка в виде смещенного многочлена Чебышева со специальным образом подобранными сдвигом и нормировкой, в ряде важных случаев является минимальной в равномерной метрике на $[0, 1]$ среди всех возможных полиномиальных невязок. На примере вычисления модифицированной функции Бесселя второго рода $K_{i\beta}(x)$ показаны преимущества этой модификации по сравнению с другими вариантами Тау метода.

Предложена вычислительная схема применения Тау метода для решения систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка с полиномиальными коэффициентами. Получены рекуррентные формулы [1] для коэффициентов канонических вектор-полиномов, удобные для проведения вычислений. Настоящая схема интегральной формы Тау метода может быть использована для получения полиномиальных приближений гипергеометрической, конфлюентной гипергеометрической функции первого рода с комплексными параметрами и модифицированной функции Бесселя второго рода комплексного порядка $K_{\alpha+i\beta}(x)$. Для случая $\alpha = \frac{1}{2}$ в [2] показано, что область изменения параметра β для проведения эффективных и устойчивых вычислений может быть значительно расширена.

Список литературы

[1] J. M. Rappoport, “Canonical vector-polynomials at computation of Bessel functions of complex order”, *Comput. Math. Appl.*, **41**:3/4 (2001), 399–406.

[2] B. R. Fabijonas, D. W. Lozier, J. M. Rappoport, “Algorithms and codes for the Macdonald function: Recent progress and comparisons”, *J. Comput. Appl. Math.*, **161**:1 (2003), 179–192.

Квазифейнмановские формулы для группы Шрёдингера: что это, как их получать, какая от них польза

И. Д. Ремизов

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского

Формула Фейнмана – это равенство следующего вида: слева стоит определяемая равенством функция, а справа – предел кратного интеграла при стремящейся к бесконечности кратности (и только он). Предложенный О. Г. Смоляновым подход, основанный на теореме Чернова, позволил в виде формул Фейнмана получить решения для некоторых важных эволюционных уравнений: теплопроводности, Шрёдингера и других, см. обзоры [1], [2]. В настоящем докладе предлагается расширить поле внимания с фейнмановских формул до квазифейнмановских.

Определение. Квазифейнмановская формула – это равенство следующего вида: слева стоит определяемая равенством функция, а справа – выражение, содержащее кратные интегралы сколь угодно большой кратности. В отличие от фейнмановских, квазифейнмановские формулы в правой части могут содержать суммирование или другие операции.

Естественность такого расширения диктуется недавно полученной теоремой 2, дающей представление решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера не в виде фейнмановских, а в виде квазифейнмановских формул. Причем доказательство двух классов квазифейнмановских формул, даваемых новым методом, оказывается на два порядка проще, чем фейнмановских. Продвижение было достигнуто на основе структурирования условий теоремы Чернова следующим образом:

Теорема 1 (П. Р. Чернов, 1968). *Пусть $\mathcal{F}$ — банахово пространство и $L_b(\mathcal{F},\mathcal{F})$ — пространство всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{F}$, наделенное обычной операторной нормой. Пусть дан линейный оператор $L\colon \mathcal{F}\supset Dom(L)\to\mathcal{F}$ и такая функция G, что*:

(E) *Существует сильно непрерывная полугруппа $(e^{tL})_{t\geqslant 0}$ с генератором $(L, Dom(L))$.*

(CT1) *Функция G определена на $[0,+\infty)$, принимает значения в $L_b(\mathcal{F},\mathcal{F})$, и отображение $t\longmapsto G(t)f$ непрерывно на каждом векторе $f\in\mathcal{F}$.*

(CT2) $G(0)=I$.

(CT3) *Существует такое плотное в $\mathcal{F}$ подпространство $\mathcal{D}\subset\mathcal{F}$, что при всех $f\in\mathcal{D}$ существует $G'(0)f=\lim_{t\to 0}(G(t)f-f)/t$.*

(CT4) *Замыкание оператора $(G'(0),\mathcal{D})$ существует и равно $(L, Dom(L))$.*

(N) *Существует такое число $\omega\in\mathbb{R}$, что $\|G(t)\|\leqslant e^{\omega t}$ при всех $t\geqslant 0$.*

Тогда для каждого $f\in\mathcal{F}$ справедливо $(G(t/n))^n f\to e^{tL}f$ при $n\to\infty$, где предел равномерен по $t\in[0,t_0]$ при каждом фиксированном $t_0>0$.

Замечание 1. Если функция G (или, как иногда коворят, семейство $(G(t))_{t\geqslant 0}$) удовлетворяет условиям (CT1)–(CT4), то ее предлагается называть касающейся по Чернову (Chernoff-tangent) оператора L. Если же функция удовлетворяет всем условиям теоремы Чернова, то она называется (или оказывается, в зависимости от определения эквивалентности по Чернову, ср. [2] и [4]) эквивалентной по Чернову полугруппе $(e^{tL})_{t\geqslant 0}$, что означает сходимость $(G(t/n))^n f \to e^{tL} f$. В случае, когда при каждом t оператор $G(t)$ интегральный, равенство $e^{tL} f = \lim_{n\to\infty}(G(t/n))^n f$ и есть формула Фейнмана.

Основной анонсируемый в докладе результат кратко выражается так: если семейство $(S(t))_{t\geqslant 0}$ состоит из самосопряженных операторов и находится в черновском касании с самосопряженным оператором H, то семейство $R(t) = e^{i(S(t)-I)}$ эквивалентно по Чернову полугруппе Шрёдингера $(e^{itH})_{t\geqslant 0}$. В несколько большей общности это выглядит так.

Теорема 2 (И. Д. Ремизов, 2014). *Пусть даны линейный самосопряженный оператор $H\colon \mathcal{F} \supset Dom(H) \to \mathcal{F}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{F}$ и ненулевое число $a \in \mathbb{R}$. Пусть функция S черновски касается оператора H и $(S(t))^* = S(t)$ для каждого $t \geqslant 0$. Положим $R(t) = e^{ia(S(|t|)-I)\operatorname{sign}(t)}$, определяя экспоненту суммой ряда (это возможно, поскольку при каждом $t \in \mathbb{R}$ в показателе экспоненты стоят линейные ограниченные операторы в $\mathcal{F}$).*

Тогда функция R эквивалентна по Чернову группе $(e^{iatH})_{t\in\mathbb{R}}$ и для каждых $t \in \mathbb{R}$ и $f \in \mathcal{F}$ по норме в $\mathcal{F}$

$$e^{iatH} f = \left(\lim_{n\to\infty}\left(e^{ia(S(|t/n|)-I)\operatorname{sign}(t)}\right)^n\right) f,\ \ e^{iatH} f = \left(\lim_{n\to\infty} e^{ian(S(|t/n|)-I)\operatorname{sign}(t)}\right) f, \quad (1)$$

$$e^{iatH} f = \left(\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\sum_{m=0}^{k}\frac{i^m a^m n^m(\operatorname{sign}(t))^m}{m!}(S(|t/n|)-I)^m\right) f, \quad (2)$$

$$e^{iatH} f = \left(\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\sum_{m=0}^{k}\sum_{q=0}^{m}\frac{(-1)^{m-q} i^m a^m n^m(\operatorname{sign}(t))^m}{q!(m-q)!}(S(|t/n|))^q\right) f, \quad (3)$$

$$e^{iatH} f = \left(\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\left[\left(1-\frac{ian\operatorname{sign}(t)}{k}\right)I + \frac{ian\operatorname{sign}(t)}{k}S(|t/n|)\right]^k\right) f, \quad (4)$$

$$e^{iatH} f = \left(\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\sum_{q=0}^{k}\frac{k!(k-ian\operatorname{sign}(t))^{k-q}(ian\operatorname{sign}(t))^q}{q!(k-q)!k^k}(S(|t/n|))^q\right) f, \quad (5)$$

$$e^{iatH} f = \left(\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\sum_{m=0}^{k}\sum_{q=0}^{k-m}\frac{(-1)^{k-m-q} k!\,(ian\operatorname{sign}(t))^{k-q}}{m!q!(k-m-q)!k^{k-q}}(S(|t/n|))^m\right) f. \quad (6)$$

Символ $|x|$ выше означает модуль действительного числа x.

Замечание 2. Если оператор $S(t)$ интегральный, то $(S(|t/n|))^m f$ — это m-кратный интеграл от функции f, а представленные выше равенства — это квазифейнмановские формулы. Здесь кратко отметим только три полезных свойства теоремы 2. Во-первых, она позволяет свести решение задачи Коши для уравнения Шрёдингера к построению семейства, касающегося оператора из уравнения теплопроводности (это проще, чем в случае оператора Шрёдингера). Во-вторых, более не требуется контролировать рост нормы аппроксимирующего семейства. В-третьих, метод работает на уровне полугрупп, а, значит, применим к уравнениям с любым пространством координат. Доказательство теоремы 2, замечания к ней и формулировки связанных с ней открытых вопросов см. в статье [3].

Настоящее исследование профинансировано грантом РФФИ 14-41-00044 в ННГУ им. Н.И.Лобачевского.

Список литературы

[1] O. G. Smolyanov, “Feynman formulae for evolutionary equations”, Trends in Stochastic Analysis, *London Mathematical Society Lecture Notes Series*, **353** (2009).

[2] Я. А. Бутко, “Формулы Фейнмана для эволюционных полугрупп”, *Наука и образование*, 2014, № 3.

[3] I. D. Remizov, *Non-Feynman approximation formulas for the Schrodinger group*, arXiv: 1409.8345.

[4] Yu. N. Orlov, V. Zh. Sakbaev, O. G. Smolyanov, “Feynman formulas as a method of averaging random Hamiltonians”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **285** (2014), 222–232.

Рациональная интерполяция и квадратурные формулы, содержащие наперед заданные узлы

Е. А. Ровба, Е. В. Дирвук

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

Пусть числа a_k, $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$ являются действительными и $a_k \in (-1, 1)$ либо попарно комплексно-сопряженными, $a_0 = 0$. Обозначим через $U_n(x)$ рациональную функцию Чебышева-Маркова второго рода [1]

$$U_n(x) = \frac{\sin \mu_{2n}(x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

где

$$\mu_{2n}(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n-1} \arccos \frac{x+a_k}{1+a_k x}, \quad \lambda_{2n}(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x}.$$

Функция $U_n(x)$ имеет $n-1$ нулей на интервале $(-1, 1)$:

$$-1 < x_{n-1} < x_{n-2} < \cdots < x_1 < 1, \quad \mu_{2n}(x_k) = k\pi, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Полагаем, что $x_0 = 1$ и $x_n = -1$. Тогда для всякой функции f, определенной на отрезке $[-1, 1]$, можно построить следующую рациональную функцию:

$$H_n(x, f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) A_k(x_k) + \sum_{k=1}^{n-1} y_k B_k(x),$$

где y_k, $\quad k = 1, 2, \ldots, n-1$ – произвольные действительные числа. Функции $A_k(x)$ и $B_k(x)$ определяются следующим образом:

$$A_k(x) = \frac{(1-x^2)(1-x_k x)}{\lambda_{2n}(x)\lambda_{2n}(x_k)} \left(\frac{U_n(x)}{x-x_k}\right)^2, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1;$$

$$A_0(x) = \frac{1+x}{2\lambda_{2n}(x)\lambda_{2n}(1)} U_n^2(x); \quad A_n(x) = \frac{1-x}{2\lambda_{2n}(x)\lambda_{2n}(-1)} U_n^2(x);$$

$$B_k(x) = \frac{(1-x^2)(1-x_k^2)}{\lambda_{2n}(x)\lambda_{2n}(x_k)} \frac{U_n^2(x)}{x-x_k}, k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Функция $H_n(x, f)$ обладает свойствами:

$$H_n(x_k, f) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n; \tag{1}$$

$$H_n'(x_k, f) = y_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) следует, что, во-первых, функция $H_n(x, f)$ является квази-интерполяционной, так как добавляются в качестве узлов точки $x_0 = 1$ и $x_n = -1$ (см., например, [2]), во-вторых, безусловно является функцией типа Эрмита–Фейера (см., например, [3]).

Рассмотрим сходимость квази-интерполяционного процесса Эрмита–Фейера. Полагаем $y_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ и пусть

$$H_n^{(0)}(x, f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) A_k(x).$$

Оператор

$$H_n^{(0)} : C[-1, 1] \to C[-1, 1]$$

является линейным, положительным и точным для функции $f(x) \equiv 1$, т.е.

$$H_n^{(0)}(x, 1) \equiv 1.$$

Теорема 1. *Если ряд*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - |c_n|), \tag{3}$$

$$|c_n| = \left| a_n^{-1} - \sqrt{a_n^{-2} - 1} \right| < 1, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

расходится, то для любой функции $f \in C[-1, 1]$ *соответствующая последовательность* $\{H_n(x, f)\}$ *равномерно сходится к функции* f *на отрезке* $[-1, 1]$.

Отметим, что расходимость ряда (3) является необходимым и достаточным условием замкнутости системы функции $\left\{(1 + a_k x)^{-1}\right\}_{k=0}^{\infty}$ в $C[-1, 1]$.

На основании квази-интерполяционного процесса Эрмита-Фейера, построим квадратурную формулу типа Лобатто.

Теорема 2. *Для произвольной функции* $f \in C[-1, 1]$ *имеет место следующая квадратурная формула*

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx \approx \frac{f(-1)}{2\lambda_{2n}(-1)} \pi + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(x_k)}{\lambda_{2n}(x_k)} \pi + \frac{f(1)}{2\lambda_{2n}(1)} \pi, \tag{4}$$

и для ее остатка справедлива оценка

$$\left| \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx - \frac{f(-1)}{2\lambda_{2n}(-1)} \pi - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(x_k)}{\lambda_{2n}(x_k)} \pi - \frac{f(1)}{2\lambda_{2n}(1)} \pi \right| \leqslant 2\pi R_{2n-1}(f; a),$$

где $R_n(f; a)$ *– наилучшее равномерное приближение функции* f *на отрезке* $[-1, 1]$ *посредством рациональных функций вида* $\frac{p_{2n-1}}{\prod_{k=1}^{2n-1}(1 + a_k x)}$.

Эффективность построенной квадратурной формулы (4) показана на конкретном примере.

Список литературы

[1] В. Н. Русак, *Рациональные функции как аппарат приближения*, Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, Минск, 1979, 176 с.

[2] P. Szisz, “On quasi-Hemrite-Fejer interpolation”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **10** (1959), 413–439.

[3] J. Szabados, P. Vertesi, *Interpolation of Functions*, World Scientific, Singapore, 1990, 305 pp.

Критерий Никольского–Зингера и наилучшая сходимость рядов по системам $\varphi(nx)$

А. И. Рубинштейн

Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ"

С помощью критерия наилучшего приближения в L_p (С. М. Никольский — $p = 1$, И. Зингер — $p > 1$) установлены следующие факты.

Утверждение 1. *Если*
а) $\varphi(x) = T_{m_0,1}(x)\sin m_0 x$, *где* $T_{m_0,1}(x) = \sum\limits_{m=0}^{m_0-1} a_m \cos mx > 0$, *а* $n_1 = 1$, $2 < n_{k+1} : n_k = q_k \in \mathbb{N}$, *то при* $\{A_k\} \in l_1$ *ряд*

$$\sum_{k\geqslant 1} A_k\, \varphi(n_k x) \tag{$*$}$$

наилучше сходится во всех $L_p(0,\, 2\pi)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$;
б) $\varphi(x) = T_{m_0,2}(x)\cos(2p_0+1)x$, *где* $T_{m_0,2}(x) = \sum\limits_{0\leqslant 2m<m_0} a_m \cos 2mx > 0$, *а* $n_1 = 1$, $n_{k+1} : n_k = 2p_k + 1 \in \mathbb{N}$, *то при* $\{A_k\} \in l_1$ *ряд* (*) *наилучше сходится во всех* $L_p(0,\, 2\pi)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Утверждение 2. *Ряд*

$$\sum_{k\geqslant 1} A_k\, \varphi(r^{k-1}x), \quad \{A_k\} \in l_1,$$

где

$$\varphi(x) = \sum_{t\geqslant 1} a_t \cos\left(s^{t-1}x\right), \quad \{a_t\} \in l_1,$$

при любых взаимно простых r, s *больших единицы наилучше сходится во всех* $L_{2m}(0,\, 2\pi)$, $m \in \mathbb{N}$, *и в* $L_\infty = C$.

Похожие утверждения имеют место и при $\varphi(x)$, являющихся многочленами и рядами Уолша-Пэли, а также для некоторых φ, определенных на конечном множестве.

Система Дирака с негладким потенциалом

А. М. Савчук, А. А. Шкаликов
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Мы изучаем оператор Дирака L_P, порожденный в пространстве $H = L_2[0,\pi] \oplus L_2[0,\pi] \ni \mathbf{y}$ дифференциальным выражением

$$\ell_P(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}' + P\mathbf{y}, \quad \text{где}$$

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Функции p_j, $j = 1, 2, 3, 4$, предполагаются суммируемыми на отрезке $[0,\pi]$ и комплекснозначными. Краевые условия имеют вид

$$U(\mathbf{y}) = C\mathbf{y}(0) + D\mathbf{y}(\pi) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(\pi) \\ y_2(\pi) \end{pmatrix}.$$

При этом строки матрицы

$$\mathcal{U} := (C,\, D) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \end{pmatrix}$$

мы считаем линейно независимыми. Оператор $L_{P,U}$, порожденный дифференциальным выражением ℓ_P и такими краевыми условиями является регулярным по Биркгофу, если определители матриц

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{14} \\ u_{21} & u_{24} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} u_{12} & u_{13} \\ u_{22} & u_{23} \end{pmatrix}$$

отличны от нуля.

Основными результатами являются теоремы об асимптотическом поведении собственных значений и собственных функций таких операторов и теорема о базисности Рисса системы собственных и присоединенных функций (в случае, когда краевые условия не являются сильно регулярными, имеет место базисность Рисса из двумерных подпространств). При этом остаточные члены в асимптотических формула зависят от пространства, в котором лежит потенциал. Мы рассмотрим случаи $P \in L_\nu[0,\pi]$, $\nu \in [1,2]$, и случай пространств Бесова $P \in B^\theta_{1,\infty}[0,\pi]$, $\theta \in (0,1)$. Доклад основан на результатах работы [1].

Список литературы

[1] A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov, “The Dirac Operator with Complex–Valued Summable Potential”, *Math. Notes*, **96**:5 (2014), 3–36.

О равномерной базисности Рисса системы корневых функций системы Дирака с негладким потенциалом

И. В. Садовничая

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Мы изучаем оператор Дирака L_P, порожденный в пространстве $H = L_2[0,\pi] \oplus L_2[0,\pi] \ni \mathbf{y}$ дифференциальным выражением

$$\ell_P(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}' + P\mathbf{y}, \quad \text{где}$$
$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Функции p_j, $j = 1,2,3,4$, предполагаются суммируемыми на отрезке $[0,\pi]$ и комплекснозначными. Краевые условия имеют вид

$$U(\mathbf{y}) = C\mathbf{y}(0) + D\mathbf{y}(\pi) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(\pi) \\ y_2(\pi) \end{pmatrix}.$$

Оператор $L_{P,U}$, порожденный дифференциальным выражением ℓ_P и такими краевыми условиями является регулярным по Биркгофу, если определители J_{14} и J_{23} отличны от нуля (здесь $J_{k,n}$ — определитель матрицы, составленный из k-го и n-го столбцов матрицы $\mathcal{U}$. Условия являются сильно регулярными, если дополнительно выполнено равенство $(J_{12} + J_{34})^2 + 4J_{14}J_{23} \neq 0$.

Теорема. *В общем случае суммируемого потенциала для любого сильно регулярного оператора $L_{P,U}$ система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ собственных (с нормировкой $\|\mathbf{y}_n\|_H = 1$) и присоединенных функций (определенных в виде канонических цепочек по Келдышу) образует базис Рисса в пространстве H. При этом, в случае, когда потенциал P лежит в пространстве Бесова $B^{\theta}_{1,\infty}[0,\pi]$ для некоторого $\theta > 0$ имеет место равномерная по шару $\|P\|_{B^{\theta}_{1,\infty}} \leqslant R$ базисность системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. А именно, найдется такой номер $N = N(\theta, R, U)$, что оператор $T : \mathbf{e}_n \mapsto \mathbf{y}_n$, определенный на подпространстве $Lin\{\mathbf{e}_n\}_{|n|>N}$, где $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — произвольный ортонормированный базис в H, допускает оценку*

$$\|T\|\|T^{-1}\| \leqslant M = M(\theta, R, U).$$

Мы также обсудим вопрос о равномерной базисности для случая, когда $P \in L_\nu[0,\pi]$ для некоторого $\nu > 1$ и $\|P\|_{L_\nu} \leqslant R$.

Аппроксимации краевых задач, решения которых допускают явление взрыва

В. Ж. Сакбаев

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения как уравнение

$$\mathbf{A}u = f, \quad (1)$$

$$f \in X, \quad u \in Y, \quad \mathbf{A} \in B(Y, X)$$

где X, Y – банаховы пространства, а $B(Y, X)$ – некоторое топологическое пространство операторов, действующих из области определения $D(\mathbf{A}) \subset Y$ в пространство X, наделенное топологией τ_B. Задача Коши (1) определяет многозначное отображение $G: \ X \times B(Y, X) \to 2^Y$, заданное на множестве $X \times B(Y, X)$ и принимающее значение во множестве 2^Y всех подмножеств пространства Y, определяемое формулой $G(f, \mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1}(f)$.

Пусть τ_H – топология на множестве 2^Y, порожденная псевдометрикой Хаусдорфа r_H, заданной на множестве 2^Y равенствами $r_H(A, B) = \max\{\sup\limits_{x \in A} \rho_Y(x, B), \sup\limits_{x \in B} \rho_Y(x, A)\}$ если $A, B \neq \varnothing$; $r_H(A, \varnothing) = r_H(\varnothing, A) = +\infty$, если $A \neq \varnothing$; $r_H(\varnothing, \varnothing) = 0$.

Будем говорить, что задача Коши (1) *проявляет свойство взрыва, если точка* $(f, \mathbf{A})$ *является точкой разрыва отображения* G. *Будем говорить, что задача Коши* (1) *проявляет свойство взрыва вдоль топологического пространства краевых задач Коши* $S \subset X \times B(Y, X)$ *если точка* $(f, \mathbf{A})$ *является точкой разрыва отображения* $G|_S: \ S \to 2^Y$.

Приведены примеры краевых задач, (не) допускающих явление взвыва, показывающие, что явления bluw up, неединственности решения или их сочетания являются примерами явления взрыва в смысле определения (1). Наделение пространства задач борелевской мерой позволяет расширить определение решения исходной задачи до случайной величины со значениями в пространстве решений исходной задачи.

Случайной полугруппой будем называть измеримое отображение ξ *некоторого пространства с мерой в линейное топологическое пространство* $C_s(R_+, B(Y))$ *сильно непрерывных отображений полуоси* R_+, *значениями которого являются однопараметрические полугруппы. Математическим ожиданием случайной полугруппы* ξ *назовем операторнозначную функцию* $R_+ \to B(Y)$, *определяемую интегралом Петтиса*:

$$\mathbf{F}_\mu(t) = \mathbf{M}[\xi](t) = \int\limits_E \xi_\epsilon(t) d\mu, \ t \geqslant 0.$$

Математическое ожидание случайной полугруппы может не быть полугруппой, тем не менее

Теорема 1. *Пусть операторнозначная функция* $\mathbf{F} : [0, +\infty) \to B(X)$ *непрерывна в сильной операторной топологии, удовлетворяет условиям* $\mathbf{F}(0) = \mathbf{I}$ *и* $\|\mathbf{F}(t)\|_{B(X)} \leqslant e^{at}$, $t \in (0, \delta)$ *при некоторых* $a \in R$ *и* $\delta > 0$. *Тогда если последовательность* $\mathbf{G}_n$ *операторнозначных функций* $\mathbf{G}_n(t) = (\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^n$, $n \in \mathbf{N}$, $t \in [0, +\infty)$, *сходится в сильной операторной топологии равномерно на каждом отрезке* $[0, T]$, $T > 0$, *то предельная операторнозначная функция является сильно непрерывной однопараметрической полугруппой операторов в пространстве* X *типа* $\omega \leqslant a$.

Теорема 2. *Пусть* $\{\mathbf{L}_\epsilon, \epsilon \in E\}$ *– операторнозначная функция на множестве* E, *на* σ*-алгебре подмножеств* 2^E *которого задана вероятностная мера* μ, *значениями которой являются генераторы сильно непрерывных сжимающих полугрупп в банаховом пространстве* X. *Пусть существует подпространство* $D \subset X$, *являющееся существенной областью определения операторов* $\mathbf{L}_\epsilon$, $\epsilon \in E$, *такое, что для любого* $x \in D$ *интеграл* $\int\limits_E \|\mathbf{L}_\epsilon x\| d\mu$ *сходится. Тогда если определенный на пространстве* D *равенством* $\mathbf{S}x = \int\limits_E \mathbf{L}_\epsilon x d\mu$ *оператор* $\mathbf{S}$ *замыкаем и его замыкание является генератором сильно непрерывной полугруппы, то* $(\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^n \to e^{t\mathbf{S}}$, $t \in R_+$ *равномерно на любом отрезке, где* $\mathbf{F}(t) = \int\limits_E e^{t\mathbf{L}_\epsilon} d\mu$, $t \geqslant 0$.

Список литературы

[1] Ю. Н. Орлов, В. Ж. Сакбаев, О. Г. Смолянов, “Формулы Фейнмана как метод усреднения случайных гамильтонианов”, *Труды МИАН*, **285** (2014), 232–243.

О наилучших квадратурных формулах приближенного вычисления криволинейных интегралов первого типа для некоторых классов функций

Д. С. Сангмамадов

Таджикский государственный университет коммерции

Рассматривается задача о приближенном вычислении криволинейных интегралов первого рода для классов функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности. Пусть функция $f(M) = f(x_1, x_2)$ определена и интегрируема вдоль кривой $\Gamma \in R^2$ и

$$J(f;\Gamma) = \int\limits_{\Gamma} f(M)ds. \tag{1}$$

Если Γ задана параметрическими уравнениями $x_i = \varphi_i(s)$, $i = 1, 2$; $0 \leqslant s \leqslant L$, то всякая квадратурная формула для приближенного вычисления интеграла (1)

$$J(f;\Gamma) = \int\limits_{0}^{L} f(\varphi_1(s), \varphi_2(s))ds \approx L_N(f;\Gamma;P,S) := \sum_{k=1}^{N} p_k f(\varphi_1(s_k), \varphi_2(s_k)) \tag{2}$$

задается векторами коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^{N}$ и узлов $S : 0 \leqslant s_1 < \ldots < s_N \leqslant L$. Пусть $\mathfrak{N}_L$ - множество кривых Γ, заданных уравнениями $x_i = \varphi_i(s), i = \overline{1,2}$, длины которых равно L, а $\mathfrak{M}$ - класс функций $f(\varphi_1(s), \varphi_2(s))$, определенных на кривых $\Gamma \in \mathfrak{N}_L$. Положим $|R_N(f;\Gamma;P,S)| = |J(f;\Gamma) - L_N(f;\Gamma;P,S)|$. Требуется найти величину [1]

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M};\mathfrak{N}_L) = \inf_{(P,S)} \sup_{\Gamma\in\mathfrak{N}_L} \sup_{f\in\mathfrak{M}} |R_N(f;\Gamma;P,S)|.$$

$H^\omega := H^\omega[0,L]$ - множество функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условию

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \leqslant \omega(|t'-t''|),\ \forall\, t',\, t'' \in [0,L],$$

$\omega(\delta)$ - заданный модуль непрерывности, а $\bar{H}^{\omega_1,\omega_2}$ - класс кривых $\Gamma \subset R^2$, у которых координатные функции $\varphi_i(s) \in H^{\omega_i}$ $(i = 1, 2)$. Пусть $\mathfrak{M}(\rho_p)$ – класс функций $f(M)$ для любых двух точек $M', M'' \in \Gamma$, удовлетворяющих условию

$$|f(M') - f(M'')| \leqslant \rho_p(M^{'}, M^{''}) := \sqrt[p]{(x'-x'')^p + (y'-y'')^p},\ 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Теорема. *Среди формул вида* (2) *с произвольными векторами коэффициентов и узлов* (P,S) *наилучшей на классе* $\mathfrak{M}(\rho_p)$ *и кривых* $\bar{H}^{\omega_1,\omega_2}$ *является формула*

$$\int\limits_{\Gamma} f(M)ds = \frac{L}{N}\sum_{k=0}^{N} f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right), \varphi_2\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) + R_N(f),$$

где $x_i = \varphi_i(s)$ $(i = \overline{1,2})$ *– параметрические уравнения кривой* Γ, L *– ее длина. Погрешность наилучшей*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_{\rho_p}; \mathcal{T}^{\omega_1,\omega_2}[0,L]\right) = 2N\int_0^{L/(2N)} \sqrt[p]{\omega_1^p(s) + \omega_2^p(s)}ds,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Список литературы

[1] С. М. Никольский, *Квадратурные формулы*, Наука, М., 1988.

[2] Н. П. Корнейчук, “Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных”, *Матем. заметки*, **3**:5 (1968), 565–576.

[3] М. Ш. Шабозов, “О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов на некоторых классах функций и кривых”, *Матем. заметки*, **96**:4 (2014), 637–640.

L_p-отклонения числовых последовательностей в задачах численного интегрирования

Е. А. Севастьянов

Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ"

Понятие "отклонение" дает количественную меру отклонения распределения числовой последовательности от некоторого идеального распределения. Оно широко используется в теории равномерного распределения последовательностей и ее приложениях. В частности, качество аппроксимации интеграла Римана

$$\int_0^1 f(x)dx$$

средними арифметическими

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \qquad (x_k \in [\,0,1\,])$$

непосредственно связано с отклонением последовательности $\{x_k\}$ "узлов".

Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — конечная последовательность действительных чисел такая, что $0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$; $A([\,0,x\,);X)$ — так называемый счетчик, по определению равный количеству членов x_k последовательности X, для которых $x_k \in [\,0,x\,)$ $(0 < x \leqslant 1)$. Положим

$$\Delta(x) = \Delta(x;X) = \frac{1}{n}A([\,0,x\,);X) - x \quad (0 < x \leqslant 1), \Delta(0) = 0.$$

Величину

$$D_p(X) = \|\Delta(x)\|_p = \left(\int_0^1 |\Delta(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 0 < p \leqslant \infty,$$

принято рассматривать как количественную характеристику равномерности распределения последовательности X на отрезке $[\,0,1\,]$ и называть L_p*-отклонением* заданной последовательности ([1], гл.2, §1). Значение $D(X) := D_\infty(X)$ наиболее употребительно в качестве характеристики последовательности X и называется просто *отклонением* или *экстремальным отклонением.* В задачах численного интегрирования могут представлять интерес L_p-отклонения при конечных p. Покажем это на примере следующего результата Г. Нидеррейтера [2] (см. также [1], гл.2, §5): пусть f — непрерывная на $[\,0,1\,]$ функция, $\omega(f;\delta)$ — ее равномерный модуль непрерывности, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $0 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$. Тогда

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \int_0^1 f(x)dx\right| \leqslant \omega(f;D(X)). \tag{1}$$

Доказывается, что в этом неравенстве $D(X)$ $(= D_\infty(X))$ можно заменить на $D_1(X)$, если модуль $\omega(f;\delta)$ является выпуклым.

Список литературы

[1] Л. Кейперс, Г. Нидеррейтер, *Равномерное распределение последовательностей*, Наука, М., 1985.

[2] H. Niederreiter, “Methods for estimating discrepancy”, *Applications of Number Theory to Numerical Analysis*, *S. K. Zaremba* (*ed*), Academic Press, N.Y., 1972, 203–236.

Квантовое исчисление и квазиконформные отображения

А. Г. Сергеев

Математический институт имени В. А. Стеклова РАН

Доклад посвящен квантовому исчислению, устанавливающему соответствие между функциями на единичной окружности и их квантовыми аналогами, задаваемыми неограниченными операторами в гильбертовом пространстве. В качестве основного примера дается квантовая интерпретация квазисимметричных гомеоморфизмов, т.е. гомеоморфизмов единичной окружности, продолжающихся до квазиконформных гомеоморфизмов единичного круга.

Представление функций рядами по системам Хаара, Уолша и их обобщениям

В. А. Скворцов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Для решения задач, связанных с представлением функций ортогональными рядами, вводятся и изучаются новые обобщенные интегралы перроновского и хенстоковского типа.

С помощью новых двоичных интегралов перроновского типа решаются задачи восстановления, по обобщенным формулам Фурье, коэффициентов многомерных рядов по системам Уолша и Хаара, сходящихся по Принсгейму всюду вне некоторых континуальных множеств единственности (см. [1]).

Соответствующие интегралы хенстоковского типа строятся также на компактных нульмерных абелевых группах для решения задачи восстановления коэффициентов рядов по системам характеров этих групп, в частности, группы целых p-адических чисел.

Рассмотрены также вопросы построения для указанных систем U-множеств и M-множеств. В частности, для системы характеров нуль-мерных групп указанного класса строятся совершенные M_0-множества, нулевой h-меры Хаусдорфа, где h – произвольная непрерывная справа неубывающая функция с $h(0) = 0$ (см. [2]).

Список литературы

[1] V. Skvortsov, F. Tulone, “Multidimensional dyadic Kurzweil-Henstock- and Perron-type integrals in the theory of Haar and Walsh series”, *J. Math. Anal. Appl.*, **421**:2 (2015), 1502–1518.

[2] V. Skvortsov, “On M_0-sets for series with respect to characters of compact zero-dimensional group”, *Tatra Mt. Math. Publ.*, **62**, Real Functions (2015) (to appear).

Теорема Харди-Литтлвуда для рядов Фурье–Прайса в пространствах Лоренца

Е. С. Смаилов

РГКП "Институт прикладной математики" КН МОН Республики Казахстан

В теории функций большую роль сыграла теорема Харди-Литтлвуда в пространстве Лебега $L_p[0,2\pi)$, $1<p<+\infty$ о тригонометрических рядах с монотонными коэффициентами [1]. С помощью этой теоремы доказывалась неулучшаемость различных утверждений гармонического анализа.

В настоящей работе речь идет о тереме типа теоремы Харди-Литтлвуда в пространстве Лоренца $L_{p\theta}\left[0,1\right]$, $1<p<+\infty$, $1<\theta<+\infty$ относительно рядов Фурье-Прайса с обобщенно-монотонными коэффициентами.

Понятие обобщенно-монотонных последовательностей было введено в [2]. В этой работе показано, что GM содержит в себе монотонные и квазимонотонные последовательности и классы последовательностей RBVS.

Пусть $L_{p\theta}\left[0,1\right]$, $1<p<+\infty$, $1<\theta<+\infty$ – пространство Лоренца [3], а $\Phi=\{\varphi_k\left(x\right)\}_{k=0}^{+\infty}$ –мультипликативная система Прайса. $\|f\|_{p\theta}$ означает норму элементов пространства $L_{p\theta}\left[0,1\right]$.

Основным результатом является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $\overline{a}=\{a_\nu\}_{\nu=0}^{+\infty}$ – положительная, стремящаяся к нулю обобщенно-монотонная последовательность. Для того чтобы последовательность $\overline{a}$ была последовательностью коэффициентов Фурье-Прайса некоторой функции $f\in L_{p\theta}\left[0,1\right]$, $1<p<+\infty$, $1<\theta<+\infty$ необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty}\nu^{\theta(1-1/p)-1}a_\nu^\theta<+\infty.$$

При этом имеет место соотношение

$$\left\{a_0^\theta+\sum_{\nu=1}^{+\infty}\nu^{\theta(1-1/p)-1}a_\nu^\theta\right\}^{\frac{1}{\theta}}\asymp\|f\|_{p\theta}.$$

Далее показывается применение данной теоремы в теории приближений и теории вложений.

Список литературы

[1] A. Zygmund, *Trigonometric series*, 3ed edition. V. I, II., Cambridge Univ. Press, 2002.

[2] C. Tikhonov, "Trigonometric series with general monotone coefficients", *Mathematical analysis and applications*, 2007, № 326, 721–735.

[3] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.

[4] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша*, Наука, М., 1987.

M-членные тригонометрические приближения анизотропных классов Никольского–Бесова периодических функций многих переменных

С. А. Стасюк

Институт математики НАН Украины

В докладе представляются результаты о наилучших M-членных тригонометрических приближениях, а также о наилучших M-членных ортогональных тригонометрических приближениях и M-членных гриди-приближениях анизотропных классов $B^{\mathbf{R}}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных.

Пусть L_q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, — пространство Лебега 2π-периодических по каждой переменной функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_d)$ со стандартной нормой $|| \cdot ||_q$. $B^{\mathbf{R}}_{p,\theta}$, $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_d) > \mathbf{0}$, $1 \leqslant p, \theta \leqslant \infty$, — анизотропные классы Никольского–Бесова (определение см., например, в [1]) периодических функций многих переменных, $g(\mathbf{R}) = (\sum_{n=1}^{d} 1/R_n)^{-1}$.

Величина $\sigma_M(B^{\mathbf{R}}_{p,\theta})_q$ наилучшего M-членного тригонометрического приближения классов $B^{\mathbf{R}}_{p,\theta}$ в метрике L_q определяется следующим образом

$$\sigma_M(B^{\mathbf{R}}_{p,\theta})_q = \sup_{f \in B^{\mathbf{R}}_{p,\theta}} \inf_{\Theta_M} \inf_{P(\Theta_M;\cdot)} ||f(\cdot) - P(\Theta_M; \cdot)||_q,$$

где $P(\Theta_M; \mathbf{x}) = \sum\limits_{j=1}^{M} c_{\mathbf{k^j}} e^{i(\mathbf{k^j}, \mathbf{x})}$, $\Theta_M = \{\mathbf{k^j}\}_{j=1}^{M}$ — система векторов $\mathbf{k^j} = (k_1^j, \dots, k_d^j)$ с целочисленными координатами, $c_{\mathbf{k^j}}$ — произвольные коэффициенты.

Сформулируем некоторые из полученных результатов.

Теорема. *Пусть* $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $1 \leqslant p < q < \infty$, $q > 2$.

Если $g(\mathbf{R}) > \max\{\frac{1}{p}; \frac{1}{2}\}$, *то*

$$\sigma_M(B^{\mathbf{R}}_{p,\theta})_q \asymp M^{-g(\mathbf{R}) + (\frac{1}{p} - \frac{1}{2})_+},$$

где $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Если $p \leqslant 2$, $g(\mathbf{R}) = \frac{1}{p}$, *то*

$$\sigma_M(B^{\mathbf{R}}_{p,\theta})_q \asymp M^{-\frac{1}{2}} (\log_2 M)^{1 - \frac{1}{\theta}}.$$

Если $p \leqslant 2$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < g(\mathbf{R}) < \frac{1}{p}$, *то*

$$\sigma_M(B^{\mathbf{R}}_{p,\theta})_q \asymp M^{-\frac{q}{2}(g(\mathbf{R}) - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}.$$

Список литературы

[1] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1977.

О весовых пространствах Соболева на полуоси

В. Д. Степанов[a], Е. П. Ушакова[b]

[a] *Российский университет дружбы народов*

[b] *Вычислительный центр Дальневосточного отделения РАН*

Пусть $1 < p < \infty$ и $\|f\|_p := \left(\int_0^\infty |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$. Обозначим через $\mathring{AC}$ множество всех абсолютно непрерывных функций с компактными носителями в $(0,\infty)$ и определим весовое пространство Соболева $\mathring{W}_p^1 \equiv \mathring{W}_p^1(v_0, v_1)$ как замыкание $\mathring{AC}$ по норме

$$\|f\|_{\mathring{W}_p^1} := \|fv_0\|_p + \|f'v_1\|_p,$$

где v_0 и v_1 — измеримые на $(0,\infty)$ весовые функции такие, что $0 < v_0(x), v_1(x) < \infty$ для п.в. $x \in (0,\infty)$ и $v_0, v_1 \in L^p_{\mathrm{loc}}$, $1/v_1 \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}$, где $p' := \frac{p}{p-1}$. Для простоты полагаем, что $\mathring{W}_p^1 = W_p^1$. Тогда существуют функции $a(x)$ и $b(x)$ такие, что $a(x) < x < b(x)$ и для всех $x \in (0,\infty)$

$$\int_{a(x)}^x v_1^{-p'} = \int_x^{b(x)} v_1^{-p'} \qquad \text{и} \qquad V_1(x)^{1/p'}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} v_0^p\right)^{1/p} = 1, \tag{$*$}$$

где $V_1(x) := \int_{a(x)}^{b(x)} v_1^{-p'}$. В работе рассматривается пространство $(\mathring{W}_p^1)'$, ассоциативное к $\mathring{W}_p^1$, т.е. состоящее из локально интегрируемых на $(0,\infty)$ функций g, удовлетворяющих условию

$$J(g) := \sup_{0 \neq f \in \mathring{W}_p^1} \frac{\left|\int_0^\infty f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|}{\|f\|_{\mathring{W}_p^1}} < \infty.$$

Теорема. *Пусть $1 < p < \infty$, $g \in L_{\mathrm{loc}}(0,\infty)$ и v_0, v_1 удовлетворяют условию $(*)$. Тогда $J(g) \approx \mathbb{G}(g) + \mathcal{G}(g)$, где*

$$\mathbb{G}(g) := \left(\int_0^\infty v_1^{-p'}(t)\left|\int_t^{a^{-1}(t)} \frac{g(x)}{V_1(x)} \int_{a(x)}^t v_1^{-p'}(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right|^{p'} \mathrm{d}t\right)^{1/p'},$$

$$\mathcal{G}(g) := \left(\int_0^\infty v_1^{-p'}(t)\,V_1^{p'}(t)\left|\int_t^{a^{-1}(t)} \frac{g(x)}{V_1(x)}\,\mathrm{d}x\right|^{p'} \mathrm{d}t\right)^{1/p'}.$$

Здесь a^{-1} и b^{-1} обозначают функции, обратные к a и b.

Утверждение теоремы существенно усиливает соответствующие результаты работ [1, 2].

Список литературы

[1] R. Oinarov, “Boundedness of integral operators from weighted Sobolev space to weighted Lebesgue space”, *Complex Var. Elliptic Eq.*, **56** (2011), 1021–1038.

[2] S. P. Eveson, V. D. Stepanov, E. P. Ushakova, “A duality principle in weighted Sobolev spaces on the real line”, *Math. Nachr.*, 2015.

Асимптотические оценки точности приближений в одной задаче теории возмущений

С. А. Степин, В. В. Фуфаев

[a] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова*

Для линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при второй производной и полиномиальным потенциалом разработан подход к построению приближенных решений с оценками точности приближений. Исследование локализации собственных значений соответствующей модельной задачи Штурма-Лиувилля сводится к изучению распределения нулей некоторой аналитической функции. Асимптотические оценки точности построенных приближений в случае уравнений рассматриваемого класса позволяют выделить области, свободные от нулей указанной функции, и построить системы контуров, определяющих локализацию искомых нулей. В результате для собственных значений задачи изучена геометрическая структура предельного множества и получены асимптотические формулы с оценками остатков.

Список литературы

[1] С. А. Степин, В. В. Фуфаев, “Метод фазовых интегралов в задаче квазиклассической локализации спектра”, *Доклады РАН*, **462**:3 (2015).

Аналог неравенства Юнга для сверток функций для пространств типа Морри

Т. В. Тарарыкова

Cardiff School of Mathematics, Cardiff University

В последние три десятилетия проявлен большой интерес к изучению теории операторов в общих локальных и глобальных пространств типа Морри. Одно из наиболее распространенных определений общих глобальных пространств типа Морри – следующее. Пусть $0 < p, \theta \leqslant \infty$ и пусть w – неотрицательная измеримая по Лебегу функция на полуоси $(0, \infty)$. Глобальное пространство типа Морри $GM_{p\theta,w(\cdot)} \equiv GM_{p\theta,w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ – это пространство всех функций f, измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^n$, с конечной квазинормой

$$\|f\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left\| w(r)\|f\|_{L_p(B(x,r))} \right\|_{L_\theta(0,\infty)},$$

где $B(x, r)$ – открытый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$ с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$.

Если $w(r) = r^{-\lambda}, 0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{n}{p}$, то $GM_{p\theta,r^{-\lambda}} \equiv M_p^\lambda$ – это классическое пространство Морри.

Пусть $0 < p, \theta \leqslant \infty$. $\Omega_{p\theta}$ – это множество всех функций w, которые неотрицательны, измеримы по Лебегу на $(0, \infty)$, не эквивалентны 0 на интервале (t, ∞) для любого $t > 0$ и такие, что для некоторого $t > 0$

$$\left\| w(r) \left(\frac{r}{t+r}\right)^{\frac{n}{p}} \right\|_{L_\theta(0,\infty)} < \infty.$$

Если w –неотрицательная, измеримая по Лебегу функция на $(0, \infty)$, не эквивалентная 0 на интервале (t, ∞) для любого $t > 0$, то пространство $GM_{p\theta,w(\cdot)}$ не тривиально тогда и только тогда, когда $w \in \Omega_{p\theta}$. Если $w \in \Omega_{p\theta}$, то $L_p(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n) \subset GM_{p\theta,w(\cdot)}$.

Рассматривается свертка измеримых функций f_1 и f_2 :

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x-y)f_2(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема. *Пусть*

$$1 \leqslant p_1, p_2 \leqslant p \leqslant \infty, \quad p_1 \leqslant \theta_1 \leqslant \infty, \ p_2 \leqslant \theta_2 \leqslant \infty, \quad 0 \leqslant \alpha_1, \alpha_2 \leqslant 1$$

и

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p} + 1, \qquad \frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} = \frac{1}{p}, \qquad \frac{\alpha_1}{\theta_1} + \frac{\alpha_2}{\theta_2} = \frac{1}{\theta}.$$

Пусть далее $w_1 \in \Omega_{p_1\theta_1}, w_2 \in \Omega_{p_2\theta_2}$ *и*

$$w(r) = w_1^{\alpha_1}(r)w_2^{\alpha_2}(r), \quad r > 0.$$

Тогда $w \in GM_{p\theta,w(\cdot)}$, *для любых* $f_k \in GM_{p_k\theta_k,w_k(\cdot)} \cap L_{p_k}, k = 1, 2$, *свертка* $f_1 * f_2$ *существует почти всюду на* $\mathbb{R}^n$ *и*

$$\|f_1 * f_2\|_{GM_{p\theta,w(\cdot)}} \leqslant \|f_1\|^{\alpha_1}_{GM_{p_1\theta_1,w_1(\cdot)}} \|f_1\|^{1-\alpha_1}_{L_{p_1}} \|f_2\|^{\alpha_2}_{GM_{p_2\theta_2,w_2(\cdot)}} \|f_2\|^{1-\alpha_2}_{L_{p_2}}.$$

Следствие. *Если* $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \frac{n}{p_1}, 0 \leqslant \lambda_2 \leqslant \frac{n}{p_2}$, *то в предположениях теоремы относи тельно* $p_1, p_2, p, \alpha_1, \alpha_2$

$$\|f_1 * f_2\|_{M_p^{\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2}} \leqslant \|f_1\|^{\alpha_1}_{M^{\lambda_1}_{p_1}} \|f_1\|^{1-\alpha_1}_{L_{p_1}} \|f_2\|^{\alpha_2}_{M^{\lambda_2}_{p_2}} \|f_2\|^{1-\alpha_2}_{L_{p_2}} .$$

При фиксированных $p_1, p_2, \lambda_1, \lambda_2$ согласно этому неравенству наибольшее значение параметра λ, для которого $f_1 * f_2 \in M_p^\lambda$ равно $\max\{\frac{p_1\lambda_1}{p}, \frac{p_2\lambda_2}{p}\}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-00554а).

Когда и как правильно в вычислительной практике использовать интерполяционные многочлены Лагранжа?

Г. Е. Таугынбаева

Институт теоретической математики и научных вычислений
Евразийского национального университета имени Л. Н. Гумилева

Жозеф Луи Лагранжом в 1795 году была решена задача построения алгебраического многочлена наименьшей степени, проходящего через заданные точки. Аппроксимативные возможности многочленов Лагранжа хорошо изучены Г. Фабером, С. Н. Бернштейном, Ю. Марцинкевичем, А. Зигмундом, Г. М. Фихтенгольцем, И. П. Натансоном, К. И. Бабенко, О. В. Локуциевским и др. с более близкими к отрицательным выводами.

Нами проведено полное К(В)П (Компьютерный (вычислительный) поперечник – в трех частях) - исследование сформулированной выше в названии тезиса задачи в случае, когда гладкость задается в шкале классов Соболева $W_p^r(0,1)$, а погрешность восстановления функций измеряется в лебеговой метрике $L^q(0,1)$, при всех $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $rp > 1$.

В рамках К(В)П-1 установлено следующее. При $2 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ и $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$, интерполяционные многочлены Лагранжа дают наилучшее (в $L^q(0,1)$) среди всех мыслимых вычислительных агрегатов (в порядковом отношении) восстановление, более того – интерполяцию, функций с ограниченной (в $L^p(0,1)$) r-й производной на отрезке $[0,1]$, с неулучшаемой скоростью $<< N^{-r+\max\left\{0;\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right\}}$, если только их использовать в сплайн-форме

$$L_{N,r}^{(i)}(x;f) = \sum_{\tau=0}^{r-1} f\left(\frac{i(r-1)+\tau}{N}\right) \prod_{t=0, t\neq\tau}^{r-1} \frac{N}{\tau - t}\left(x - \frac{i(r-1)+t}{N}\right)$$

$$\left(\frac{i(r-1)}{N} \leqslant x \leqslant \frac{(i+1)(r-1)}{N}, i = 0, 1, ..., k-1\right)$$

с $N = (r-1)k$ $(k = 1, 2, ...)$. В остальных же случаях $1 \leqslant p < q \leqslant 2$ и $1 \leqslant p < 2 \leqslant q \leqslant \infty$ потери в скорости восстановления, по крайней мере, *в сравнении с поперечником "кодирования" функций и с линейным поперечником В.М.Тихомирова*, составляют степенные порядки $N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ и $N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$ соответственно (в первом случае линейный поперечник имеет те же потери, что и лагранжев интерполяционный сплайн).

Если же ограничиться вычислительными агрегатами, построенными по значениям в точках приближаемой функции, то во всех случаях $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ лагранжевы сплайны относятся к наилучшим, т.е. нет необходимости в поиске других вычислительных агрегатов, построенных по значениям в точках.

В итоге, *приходим к принципиально новому выводу, что использование многочленов Лагранжа в качестве базового сплайна в случаях* $2 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ и $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$ *приводит к наилучшему среди всех мыслимых агрегатов приближения по линейной информацией. Такая высокая оценка даже в важнейших случаях* $p = q = 2$, $p = q = \infty$ *и* $p = 2$, $q = \infty$ *никогда не применялась, что можно понимать как полную реабилитацию этого вычислительного агрегата* 1795 *года создания. В оставшихся случаях, увы, приходится обращаться к другим средствам приближения.*

В части К(В)П-2 установлена предельная погрешность восстановления лагранжевыми интерполяционными сплайнами. В части К(В)П-3 показано, что любой вычислительный агрегат, построенный по всевозможным наборам линейных функционалов не может дать предельную погрешность большую (по порядку) нежели лагранжевы интерполяционные сплайны. Как оказалось, предельные погрешности восстановления во всех случаях эффективности лагранжевой сплайн-интерполяции имеют порядок информативной мощности соответствующего набора вычислительных агрегатов $\succ\prec N^{-r+\max\left\{0;\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right\}}$.

Квантование коэффициентов для аффинных фреймов

П. А. Терехин

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Говорят, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов банахова пространства F является *квантовой* (ε, δ, C)*-сетью* в F относительно банахова пространства числовых последовательностей X, если существуют постоянные $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $C \geqslant 1$ такие, что для любого вектора $f \in F$ найдется конечный набор целых чисел $\{m_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{Z}$ такой, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} m_k \delta \varphi_k \right\|_F < \varepsilon, \qquad \left\| \sum_{k=1}^{n} m_k \delta e_k \right\|_X \leqslant C \|f\|_F,$$

где $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ - естественный базис пространства последовательностей X. Пусть функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет носитель $\operatorname{supp} \varphi \subset [0, 1]$. Далее, для $n \in \mathbb{N}$ по представлению $n = 2^k + j$, где $k = 0, 1, \dots$ и $j = 0, \dots, 2^k - 1$, положим

$$\varphi_n(t) = \varphi_{k,j}(t) = \varphi(2^k t - j).$$

Система функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *аффинной системой функций*. Пусть $\varphi \in L^p[0, 1]$, $1 \leqslant p < \infty$, и $\int_0^1 \varphi(t)\, dt \neq 0$. Тогда $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фрейм в $L^p[0, 1]$ относительно $X = \ell^{1,p}$, где

$$\|x\|_{1,p} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

Теорема. *Всякий аффинный фрейм $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является квантовой сетью в пространстве $L^p[0, 1]$ относительно пространства последовательностей $\ell^{1,p}$.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 13-01-00102.

Новые результаты из теории полиномов Бернштейна

И. В. Тихонов[a], В. Б. Шерстюков[b]

[a] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова*
[b] *Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ"*

Теория полиномов Бернштейна является важным составным разделом общей теории аппроксимации. Основные классические результаты, связанные с полиномами Бернштейна, представлены в известном обзоре [1]. Более полное специализированное изложение можно найти в [2]–[4]. В докладе излагаются недавние результаты авторов из теории полиномов Бернштейна. Особое внимание уделено липшицевым функциям и функциям, имеющим в своем составе линейную часть. Подробно обсуждается свойство регулярного попарного совпадения (склеивания) полиномов Бернштейна для кусочно линейных функций. Исследовано поведение коэффициентов полиномов Бернштейна при явной алгебраической записи. Некоторые результаты отражены в обзоре [5]. Показаны возможности дальнейшего развития, приведены обобщения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00281).

Список литературы

[1] С. М. Никольский, "Приближение многочленами функций действительного переменного", Математика в СССР за тридцать лет 1917–1947, ОГИЗ ГИТТЛ, М.-Л., 1948, 288–318.

[2] G. G. Lorentz, *Bernstein Polynomials*, University of Toronto Press, Toronto, 1953.

[3] В. С. Виденский, *Многочлены Бернштейна*, Учебное пособие к спецкурсу, ЛГПИ им. А. И. Герцена, Л., 1990.

[4] R. A. DeVore, G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[5] И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков, М. А. Петросова, "Полиномы Бернштейна: старое и новое", Математический форум, **8**, Ч. 1. Исследования по математическому анализу, ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, Владикавказ, 2014, 126–175.

Признак Крылова для синк-аппроксимаций на отрезке.

А. Ю. Трынин

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Э. Борель и Э.Т. Уиттекер ввели понятие кардинальной функции и усечённой кардинальной функции, сужение на отрезок $[0, \pi]$ которых выглядят так:

$$L_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f\Big(\frac{k\pi}{n}\Big) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f\Big(\frac{k\pi}{n}\Big) = \sum_{k=0}^{n} l_{k,n}(x) f\Big(\frac{k\pi}{n}\Big). \quad (1)$$

Оператор (1) обладает интерполяционным свойством Лагранжа, т.е. $L_n(f, \frac{k\pi}{n}) = f(\frac{k\pi}{n})$, для любых $0 \leqslant k \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$.

Будем обозначать $C_0[0, \pi]$ пространство непрерывных, исчезающих на концах отрезка, функций, снабжённое чебышевской нормой, то есть $C_0[0, \pi] = \{f : f \in C[0, \pi],\ f(0) = f(\pi) = 0\}$.

Теорема 1. *Пусть функция $f \in C_0[0, \pi]$ имеет ограниченную вариацию. Тогда равномерно на всём отрезке $[0, \pi]$ справедливо соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} |L_n(f,x) - f(x)| = 0. \quad (2)$$

Теорема 2. *Пусть функция $f \in C[0, \pi]$ имеет ограниченную вариацию. Тогда равномерно внутри отрезка $[0, \pi]$ (раномерно на любом компакте, содержащемся в интервале $(0, \pi)$) справедливо соотношение* (2).

Теорема 3. *Если функция $f \in C[0, \pi] \setminus C_0[0, \pi]$ имеет ограниченную вариацию, то сходимость в соотношении* (2) *на всём отрезке $[0, \pi]$, оставаясь квазиравномерной, равномерной не будет.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00102).

Предельный спектральный граф и асимптотика собственных значений задачи Штурма–Лиувилля с потенциалом многочленом

С. Н. Туманов, А. А. Шкаликов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Исследуется предельное распределение дискретного спектра задачи на собственные значения для дифференциального уравнения второго порядка при большом значении параметра $k \to +\infty$:

$$-y''(x) + k^2 P(x, \lambda) y(x) = 0$$

с краевыми условиями $y(a) = y(b) = 0$.

Здесь a и b вещественные числа (допускаются значения $\pm\infty$), λ — обобщенный спектральный параметр, лежащий в некоторой односвязной области G комплексной плоскости; k — положительное число; P — многочлен степени $n \geqslant 1$ от x с коэффициентами аналитически зависящими от спектрального параметра $\lambda \in G$.

$$P(x, \lambda) = a_n(\lambda) x^n + a_{n-1}(\lambda) x^{n-1} + \dots + a_1(\lambda) x + a_0(\lambda).$$

Дополнительно потребуем от P: старший коэффициент $a_n(\lambda)$ не имеет нулей в G; нули x_j, $j = 1, \dots, n$ многочлена P — разные функции λ, либо различные ростки одной функции, аналитические в G за исключением конечного числа алгебраических точек ветвления, естественным образом возникающих в кратных нулях P.

Для произвольного комплекса Стокса Γ назовем точки a и b связанными относительно Γ, если существует соединяющий их путь, не проходящий через точки поворота этого комплекса, имеющий с Γ не более одной общей точки. Комплексы, относительно которых a и b связанны отнесем к I-му типу. Все оставшиеся — ко II-му типу.

Значения λ, при которых могут возникать многоточечные (двухточечные и более) комплексы Стокса называются сингулярными кривыми:

$$\lambda \in \gamma_s \Leftrightarrow \Re \int\limits_{x_n(\lambda)}^{x_l(\lambda)} \sqrt{P(z, \lambda)}\, dz = 0,$$

где $x_j(\lambda)$ — различные точки поворота.

Значения λ, при которых одна из точек a или b попадает на линии Стокса называются критическими кривыми:

$$\lambda \in \gamma_c \Leftrightarrow \Re \int\limits_{x_j(\lambda)}^{a} \sqrt{P(z, \lambda)}\, dz = 0, \text{ либо } \Re \int\limits_{x_j(\lambda)}^{b} \sqrt{P(z, \lambda)}\, dz = 0.$$

Введем еще так называемые регулярные предельные кривые уравнением:

$$\lambda \in \gamma_r \Leftrightarrow \Re \int\limits_{a}^{b} \sqrt{P(z, \lambda)}\, dz = 0.$$

Теорема. *Для любого компакта $g \in G$, не содержащего точек $\gamma_s \cup \gamma_c \cup \gamma_r$ найдется $k_0 > 0$ такое, что при $k > k_0$ в g не будет содержаться собственных значений. В случае общего положения собственные значения концентрируются вдоль γ_r и тех частей γ_s и γ_c, при которых граф Стокса содержит комплексы II-го типа. В этом случае справедливы асимптотики на собственные значения вдоль соответствующих частей кривых при $k \to +\infty$:*

$$\frac{k}{\pi} \int\limits_{x_n}^{x_l(\lambda_m)} \sqrt{P(z,\lambda_m)}\, dz = i(m - \frac{1}{2}) + O(\frac{1}{k}), \quad \text{\textit{в окрестности} } \gamma_s;$$

$$\frac{k}{\pi} \int\limits_{x_n}^{a(b)} \sqrt{P(z,\lambda_m)}\, dz = i(m - \frac{1}{4}) + O(\frac{1}{k}), \quad \text{\textit{в окрестности} } \gamma_c;$$

$$\frac{k}{\pi} \int\limits_{a}^{b} \sqrt{P(z,\lambda_m)}\, dz = im + O(\frac{1}{k}), \quad \text{\textit{в окрестности} } \gamma_r;$$

Список литературы

[1] Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, “Об асимптотике собственных значений для несамосопряженных краевых задач”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **4**:2 (1964), 267–277.

[2] А. В. Дьяченко, А. А. Шкаликов, “О модельной задаче для уравнения Орра–Зоммерфельда с линейным профилем”, *Функц. анализ и его прил.*, **36**:3 (2002), 71–75.

[3] С. Н. Туманов, А. А. Шкаликов, “О локализации спектра задачи Орра–Зоммерфельда для больших чисел Рейнольдса”, *Матем. заметки*, **72**:4 (2002), 561–569.

[4] С. Н. Туманов, А. А. Шкаликов, “О предельном поведении спектра модельной задачи для уравнения Орра–Зоммерфельда с профилем Пуазейля”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:4 (2002), 177–204.

[5] М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, Москва, 1983.

[6] М. В. Федорюк, “Топология линий Стокса уравнений второго порядка”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **29**:3 (1965), 645–656.

[7] А. А. Шкаликов, “О предельном поведении спектра при больших значениях параметра одной модельной задачи”, *Матем. заметки*, **62**:6 (1997), 950–953.

[8] А. А. Шкаликов, “Спектральные портреты оператора Орра–Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса”, *СМФН*, **3** (2003), 89–112.

О наилучшем приближении функций алгебраическими полиномами в пространстве $L_{2,\mu}$

К. Тухлиев[a]

[a] *Худжандский государственный университет имени Б. Гафурова*

Пусть $L_{2,\mu} := L_2\left(\mu(x); [-1,1]\right), \mu(x) = \left(1-x^2\right)^{-1/2}$ – пространство вещественных функций f, определенных на отрезке $[-1,1]$, для которых $\mu^{1/2}f$ суммируемо с квадратом $\|f\|_{L_{2,\mu}} = \Big(\int\limits_{-1}^{1}\mu(x)f^2(x)dx\Big)^{1/2} < \infty$. Для произвольной $f \in L_{2,\mu}$ введем обобщенный модуль непрерывности m-го порядка: $\omega_m(f;t) = \sup\{\|\Delta_h^m(f;\cdot)\|_{L_{2,\mu}} : |h| \leqslant t\}$, где

$$\Delta_h^m(f;x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}F_h^k f(x),$$

а $F_h f(x)$ - оператор введенный в [1] и использованный в [2,3], для получения точных неравенств Джексона-Стечкина некоторых классов функций.

Пусть теперь $\mathcal{D} = (1-x^2)\dfrac{d^2}{dx^2} - x\dfrac{d}{dx}$ – дифференциальный оператор второго порядка. Операторы высших порядков рекуррентно определим, полагая $\mathcal{D}^r f = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1}f)$, $(r = 2,3,\ldots)$. Символом $L_{2,\mu}^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$ обозначим класс функций $f \in L_{2,\mu}$, которые имеют локально абсолютно непрерывные производные $(2r-1)$-го порядка, таких, для которых $\mathcal{D}^r f \in L_{2,\mu}$. Равенством $\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu} := \inf\{\|f - p_{n-1}\|_{L_{2,\mu}} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\}$ определим наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\mu}$ множеством $\mathcal{P}_{n-1}$ – алгебраических полиномов степени $n-1$.

Теорема 1. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leqslant 2$, $0 < h \leqslant \pi$, $\varphi(t) \geqslant 0$ – суммируемая не эквивалентная нулю на $[0,h]$ функция. Тогда справедливы неравенства*

$$\Big\{\alpha_{n,m,r,p}(\varphi;h)\Big\}^{-1} \leqslant \sup_{f\in L_{2,\mu}^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\varepsilon_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int\limits_0^h \omega_m^p(\mathcal{D}^r f;t)_{2,\mu}\,\varphi(t)dt\right)^{1/p}} \leqslant \Big\{\inf_{n\leqslant k<\infty}\alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h)\Big\}^{-1},$$

где

$$\alpha_{k,m,r,p}(\varphi;h) = \left(k^{2rp}\int\limits_0^h (1-\cos kt)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}.$$

Список литературы

[1] В. А. Абилов, Ф. В. Абилова, *Ж. выч. матем. и мат. физ.*, **42**:4 (2002), 451–458.

[2] К. Тухлиев, *ДАН Республики Таджикистан*, **56**:8 (2013), 606–611.

[3] М. Ш. Шабозов, К. Тухлиев, *Известия ТулГУ*, 2014 vol 1, № 1, 83–97.

Спектр и формула следа возмущения одного двумерного оператора в полосе

З. Ю. Фазуллин, И. Г. Нугаева

Башкирский государственный университет

Рассмотрим оператор $L = L_0 + V$ в пространстве $\mathcal{L}_2(\Pi)$, где $\Pi = \{(x;y):\ x \in \mathbb{R},\ y \in [0;\pi]\}$, L_0 – оператор задачи Дирихле: $L_0 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, V – оператор умножения в пространстве $\mathcal{L}_2(\Pi)$ на ограниченную измеримую вещественную функцию $V(x,y)$, финитную по переменной x (т.е. для некоторого $r > 0$ $V(x,y) \equiv 0$, $|x| \geqslant r$).

Пусть $P_s^{(1)}$, $P_l^{(2)}$ – ортопроекторы на собственные подпространства одномерных операторов Лапласа задачи Дирихле и гармонического осциллятора, соответствующие собственным числам s^2, $s = 1,2,\dots$, и $2l+1$, $l = 0,1,\dots$, соответственно.

Теорема 1. *Спектр оператора L_0 состоит из собственных чисел $\lambda_n = n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1;3\}$ с кратностями*

$$\nu_n = \begin{cases} \left[\frac{\sqrt{n}}{2}\right], & \text{если} \quad \left(2\left[\frac{\sqrt{n}}{2}\right]\right)^2 \leqslant \lambda_n \leqslant \left(2\left[\frac{\sqrt{n}}{2}\right]+1\right)^2, \\ \left[\frac{\sqrt{n}}{2}\right] + \frac{(-1)^n+1}{2}, & \text{если} \quad \left(2\left[\frac{\sqrt{n}}{2}\right]+1\right)^2 < \lambda_n < \left(2\left[\frac{\sqrt{n}}{2}\right]+2\right)^2, \end{cases}$$

причем $P_n = \sum\limits_{s=1}^{\nu_n} P_s^{(1)} \otimes P^{(2)}_{n/2-(s^2+1)/2}$.

Теорема 2. *Пусть $V(x;y) \in C_0^{(2)}(\Pi)$, тогда для собственных чисел $\mu_i^{(n)}$, $i = 1,2,\dots,\nu_n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1;3\}$, оператора L справедливо тождество*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}\setminus\{1;3\}} \left(\sum_{i=1}^{\nu_n} (\lambda_n - \mu_i^{(n)}) + \operatorname{tr}(P_n V) \right) = \frac{1}{12\pi} \int_\Pi V^2(x,y) \mathrm{d}\, x \mathrm{d}\, y. \tag{1}$$

Доказательство последней теоремы основано на методике работы [1].

Работа выполнена при поддержке гранта 01201456408 Минобрнауки РФ

Список литературы

[1] З. Ю. Фазуллин, Х. Х. Муртазин, “Регуляризованный след двумерного гармонического осциллятора”, *Математический сборник*, **192**:5 (2001), 87–124.

О приближенном решении одного класса поверхностных интегральных уравнений методом коллокации

Э. Г. Халилов

Азербайджанская государственная нефтяная академия

Известно (см. [1]), что внешняя краевая задача Дирихле для уравнения Гельмгольца приводится к граничному интегральному уравнению

$$\rho(x) + (A\rho)(x) = g(x), \tag{1}$$

где $(A\rho)(x) = \left(\tilde{K}\rho\right)(x) - i\eta\,(L\rho)(x)$, $g(x) = (Tf)(x) - i\eta\,((Kf)(x) - f(x))$,

$$(\tilde{K}\rho)(x) = 2\int_S \frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial\vec{n}(x)}\,\rho(y)\,dS_y, (L\rho)(x) = 2\int_S \Phi_k(x,y)\,\rho(y)\,dS_y,$$

$$(Tf)(x) = 2\frac{\partial}{\partial\vec{n}(x)}\left(\int_S \frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial\vec{n}(y)}\,f(y)\,dS_y\right),$$

$$(Kf)(x) = 2\int_S \frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial\vec{n}(y)}\,f(y)\,dS_y, x\in S,$$

$S-$ замкнутая и дважды непрерывно дифференцируемая поверхность в $\mathbb{R}^3$, $\Phi_k(x,y) = e^{ik|x-y|}/(4\pi|x-y|)$, $x,y\in\mathbb{R}^3$, $x\neq y$, $k-$ волновое число, причем $Im\,k \geqslant 0$, $\eta \neq 0-$ произвольное действительное число, причем $\eta\,Rek \geqslant 0$, $f(x)-$ дважды непрерывно дифференцируемая функция на S, а $\rho(x)-$ искомая непрерывная функция на S.

Уравнение (1) имеет то преимущество, что его решение является нормальной производной решения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца на S. При этом функция

$$u(x) = \int_S \left\{ f(y)\,\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial\vec{n}(y)} - \rho(y)\,\Phi_k(x,y)\right\} dS_y, \quad x\in\mathbb{R}^3\backslash\bar{D},$$

является решением внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца, где $D\subset\mathbb{R}^3-$ ограниченная область с границей S. Кроме того, отметим, что решение уравнения (1) является решением уравнения моментов (см. [1]).

Так как интегральное уравнение (1) в замкнутом виде решается лишь в очень редких случаях и до сих пор не исследованы приближенные методы решения уравнения (1), то первостепенное значение приобретает разработка приближенных методов решения интегрального уравнения (1) с соответствующим теоретическим обоснованием.

В данной работе предложен новый метод построения кубатурных формул для поверхностных сингулярных интегралов и дано обоснование метода коллокации к граничному интегральному уравнению (1).

Список литературы

[1] Д. Колтон, Р. Кресс, *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния*, Мир, М., 1987, 311 с.

Об отклонении почти-периодических функций от их значений на границе

Ю. Х. Хасанов

Российско-Таджикский (Славянский) университет

Пусть $f(x)$ равномерная почти-периодическая функция, т.е. $f(x) \in B$ и

$$U(\sigma, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sigma}{\sigma^2 + (t-x)^2} dt \ (\sigma > 0)$$

гармоническая функция с нормой

$$\|U(\sigma, x)\|_B = \sup_x |U(\sigma, x)|.$$

За меру отклонения функции $U(\sigma, x)$ от ее граничных значений $f(x)$ примем величину

$$\Delta(f; \sigma)_B = \|U(\sigma, x) - f(x)\|_B.$$

Приводим ряд утверждений, которые обеспечивают возможность оценки поведения величины $\Delta(f, \sigma)_B$ в зависимости от свойств их граничных значений $f(x) \in B$. В качестве характеристики свойств граничных функций рассматриваются модули непрерывности.

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in B$. Тогда справедлива оценка*

$$\Delta(f, \sigma)_B \leqslant C\sigma \left\{ 1 + \int_0^1 \frac{\omega_k(f;t)}{t^2} dt \right\},$$

где $\omega_k(f;t)$–модуль непрерывности порядка k, а константа C не зависит от σ.

Теорема 2. *Пусть $f(x) \in B$ и для нее выполнены условия*

$$\int_0^1 t^{-1} \omega(f;t) dt < \infty$$

и

$$\left| \int_0^1 f(x+t) dt \right| < M.$$

Тогда имеет место оценка

$$\Delta(g, \sigma)_B \leqslant C\sigma \left\{ 1 + \int_0^\sigma \frac{\omega_k(f;t)}{t} dt + \int_\sigma^1 \frac{\omega_k(f;t)}{t^2} dt \right\}.$$

Достаточные условия существования непрерывной ε-выборки

И. Г. Царьков

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Рассмотрим произвольное множество M в некотором линейном нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$. Через $\varrho(x, M)$ обозначим величину $\inf\limits_{y \in M} \|y - x\|$ – расстояние от точки x до множества M, а через $P_M x$ – множество ближайших точек в M для x, т.е. множество $\{y \in M \mid \|y - x\| = \varrho(x, M)\}$.

Определение 1. Будем говорить, что множество M обладает непрерывной аддитивной (мультипликативной) ε-выборкой, если существует отображение $\varphi \in C(X, M)$ такое, что $\|\varphi(x) - x\| \leqslant \varrho(x, M) + \varepsilon$ ($\|\varphi(x) - x\| \leqslant (1 + \varepsilon)\varrho(x, M)$) для всех $x \in X$.

Определение 2. Множество A в $(X, \|\cdot\|)$ называется бесконечно связным, если для всех $n \in \mathbb{N}$ и единичного шара $B \subset \mathbb{R}^n$ и произвольного непрерывного отображения $\varphi : \partial B \to A$ существует непрерывное продолжение $\tilde{\varphi} : B \to A$.

Определим более слабое условие устойчивости многозначного отображения, чем его полунепрерывность сверху относительно одностороннего хаусдорфова расстояния.

Определение 3. Отображение $F : X \to 2^X$ назовем устойчивым сверху, если $F(x) \neq \emptyset$ для всех $x \in X$, и для любых $x_0 \in X$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что $\varrho(y, F(x_0)) - \varrho(y, F(x)) \leqslant \varepsilon$ для всех $y \in E$ и $x \in X : \|x - x_0\| \leqslant \delta$, где $E \subset X$ – произвольное компактное множество.

Отображение $F : X \to 2^X$ назовем *регулярным*, если на любом компакте $K \subset X$ для некоторого $\varepsilon > 0$ окрестности $O_r(F(x))$ – бесконечно связны для всех $r \in (0, \varepsilon)$ и $x \in K$.

Теорема. *Пусть M – замкнутое множество в банаховом пространстве, метрическая проекция P_M на которое устойчива сверху и регулярна. Тогда M обладает непрерывной аддитивной и мультипликативной ε-выборкой.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (13-01-00022-а).

О гладкости решений эллиптических уравнений в областях на многообразии

И. В. Цылин

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Пусть M — гладкое компактное связное многообразие без края, $\Omega \subsetneq M$ — подобласть. Исследуется гладкость решений задачи с граничными условиями Дирихле

$$\mathcal{A}u = f, \quad f \in H^{-m}(\Omega) \tag{1}$$

где эллиптический оператор $\mathcal{A}$ строится (согласно конструкции Фридрихса) по секториальной полуторалинейной форме Φ, порожденной дифференциальным выражением $\mathcal{A}_0$ порядка $2m$, $m \in \mathbb{N}$; решения понимаются в слабом смысле.

При $m = 1$, для любой области Ω и произвольной правой части $f \in L_2(\Omega)$ решение задачи (1) принадлежат пространству $H^2_{loc}(\Omega)$. Отказаться от локальности в этом утверждении нельзя если не наложены дополнительные условия на область Ω, например, ее выпуклость или принадлежность границы классу $C^{1,1}$ (см [2]).

Для ограниченных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с липшицевой границей, в случае оператора Лапласа, Jerison и Kenig установили эффект повышения гладкости (см [3]); а именно, если $f \in H^{-1+s}(\Omega)$, $s \in (0, 1/2)$, то решение задачи (1) принадлежит $H^{1+s}(\Omega)$. Savaré разработал метод, позволивший обобщить это утверждение на эллиптические операторы второго порядка с липшицевыми коэффициентами.

Продолжая исследование, намеченное в [7], и развивая подход, предложенный в работах [5,6], удалось сохранить эффект повышения гладкости (относительно правой части) решения задачи (1) в случае областей Ω с гельдеровой границей и весьма слабых ограничениях на коэффициенты дифференцивльного выражения $\mathcal{A}_0$.

Применяемая техника использует пространства Никольского и Бесова, причем как их интерполяционные свойства, так и теоремы вложения [1,4].

Список литературы

[1] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1996.

[2] P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, London, 1985.

[3] D. Jerison, C. Kenig, “Boundary value problems on Lipschitz domains”, *Studies in partial differential equations*, **23** (1982), 1–68.

[4] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1977.

[5] G. Savaré, “Regularity and perturbation results for elliptic equations on Lipschitz”, *J. Funct. Anal.*, **152** (1998), 176–201.

[6] G. Savaré, G. Schimperna, “Domain perturbations estimates for the solutions of second order elliptic equations”, *J. Math. Pures Appl.*, **81**:11 (2002), 1071–1112.

[7] А. М. Степин, И. В. Цылин, “О краевых задачах для эллиптических операторов в случае областей на многообразиях”, *Доклады Академии Наук*, 2015 (в печати).

О приближении функций в весовом пространстве Бергмана

М.Ш. Шабозов

Институт математики имени А. Джураева АН Республики Таджикистан

Задачи аппроксимационного содержания – вычисления точных значений различных n-поперечников и построения наилучших линейных методов приближения заданного класса функций относятся к числу наиболее важных экстремальных задач. В пространстве Харди аналитических в единичном круге функций в ряде случаев получены окончательные результаты. В случае весовых пространствах Бергмана указанные задачи менее изучены. Пусть $U_R := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\},\ R \geqslant 1$, $U := U_1$; $A(U_R)$ – множество аналитических в круге U_R функций; $\mathcal{L}_q := \mathcal{L}_q(U)$, $1 \leqslant q < \infty$ – пространство комплекснозначных в U функций f, для которых $\|f\|_{\mathcal{L}_q} = \Big((1/2\pi)\iint_{(U)} |f(z)|^q dxdy\Big)^{1/q} < \infty$.

Пусть $\gamma(|z|) \geqslant 0$ – произвольная суммируемая в U функция; $\mathcal{L}_{q,\gamma} := \mathcal{L}_q(U;\gamma)$ – пространство комплекснозначных в круге U функций f, для которых $\gamma^{1/q} f \in \mathcal{L}_q$ с нормой $\|f\|_{\mathcal{L}_{q,\gamma}} := \|\gamma^{1/q} f\|_{\mathcal{L}_q}$. Под $\mathscr{B}_{q,\gamma}$ понимаем пространство функций $f \in A(U)$ таких, что $f \in \mathcal{L}_{q,\gamma}$, а под $H_{q,R} := H_q(U_R)$ будем понимать пространство Харди функций $f \in A(U_R)$ с конечной нормой $\|f\|_{q,R}$ [1,2]. Пусть $\Phi(t)$, $t \geqslant 0$ – произвольная непрерывная неотрицательная неубывающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Используя Φ в качестве мажоранты, для произвольных $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant q < \infty$, $R \geqslant 1$, $\mu \geqslant 1$ и $0 < h \leqslant \pi$ введем в рассмотрение класс функций

$$W_{q,R}^{(r)}(\Phi;\mu) := \left\{ f \in A(U_R) : \frac{1}{h}\int_0^h \omega_2(f^{(r)};2t)_{H_{q,R}} \left[1 + (\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right] dt \leqslant \Phi(h) \right\}.$$

Полагаем: $(1-\cos x)_* := \{1-\cos x,\ \text{если}\ 0 \leqslant x \leqslant \pi;\ 2,\ \text{если}\ x \geqslant \pi\}, \alpha_{n,r} = n!/(n-r)!$.

Теорема 1. *Пусть $R \geqslant 1$, $1 \leqslant q < \infty$, $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$ и мажоранта Φ при любом $0 < h \leqslant \pi$ удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/(2\mu(n-r)))} \geqslant \frac{\pi}{\pi-2}\cdot\frac{1}{h}\int_0^h (1-\cos(n-r)t)_* \left\{1 + (\mu^2-1)\sin\frac{\pi t}{2h}\right\} dt. \tag{1}$$

Тогда имеют место равенства

$$b_n(W_{q,R}^{(r)}(\Phi;\mu);\mathscr{B}_{q,\gamma}) = b_n(W_{q,R}^{(r)}(\Phi;\mu);\mathcal{L}_{q,\gamma}) = d^n(W_{q,R}^{(r)}(\Phi;\mu);\mathscr{B}_{q,\gamma})$$

$$= d^n(W_{q,R}^{(r)}(\Phi;\mu);\mathcal{L}_{q,\gamma}) = d_n(W_{q,R}^{(r)}(\Phi;\mu);\mathcal{L}_{q,\gamma}) = \delta_n(W_{q,R}^{(r)}(\Phi;\mu);\mathcal{L}_{q,\gamma})$$

$$= \frac{\pi R^{r-n}}{2\mu(\pi-2)\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{2\mu(n-r)}\right)\left(\int_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/q},$$

где $b_n(\cdot)$-бернштейновский, $d^n(\cdot)$-гельфандовский, $d_n(\cdot)$-колмогоровский, $\delta_n(\cdot)$-линейный n-поперечники. Множество мажорант Φ, удовлетворяющих условию (1), не пусто.

Список литературы

[1] С. Б. Вакарчук, М. Ш. Шабозов, *Матем. сб.*, **201**:8 (2010), 3–22.
[2] М. Ш. Шабозов, М. Р. Лангаршоев, *ДАН*, **450**:5 (2013), 518–521.

О наилучших квадратурных формул Маркова для классов функций $H^\omega[a,b]$

М. Ш. Шабозов, А. А. Шабозова

[a] *Институт математики имени А.Джураева АН Республики Таджикистан*
[b] *Таджикский национальный университет*

Экстремальная задача отыскания для заданного класса функций квадратурной формулы является наиболее важная задача численного интегрирования. В [1] Н.П.Корнейчук, в частности, доказал, что среди всех квадратурных формул вида

$$\mathcal{J}(f;a,b)=\int\limits_a^b f(x)dx=\sum_{k=1}^n p_k f(x_k)+R_n(f), \tag{1}$$

задаваемая векторами коэффициентов $P=\{p_k\}_{k=1}^n$ и узлов

$$X=\{x_k:\ a\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n\leqslant b\},$$

$R_n(f):=R_n(f;X,P)$ – погрешность формулы, наилучшей в смысле С.М. Никольского [2] для класса

$$H^\omega[a,b]=\Big\{f:|f(x')-f(x'')|\leqslant\omega(|x'-x''|),\ \forall x',x''\in[a,b]\Big\},$$

где $\omega(t)$ – заданный модуль непрерывности, является формула средних прямоугольников, у которой

$$P^0=\left\{p_k^0=\frac{b-a}{n}\right\}_{k=1}^n,\qquad X^0=\left\{x_k^0=a+\frac{(2k-1)(b-a)}{2n}\right\}_{k=1}^n.$$

При этом

$$\mathscr{E}_n(H^\omega[a,b]):=\inf_{(P,X)}\sup_{f\in H^\omega[a,b]}|R_n(f;P,X)|=2n\int\limits_0^{(b-a)(2n)}\omega(t)dt. \tag{2}$$

В докладе вместо (1) рассматривается квадратурная формула типа Маркова

$$\mathcal{J}(f;a,b)=p_0f(a)+\sum_{k=1}^{n-1}p_kf(x_k)+p_nf(b)+R_n(f). \tag{3}$$

Теорема 1. *Среди всех квадратурных формул типа Маркова (3) наилучшей для класса $H^\omega[a,b]$ является формула трапеций*

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{n}\left\{\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\right\}+R_n(f). \tag{4}$$

При этом точная оценка погрешности квадратурной формулы (4) равна (2).

Теорема 2. *Среди всех квадратурных формул типа Маркова* (3) *единственной наилучшей формулой на классе функций*

$$H^{\omega}_{2-\alpha}[a,b] := \{f : |(1+\alpha)f(x+t) + (1-\alpha)f(x-t) - 2f(x)| \leqslant 2\omega(|t|), 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$$

является формула трапеций (4), *причем погрешность* (4) *на классе* $H^{\omega}_{2-\alpha}$ *равна* (2).

В работе [4] теоремы 1 и 2 обобщаются для кубатурных формул типа Маркова.

Список литературы

[1] Н. П. Корнейчук, *Матем. заметки*, **3**:5 (1968), 565–576.

[2] С. М. Никольский, *Квадратурные формулы*, Наука, М., 1988, 270 с.

[3] М. Ш. Шабозов, А. А. Шабозова, *Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия*, **1 (59)**:1 (2014), 79–86.

[4] М. Ш. Шабозов, *Модел. и анализ информ. систем*, **21**:3 (2014), 91–105.

О точном значении неопределенной константы в асимптотической формуле для константы Лебега классического оператора Фурье

И. А. Шакиров

Набережночелнинский институт социально-педагогических технологий и ресурсов

Оператор Фурье $S_n : C[0, 2\pi] \to H_n^T \subset C[0, 2\pi]$ имеет минимальную норму (константу Лебега $\widetilde{\lambda_n} = \widetilde{\lambda}(n) = \|S_n\|$) среди всевозможных линейных проекторов $P_n : B \to H_n^T \subset B$ $(n \in N)$, действующих в пространствах $B = C \vee L_p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ [1, с.191]. Особый интерес представляет поведение величин $\widetilde{\lambda_n}$ $(n \in N \wedge n \to +\infty)$ и $O(1)$, входящих в известное асимптотическое равенство

$$\widetilde{\lambda_n} = (4/\pi^2) \ln n + O(1), \; n \to \infty \; (O(1) - const), \tag{1}$$

которое получено, используя ее интегральное представление вида

$$\widetilde{\lambda_n} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |D_n(t)| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t} dt \left(D_n(t) = \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} \right). \tag{2}$$

Свойства оператора Фурье в различных функциональных пространствах, его фундаментальные характеристики подробно изучены А. Лебегом, Л. Фейером, Г. Сеге и другими зарубежными математиками. Существенный вклад в развитие данного направления внесли С. Н. Бернштейн, С. М. Никольский, П. К. Суетин, С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин, С. А. Теляковский, их многочисленные ученики и последователи. Активные исследования в этом направлении ведутся и в настоящее время. Особое внимание обращается получению двусторонних оценок для фундаментальных характеристик, изучению аппроксимативных возможностей частичных сумм Фурье, Фурье-Лежандра, Фурье-Якоби и других ее видов на различных классах функций.

В случае лагранжевой интерполяции по равномерно распределенным на периоде узлам аналоги констант Лебега (1) подробно изучены в работах [2], [3]. Следуя им, в данной работе впервые получено явное (безмодульное) представление для константы (2), на основе которого затем найдено точное значение $O(1)$ из (1), решена одна актуальная экстремальная задача. Соответствующие результаты приведены в трех теоремах.

Теорема 1. *Для константы* (2) *верно явное* (*безмодульное*) *представление вида*

$$\widetilde{\lambda_n} = \frac{2}{\pi} \int_0^T \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_0^T \left[\frac{\cos(2n+1)t}{\sin(t+t_{2k-1})} + \frac{\sin(2n+1)t}{\sin(t+t_{2k})} \right] dt. \tag{3}$$

где $t \in [0, T], t_{2k-1} = \frac{\pi}{4n+2}(2k-1), \; t_{2k} = \frac{\pi}{4n+2} 2k \; (k = \overline{1, n}); \; T = \frac{\pi}{2(2n+1)}, n \in N.$

Теорема 2. *Для вычисления асимптотически точного значения константы* $O(1)$ *из равенства* (1) *справедлива формула*

$$O(1) = \frac{4}{\pi^2} \ln(\frac{4}{\pi}) + \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \frac{8}{\pi^3} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k} = 1.064313253\ldots$$

Теорема 3. *Наименьшее значение константы* A, *для которой неравенство* $\widetilde{\lambda_n} \leqslant A + (2/\pi)^2 \ln n$ *выполняется равномерно относительно любых натуральных значений параметра* n, *равно* $1/3 + 2\sqrt{3}/\pi$, *т.е.*

$$\min_{A \in R^+} \{A | \widetilde{\lambda_n} \leqslant A + (2/\pi)^2 \ln n \ \forall n \in N\} = 1/3 + 2\sqrt{3}/\pi = 1.435991124\ldots$$

Список литературы

[1] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, Изд-во МГУ, М., 1976.

[2] L. Brutman, "Lebesgue functions for polynomial interpolation – a survey", *Ann. Numer. Math.*, **4** (1997), 111–127.

[3] И. А. Шакиров, "О влиянии выбора узлов лагранжевой интерполяции на точные и приближенные значения констант Лебега", *Сиб. матем. журнал*, **55**:6 (2014), 1404–1423.

Представления решений одного класса системы уравнений в полных дифференциалах с сингулярными точками

Б. Шарипов

Институт предпринимательства и сервиса, Душанбе

В некоторых работах [1]-[5] были исследованы различные классы системы линейных и нелинейных уравнений в полных дифференциалах (п.д.-системы) для функций двух и многих независимых переменных, причем как регулярных, так и с сингулярными точками. В случае тождественного выполнения условия совместности, многообразия их решений изучаемых систем находятся вполне определёнными формулами.

В предлагаемом сообщении рассматривается один тип нелинейных п.д.-систем с сингулярными точками, для которых условия совместности выполняются тождественно и многообразия решений находятся явно.

1. Рассматрим систему уравнений в полных дифференциалах вида:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{a(\rho,\varphi,\Theta)}{\rho^{n}}u+\frac{f(\rho,\varphi,\Theta)}{\rho^{n}}u^{m},\\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}=\frac{b(\rho,\varphi,\Theta)}{\rho^{n-1}}u+\frac{g(\rho,\varphi,\Theta)}{\rho^{n-1}}u^{m},\\ \frac{\partial u}{\partial \Theta}=p(\rho,\varphi,\Theta,u),\end{gathered}\tag{1}$$

где $a,b,f,g,p\in C^{1}(\bar{D})$, известные функции, а $u\in C^{2}(D_{0}),(n\geqslant 0)$ неизвестная функция. Условий совместности системы (1) имеют вид:

$$\begin{gathered}\Big[\frac{\partial}{\partial \rho}(\frac{b}{\rho^{n-1}})-\frac{\partial}{\partial \varphi}(\frac{a}{\rho^{n}})\Big]u+\Big[\frac{\partial}{\partial \rho}(\frac{g}{\rho^{n-1}})-\frac{\partial}{\partial \varphi}(\frac{f}{\rho^{n}})+(m-1)\frac{ag-bf}{\rho^{2m-1}}\Big]u^{m}=0,\\ \frac{\partial p}{\partial \rho}+\frac{au+bu^{m}}{\rho^{m}}\frac{\partial p}{\partial u}=(\frac{a}{\rho^{n}}+m\frac{f}{\rho^{n}}u^{m-1})p+\frac{\partial}{\partial \Theta}(\frac{a}{\rho^{n}})u+\frac{\partial}{\partial \Theta}(\frac{f}{\rho^{n}})u^{m},\\ \frac{\partial p}{\partial \varphi}+\frac{bu+gu^{m}}{\rho^{n-1}}\frac{\partial p}{\partial u}=(\frac{b}{\rho^{n-1}}+m\frac{g}{\rho^{n-1}}u^{m-1})p+\frac{\partial}{\partial \Theta}(\frac{b}{\rho^{n-1}})u+\frac{\partial}{\partial \Theta}(\frac{g}{\rho^{n-1}})u^{m},\end{gathered}\tag{N_1}$$

Допустим, что каждые соотношения из (N_1) выполнится, но не тождественно. Если считать, что найденные функций $u=0$, $u=H(\rho,\varphi,\Theta)$ из системы (N_1) удовлетворяют системе (1), то они будут только лишь частными, либо особыми решениями системы (1). Для нахождения многообразия решений системы (1) будем требовать тождественного выполнения условию (N_1). Допустим, что в системе (1) a,b,f,g считаются некоторыми известными функциями, тогда предыдущее требование возможно тогда и только тогда, когда взаимосвязь между этими функциями можно определить, частично, следующим образом:

$$b(\rho,\varphi,\Theta)=\Big[\frac{\partial}{\partial \varphi}A(\rho,\varphi,\Theta)+\alpha(\varphi,\Theta)\Big]\rho^{n-1},A(\rho,\varphi,\Theta)=-\int_{\rho}^{1}\frac{a(t,\varphi,\Theta)}{t^{n}}dt.\tag{2}$$

Производя замену $u^{1-m} = W$, где $W = W(\rho, \varphi, \Theta)$ – новая неизвестная функция, перепишем систему уравнений (1) в следующем виде:

$$\frac{\partial W}{\partial \rho} = \alpha(\rho, \varphi, \Theta), \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \beta(\rho, \varphi, \Theta), \frac{\partial W}{\partial \Theta} = \gamma(\rho, \varphi, \Theta, W), \tag{3}$$

$$\alpha(\rho, \varphi, \Theta) = (1-m) \cdot \frac{f(\rho, \varphi, \Theta)}{\rho^n} \cdot \exp\{(m-1)\omega_0(\rho, \varphi, \Theta)\},$$

$$\beta(\rho, \varphi, \Theta) = (1-m) \cdot \frac{g(\rho, \varphi, \Theta)}{\rho^{n-1}} \cdot \exp\{(m-1)\omega_0(\rho, \varphi, \Theta)\},$$

причем, $\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\frac{b}{\rho^{n-1}})\right] = \left[\frac{\partial}{\partial \varphi}(\frac{a}{\rho^n})\right]$, $\omega_0(\rho, \varphi, \Theta) = \int_\rho^1 \frac{a(t,\varphi,\Theta)}{t^n} dt + \hat{A}(\varphi, \Theta)$. А также, делаем замену:

$$s_0(\rho, \varphi, \Theta) = (1-m) \int_\rho^1 \frac{f(t, \varphi, \Theta)}{t^n} \cdot \exp\{(m-1)\omega_0(\rho, \varphi, \Theta)\} dt + A_1(\varphi, \Theta),$$

или

$$s_0(\rho, \varphi, \Theta) = \int_\rho^1 \alpha(t, \varphi, \Theta) dt + \int_0^\varphi \beta(1, \tau, \Theta) d\tau.$$

Поскольку $\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = \frac{\partial \beta}{\partial \rho}$, преобразуем систему (3) к более простому виду. Условия (N1) для инвариантной системе (3) выполняется тождественно, если функция $\gamma(\rho, \varphi, \Theta)$ принимает вид:

$$\gamma(\rho, \varphi, \Theta, W) = (m-1)\frac{\partial s_0}{\partial z} W + (1-m)\exp\{-s_0(\rho, \varphi, \Theta)\} W^{\frac{m}{m-1}} \times b(\rho, \varphi, \exp\{s_0(\rho, \varphi, \Theta)\} W^{\frac{1}{1-m}}).$$

В этой формуле переходя к исходной неизвестной функции, имеем:

$$p(\rho, \varphi, \Theta, u) = \frac{\partial \omega_0}{\partial \Theta} u$$

$$+\frac{1}{1-n}\{\frac{\partial s_0}{\partial \Theta} + f[\Theta; exp\{(m-1)\omega_0(\rho, \varphi, \Theta)\}u^{1-m} - s_0(\rho, \varphi, \Theta)]\} \times \exp\{(1-m)\omega_0(\rho, \varphi, \Theta)\} u^m. \tag{4}$$

Интегрируем первую пару уравнений системы (3), и делаем замену

$$\exp\{(1-m)\omega_0(\rho, \varphi, \Theta)\} u^m - v_0(\rho, \varphi, \Theta) = \psi, \tag{5}$$

где $\psi = \psi(\Theta)$ - новая неизвестная функция. Далее подставим ее результат в третье уравнение системы (3), получим обыкновенное дифференциальное уравнение (о.д.у.),

$$\psi' = f(\Theta, \psi), \tag{6}$$

где функция $f(\Theta, \psi)$ определяется через данные функций из (4). Если о.д.у. (6) имеет решение вида $\psi = \psi(C, \Theta)$, тогда п.д.- система (1) также разрешима, и многообразие её решений определяется следующей явной формулой:

$$u(\rho, \varphi, \Theta) = [s_0(\rho, \varphi, \Theta) + \psi(, \Theta)]^{\frac{1}{1-n}} \cdot \exp\{\omega_0(\rho, \varphi, \Theta)\}. \tag{7}$$

Легко заметит, что функция $A(\rho, \varphi, \Theta)$ в точке $\rho = 0$ имеет особенность $(n-1)$-го порядка при $n > 1$, при этом, функции ω_0, s_0 и решение системы (1) в точке $\rho = 0$ имеют особенности показательного порядка, а в остальных точках $\rho \neq 0$ области $\bar{D}$, является однозначным и непрерывным.

Теорема. *Пусть в п.д.-системе* (1) $a, b, f, g, pinC^1(\bar{D}), u \in C^2(\bar{D}_0)$. *Если условия* (N_1) *выполняются, но не тождественно, то возможно система* (1) *имеет некоторое частное, либо особое решение. Для того, чтобы условия* $(N1)$ *выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы функции* $b(\rho, \varphi, \Theta)$ *и* $p(\rho, \varphi, \Theta, u)$ *соответственно имели вид* (2) *и* (4). *Если о.д.у. вида* (6) *имеет решение, тогда система* (1) *также разрешима, причём многообразие ее решений найдётся явной формулой* (7). *При этом полученное решение системы* (1) *при* $n \geqslant 1$ *в точке* $\rho = 0 \in \bar{D}$ *не ограниченно, имеет особенности показательного порядка, а в других точках области* $\bar{D}$*- является непрерывной.*

Список литературы

[1] Л. Г. Михайлов, *ДАН*, **322** (1992), 646–650.

[2] Л. Г. Михайлов, *ДАН*, **354**:1 (1997), 21–24.

[3] Л. Г. Михайлов, *ДАН*, **384**:6 (2002), 731–737.

[4] Л. Г. Михайлов, *ДАН*, **398**:2 (2004), 1–4.

[5] Л. Г. Михайлов, *Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями*, Дониш, Душанбе, 1986, 116 с.

[6] Б. Шарипов, *Докл. АН Республики Таджикистан*, **53**:10 (2010), 759–766.

О спектре задачи Штурма–Лиувилля с весом-мультипликатором из пространства Соболева с отрицательным индексом гладкости

И. А. Шейпак, Ю. В. Тихонов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Изучается спектральные свойства задачи

$$\begin{gathered} -y'' = \lambda \rho y, \\ y(0) = y(1) = 0, \end{gathered}$$

с весом ρ из пространства $\mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ — мультипликаторы из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1[0;1]$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}[0;1]$.

Получено точное описание класса дискретных самоподобных мультипликаторов из $\mathcal{M}$, которые являются обобщенными производными кусочно-постоянных самоподобных функций. Основные свойства кусочно-постоянных самоподобных функций определяется параметрами самоподобия a и d ($0 < a < 1$, $d > 0$ — горизонтальное и вертикальное масштабирования соответственно). Доказано, что $\rho \in \mathcal{M}$ в том и только том случае, когда $ad \leqslant 1$.

Установлено, что при $ad < 1$ спектральная задача имеет чисто дискретный спектр, получены асимптотические формулы для собственных значений.

При $ad = 1$ задача имеет непрерывный спектр, заполняющий отрезок.

Работа одного из авторов поддержана грантами РФФИ № 13-01-00705 и № 13-01-12476, другого — РНФ № 14-11-00754.

Точные значения n-поперечников некоторых классов функций, принадлежащих пространству Харди $H_{q,\rho}$ $(1 \leqslant q \leqslant \infty,\ 0 < \rho \leqslant 1)$

Г. А. Юсупов

Таджикский национальный университет

Пусть H_q, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ – банахово пространство Харди аналитических в единичном круге $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_q := \lim_{\rho\to 1-0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt \right)^{1/q}.$$

Символом $H_{q,\rho}$ $(1 \leqslant q \leqslant \infty,\ 0 < \rho \leqslant 1)$ обозначим пространство Харди аналитических в круге $|z| < \rho$ функций f, для которых $\|f\|_{q,\rho} := \|f(\rho z)\|_q < \infty$. Через $f_a^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$ обозначим r-ю производную функции f по аргументу t переменного $z = \rho exp(it)$. Под $H_{q,a}^{(r)}$ понимаем класс функций $f \in A(U)$, у которых $f_a^{(r)} \subset H_q$. Пусть $\Phi(t)$, $t \geqslant 0$ – произвольная непрерывная неотрицательная и неубывающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Введем в рассмотрение следующий класс аналитических функций

$$W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu) := \left\{ f \in H_{q,a}^{(r)} : \frac{1}{h} \int_0^h \omega(f_a^{(r)}; 2t)_q \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin\frac{\pi t}{2h} \right] dt \leqslant \Phi(h) \right\},$$

где $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $h \in (0, \pi]$ и $\mu \in \mathbb{R}_+$ $(\mu \geqslant 1)$ – произвольное фиксированное число.

Положим $(\sin x)_* = \{\sin x,\ \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \pi/2;\ 1,\ \text{если } x \geqslant \pi/2\}$. Имеет место

Теорема. *Если при заданном $\mu \geqslant 1$ и любых $n \in \mathbb{N}$, $h \in (0, \pi]$ мажоранта $\Phi(h)$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/(2\mu n))} \geqslant \frac{\pi}{2\mu} \int_0^1 (\sin nht)_* \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin\frac{\pi t}{2} \right] dt, \tag{1}$$

то при любых $n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$, $0 < \rho \leqslant 1$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ справедливы равенства

$$\lambda_n(W_{q,a}^{(r)}(\Phi;\mu); H_{q,\rho}) = \frac{\pi\rho^n}{4\mu n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ – любой из n-поперечников: Бернштейна $b_n(\cdot)$, Гельфанда $d^n(\cdot)$, Колмогорова $d_n(\cdot)$, линейного $\delta_n(\cdot)$. Множество мажорант, удовлетворяющих условию (1), не пусто.

Список литературы

[1] С. Б. Вакарчук, *Матем. заметки*, **72**:5 (2002), 665–669.

[2] М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов, *ДАН Республики Таджикистан*, **57**:2 (2014), 97–102.

Авторский указатель / Author Index

Научное издание

Международная конференция
“Функциональные пространства и теория приближения функций”
посвященная 110-летию со дня рождения
академика С. М. Никольского
(Москва, 25–29 мая 2015 г.)
Тезисы докладов

Сдано в набор 06.05.2015. Подписано в печать 20.05.2015.
Тираж 200 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.
http://www.mi.ras.ru/ e-mail: pupyrev@mi.ras.ru