Библиотека Чебышевского сборника

Министерство образования и науки Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Тульский государственный университет
Чебышевский фонд

Материалы XIII Международной конференции Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова

Тула, 25-30 мая 2015 года

Тула 2015

ББК 22.13
УДК 511
Ч34

Материалы XIII Международной конференции Алгебра,теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова

Ч34 Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2015. – 408 с.

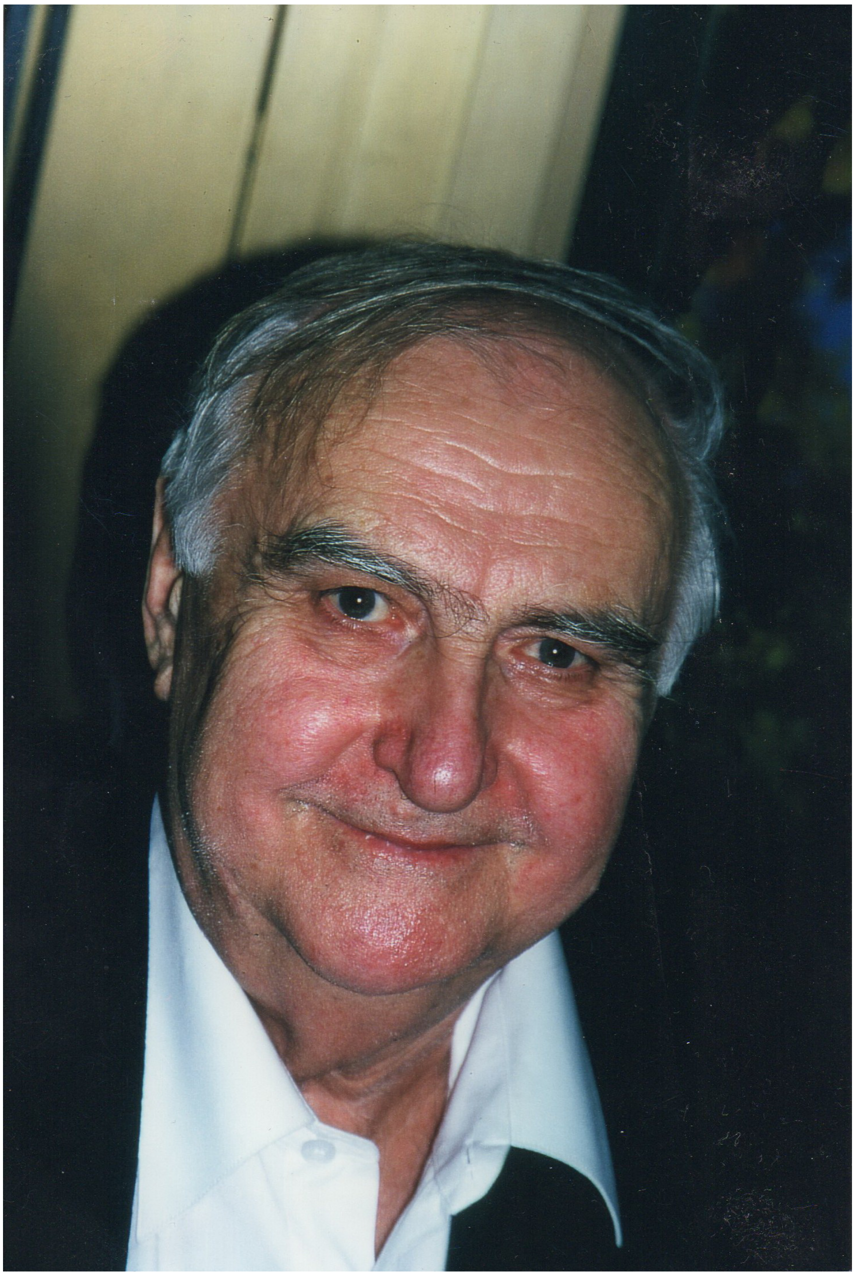
ISBN 5–87954–388–9

ББК 22.13
УДК 511

Выпуск осуществлен при финансовой поддержке РФФИ, грант № 15-01-20264г.

ISBN 5–87954–388–9

**Выдающийся российский математик,
доктор физико-математических наук, профессор
Сергей Сергеевич Рышков.**



01.08.1930 — 06.04.2006

Пленарные доклады

Пленарные доклады охватывают широкий спектр современных достижений в алгебре, теории чисел и дискретной геометрии по следующим направлениям:
— комбинаторная теория групп;
— конечные группы и представления;
— абелевы группы;
— полугруппы преобразований;
— кольца и модули, гомологические методы;
— алгебры Хопфа;
— алгебры и супералгебры Ли;
— многообразия алгебр;
— булевы алгебры и функции;
— алгебраические поверхности, криптография и кодирование;
— компьютерная алгебра;
— аналитическая теория чисел;
— диофантовы приближения и теория трансцендентных чисел;
— геометрия чисел;
— теоретико-числовой метод в приближенном анализе.

Слово о Сергее Сергеевиче Рышкове

Н. П. Долбилин, А. А. Мальцев (Москва)
dolbilin@mi.ras.ru maltsev@mi.ras.ru

В 2006 году 2 выпуск 7 тома Чебышевского сборника предполагалось посвятить семидесятипятилетию Сергея Сергеевича Рышкова, крупного геометра, выдающегося специалиста в геометрии положительных квадратичных форм. Но судьба сложилась иначе: 6 апреля 2006 года после тяжелой болезни Сергея Сергеевича не стало.

Эта, ничем не восполнимая утрата для родных и близких Сергея Сергеевича стала тяжелой потерей и для Математического института им. В. А. Стеклова РАН, где он работал более 40 лет, и для механико-математического факультета МГУ, на котором Сергей Сергеевич профессорствовал более 20 лет, и для геометрии, особенно для дискретной геометрии, в которую он внес огромный вклад.

Сергей Сергеевич родился 1 августа 1930 года в г. Симферополе в семье музыканта Сергея Степановича и Антонинины Сергеевны Рышковых. Сменив несколько городов пребывания и работы родители Сергея Сергеевича переехали в Москву, чтобы их сын мог обучаться в хорошей школе и поступить в Московский университет. После многочисленных скитаний по "углам" московских коммуналок Рышковы обосновались в подмосковной Салтыковке.

Незаурядные математические способности Сергея проявились в школе достаточно рано. Он начал посещать математические кружки при механико-математическом факультете МГУ, самостоятельно изучил работу Н. И. Лобачевского "Геометрические исследования по теории параллельных линий". Сергей участвовал и побеждал в математических олимпиадах. В 1948 году он получил первую премию на XI Московской математической олимпиаде, окончил среднюю школу с золотой медалью и поступил на механико-математический факультет Московского университета.

Будучи студентом, наряду с активной работой в математических кружках, в проведении олимпиад, Сергей становится активным участником ряда математических семинаров, был секретарем "Топологического семинара" П. С. Александрова. В студенческие годы в полной мере проявились такие стороны его характера, как умение полностью сосредоточиться на интересующей его проблеме, работать над ней много, долго и упорно, на пределе возможностей. Эти черты характера пригодились ему в период имевшихся в студенческие годы трудностей со здоровьем, а позднее в течение 11 лет подряд биться над трудной проблемой вывода примитивных 5-мерных паралллеоэдров и одолеть ее.

Окончив с отличием университет, в 1953 году Сергей Сергеевич поступает в аспирантуру к Павлу Сергеевичу Александрову. В 1957 году он защищает кандидатскую диссертацию о топологии гильбертова пространства. После окончания аспирантуры в течение 4 лет С. С. Рышков преподавал в Московском текстильном институте. При огромной педагогической нагрузке Сергей Сергеевич со свойственным ему упорством продолжал заниматься исследованиями.

Важный этап в жизни Сергея Сергеевича начался в 1961 году, когда Борис Николаевич Делоне пригласил его на работу в Математический институт им. В. А. Стеклова, в только что организованный и руководимый Б. Н. Делоне отдел геометрии. В этом отделе (в 1983 году под руководством С. П. Новикова отдел был объединен с отделом топологии в отдел геометрии и топологии) Сергей Сергеевич работал до конца жизни. Областью его исследований стала и оставалась до конца жизни дискретная геометрия, точнее геометрия положительных квадратичных форм (ПКФ).

Направление *геометрия положительных квадратичных форм* возникло в работах А. И. Коркина, Е. И. Золотарева, Г. Минковского. Важнейший вклад в это направление внесли исследования Георгия Феодосьевича Вороного. Связь этого направления с кристаллографией раскрывалась в работах великого кристаллографа Е. С. Федорова.

Огромный вклад в дальнейшее развитие этих методов, их обобщение, распространение на случай произвольных дискретных систем был внесен Борисом Николаевичем Делоне. Само название "геометрия положительных квадратичных форм" вошло в употребления от названия его большой обзорной работы в "Успехах математических наук".

Каждой положительно определенной квадратичной форме (ПКФ) вида

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \tag{1}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ – вещественные числа, соответствует n-мерный базис (или *репер*) $\mathcal{E}_f$, состоящий из векторов e_i, таких что $(e_i, e_j) = a_{ij}$. Репер $\mathcal{E}_f$ лежит в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ и однозначно определяется ПКФ f с точностью до движения. ПКФ f интерпретируется как точка $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}, a_{12}, \dots, a_{n-1\,n}a)$ в пространстве $\mathbb{E}^N$, где $N = \frac{n(n+1)}{2}$. Очевидно, что n условий положительности квадратичной формы выделяют в $\mathbb{E}^N$ открытый выпуклый конус $\mathbb{K}(n)$ – конус положительности.

Ряд важных задач геометрии чисел таких как, например, отыскание плотнейшей решетчатой упаковки пространства шарами, может быть интерпретирована как задача геометрии ПКФ.

Среди основных вопросов геометрии ПКФ выделяются следующие:

1) отыскание приведенного репера решетки и установление целочисленной эквивалентности двух заданных ПКФ;

2) отыскание плотнейших решетчатых упаковок равных шаров в пространстве $\mathbb{E}^n$;

3) отыскание редчайших решетчатых покрытий пространства $\mathbb{E}^n$ равными шарами;

4) разбиение пространства $\mathbb{E}^n$ на параллелоэдры Вороного-Дирихле (области Вороного относительно точек целочисленных рашеток);

5) другие вопросы: например, отыскание групп $\mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{Z})$; задача Соболева-Ранкина: n-мерные решетки Λ, минимизирующие n-мерные аналоги ζ-функции $\Sigma_{\lambda\in\Lambda}|\lambda|^{-s}$, $s > n/2$.

Сергею Сергеевичу во всех этих направлениях принадлежат важные результаты, расскажем о некоторых из них.

1. Вопросы приведения играют в геометрии ПКФ очень важную, но вспомогательную роль. Имеется несколько определений приведенной ПКФ: приведенной по Эрмиту, по Минковскому. Б. А. Венков предложил общую схему приведения ПКФ так, что остальные подходы к приведению являются частными случаями этой схемы. Посредством геометрической интерпретации общей схемы приведения по Венкову С. С. Рышков исследовал, в каких случаях схема Венкова реализуется как схемы приведения по Эрмиту и по Минковскому. С. С. Рышков показал, что область приведения по Венкову, соответствующая ПКФ $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ при $n \le 6$ (и только при этих n) совпадает как с областью Эрмита так и областью приведения по Минковскому, симметризированными группой n-куба. Сергей Сергеевич показал, что при $n > 6$ области приведения по Минковкому и Эрмиту существенно различны.

2. Задача о плотнейших упаковках равных шаров восходит к знаменитой работе Кеплера о шестиугольных снежинках. В теории упаковок важную роль играет разбиение конуса ПКФ на совершенные гоноэдры. Это разбиение можно

описать следующим образом: в пространстве $\mathbb{E}^N$ берется выпуклая оболочка всех точек, соответствующих квадратичным формам вида

$$(q_1x_1 + q_2x_2 + \cdots + q_nx_n)^2,$$

где $q_1,\ q_2, \ldots, q_n$ — целые числа, не имеющие в совокупности общего делителя. Эта выпуклая оболочка представляет собой бесконечный так называемый *полиэдр Вороного.* Каждой гиперграни этого полиэдра соответствует гоноэдр – конус с вершиной в начале координат, натянутый на эту грань. Плоскости гиперграней соответствуют *совершенным* положительным квадратичным формам, то есть таким формам, коэффициенты которых однозначно определяются значениями арифметического минимума квадратичной формы и его целочисленными представлениями.Отыскание совершенных форм является решающим этапом на пути отыскания плотнейших решетчатых упаковок равными шарами. Дело в том, что всякой плотнейшей решетке соответствует *предельная* ПКФ, которая, в свою очередь, является совершенной формой. Вороной установил, что при данном n совершенных форм от n переменных, а следовательно, и предельных форм конечное (с точностью до целочисленной эквивалентности) число, построил алгоритм их разыскания и реализовал его для $n \le 5$.

Для изучения граней полиэдра Вороного С. С. Рышков ввел в рассмотрение специальные графы – символы. Эта новая техника дала ему возможность перечислить все грани полиэдра Вороного для $n \le 5$. Одновременно Сергей Сергеевич ввел новый *совершенный* полиэдр – полиэдр $\mu_n(m)$ как границу пересечения следующих полупространств

$$\sum_{ij} q_i q_j v_{ij} \ge m, \quad m > 0.$$

Полиэдр Рышкова является геометрическим местом точек, соответствующих ПКФ с арифметическим минимумом m. Важность полиэдра $\mu_n(m)$ заключается в том, что между вершинами полиэдра и совершенными формами с арифметическим минимумом m имеется взаимно однозначное соответствие. Полиэдры $\mu_n(m)$ и $\Pi(n)$ дуальны друг другу. Вследствие дуальности, отыскание совершенных форм посредством полиэдра $\mu_n(m)$ проводится переходом от одной вершины полиэдра к следующей по его ребрам.

Сергей Сергеевич подробно изучил свойства полиэдра $\mu_n(m)$. В частности, была доказана теорема о том, что каждая конечная грань полиэдра $\mu_n(m)$ есть грань некоторой полной грани, а каждая вершина полиэдра принадлежит некоторой полной конечной грани. Таким образом, вопрос о выводе совершенных форм сводится к вычислению полных конечных граней полиэдра $\mu_n(m)$ и вершин этих граней. Сергей Сергеевич далее установил взаимно однозначное соответствие между множеством полных конечных граней полиэдра $\mu_n(m)$ и множеством центрировок решеток. Более конкретно, было установлено взаимно однозначное соответствие между классами свободных допустимых центрировок

n-мерных решеток и классами полных конечных граней полиэдра $\mu_n(m)$. Таким образом, был открыт новый путь вывода совершенных форм через отоыскпние свободных допустимых центрировок. Исходя из этой теории, Сергей Сергеевич предложил алгоритм вычисления для данного n всех допустимых центрировок (свободных и несвободных), который был им же реализован для $n \le 7$. Помимо этого Сергей Сергеевич нашел своему полиэдру $\mu_n(m)$ интересные применения в теории приведения и в других задачах геометрии ПКФ.

3. Важнейшая с точки зрения приложений задача о редчайшем решетчатом покрытии пространства тесно связана с другой геометрической задачей о разбиении пространства на области Вороного относительно точек решетки. Области Вороного для точек решеток представляют собой конечные многогранники, называемые *параллелоэдрами Вороного*. Наряду с разбиением Вороного для данной решетки существует разбиение Делоне (L-разбиение). Ячейками разбиения Делоне являются многогранники с вершинами в точках решетки. Более того ячейки Делоне предполагаются вписанными в *пустые сферы* (по терминологии Б. Н. Делоне), которые, по определению, не содержат внутри себя никаких других точек решеток. Радиус наибольшей описанной вокруг ячейки Делоне сферы является *радиусом покрытия* для данной решетки. Найти редчайшее решетчатое покрытие означает найти решетку данной плотности, у которой наибольший описанный шар в разбиении Делоне будет наименьшим. А так как разбиение Делоне дуально разбиению Вороного, (и комбинаторно, и метрически), то отсюда вытекает связь между оптимальными решетчатыми покрытиями пространства равными шарами и разбиениями пространства на параллелоэдры Вороного. Именно исследования Сергея Сергеевича по теории параллелоэдров Вороного лежат в центре всего его творчества.

В действительности, параллелоэдр Вороного есть частный случай параллелоэдра, который определяется как многогранник, разбивающий пространство своими параллельными копиями. На плоскости имеются два типа параллелоэдров: параллелограмм и центрально симметричный шестиугольник. Все типы трехмерных параллелоэдров (их оказалось 5) были описаны Е. С. Федоровым в 1885 году. Четырехмерные параллелоэдры были найдены Б. Н. Делоне (1929 г.), который доказал, что каждый n-мерный параллелоэдр при $n \le 4$ аффинно эквивалентен некоторому параллелоэдру Вороного.

Вороной построил общую теорию n-мерных параллелоэдров. Он выделил так называемые *примитивные* параллелоэдры. Это такие параллелоэдры, что в каждой вершине разбиения сходится минимальное (именно $n+1$) число параллелоэдров. Вороной доказал, что примитивных параллелоэдров при каждом n конечное число и дал алгоритм их нахождения.

Здесь уместно отметить, что одним из центральных элементов этого алгоритма является доказанная Вороным фундаментальная теорема о том, что всякий примитивный параллелоэдр аффинно эквивалентен некоторому, разумеется, также примитивному, параллелоэдру. В дальнейшем эта теорема была значительно усилена О. К. Житомирским. Сравнительно недавно к этой теореме Вороного "о существовании" Сергей Сергеевич добавил (в совместной с Л. Мишелем и М. Сенешаль работе) "теорему единственности": *для каждого примитивного параллелоэдра аффинно эквивалентный параллелоэдр Вороного единствен.*

При построении своего алгоритма Вороной ввел в рассмотрение понятие L-типа, а также общие и специальные L-типы решеток (или соответствующих им ПКФ). Две решетки принадлежат одному L-типу, если соответствующие разбиения Делоне аффинно эквивалентны. Решетка называется *общей*, если все достаточно близкие к ней решетки имеют тот же L-тип. В противном случае решетка называется специальной. Параллелоэдры Вороного, соответствующие общим решеткам, и только такие паралллеоэдры Вороного являются примитивными. Разбиения Делоне, соответствующие общим решеткам, являются симплициальными. В силу фундаментальной теоремы для полного перечисления всех классов примитивных паралллеоэдров достаточно перечислить общие типы параллелоэдров Вороного. Связные компоненты решеток общего типа в пространстве $\mathbb{E}^N$ представляют собой выпуклые гоноэдры, разбивающие конус ПКФ. На пограничных стенках этих гоноэдров лежат специальные решетки (ПКФ). Для решения задачи перечисления классов примитивных паралллеоэдров достаточно каталогизировать все области общего типа.

С помощью своего алгоритма Вороной показал, что в размерностях $n = 2, 3$ и 4 имеется один, один и три, соответственно, аффинных класса примитивных параллелоэдров. Реализовать же алгоритм Вороного при $n = 5$ не удавалось в силу возникающих здесь вычислительных трудностей.

В середине 1960-х годов Сергей Сергеевич заинтересовался задачей вывода всех примитивных 5-мерных параллелоэдров и поначалу попытался сделать это посредством алгоритма Вороного, привлекая к нему дополнительные геометрические соображения. На этом пути он получил десятки примитивных параллелоэдров (напомним, при $n = 4$ их только 3), однако вычислениям не было видно конца.

Нужны были новые подходы. Они были найдены С. С. Рышковым в его совместной с Е. П. Барановским работе. Сергей Сергеевич ввел понятие *смежностного* типа (С-типа) решетки: решетки принадлежат одному С-типу, если соответствующие разбиения Делоне имеют аффинно эквивалентные *одномерные* остовы. Ясно, что если две решетки принадлежит одному L-типу, то они принадлежат и одному C-типу. Однако обратное верно лишь для $n \leq 3$. Начиная с $n = 4$, некоторые области C-типа подразбиваются на несколько подобластей L-типов. Например, при $n = 5$, как оказалось впоследствии, разных L-типов 5-мерных параллелоэдров – 222 против 76 C-типов. Причина успеха в L-классификации 5-мерных параллелоэдров заключалась не столько в том, что C-типов гораздо меньше чем L-типов, сколько в том, что Сергею Сергеевичу удалось найти удачный алгоритм отыскания всех C-типов 5-мерных параллелоэдров. Этот алгоритм основан на приведении Вороного по совершенным формам. Дело в том, что при $n = 5$ имеется три совершенных формы. Одна из них, так называемая *первая совершенная* форма, существует при любой размерности n. Более того, при любой размерности область, соответствующая первой совершенной форме, есть область *одного и только одного* как C-типа так и L-типа. Дальнейшие исследования показали, что при $n = 5$ область, соответствующая второй совершенной форме, разделяется на 75 попарно неэквивалентных областей C-типа. Область третьей совершенной формы пересекается с 21 попарно неэквивалентными областями C-типа, причем каждый из этих C-типов уже встречался в области второй совершенной формы. Выводу C-типов способствовали удачно выбранные графы – символы C-типов.

На втором этапе, при решении задачи о разделении C-типов на области L-типов, большую роль сыграла теория переделивания, описывающая переход из одной области C-типа в другую. Приложение теории переделивания к 76 C-типам дало 222 области L-типов. (В действительности, в работе по недосмотру один L-тип был пропущен).

Перечисление областей L-типов имело решающее значение для другой важной задачи – отыскания редчайшего покрытия пространства $\mathbb{E}^n$ равными шарами. Благодаря теореме (Б. Н. Делоне, Н. П. Долбилин, С. С. Рыщков, М. И. Штогрин, 1970 г.) о том, что в каждой области L-типа существует не более одной решетки, дающей локально редчайшее покрытие, нужно было просмотреть каждую из найденных областей L-типов. Но даже с учетом этих соображений задача потребовала огромных вычислительных усилий. При помощи компьютеров было найдено, что у 215 общих L-типов редчайшее покрытие плотнее покрытия, соответствующее у так называемой *главной решетки* первого типа Вороного. Оставалось сравнить эту главную решетку первого типа с остающимися 6 L-типами. К счастью, эти области типа симметричны. В силу только что упомянутой теоремы о единственности редчайшие покрытия в этих областях сидят в неподвижных точках. На этом этапе задача была быстро доведена до конца.

Исследование параллелоэдров стало приоритетом в дальнейших исследованиях Сергея Сергеевича. Здесь можно упомянуть и теорию дайсингов, и теорему о комбинаторной эквивалентности любого зоноэдрального параллелоэдра некоторому параллелоэдру Вороного, и поэтажный алгоритм построения вывода всех L-многогранников непримитивных n-мерных решеток, и многое другое.

В последние годы Сергей Сергеевич напряженно работал совместно с своей аспиранткой Е. А. Большаковой над оформлением теории так называемых *коренных паралллеоэдров*, результатом которой является высказанная им самим ещё в 1998 году принципиальная теорема всей теории:

Для чисел $n_1 = 1$, $n_2 = 4$, $n_3 = 5$, ... , $n_k = k + 2$, ... в евклидовых пространствах $\mathbb{E}^{n_k}$ определены "коренные" (или "базисные") параллелоэдры, удовлетворяющие следующим условиям:

(1) *при каждом натуральном n для любого примитивного n-мерного параллелоэдра найдется не менее $n(n+2)/2$ коренных параллелоэдров $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, ... , $\mathcal{P}_\sigma$ размерности, не превосходящей n, и расположенных в пространстве $\mathbb{E}^n$ так,*

что

$$\mathcal{P} = \lambda_1\mathcal{P}_1 + \lambda_2\mathcal{P}_2 + \ldots + \lambda_\sigma\mathcal{P}_\sigma, \qquad (1)$$

где справа стоит суммирование по Минковскому, и λ_i *– положительные числа;*

(2) *каждый* n*-мерный примитивный параллелоэдр* $\mathcal{P}' \subset \mathbb{E}^n$ *того же типа, что и* $\mathcal{P}$ *может быть представлен в виде (1) с теми же* $\mathcal{P}_i$*, но, возможно, с другими коэффициентами* λ_i*.*

Сергей Сергеевич всю свою жизнь занимался преподаванием. После кратковременной работы в Московском текстильном институте он долгое время работал профессором математики в МФТИ, а на протяжении более 20 лет профессором на механико-математическом факультете МГУ. У него было много учеников. Более десяти из них защитили кандидатские диссертации, а трое – докторские.

Сергей Сергеевич был человеком очень широких интересов. Глубоко знал и понимал музыку, во время конкурсов Чайковского становился постоянным посетителем Московской консерватории, начиная с предварительных туров. Он занимался и фигурным катанием, и теннисом, и бальными танцами, прекрасно фотографировал, играл в шахматы. Сергей Сергеевич был заядлым туристом. Он много путешествовал в горах Кавказа, Тянь-Шаня, Алтая. Любовь к природе, к путешествиям он передал своим детям и внукам.

Сергей Сергеевич был удивительным семьянином. Его родители, прожившие более 90 лет каждый, и родители его супруги до конца своей жизни были окружены чутким вниманием со стороны Сергея Сергеевича и его супруги Надежды Васильевны. Отношения Сергея Сергеевича и Надежды Васильевны на протяжении всех 45 лет их совместной жизни были исключительно трогательными и вызывали восхищение друзей и близких. Их дом отличался исключительным гостеприимством. В отношениях с детьми и внуками Сергея Сергеевича отличали глубокая сопричастность к их проблемам в сочетании с мудростью и деликатностью.

Память о Сергее Сергеевиче навсегда сохранится у его близких, коллег и учеников.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН.
Получено 21.04.2015

УДК 512.552.5

Градуированные кольца частных

И. Н. Балаба[1] (Тула),
А. Л. Канунников, А. В.Михалёв (Москва)
ibalaba@mail.ru, andrew.kanunnikov@gmail.com

[1]Грант РФФИ № № 15-01-01540

При исследовании колец нередко оказывается полезным вложить рассматриваемое кольцо в кольцо, обладающее теми или иными дополнительными свойствами. При построении структурной теории градуированных колец значительный интерес представляет изучение градуированных колец частных, естественным образом наследующих градуировку исходного кольца.

Каждое градуированное кольцо R обладает полным правым градуированным кольцом частных $Q^{gr}(R)$, в которое вкладывается любое градуированное правое кольцо частных кольца R. Кольцо $Q^{gr}(R)$ является градуированным аналогом полного правого кольца частных $Q(R)$ и может быть построено аналогичными способами. Используя конструкцию Утуми, Е. Джерперс и П. Ваутерс [1] определили градуированные аналоги мартиндейловских и симметрического колец частных; установили связь между этими кольцами и их неградуированными аналогами.

Градуированное правое классическое кольцо частных $Q^{gr}_{cl}(R)$ по аналогии с классическим кольцо частных $Q_{cl}(R)$ строится при помощи локализации по мультипликативной системе всех однородных регулярных элементов кольца R. В отличие от неградуированного случая, существуют gr-полупервичные правые кольца Голди не обладающие gr-полупростыми gr-артиновыми кольцами частных [2, 3].

В работах одного из авторов [4, 5] рассматривались вопросы существования и строения градуированных колец частных $Q^{gr}(R)$ и $Q^{gr}_{cl}(R)$ gr-полупервичного правого градуированного кольца Голди R, которые, в отличие от неградуированного случая, могут не совпадать; доказаны градуированные аналоги третьей теоремы Голди о строении (полу)первичных колец главных правых идеалов. В [6] дан обзор современных результатов по кольцам частных градуированных колец.

Мощным логическим средством исследования в теории колец является метод ортогональной полноты, разработанный К. И. Бейдаром и А. В. Михалёвым [7], основная идея которого состоит в рассмотрении полупервичных колец как булевых произведений первичных, что позволяет теоремы с определённой логической структурой о первичных кольцах „поднимать“ до теорем об ортогонально полных полупервичных кольцах. Одним из основных объектов теории ортогональной полноты является центр полного правого кольца частных полупервичного кольца R, называемый расширенным центроидом. Его градуированным аналогом является градуированный расширенный центроид $C^{gr}(R)$ – максимальное градуированное подкольцо центра полного правого градуированного кольца частных [8].

Теорема 1. *Пусть R – gr-полупервичное кольцо, $C = C^{gr}(R)$– его градуированный расширенный центроид, B – булево кольцо идемпотентов единичной компоненты C_e кольца C. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) кольцо C gr-регулярно и gr-самоинъективно;

(2) кольцо C_e регулярно и самоинъективно;

(3) следующие условия равносильны: а) кольцо R gr-первично; б) C – градуированное поле; в) C_e – поле; г) $B = Z_2$

(4) булева алгебра B ортогонально полна и изоморфна булевой алгебре градуированных аннуляторных идеалов кольца R.

Для построения ортогонального градуированного пополнения gr-полупервичного кольца вводится понятие ортогональной gr-полноты. Градуированное подмножество $X \subseteq Q^{gr}(R)$ назовём *ортогонально gr-полным*, если все его однородные компоненты X_g ортогонально полны. *Ортогональным градуированным пополнением* $O^{gr}(X)$ градуированного подмножества $X \subseteq Q^{gr}(R)$ назовём пересечение всех ортогонально gr-полных подмножеств в $Q^{gr}(R)$, содержащих X. Отметим, что для gr-полупервичного кольца R кольцо $Q^{gr}(R)$ является *ортогонально gr-полным.*

Следущая теорема из [9] устанавливает критерий ортогональной полноты кольца $Q^{gr}(R)$.

Теорема 2. *Для gr-полупервичного кольца R следующие условия равносильны:*

(1) кольцо $Q^{gr}(R)$ ортогонально полно;

(2) для любой бесконечной ортогональной системы идемпотентов $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в B_e существуют такие конечные подмножества $G_0 \subset G$ и $\Gamma_0 \subset \Gamma$, что $u_\gamma Q^{gr}(R) = 0$ для всех пар $(g, \gamma) \in (G \setminus G_0) \times (\Gamma \setminus \Gamma_0)$.

Ортогональное градуированное пополнение применяется к исследованию gr-полупервичных градуированных колец Голди и к градуированным кольцам с однородным дифференцированием (см. [9, 10]).

Теорема 3. *Пусть R – gr-полупервичное правое кольцо Голди. Тогда его ортогональное градуированное пополнение $O^{gr}(R)$ является конечной прямой суммой gr-первичных правых колец Голди.*

Теорема 4. *Пусть R – gr-полупервичное правое кольцо Голди, градуированное абелевой группой G. Тогда*

$$O^{gr}(R) = R_1 \oplus \ldots \oplus R_n, \quad \text{где} \quad R_i \quad - \quad \text{gr-первичные кольца Голди},$$

$$Q^{gr}(R) = Q^{gr}_{cl}(R_1) \oplus \ldots \oplus Q^{gr}_{cl}(R_i).$$

Список цитированной литературы

1. Jespers E., Wauters P. A general notion of noncommutative Krull rings // J. Algebra. 1988. Vol. 112. P. 388–398.

2. Năstăsescu C., Nauwelaerts E., van Oystaeyen F. Arithmetically graded rings revisited // Comm. Algebra. 1986. Vol. 14, no. 10. P. 1191–2017

3. Goodearl K.R., Stafford J.T. The graded version of Goldie‘s theorem // Contemp. Math. 2000. Vol. 259. P. 237–240.

4. Канунников А.Л. Градуированные варианты теоремы Голди // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. 2011. № 3. С. 46–50.

5. Канунников А. Л. Градуированные варианты теоремы Голди, II // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. 2013. №3. С. 47–51.

6. Балаба И. Н., Канунников А.Л., Михалёв А.В. Кольца частных градуированных ассоциативных колец. I // Фундамент. и прикл. матем. 2012. Т. 17, вып. 2. С. 3–74.

7. Бейдар К.И., Михалёв А.В. Ортогональная полнота и алгебраические системы // Успехи матем. наук. 1985. Т. 40, вып. 6(246). С. 77–115.

8. Балаба И. Н., Ефремов В.А. Градуированные кольца частных полупер- вичных градуированных колец // Чебышевский сб. 2010. Т 11, вып. 1(33). С. 20-30.

9. Канунников А. Л. Ортогональное градуированное пополнение гра- дуированно полупервичных колец // Фундамент. и прикл. матем. 2012. Т 17, вып. 7. С. 117–150.

10. Канунников А. Л. Об одном применении метода ортогональной пол- ноты в теории градуированных колец // Алгебра и логика. 2013. Т 52, № 7. С. 145–154.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого,
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Получено 28.04.2015

УДК 511.3

О сопряженности слов и подгрупп в некоторых свободных конструкциях групп

В. Н. Безверхний, Е. С. Логачева (Тула)
platonov@niisi.ras.ru

Будем говорить, что в группе G разрешима проблема сопряженности подгрупп, если существует алгоритм, позволяющий для любых конечно порожденных подгрупп H_1, H_2 из G установить, существует ли элемент z такой, что $z^{-1}H_1z = H_2$.

Данная проблема является обобщением проблемы сопряженности слов, аналогично тому, как проблема вхождения является обобщением проблемы равенства слов.

Впервые проблема сопряженности подгрупп была рассмотрена В. Н. Ремесленниковым [14], доказавшим ее алгоритмическую разрешимость в классе нильпотентных групп.

М. Д. Гриндлингер получил необходимые и достаточные условия сопряженности подгрупп ранга два в свободной группе [9].

Далее, Д. И. Молдаванским была доказана алгоритмическая разрешимость проблемы сопряженности подгрупп в свободной группе [13].

В свободном произведении групп В. Н. Безверхним [5] и Д. И. Молдаванским [12] независимо была решена проблема сопряженности при условии, что в сомножителях разрешимы проблемы вхождения и сопряженности подгрупп.

В 1977 г. В. Н. Безверхним была доказана

Теорема 1 ([4]). *В группе $G = F_m \underset{C}{*} F_n$, являющейся свободным произведением свободных групп F_m, F_n рангов m и n соответственно, с циклическим объединением разрешима проблема сопряженности подгрупп.*

Следует заметить, что в 1966 г. С. Липшуц [15] доказал разрешимость проблемы сопряженности слов в группе $G = F_m \underset{C}{*} F_n$.

В 1975 г. В. Н. Безверхний показал, что в свободном произведении двух свободных групп, объединенных по подгруппе ранга 4, проблема сопряженности подгрупп алгоритмически неразрешима.

В 1983 В. Н. Безверхний доказал разрешимость проблемы сопряженности подгрупп в HNN-расширении группы G по изоморфным конечным ассоциированным подгруппам при условии, что в G разрешима проблема вхождения и сопряженности подгрупп [3].

Рассмотрим конечный дерево-граф Γ_n, n — число вершин в Γ_n, перенумеруем их и каждой вершине поставим в соответствие свободную группу F_{n_i}, ранга n_i.

Если две группы F_{n_i} и F_{n_j} соответствуют концам ребра e, то рассмотрим слово $v_{ij}^{m_{ij}} \cdot v_{ji}^{m_{ij}}$, где $v_{ij} \in F_{n_i}$, $v_{ji} \in F_{n_j}$ причем слова v_{ij} и v_{ji} не являются истинными степенями в соответствующих группах. Профакторизуем свободное произведение $G = \prod\limits_{i=1}^{n}{}^{*} F_{m_i}$ свободных групп F_{m_i} $i \in \{1, \ldots, n\}$, по нормальной подгруппе, порожденной словами $\left\{v_{ij}^{m_{ij}} \cdot v_{ji}^{m_{ij}}\right\}$, $i \in I_1$, $j \in I_2$. Получим группу $G_{\tilde{A}_n}$, являющуюся древесным произведением свободных групп с объединением по циклическим подгруппам, копредставление которой будет иметь следующий вид:

$$G_{\tilde{A}_n} = \left\langle \prod_{i=1}^{n} F_{n_i} \middle| v_{ij}^{m_{ij}} = v_{ji}^{m_{ij}}, i \in I_1, j \in I_2 \right\rangle. \tag{1}$$

Теорема 2. *В группе $G_{\tilde{A}_n}$ (1) разрешима проблема сопряженности слов.*

Теорема 3. *В группе $G_{\tilde{A}_n}$ (1) разрешима проблема вхождения.*

Доказательство вытекает из результатов [1], [2].

Теорема 4. *В группе $G_{\tilde{A}_n}$ (1) разрешима проблема сопряженности подгрупп.*

Рассмотрим группу

$$C_{\tilde{A}_n} = \left\langle a_1, a_2, \dots, a_s \left| a_i^{m_{ij}} = a_j^{m_{ij}}, i \in I_1, j \in I_2 \right. \right\rangle, \tag{2}$$

являющуюся древесным произведением циклических групп с объединением. Далее рассмотрим HNN-расширение $\tilde{N}^*_{\tilde{A}_n}$ группы $C_{\tilde{A}_n}$ имеющей копредставление

$$\tilde{N}^*_{\tilde{A}_n} = \left\langle C_{\tilde{A}_n}, t \left| relC_{\tilde{A}_n}, t^{-1} a_{i_0}^{k_{i0}} t = a_{j_0}^{k_{j0}} \right. \right\rangle, \tag{3}$$

где t — правильная проходная буква.

Теорема 5. *В группе $\tilde{N}^*_{\tilde{A}_n}$ разрешима проблема сопряженности слов.*

Теорема 6. *В группе $\tilde{N}^*_{\tilde{A}_n}$ разрешима проблема вхождения.*

При доказательстве данной теоремы используется результаты [1] и следующие леммы.

Лемма 1 ([10]). *Существует алгоритм, позволяющий для любой конечнопорожденной подгруппы $H < C_{\tilde{A}_n}$ и циклической подгруппы $< a_k >$, $k \in \{1, \dots, n\}$, a_k – образующий $C_{\tilde{A}_n}$, выписать образующий пересечения $H \bigcap < a_k >$.*

Лемма 2 ([10]). *Существует алгоритм, позволяющий для любого $v \in \tilde{N}^*_{\tilde{A}_n}$ и любой конечнопорожденной подгруппы $H < C_{\tilde{A}_n}$ установить пусто или не пусто пересечение $vH \bigcap < a_k >$, где a_k – образующий $C_{\tilde{A}_n}$.*

Теорема 7 ([7]). *В группе $G =< a, t; t^{-1} a^m t = a^n >$ разрешима проблема сопряженности подгрупп.*

Теорема 8. *В группе $\tilde{N}^*_{\tilde{A}_n}$ разрешима проблема сопряженности конечнопорожденных подгрупп.*

Теорема 9. *Пусть группа*

$$C^* = \left\langle C_{\tilde{A}_n}, \{t_{ij}\}, i \in I_1, j \in I_2 \left| relC_{\tilde{A}_n}, t_{ij}^{-1} a_i^{s_{ij}} tij = a_j^{s_{ji}} \right. \right\rangle,$$

где $|I_1| < \infty$, $|I_2| < \infty$, есть HNN-расширение группы $C_{\tilde{A}_n}$ с конечным, большим единицы, числом проходных букв $\{t_{ij}\}$, где a_i, a_j – образующие $C_{\tilde{A}_n}$. Тогда, если слова w, v из C^* не сопряжены в C^* элементам из ассоциированной подгруппы $< a_i^{s_{ij}} >$ для некоторого i, то можно эффективно определить сопряжены ли они в C^*.

Список цитированной литературы

1. В. Н. Безверхний Решение проблемы вхождения в классе HNN-групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: Межвузовский сб. научных трудов. Тула. 1981. С. 20–62.

2. В. Н. Безверхний. Решение проблемы вхождения в некоторых классах групп с одним определяющим соотношением. "Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп."Межвузовский сб. научных трудов. Тула, 1986, 3-25.

3. В. Н. Безверхний. Решение проблемы сопряженности подгрупп в одном классе HNN - групп. "Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп."Межвузовский сб. научных трудов. Тула, 1983, 50-80.

4. В. Н. Безверхний Решение проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения групп // I-II Современная алгебра. Межвуз. сб. Ленинград. 1977. Вып. 6. С. 16–32.

5. В. Н. Безверхний Решение проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения групп // XXI Всесоюзный алгебраический коллоквиум. Кишинев. 1971. С. 9–10.

6. В. Н. Безверхний Неразрешимость проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения групп с объединением // Сборник научных трудов кафедры высшей математики. Тульский политех. ин-т. 1975. Вып. 2. С. 90–95.

7. В. Н. Безверхний. Е. С. Логачева Решение проблемы сопряженности подгрупп в одном классе HNN-групп // Известия ТулГУ, серия Математика, Механика, Информатика. 2006. Т. 12, вып. 1. С. 83–101.

8. В. Н. Безверхний. Е. С. Логачева Проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении циклических групп с объединением // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, вып. 1(41). С. 20–46.

9. М. Д. Гриндлингер Сопряженность подгрупп свободной группы // Сибирский мат. журнал. 1970. Т. 11. С. 1178–1180.

10. Е. С. Логачева Проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении безконечных циклических групп // Известия ТулГУ, серия "Естественные науки". 2013. Вып. 2, ч. 1. С. 19–40.

11. Р. Линдон, П. Шупп Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

12. Д. И. Молдаванский Решение проблемы сопряженности подгрупп // XXI Всесоюзный алгебраический коллоквиум. Кишинев, 1971. С. 62–63.

13. Д. И. Молдаванский Сопряженности подгрупп свободной группы // Алгебра и логика. 1969. Т. 8, №6. С. 691–694.

14. В. Н. Ремесленников Сопряженность подгрупп в нильпотентных группах // Алгебра и логика. 1967. Т. 6, №2. С. 61–76.

15. S. Lipschutz Generalization of Dehn's result on the conjugacy problem // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 17. P. 759–762.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Получено 24.04.2015

UDK 511.335

Universal generalization of the continued fraction algorithm

A. D. Bruno (Moscow)
brunoa@mail.ru

1. Simple generalization. Let three homogeneous real linear forms be given in a three-dimensional real space. Their moduli give a mapping of the space into another space. In the second space, we consider the convex hull of images of all integer points of the first space except its origin. This convex hull is called the modular polyhedron. The best integer approximations to the root subspaces of these forms are given by the integer points whose images lie on the boundary of the modular polyhedron. For the concret three linear forms, any part of the boundary of the modular polyhedron can be computed by means of any standard program for computation of a convex hull. The algorithm gives the best approximations, and it is periodic for cubic irrationalities with positive discriminant. It also allows to understand why matrix algorithms proposed by Euler, Jacobi, Dirichlet, Hermite, Poincare, Hurwitz, Brun, Güting and others are not universal: proper algorithm is composed from several different matrix algorithms. It also explains a success of the Voronoi algorithm and gives a basis for step-by-step computation of the best approximations [1, 2].

2. Universal generalization. Let l linear forms and k quadratic forms ($n = l + 2k$) be given in the n-dimensional real space R. Absolute values of the forms define a map of the space R into the positive orthant S_+ of the m-dimensional real space S, where $m = l + k$. Here the integer lattice in R is mapped into a set Z in S_+. The closure of the convex hull G of the set $Z\backslash 0$ is a polyhedral set. Integer points from R, which are mapped in the boundary of the polyhedron G, give the best Diophantine approximations to root subspaces of all given forms. In the algebraic case, when the given forms are connected with roots of a polynomial of degree n, we prove that the polyhedron G has $m-1$ independent periods. It is a generalization of the Lagrange Theorem, that continued fractions of a square irrationality is periodic. For concrete set of the m forms, any part of the boundary of the polyhedron G can be computed by a program for computing convex hulls [3].

3. Main achievement. Best Diophantine approximations can be computed by a global algorithm using a standard program for computing convex hulls, instead of step-by-step computations as in the continued fraction algorithm. It gives a solution of the problem, that majority of main mathematicians of the XIX century tried to solve.

REFERENCES

1. Брюно А. Д. и Парусников В. И. Многогранник модулей троек линейных форм. Препринт № 93. М: Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша, 2003. 20 с.
2. Bruno A. D. New generalization of the continued fraction I. // Functiones et Approximato. 2010. V. 43:1, P. 55-104 (English) = Обобщения цепной дроби // Чебышевский сборник. 2006. Т. 7, № 3. С. 4–71.
3. Bruno A. D. The structure of multidimensional Diophantine approximations // Doklady Mathematics. 2010. V. 82:1. P. 587-589. (English) = ДАН. 2010. Т. 433, № 5. С. 587-589.

Keldysh Institute of Applied Mathematics
Received 10.03.2015

UDK 511.42

Metric theorem on approximation of smooth function by linear combinations of non-degenerate functions with non-monotonic error function

N. V. Budarina (Khabarovsk),
M. V. Lamchanovskaya, V. I. Bernik (Minsk, Belarus)
buda77@mail.ru, bernik.vasili@mail.ru

In 1998 Kleinbock and Margulis [1] established the Baker–Sprindzuk conjecture concerning homogeneous Diophantine approximation on manifolds. An inhomogeneous version was then proved by Beresnevich and Velani [2]. The theory of inhomogeneous Diophantine approximation on manifolds was started with the result of V. I. Bernik, D. Dickinson and M. Dodson [3]. The significantly stronger Groshev type theory for dual Diophantine approximation on manifolds is established for the homogeneous case and for the inhomogeneous case. In all of these results the error function Ψ was assumed to be monotonic. In 2005 Beresnevich [4] showed that the condition that Ψ is monotonic could be removed for the Veronese curve $\mathcal{V}_n = \{(x, x^2, \ldots, x^n) : x \in \mathbb{R}\}$; he conjectured that the result should also hold for any non–degenerate curve in Euclidean space. This was proved in [5].

Our main result below is a convergent part of Groshev type theorem for inhomogeneous Diophantine approximation on non–degenerate curves in Euclidean space without monotonicity condition. Let $\mathcal{F}_n$ be the set of functions

$$a_n f_n(x) + \ldots + a_1 f_1(x) + a_0,$$

with $n \geqslant 2$, $\mathbf{a} = (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\}$, and $f_1, f_2, \ldots, f_n$ be $C^{(n)}$ functions from $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with non–vanishing Wronskian $wr(f_1', \ldots, f_n')(x)$ almost everywhere. For $F \in \mathcal{F}_n$ define the height of F as $H = H(F) = \max_{0 \leqslant j \leqslant n} |a_j|$. The Lebesgue measure of a measurable set $A \subset \mathbb{R}$ is denoted by $\mu(A)$.

Define a real valued function $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ and a function $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Denote by $\mathcal{L}_{n,\theta}(\Psi)$ the set of $x \in \mathbb{R}$ such that the inequality

$$|F(x) + \theta(x)| < \Psi(H(F)) \tag{1}$$

has infinitely many solutions $F \in \mathcal{F}_n$.

The main result is the following statement.

Theorem 1. *Let $n \geqslant 2$ and $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function such that $\theta \in C^{(n)}$. Let $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ be an arbitrary function (not necessarily monotonic) such that the sum $\sum_{h=1}^{\infty} h^{n-1}\Psi(h)$ converges. Then*

$$\mu(\mathcal{L}_{n,\theta}(\Psi)) = 0.$$

REFERENCES

1. D. Y. Kleinbock, G. A. Margulis, Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds // Ann. of Math. 1998. Vol. 148. P. 339–360.

2. V. V. Beresnevich, S. Velani, An inhomogeneous transference principle and Diophantine approximation // Proc. Lond. Math. Soc. 2010. Vol. 101. P. 821–851.

3. V.I. Bernik, D. Dickinson, M. Dodson, Approximation of real numbers by values of integer polynomials // Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi 1998. Vol. 42. P. 51–54.

4. V. V. Beresnevich, On a theorem of V. Bernik in the metric theory of Diophantine approximation // Acta Arith. 2005. Vol. 117. P. 71–80.

5. N. Budarina, D. Dickinson, Diophantine approximation on non–degenerate curves with non–monotonic error function // Bull. Lond. Math. Soc. 2009. Vol. 41. P. 137–146.

Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
Received 13.01.2015

УДК 511.

Кольца коэффициентов формальных групп и свойства биномиальных коэффициентов

В. М. Бухштабер (Москва), А. В. Устинов (Хабаровск)

buchstab@mi.ras.ru ustinov.alexey@gmail.com

Доклад посвящен результатам вычисления колец коэффициентов универсальных формальных групповых законов, которые играют важную роль в алгебраической геометрии, алгебраической топологии и их приложениях в математической физике.

Будет описана структура этих колец и их гомоморфизмы, соответствующие редукциям одного вида группового закона к другому. Доказательства опираются на теоретико–числовые свойства биномиальных коэффициентов.

Одна из целей доклада — привлечь внимание специалистов по теории чисел к актуальным задачам теории формальных групп, в том числе пришедшим из теории родов Хирцебруха и их приложений.

Все необходимые понятия будут введены в ходе доклада.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН.
Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН.
Получено 17.04.2015

УДК 519.95+519.712.4

Об арифметической сложности вычисления линейных преобразований биномиального, Стирлинга, Лаха и $q-$биномиального преобразования Гаусса

С. Б. Гашков[1] (Москва)
sbgashkov@gmail.com

Под вычислением понимается вычисление с помощью *схемы* (то есть неветвящейся программы) в произвольном *базисе* B, состоящем из *операций*

$$\omega_i(x_1, \dots, x_{n_i}) : E^{n_i} \to E,$$

[1]Грант РФФИ № 14–01–00598 и 14–01–00671а

где E заданное множество, например, множество действительных чисел (для некоторых базисных операций может быть $n_i = 0$, то есть операция вычисляет константу).

Схемой с входами $x_1, \ldots, x_n$ называется последовательность функций

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) : E^n \to E,\ i = 1, \ldots, l,$$

начинающаяся с *селекторных* функций $e_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, $i = 1, \ldots, n$ (то есть попросту с переменных x_i), в которой каждая функция $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ (некоторые переменные у них могут быть *фиктивными*, то есть значение функции от них не зависит) вычисляется с помощью некоторой *базисной операции* $\omega_j(y_i, \ldots, y_{n_j})$ (если эта операция — константа, то и вычисляемая ей функция тоже константа) и каких-то предыдущих функций f_{k_r}, $k_r < i$, $r = 1, \ldots, n_j$:

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = \omega_j(f_{k_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_{k_{n_j}}(x_1, \ldots, x_n)).$$

Сложностью схемы называется число $l - n$ функций в ней (кроме селекторных функций, которые рассматриваются как *входы схемы*). Схема *реализует (вычисляет)* функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$, если эта функция встречается в последовательности $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, l$, (обычно на последнем месте). Схема вычисляет *вектор- функцию* $(g_1, \ldots, g_m)$, если все ее функции g_i встречаются в последовательности f_i, $i = 1, \ldots, l$.

Сложностью вычисления функции g (или вектор-функции $(g_1, \ldots, g_m)$) схемами в данном базисе B называется *минимальная* сложность схемы в этом базисе, реализующей данную функцию (вектор-функцию).

В [1, 2] изучалась сложность схемной реализации некоторых линейных преобразований, использующихся в комбинаторике, а именно биномиального преобразования, преобразований Стирлинга обоих родов, преобразований Лаха и Гаусса (об этих преобразованиях см., например, [3]). Использовались *аддитивный базис* B_+, *конечный арифметический базис* $B_{+,*,/} = \{x+y, x-y, xy, 1/x, 1\}$, *континуальный линейный базис* $B_l = \{ax + by : a, b \in \mathbb{R}\}$ и его подмножества: *базис с вычитанием* $B_{+,-}$, *счетный линейный базис* $\{x \pm y\} \cup \{nx : n \in \mathbb{N}\}$ $\cup\{x/n : n \in \mathbb{N}\}$, *линейный базис с ограниченными константами* $B_{l,C} = \{x + y\} \cup \{ax : |a| \leq C\}$ и *монотонный линейный базис* $B_{m,l} = \{ax + by : a, b \in \mathbb{R}_+\}$.

В [2] некоторые результаты [1] были улучшены. Ниже они сведены в окончательную таблицу. В ней b_n, s_n, S_n, L_n, G_n соответственно обозначают преобразования $n-$го порядка биномиальное, Стирлинга 1-го и 2-го рода, Лаха и Гаусса, а $B_{l,C}, B_l, B_{+,*,/}$ — определенные выше базисы операций. В преобразовании Гаусса параметр q предполагается нечетным и малым в сравнении с n, поэтому в оценках он не появляется. Все оценки приведены с точностью до порядка, хотя в некоторых случаях они получены в более точном виде. Базисы B_+ и $\{x \pm y\} \cup \{nx : n \in \mathbb{N}\}$ $\cup\{x/n : n \in \mathbb{N}\}$ в таблицу не включены, так как оценки для них совпадают с оценками для базисов $B_{l,C}$ и $B_{+,*,/}$ соответственно. Также не включен базис $B_{m,l}$, потому что для него получены только нижние оценки вида $\Omega(n \log n)$ и только для преобразований b_n, C_n, L_n, G_n.

	$B_{l,C}$	B_l	$B_{+,*,/}$
b_n	$\Theta(n^2)$	$O(n \log n)$	$O(M(n))$
S_n	$O(n^2 \log n)$	$O(n \log^2 n)$	$O(M(n) \log n)$
s_n	$\Theta(n^2 \log n)$	$O(n \log^2 n)$	$O(M(n) \log n)$
L_n	$\Theta(n^2 \log n)$	$O(n \log n)$	$O(M(n))$
G_n	$\Theta(n^3)$	$O(n \log n)$	$O(M(n))$

В ней $M(n)$ — сложность умножения произвольного многочлена степени $n-1$ на фиксированный многочлен степени $n-1$ (в естественном предположении, что $M(2n) \geq 2M(n)$.)

В случае базиса B_l для оценки $M(n)$ можно использовать метод, основанный на применении быстрого преобразования Фурье [4, 5], и получить равенство $M(n) = O(n \log n)$. В случае базисов $\{x \pm y\} \cup \{nx : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x/n : n \in \mathbb{N}\}$ и $B_{+,*}$ для умножения многочленов применяется метод [6, 7] (см. также его изложение в [8]) и оценка $M(n)$ в нем есть $O(n \log n \log \log n)$. Из результатов [9] выводится оценка $M(n) = n \log n \Psi(n)$, где $\Psi(n)$ — некоторая чрезвычайно медленно растущая последовательность (она растет медленнее любой итерации логарифма).

Список цитированной литературы

1. Гашков С. Б. Арифметическая сложность некоторых линейных преобразований// Матем. заметки. 2015. Т. 97, № 4. С. 529–555.

2. Гашков С. Б. Арифметическая сложность преобразований Стирлинга// Дискрет. матем. 2014. Т. 26, № 4. С. 23–35.

3. Айгнер М. Комбинаторная теория. Москва: Мир, 1982

4. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Проектирование и анализ вычислительных алгоритмов. Москва: Мир, 1979.

5. Cooley J., Tukew J. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. Math. Comp. 1965. Vol. 19 P. 297–301

6. Cantor D., Kaltofen E. On fast multiplication of polynomials over arbitrary algebras. Acta Informatica. 1991. Vol. 28 P. 693–701

7. Schönhage A. Schnelle multiplikation von polynomen über körpern der charakteristik 2. Acta Informatica. 1977. Vol. 7 P. 395–398

8. von zur Gathen J., Gerhard J. Modern computer algebra. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

9. Harvey D.,van der Hoeven J., Lecerf G. Faster polynomial multiplication over finite fields. ArXive.org> cs> arXive: 1407.3361. 12 Jul 2014

Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова
Получено 12.04.2015

УДК 511.48

Диофантовы экспоненты в мультипликативных задачах

О. Н. Герман (Москва)
german.oleg@gmail.com

Самые первые диофантовы экспоненты были определены для задачи совместных приближений и задачи приближения нуля значениями линейной формы в целых точках. В этих задачах в качестве меры отклонения используется sup-норма или, эквивалентно, среднее арифметическое модулей координат. В то же время, есть класс задач, в которых в качестве меры отклонения используется среднее геометрическое модулей координат. Примером могут служить гипотеза Оппенгейма о разложимых формах и классическая гипотеза Литтлвуда. Мы поговорим о диофантовых экспонентах, возникающих в этих задачах, о существующих результатах, касающихся мультипликкативных экспонент, а также затронем некоторые открытые вопросы.

Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова
Получено 29.04.2015

UDK 511

Extremal forms and rigidity in arithmetic geometry and in dynamics

N. M. Glazunov (Kiev, Ukraina)
glanm@yahoo.com

Ryshkov S. S. in his papers has investigated extremal forms and extremal lattices. Extremal forms and lattices are connected with hard or rigid (by M. Gromov and other) objects in mathematics. In their work with colleagues S. S. Ryshkov came also to the other hard (or rigid) objects, for instance, to rigidly connected chain. The purpose of the paper is not to provide any sort of comprehensive introduction to rigidity in arithmetic and dynamics. Rather, we attempt to convey elementary methods, results and some main ideas of the theory, with a survey of some new results. We do not explore an exhaustive list of possible topics, nor do we go into details in proofs. After giving an elementary number theoretic, algebraic and algebraic geometry introduction to rigid non-Archimedean spaces in the framework of local one dimensional complete regular rings, modules over rings, trees and formal schemes follow to I. R. Shafarevich, J.-P. Serre, J. Tate, D. Mumford, we review some novel results and methods on rigidity. These include (but not exhaust) methods and results by S. S. Ryshkov [1], H. Furstenberg, G. A. Margulis, G. D. Mostow, M. Gromov, R. Zimmer, J. Bourgain, A. Furman, A. Lindenstrauss, S. Mozes, J. James, T. Koberda, K. Lindsey, C. Silva, P. Speh, A. Ioana, K. Kedlaya, J. Tuitman, and other.

At first we formulate very briefly some elementary (and probably well known) results on connections among local one dimensional complete regular rings, trees and formal schemes. We follow to [2, 3, 5]. Let A be a local one dimensional complete regular ring with maximal ideal π , K its field of fractions with the multiplicative group K^*, V a two dimensional vector space over K, M a module of the rank 2 over A (a two-dimensional lattice in the space V). Denote by $S(M)$ the symmetric algebra of the module M. The main example is the case of the ring $A = \mathbb{Z}_p$ of integer $p-$ adic numbers, $K = \mathbb{Q}_p$ the field of $p-$ adic numbers, $\pi = p$ the prime number, M a module of the $rank_{\mathbb{Z}_p} M = 2$ over $\mathbb{Z}_p$.

Definition 1. *Let K be a locally compact non-Archimedean field, A its valuation ring, $\mathfrak{m}$ the maximal ideal of A. A free module of rank n over A is called a lattice in K^n.*

Two modules M and $M^{‘}$ of the rank 2 over A are called similar if $M^{‘} = xM$, $x \in K^*$. Denote by $\mathcal{T}$ the set of classes of similar modules.

Definition 2. *Let X be the graph whose vertices are equivalence classes $[M]$ of similar modules M of the rank 2 over A in V , where two vertices x and y are joint by an edge if $x = [M]$ and $y = [M^{‘}]$ with $M^{‘} \subset M$, $M^{‘} \not\subset \pi M$, $M/M^{‘} \simeq A/\pi A$.*

Two modules are called adjacent if the length $l(M/M^{‘}) = 1$, i.e. $M/M^{‘} \simeq A/\pi A$.

Theorem 1. *The graph X is a homogeneous or a regular tree. We will denote the tree by $\mathcal{T}$.*

By $\partial\mathcal{T}$ denote the set of ends of $\mathcal{T}$ and by $\mathbb{P}^1(A)$ denote the one-dimensional projective space over A.

Theorem 2. $\partial\mathcal{T} \simeq \mathbb{P}^1(A)$.

Recall that a group G acts on a set X if there is a map $G \times X \to X, (g; x) \mapsto gx$ such that the following are true: (i) For e the identity of $G, ex = x$; (ii) For $h; g \in G, x \in X, h(gx) = (hg)x$. On the space V act the projective linear group $PGL_2(K)$ and its subgroups. This action extends to the action on the tree $\mathcal{T}$.

Theorem 3. *Let a group G acts on a tree $\mathcal{T}$ without fixed points and without inversions. Then G is the free group.*

Let a group $G \subset PGL_2(K)$ acts on $\mathcal{T}$ discretely and freely. Follow to Mumford it is possible to construct a subtree $\mathcal{T}_G$ of $\mathcal{T}$.

Theorem 4. *If the group G has finite number of generators then $\mathcal{T}_G/G$ is finite.*

For the above mentioned symmetric algebra $S(M)$ of the module M define the corresponding scheme $\mathbb{P}(M)$ by the formula $\mathbb{P}(M) = Proj\ S(M)$. For each module $M \hookrightarrow V$ there is the birational isomorphism $\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}^1(A) \otimes_A K \xrightarrow{\varphi_M} \mathbb{P}^1_K$. Now let $\mathcal{S}$ be a finite subtree of $\mathcal{T}$. It is possible to construct many formal schemes from these data. We indicate here the formal scheme $\mathcal{P}$ that is the formal completion $(\mathbb{P}(\mathcal{S})_0)$ of the scheme $\mathbb{P}(\mathcal{S})$ along its closed fibre $\mathbb{P}(\mathcal{S})_0$ only. Recall that the generic fiber of $\mathbb{P}^1(A)$ is the one-dimensional projective space $\mathbb{P}^1_K$ over K. Let p be a prime, n a positive integer, and $\mathbb{F}_q$ the finite field with $q = p^n$ elements. Let $\mathbb{Q}_q$ denote the unique unramified extension of degree n of the field of p-adic numbers. Let U be an open dense subscheme of the projective space $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_q}$ with nonempty complement Z. Let V be the rigid analytic subspace of $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_q}$ which is the complement of the union of the open disks of radius 1 around the points of Z. A Frobenius structure on $\mathcal{E}$ with respect to σ is an isomorphism $\mathcal{F} : \sigma^*\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}$ of vector bundles with connection defined on some strict neighborhood of V. A meromorphic connection on $\mathbb{P}^1$ over a p-adic field admits a Frobenius structure defined over a suitable rigid analytic subspace. Authors of the paper [4] give an effective convergence bound for this Frobenius structure by studying the effect of changing the Frobenius lift. This describes the interplay between matrix representation of a Frobenius structure and a Gauss-Manin connection.

The theory of rigid p-adic cohomology are developed by Berthelot and others. Rigid cohomology in some sense extends crystalline cohomology. Review of some novel results and applications of crystalline cohomology is given in paper [6]. Further on selected methods and results in arithmetic algebraic geometry and in dynamics will be presented.

REFERENCES

1. Ryshkov S. S., The polyhedron $u(m)$ and some extremal problems of the geomety of numbers // Soviet Math. Dokl. 1970. Vol. 11, P. 1240–1244.

2. Shapharevich I. R., Foundations of Algebraic Geometry(in Russian), Vol. 1, Vol. 2. – Moscow: Nauka, 1988. 351 p., 304 p.

3. Serre J.-P., Trees. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer –Verlag, 2003.

4. Kedlaya K., Tuitman J. Effective convergence bounds for Frobenius structures on connections // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 2012. no.128, P. 7–16.

5. Glazunov N. M., Development of methods to justification of conjectures of formal theories (in Russian). – Germany: LAP, 2014. 280 p.

6. Glazunov N. M., Crystalline cohomology and their applications // Algebra and Number Theory: Modern Problems and Application: XII International Conference. Tula, RFFI. 2014. P. 52–54.

National Aviation University
Received 10.04.2015

UDK 511.335

Voronoi type results on density and kissing numbers of lattice packings of convex bodies

Peter M. Gruber (Vienna, Austria)

peter.gruber@tuwien.ac.at

Using extensions of the notions of eutaxy and perfection one can characterize lattice packings of convex bodies with local maximum properties of the density as in Voronoi's criterion.

For lattice packings with local maximum properties of the density the kissing numbers can be estimated below as in a result of Swinnerton-Dyer. Relations of these results to normal bundle cones and well-rounded lattices are stated.

Technischen Universitat, Vienna.
Received 17.04.2015

UDK 511.335

Extended family of fullerenes

Michel Deza (Paris, France)

deza@orge.ens.fr

It is a joint work with M. I. Shtogrin from Steklov Math. Institute, RAN, Moscow, and M. Dutour Sikirić from Institut Rudjer Boskovic, Zagreb.

Given integers $1 \leqslant a < b$, we consider $(\{a, b\}; k)$-spheres, i. e., k-regular plane graphs with only a- and b-gonal faces. The main case is *fullerenes* $(\{5, 6\}; 3)$-$\mathbb{S}^2$.

The talk is a survey of many generalizations and relatives of fullerenes, especially, $(\{a, b\}; k)$-spheres with flat b-gons and *c-disk fullerenes*, i. e., $(\{5, 6, c\}; 3)$-$\mathbb{S}^2$ with unique c-gonal face.

Ecole Normale Superieure, Paris.
Received 27.03.2015

УДК 511.3

Гиперболическая дзета-функция решёток

Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский (Тула)
dobrovol@tspu.tula.ru nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Гиперболическая дзета-функция решётки Λ задаётся в правой полуплоскости $\alpha > 1$ дзета рядом[1]

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = {\sum_{\vec{x}\in\Lambda}}' (\overline{x_1}\ldots\overline{x_s})^{-\alpha}. \tag{1}$$

Для произвольной решётки Λ норменным минимумом называется величина

$$N(\Lambda) = \inf_{\vec{x}\in\Lambda\setminus\{\vec{0}\}} N(\vec{x}),$$

где норма $N(\vec{x}) = |x_1 \cdot \ldots \cdot x_s|$.

Напомним, что

$$M(\alpha) = \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin\frac{\pi\alpha}{2}$$

и для произвольной целочисленной решётки Λ с $\det\Lambda = N$ дзета-функция $\zeta(\Lambda \mid \alpha)$ в правой полуплоскости задается равенством

$$\zeta(\Lambda \mid \alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda,\, N(\vec{x})\neq 0} |x_1\ldots x_s|^{-\alpha} = {\sum_{\vec{x}\in\Lambda}}' N(\vec{x})^{-\alpha}.$$

Теорема 1. *Для дзета-функции произвольной целочисленной решётки Λ в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta(\Lambda \mid \alpha) = \frac{1}{N}\left(M(\alpha)N^{1-\alpha}\right)^s \zeta\left(\Lambda^{(p)}\middle|\, 1-\alpha\right), \tag{2}$$

где $\Lambda^{(p)} = \det\Lambda\cdot\Lambda^*$ — присоединенная решётка, а Λ^* — взаимная решётка.

Доказательство. См. [2]. $\square$

Переходя к взаимным решёткам, эту теорему можно записать в новой форме:

Теорема 2. *Для дзета-функции произвольной целочисленной решётки Λ в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta(\Lambda \mid \alpha) = \frac{M(\alpha)^s}{N}\zeta\left(\Lambda^*\middle|\, 1-\alpha\right). \tag{3}$$

Для построения аналитического продолжения обобщенной гиперболической дзета-функции выделяется достаточно широкий класс решёток — декартовы решётки. Даются следующие определения.

[1] Символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключается $\vec{x} = \vec{0}$, и для любого вещественного x величина $\overline{x}$ задается равенством $\overline{x} = \max(1, |x|)$.

Определение 1. *Простой декартовой решёткой называется сдвинутая решётка* $\Lambda + \vec{x}$ *вида*

$$\Lambda + \vec{x} = (t_1 \cdot \mathbb{Z} + x_1) \times (t_2 \cdot \mathbb{Z} + x_2) \times \ldots \times (t_s \cdot \mathbb{Z} + x_s),$$

где $t_j \neq 0 \quad (j = 1, \ldots, s)$.

Другими словами, если решётка $\Lambda + \vec{x}$ простая декартова решётка, то она получается из фундаментальной решётки растяжением по осям с коэффициентами $t_1, \ldots, t_s$ и сдвигом на вектор $\vec{x}$.

Определение 2. *Декартовой решёткой называется сдвинутая решётка, представимая объединением конечного числа простых декартовых решёток.*

Определение 3. *Декартовой решёткой называется сдвинутая решётка, у которой найдется сдвинутая подрешётка, являющаяся простой декартовой решёткой.*

Теорема 3. *Определения* 2 и 3 эквивалентны.

Теорема 4. *Любой сдвиг рациональной решётки является декартовой решёткой.*

Как показано в [2], [3] существует аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки. Более того, для произвольной декартовой решётки получено функциональное уравнение, задающее это аналитическое продолжение в явном виде ([2]).

Доказательство. См. [2]. □

В докладе обсуждаются проблемы аналитического продолжения гиперболической дзета-функции произвольной решётки и имеющиеся трудности в решении этой проблемы.

Список цитированной литературы

1. Добровольский Н. М. О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 1(53). С. 176–190.

2. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

3. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices // Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. doi: 10.1007/978-3-319-03146-0_2.

4. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. № 3. С. 18 — 23.

5. Добровольский Н. М., Ванькова В. С., Козлова С. Л. Гиперболическая дзета–функция алгебраических решёток. Деп. в ВИНИТИ 12.04.90, № 2327–В90.

6. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, № 6090–84.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.
МБОУ СОШ №56 г. Тула.
Получено 23.04.2015

УДК 511.3

К проблеме обобщенных характеров

В. Н. Кузнецов, О. А. Матвеева (Саратов)
kuznetsovvn@info.sgu.ru, olga.matveeva.0@gmail.com

В докладе рассматриваются вопросы, связанные с решением гипотезы Н. Г. Чудакова о том, что обобщённый характер $h(n)$, то есть конечнозначная мультипликативная функция, для которой

1. $h(p) \neq 0$ почти для всех простых p;
2. $S(x) = \sum\limits_{n \leqslant x} h(n) = \alpha x + O(1)$, где в случае главного обобщённого характера $\alpha \neq 0$ и $\alpha = 0$ в случае неглавного обобщённого характера,

является характером Дирихле.

Рассмотрим ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}. \tag{1}$$

В работе [1] было показано, что гипотеза Н. Г. Чудакова эквивалентна следующему утверждению: ряд Дирихле (1) аналитически продолжим на комплексную плоскоть как мероморфная функция с единственным возможнвм простым полюсом в точке $s = 1$ и условием роста модуля в левой полуплоскости

$$|f(s)| = O(e^{|s|\ln|s| + A|s|}), \tag{2}$$

где A — некоторая положительная константа.

В [2] был доказан следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $h(n)$ — главный обобщённый характер. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *$h(n)$ — характер Дирихле;*

2. *в любом прямоугольнике $D_T : 0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1 < 1$, $|t| < T$, имеет место оценка:*
$$|f(s)| < C,$$
где константа C не зависит от σ_0.

Приведённые выше результаты дают условия, которые обеспечивают аналитическое продолжение рядов Дирихле (1) на всю комплексную плоскость с условием роста модуля (2).

В докладе рассматриваются иные подходы к задаче аналитического продолжения рядов Дирихле. Эти исследования направлены на решение проблемы обобщённых характеров.

Список цитированной литературы

1. Кузнецов В. Н. Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки. 1984. Т. 36, № 6. С. 805–812.

2. Матвеева О. А. Аналитические свойства определенных кассов рядов Дирихле и некоторые задачи теории L-функций Дирихле: // дис. … к-та физ.-мат. наук. Саратов, 2014.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
Получено 14.04.2015

UDK 519.14

Discrete universality of zeta and L-functions

A. Laurinčikas (Vilnius, Lithuania)
antanas.laurincikas@mif.vu.lt

Let $s = \sigma + it$ be a complex variable. S.M. Voronin discovered [1] the universality of the Riemann zeta-function $\zeta(s)$. Roughly speaking, this means that a wide class of analytic functions in a certain region can be approximated by shifts $\zeta(s + i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$. We will state the modern version of the Voronin universality theorem. Let $D = \left\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\right\}$. Denote by $\mathcal{K}$ be the class of compact subsets of the strip $D =$ with connected complements, and by $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, the class of continuous non-vanishing functions on K which are analytic in the interior of K. Then the following statement is true, see, for example, [2].

Theorem 1. *Suppose that $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Here meas$A$ denotes the Lebesgue measure of a measurable set $A \subset \mathbb{R}$.

Theorem 1 is of continuous type, τ varies continuously in the interval $[0,T]$. There exists the so-called discrete universality of the function $\zeta(s)$ when τ takes values $0, h, 2h, \dots$ with some fixed $h > 0$. The discrete universality of zeta-functions was introduced by A. Reich. A discrete version of Theorem 1, for a slightly different set K, was obtained in [3].

Theorem 2. *Suppose that $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$, and that $h > 0$ is an arbitrary fixed number. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\#\left\{0 \le k \le N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+ikh) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Theorems 1 and 2 also are valid for each Dirichlet L-function. Moreover, for Dirichlet L-functions a more complicated kind of universality, the joint universality, is considered. The first result in this direction also belongs to S.M. Voronin. In [4], investigating the functional independence of Dirichlet L-functions, he obtained in a not entirely explicit form the joint universality of these functions. Explicitly the Voronin theorem is stated in [5]. A modern version of this theorem can also be found in [6]. It has the following form.

Theorem 3. *Suppose that $\chi_1, \dots, \chi_r$ are pairwise non-equivalent Dirichlet characters. For $j = 1, \dots, r$, let $K_j \in \mathcal{K}$ and $f_j(s) \in H_0(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K_j} |L(s+i\tau,\chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Various versions of Theorem 3 by different methods were proved in [3], [7] and [8].

A discrete version of Theorem 3 in a slightly different form was proposed in [3].

Theorem 4. *Suppose that $\chi_1, \dots, \chi_r$ are pairwise non-equivalent Dirichlet characters and that $h > 0$ is an arbitrary fixed number. For $j = 1, \dots, r$, let $K_j \in \mathcal{K}$ and $f_j(s) \in H_0(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{N+1}\#\left\{0 \le k \le N : \sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K_j} |L(s+ikh,\chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Theorem 4 can be generalized by taking different h for each L-function $L(s,\chi_j)$. This, however, requires an additional independence hypothesis. Denote by $\mathbb{P}$ the set of all prime numbers, and $h_1 > 0, \dots, h_r > 0$, define the set

$$L(h_1,\dots,h_r;\pi) = \left\{(h_1\log p :\ p\in\mathbb{P}),\dots,(h_r\log p :\ p\in\mathbb{P}),\pi\right\}.$$

Then we have the following result.

Theorem 5. *Suppose that* $\chi_1, \ldots, \chi_r$ *are pairwise non-equivalent Dirichlet characters, and suppose that the set* $L(h_1, \ldots, h_r; \pi)$ *is linearly independent over the field of rational numbers* $\mathbb{Q}$*. Also, for* $j = 1, \ldots, r$*, let* $K_j \in \mathcal{K}$ *and* $f_j(s) \in H_0(K)$*. Then, for every* $\varepsilon > 0$*,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \le k \le N : \sup_{1\le j\le r} \sup_{s\in K_j} |L(s+ikh_j, \chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

For example, in the case $r = 3$, we can take $h_1 = 1$, $h_2 = \sqrt{2}$, $h_3 = \sqrt{3}$. Moreover, the following assertion is true.

Proposition 1. *For almost every vector* $(h_1, \ldots, h_r) \in \mathbb{R}^r_{>0}$*, the set* $L(h_1, \ldots \ldots, h_r; \pi)$ *is linearly independent over* $\mathbb{Q}$*.*

The second part of the report is devoted to the universality of Hurwitz zeta-functions. Let α, $0 < \alpha \le 1$, be a fixed parameter. We recall that the Hurwitz zeta-function $\zeta(s, \alpha)$ is defined, for $\sigma > 1$, by the series

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s},$$

and has meromorphic continuation to the whole complex plane. Denote by $H(K)$, $K \in \mathcal{K}$, the class of continuous functions on K which are analytic in the interior of K. Let $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Define the set

$$L(\alpha, h, \pi) = \left\{ (\log(m+\alpha) : \ m \in \mathbb{N}_0), \tfrac{\pi}{h} \right\}.$$

Then the following theorem is true [9].

Theorem 6. *Suppose that the set* $L(\alpha, h, \pi)$ *is linearly independent over* $\mathbb{Q}$*. Let* $K \in \mathcal{K}$ *and* $f_(s) \in H(K)$*. Then, for every* $\varepsilon > 0$*,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \le k \le N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+ikh, \alpha) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Also, joint analogues of Theorem 6 are valid for $\zeta(s)$ and $\zeta(s, \alpha)$, and for $\zeta(s, \alpha_1)$, $\ldots, \zeta(s, \alpha_r)$.

REFERENCES

1. Voronin S.M. Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function // Izv. Akad. Nauk SSSR. 1975. Vol. 39. P. 475–486 (in Russian) $\equiv$ Math. USSR Izv. 1975. Vol. 9. P. 443–453.

2. Laurinčikas A. Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1996.

3. Bagchi B. The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series. Ph. D. Thesis. Calcutta: Indian Statistical Institute, 1981.

4. Voronin S.M. The functional independence of Dirichlet L-functions // Acta Arith. 1975. Vol. 27. P. 493–503 (in Russian).

5. Karatsuba A.A., Voronin S.M. The Riemann-Zeta Function. New York: de Gruyter, 1992.

6. Laurinčikas A. On joint universality of Dirichlet L-functions // Chebyshevskii Sb. 2011. Vol. 12, No. 1. P. 129–139.

7. Bagchi B. A joint universality theorem for Dirichlet L-functions // Math. Z. 1982. Vol. 181. P. 319–334.

8. Gonek S.M. Analytic properties of zeta and L-functions. Ph. D. Thesis. University of Michigan, 1979.

9. Laurinčikas A. A discrete universality theorem for the Hurwitz zeta-function // J. Number Theory. 2014. Vol. 143. P. 232–247.

Vilnius University
Received 09.04.2015

УДК 512.542

О группах периода 12

Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров[1] (Новосибирск)
daria.lytkin@gmail.com, mazurov@math.nsc.ru

В сообщении рассматриваются группы периода 12. В частности, даётся критерий локальной конечности таких групп.

Хорошо известно, что группы периода 4 и группы периода 6 локально конечны [1, 2, 3, 4]. Локальная конечность групп периода 12 была доказана при некоторых дополнительных условиях в [1, 5, 6, 7].

Мы сводим вопрос о локальной конечности групп периода 12 к вопросу о конечности их подгрупп, порождённых тремя элементами порядка 3. Основным результатом работы является следующий факт.

Теорема 1. *Группа периода* 12 *локально конечна тогда и только тогда, когда конечна любая её подгруппа H, удовлетворяющая одному из следующих условий.*

[1]Гранты РФФИ №№ 13-01-00505, 14-01-90013

1. *H порождается элементом a порядка 3 и элементами b и c порядка 2, для которых $(ab)^3 = (bc)^3 = 1$.*

2. *H порождается элементами a и b порядка 3 и элементом c порядка 2, для которых $(ac)^2 = 1$.*

Для доказательства теоремы предварительно устанавливается справедливость следующих результатов.

Лемма 1. *Если G — конечная группа периода 12 и $p \in \{2, 3\}$, то p-длина G не превосходит двух и эта граница точная. Если при этом 2-длина группы G равна 2 и 2-длина любой собственной подгруппы группы G меньше двух, то G изоморфна либо S_4, либо полупрямому произведению нециклической группы порядка 4 на группу $B = \langle a, x \mid a^3 = x^4 = 1, a^x = a^{-1}\rangle$. В частности, G содержит подгруппу, изоморфную A_4.*

Лемма 2. *Если G — локально конечная группа периода 12, то*

$$G = O_{2,3,2,3,2}(G) = O_{3,2,3,2,3}(G).$$

В доказательстве теоремы используются также вычисления в GAP [8]. Примером служит следующая

Лемма 3. *Пусть G — группа периода 12, порождённая элементом a порядка 3 и инволюциями b, c, для которых $(ab)^3 = (bc)^3 = 1$. Тогда G — полупрямое произведение подгруппы $H = \langle (bc)^G \rangle$, совпадающей со своим коммутантом, и группы $A = \langle a, b\rangle$, изоморфной A_4. Подгруппа H порождается элементами $x_1 = bc$, $x_2 = x_1^a$, $x_3 = x_2^a$, $x_4 = x_2^b$, $x_5 = x_3^b$, $x_6 = x_5^a$, и действие A на H определяется следующими равенствами:*

$$x_1^a = x_2, x_2^a = x_3, x_3^a = x_1, x_4^a = x_5^{-1}, x_5^a = x_6, x_6^a = x_4; \tag{1}$$
$$x_1^b = x_1^{-1}, x_2^b = x_4, x_3^b = x_5, x_4^b = x_2, x_5^b = x_3, x_6^b = x_6^{-1}. \tag{2}$$

Доказательство леммы 3. Вычисления в GAP [8] показывают, что в группе

$$K = \langle a, b, c \mid 1 = a^3 = b^2 = c^2 = (ab)^3 = (abc)^3 = (ac)^{12} = (abc)^{12}\rangle$$

подгруппа $H = \langle (bc)^K \rangle$ совпадает со своим коммутантом и $K/H \simeq A_4$. Очевидно, группа G является гомоморфным образом группы K, и ядро соответствующего гомоморфизма содержится в H. Равенство $x_1^b = x_1^{-1}$ вытекает из того, что b и c — инволюции и $x_1 = bc$. Остальные равенства из (1) и (2) вытекают из определения элементов x_i, $i = 1, \ldots, 6$, и определяющих соотношений группы A.

Список цитированной литературы

1. Санов И. Н. Решение проблемы Бернсайда для показателя 4 // Учёные записки Ленинградского гос. ун-та. Сер. матем. 1940. № 55. С. 166–170.

2. Hall M. Solution of the Burnside problem for exponent six // Illinois J. Math. 1958. Vol. 2. P. 764–786.

3. Newman M. F. Groups of exponent six // Computational group theory (Durham, 1982), London: Academic Press. 1984. P. 39–41.

4. Лысёнок И. Г. Доказательство теоремы М. Холла о конечности групп $B(m, 6)$ // Матем. заметки. 1987. Т. 41, № 3. С. 422–428.

5. Мамонтов А. С. Группы пеирода 12 без элементов порядка 12 // Сибирский математический журнал. 2013. Т. 54, № 1. С. 150–156.

6. Лыткина Д. В., Мазуров В. Д., Мамонтов А. С. Локальная конечность некоторых групп периода 12 // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53, № 6. С. 1373–1378.

7. Мазуров В. Д., Мамонтов А. С. Инволюции в группах периода 12 // Алгебра и логика. 2013. Т. 52, № 1. С. 92–98.

8. GAP: Groups, algorithms, and programming, http://www/gap-system.org.

Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
Институт математики им. Соболева СО РАН
Получено 02.04.2015

УДК 512.554

О почти нильпотентных многообразиях

С. П. Мищенко (Ульяновск)

mishchenkosp@mail.ru

Характеристика основного поля предполагается равной нулю. Все необъясняемые понятия можно найти в монографии [1], [2].

Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие алгебр. Обозначим через $P_n(\mathbf{V})$ подпространство полилинейных элементов от $x_1, \ldots, x_n$ в относительно свободной алгебре, а через $c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V})$ – его размерность, называемую $n-$ой коразмерностью многообразия $\mathbf{V}$. Последовательность коразмерностей определяет рост многообразия. Предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}$ в случае его существования называют экспонентой многообразия $\mathbf{V}$. Договоримся опускать скобки в случае их левонормированной расстановки, то есть, например, $abcd = ((ab)c)d$.

Многообразие называется почти нильпотентным, если само оно не является нильпотентным, но каждое его собственное подмногообразие нильпотентно. По аналогии со случаем алгебр Ли любую линейную алгебру будем называть метабелевой, если в ней выполнено тождество $(x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0$. В классе ассоциативных алгебр единственным почти нильпотентным многообразием является многообразие всех ассоциативно-коммутативных алгебр, которое обозначим $\mathbf{AC}$. Понятно, что $c_n(\mathbf{AC}) = 1$ для любого n. В классе алгебр Ли единственным почти нильпотентным многообразием является многообразие всех метабелевых алгебр Ли, которое обозначим $\mathbf{A}^2$. Известно, что $c_n(\mathbf{A}^2) = n - 1$.

Пусть M – векторное пространство с базисом $\{e_1, e_2, \dots\}$, $\wedge(M)$ — его внешняя алгебра и $\wedge^0(M)$ – подалгебра алгебры $\wedge(M)$, порожденная множеством M. Рассмотрим пространство $C = \wedge^0(M) \oplus M$ и определим умножение на C правилом $(u+x)(v+y) = u \wedge y + v \wedge x$, где $u, v \in \wedge^0(M)$, $x, y \in M$ ([2], пример 2, стр. 104). Многообразие, порожденное этой йордановой алгеброй, обозначим $\mathbf{J}$. Для любого n $c_n(\mathbf{J}) = n - 1$. Ассоциативно-коммутативное многообразие $\mathbf{AC}$ и многообразие $\mathbf{J}$ — два почти нильпотентных многообразия йордановых алгебр.

Алгебра Лейбница определяется тождеством $(xy)z \equiv (xz)y + x(yz)$. Существует ровно два почти нильпотентных многообразия алгебр Лейбница, [3]. Это многообразие метабелевых алгебр Ли $\mathbf{A}^2$ и многообразие ${}_2\mathbf{N}$ всех левонильпотентых ступени не выше двух алгебр Лейбница, которое определяется тождеством $x(yz) \equiv 0$. Отметим, что $c_n({}_2\mathbf{N}) = n$.

Мы видим, что все известные примеры почти нильпотентных многообразия в классических случаях имеют незначительный рост последовательностей коразмерностей. Однако, в общем случае, даже при наличие достаточно "сильных" тождеств рост почти нильпотентного многообразия может быть достаточно значительным.

Обозначим R_b оператор умножения справа на фиксированный элемент b, то есть $aR_b = ab$. Для любого натурального $m \geqslant 2$ определим неассоциативную алгебру A_m. Алгебра A_m является линейной алгеброй над основным полем, которая порождается образующими $\{z, a_1, \dots, a_m\}$ и удовлетворяет следующим определяющим соотношениям:

$$a_ia_j = a_iz = 0,\ 1 \leqslant i, j \leqslant m;\ (zw(R_{a_1}, \dots, R_{a_m}))(zw'(R_{a_1}, \dots, R_{a_m})) = 0,$$

для некоторых, возможно, пустых слов w, w' от операторов R_{a_i}; $a_ku = 0$, где $1 \leqslant k \leqslant m$, а $u \in A_m$ любой элемент степени по образующим не менее двух;

$$z(R_{a_1} \dots R_{a_m})^k a_{i_1} \dots a_{i_s} a_{i_{s+1}} \dots a_{i_t} + z(R_{a_1} \dots R_{a_m})^k a_{i_1} \dots a_{i_{s+1}} a_{i_s} \dots a_{i_t} = 0$$

для всех $k \geqslant 0$ и $1 \leqslant s < t \leqslant m$, $1 \leqslant i_1, \dots, i_t \leqslant m$. Отметим, что эта алгебра была построена в работе [4] и что в ней выполняется тождество левой нильпотентности $x(yz) \equiv 0$.

Модифицируем определение алгебры A_m из работы [4] так, чтобы она была коммутативной метабелевой. Обозначим B_m, $m \geqslant 2$, алгебру, порожденную образующими $\{z, a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ и удовлетворяющую следующим определяющим соотношениям: $a_i a_j = a_i z = z a_i = 0$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$; $z^2 z = z z^2 = 0$; $(z^2 w(R_{a_1}, \ldots, R_{a_m}))(z^2 w'(R_{a_1}, \ldots, R_{a_m})) = 0$, для всех, включая пустых, слов w, w' от операторов правого умножения. Кроме того, $u a_k = a_k u$, $1 \leqslant k \leqslant m$, для любого элемента $u \in B_m$ и

$$z^2(R_{a_1} \ldots R_{a_m})^k a_{i_1} \ldots a_{i_s} a_{i_{s+1}} \ldots a_{i_t} + z^2(R_{a_1} \ldots R_{a_m})^k a_{i_1} \ldots a_{i_{s+1}} a_{i_s} \ldots a_{i_t} = 0$$

для всех $k \geqslant 0$ и $1 \leqslant s < t \leqslant m$, $1 \leqslant i_1, \ldots, i_t \leqslant m$.

Еще раз модифицируем определение алгебры A_m из работы [4] так, чтобы она стала теперь антикоммутативной метабелевой. Обозначим C_m, $m \geqslant 2$, алгебру, порожденную образующими $\{z_1, z_2, a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ и удовлетворяющую следующим определяющим соотношениям: $a_i a_j = a_i z_k = z_k a_i = z_k^2 = 0$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, $k = 1, 2$; $z_1 z_2 = -z_2 z_1$; $z_1 z_2 (R_{a_1} \ldots R_{a_m})^k a_{i_1} \ldots \ \ldots a_{i_s} a_{i_{s+1}} \ldots a_{i_t} + z_1 z_2 (R_{a_1} \ldots R_{a_m})^k a_{i_1} \ldots a_{i_{s+1}} a_{i_s} \ldots a_{i_t} = 0$ для всех $k \geqslant 0$ и $1 \leqslant t, i_1, \ldots, i_t \leqslant m$; $(z_1 z_2 w(R_{a_1}, \ldots, R_{a_m}))(z_1 z_2 w'(R_{a_1}, \ldots, R_{a_m})) = 0$, для всех, включая пустых, слов w, w' от операторов правого умножения R_{a_i}. Кроме того, равны нулю все элементы, суммарной степени по образующим z_1 и z_2 больше двух и $u a_k = -a_k u$, $1 \leqslant k \leqslant m$, для любого элемента $u \in C_m$ степени по образующим не менее двух.

Пусть $\mathbf{U_m} = var\ A_m$, $\mathbf{V_m} = var\ B_m$, $\mathbf{W_m} = var\ C_m$ многообразия, порожденные соответственно алгебрами A_m, B_m, C_m.

Объединяя результаты работы [4], а также новые результаты для случая многообразий $\mathbf{V_m}$ и $\mathbf{W_m}$, получаем такое утверждение.

Теорема 1. *Экспонента, как самих многообразия* $\mathbf{U_m}$, $\mathbf{V_m}$, $\mathbf{W_m}$, *так и любых их подмногообразий, равна* m.

Любое ненильпотентное многообразие содержит почти нильпотентное подмногообразие (см. [5]). Таким образом, из теоремы 1 мы получаем существование в этих классах линейных алгебр почти нильпотентных многообразий экспоненты m.

Отметим в заключение, что почти нильпотентных многообразий, рост которых ниже экспоненциального, в этих трех классах алгебр существует ровно по два в каждом классе.

Список цитированной литературы

1. Giambruno A., Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. Mathematical Surveys and Monographs, AMS, Providence, RI, 2005. V. 122. 352 p.

2. Жевлаков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И. Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978. 432 с.

3. Фролова Ю.Ю., Шулежко О.В. О почти нильпотентных многообразиях алгебр Лейбница // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: тез. докл. XI Междунар. конф. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2013. С. 84–85.

4. Мищенко С.П., Шулежко О. В. Почти нильпотентные многообразия любой целой экспоненты // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2015. № 2. С. 53–57.

5. Mishchenko S., Valenti A. An almost nilpotent variety of exponent 2 // Israel Journal of Mathematics, V. 199 (2014). Issue 1. P. 241–257.

Ульяновский государственный университет
Получено 13.04.2015

УДК 511.3

Экстремальные задачи сферических упаковок[1]

О. Р. Мусин (Москва)
oleg.musin@utb.edu

В докладе предполагается обсудить серию наших работ по упаковкам шаров [1–10]. Мы рассмотрим проблему контактных чисел, задачу Таммеса и другие экстремальные задачи сферических упаковок.

Контактным числом $k(n)$ называют наибольшее число не пересекающихся шаров одинакового радиуса в $\mathbb{R}^n$, которые можно расположить так, чтобы все они касались одного (центрального) шара такого же радиуса.

Очевидно, что $k(2) = 6$. В трехмерном пространстве, в задаче о контактных числах спрашивается: “Как много белых бильярдных шаров могут одновременно касаться черного бильярдного шара?” Этот вопрос был предметом спора между И. Ньютоном и Д. Грегори в 1694 году. Ньютон считал, что $k(3) = 12$, в то время как Грегори думал, что ответ может быть равен 13. Эту задачу Ньютона — Грегори часто называют *проблемой тринадцати шаров*. Проблема тринадцати шаров оказалось достаточно трудной и была решена только в 1953 году. К. Шютте и Б. Л. Ван дер Варден доказали, что Ньютон был прав и $k(3) = 12$. Заметим, что проблема контактных чисел решена только для размерностей $n = 3, 4, 8$ и 24 (см. [1, 2, 4, 5]).

У проблемы 13 шаров имеется естественное обобщение: найти расположение множества X, состоящего из N точек на $\mathbb{S}^2$, такое что минимальное расстояние между точками X - максимально возможное. Эту задачу впервые поставил голландский ботаник Таммес в 1930 году.

Задача Таммеса решена только для нескольких значений N:

[1]Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 15–01–99563 и 13–01–12458.

для $N = 3, 4, 6, 12$ ее решил Л. Фейеш Тот (1943);
для $N = 5, 7, 8, 9$ — Шютте и ван дер Варден (1951);
для $N = 10, 11$ — Л. Данцер (1963) и
для $N = 24$ — Р. М. Робинсон (1961).
Недавно мы решили эту задачу для $N = 13$ [7] и для $N = 14$ [10].

В работе [8], с точностью до изометрии, нами были перечислены все локально-жесткие упаковки конгруэнтных кругов (сферических шапочек) на единичной сфере с числом кругов $N < 12$. Эта задача эквивалентна перечислению сферических неприводимых контактных графов. В докладе мы покажем, что с помощью списка неприводимых контактных графов можно решать различные задачи об экстремальных упаковках таких как задача Таммеса для сферы и проективной плоскости, задача о наибольшем числе контактов у сферических упаковок, задачи Данцера и другие задачи о неприводимых контактных графах, см. [9].

Список цитированной литературы

1. P. Boyvalenkov, S. Dodunekov and O. R. Musin, A survey on the kissing numbers, Serdica Mathematical Journal, **38** (2012), 507-522.

2. О. Р. Мусин, Проблема двадцати пяти сфер, УМН, **58:4** (2003), 153-154.

3. O. R. Musin, The kissing problem in three dimensions, Discrete Comput. Geom., **35** (2006), 375-384.

4. O. R. Musin, The one-sided kissing number in four dimensions, Periodica Math. Hungar., **53** (2006), 209-225.

5. O. R. Musin, The kissing number in four dimensions, Ann. of Math., **168** (2008), 1-32.

6. O. R. Musin and A. V. Nikitenko, Optimal packings of congruent circles on a square flat torus, Discrete Comput. Geom., 2015

7. O. R. Musin and A. S. Tarasov, The Strong Thirteen Spheres Problem, Discrete & Comput. Geom., **48** (2012), 128-141.

8. О. Р. Мусин, А. С. Тарасов, Перечисление неприводимых контактных графов на сфере, Фундамент. и прикл. матем., **18:2** (2013), 125–145.

9. О. Р. Мусин, А. С. Тарасов, Экстремальные задачи упаковок кругов на сфере и неприводимые контактные графы, Тр. МИАН, 2015, **288** (2015), 133–148.

10. O. R. Musin and A. S. Tarasov, The Tammes problem for N=14, Experimental Math., 2015

ИППИ РАН и UTB (University of Texas at Brownsville).
Получено 5.05.2015

УДК 511.36+517.91

Алгебраическая независимость решений линейных дифференциальных уравнений

Ю. В. Нестеренко (Москва)
nester@mi.ras.ru

Область математической деятельности, связанная с исследованиями указанных в названии доклада проблем, пережила период активности и плодотворного развития в период 1960-х — 1980-х годов, после того, как А. Б. Шидловский доказал свою знаменитую теорему об алгебраической независимости значений E-функций Зигеля в алгебраических точках [1].

Открывшиеся после этого перспективы доказательства трансцендентности и алгебраической независимости значений целых обобщённых гипергеометрических функций с рациональными параметрами привели к доказательству новых достаточно общих результатов во многом исчерпавших эту область. Плодотворными оказались не аналитические методы исследования комплексных линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами — рациональными функциями, но алгебраические подходы основанные на методах дифференциальной алгебры, исследованиях формальных дифференциальных полей и их теории Галуа.

Одновременно количественные проблемы теории трансцендентных чисел — исследования оценок мер алгебраической независимости значений функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям, привели к пониманию важности аналогичных вопросов в функциональной области. Речь шла об оценках кратностей нулей многочленов от фиксированных решений дифференциальных уравнений в зависимости от степеней многочленов.

Приложения к исследованиям эллиптических и абелевых функций породили с одной стороны исследования кратностей нулей многочленов на алгебраических группах, а с другой — исследования алгебраической независимости функций, удовлетворяющих нелинейным алгебраическим дифференциальным уравнениям. Последнее оказалось связанным с результатами об арифметических свойствах значений модулярных функций. В частности, на этом пути была доказана алгебраическая независимость чисел π и e^{π}.

Я хотел бы своим докладом привлечь внимание к описанной выше области математической деятельности, переживающей в настоящее время период некоторого затишья.

Список цитированной литературы

1. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.. 1987. 448 с.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Получено 6.05.2015

UDK 512.543

Highly transitive actions of infinite groups

A. Yu. Olshanskii (Nashville, USA)
alexander.olshanskiy@vanderbilt.edu

Let a group G act on a set X (from the right). This action is called *k-transitive* for $k \geqslant 1$ if $\#X \geqslant k$ and for every two k-tuples of pairwise distinct points $(x_1, \dots, x_k)$ and $(y_1, \dots, y_k)$, there exists an element $g \in G$ such that

$$x_1 \circ g = y_1, \dots, x_k \circ g = y_k$$

An action of G on X is called *highly transitive* if it is k-transitive for every $k \geqslant 1$. I will give a brief survey of the examples and results on highly transitive actions of finitely generated groups. Also I will present recent results about highly transitive actions, where the restrictions to all "small" subgroups of G have only finite orbits. In particular, the following property holds.

Theorem 1. *[1] A free group F with $m \geqslant 2$ free generators*

- *admits a highly transitive action such that*
- *the restriction of this action to any finitely generated subgroup H of infinite index in F is locally finite, i.e. all H-orbits are finite.*

REFERENCES

1. Olshanskii A. Yu., On pairs of finitely generated subgroups in free groups, "Proceedings of the Amer. Math. Soc.", to appear (also see arXiv1308.3192).

Affiliation: Vanderbilt University (USA)
Received 22.04.2015

УДК 512.666

Многомерный символ Конту-Каррера и его универсальное свойство

Д. В. Осипов[1] (Москва)
d_osipov@mi.ras.ru

Доклад основан на совместных работах с С. О. Горчинским: [1, 2, 3].

Все кольца далее предполагаются коммутативными, ассоциативными с единицей. Пусть **CRings** категория таких колец. Пусть **Ab** — категория абелевых групп. Определим функтор $\mathbb{G}_m : \mathbf{CRings} \to \mathbf{Ab}$ как $\mathbb{G}_m(R) = R^*$, где $R \in \mathbf{CRings}$.

Для кольца R, пусть $R((t)) = R[[t]][t^{-1}]$ — кольцо рядов Лорана над R, и пусть $R((t_1))\ldots((t_n))$ — кольцо итерированных рядов Лорана над R.

Для любых натуральных чисел l, n определим функтор $L^nK_l^M$ из **CRings** в **Ab**, как функтор, сопоставляющий кольцу $R \in \mathbf{CRings}$ K-группу Милнора с номером l от кольца $R((t_1))\ldots((t_n))$. Другими словами, $L^nK_l^M(R)$ есть факторгруппа группы $(R((t_1))\ldots((t_n))^*)^{\otimes m}$ по подгруппе, порожденной соотношениями Стейнберга, то есть, всеми элементами вида: $a_1 \otimes \ldots \otimes a_i \otimes a \otimes (1-a) \otimes a_{i+3} \otimes \ldots \otimes a_l$, где $a_j, a \in R((t_1))\ldots((t_n))^*$.

Теорема 1 (Универсальное свойство, [3]). *Существует морфизм функторов $CC_n : L^nK_{n+1}^M \to \mathbb{G}_m$, такой что $CC_n(b \otimes t_1 \otimes \ldots \otimes t_n) = b$ (для любого $b \in R^*$), и для любого другого морфизма функторов $\Phi : L^nK_{n+1}^M \to \mathbb{G}_m$ существует целое число i, такое что $\Phi = (CC_n)^i$. Этими свойствами морфизм CC_n определяется однозначно.*

Морфизм CC_n называется n-мерным символом Конту-Каррера. Для случаев $n = 1$ и $n = 2$ этот символ совпадает с известными ранее одномерным и двумерным символами Конту-Каррера.

Если кольцо R есть поле, то символ CC_n, ограниченный на R, совпадает с n-мерным ручным символом. Соответственно, для $n = 1$ получаем классический ручной символ. Также из символа CC_n получается n-мерный вычет следующим образом. Пусть R - произвольное кольцо, и кольцо $A = R[\epsilon]/(\epsilon^{n+2})$. Пусть $g_j \in R((t_1))\ldots((t_n))$, где $1 \leqslant j \leqslant n+1$. Тогда выполнено

$$CC_n((1+g_1\epsilon) \otimes \ldots \otimes (1+g_{n+1}\epsilon)) = 1 + \mathrm{res}(g_1 dg_2 \wedge \ldots \wedge dg_{n+1})\epsilon^{n+1},$$

где символ CC_n вычисляется над кольцом A, n-мерный вычет определяется как $\mathrm{res}((\sum a_{i_1,\ldots i_n} t_1^{i_1} \ldots t_n^{i_n}) dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n) = a_{-1,\ldots,-1}$, и $dg = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial t_k} dt_k$.

Если кольцо R является $\mathbb{Q}$-алгеброй, то для символа CC_n, ограниченного на R, существует явная формула, см. [1], [3]. Приведем эту формулу в частном случае.

[1]При поддержке грантов РФФИ № 14-01-00178, 13-01-12420

Теорема 2. *Пусть $R \supset \mathbb{Q}$. Пусть элемент g из $R((t_1))\dots((t_n))$ нильпотентен. Пусть $f_1,\dots,f_n \in R((t_1))\dots((t_n))^*$. Тогда имеем*

$$CC_n((1+g)\otimes f_1 \otimes \dots \otimes f_n) = \exp \operatorname{res}\left(\log(1+g)\frac{df_1}{f_1}\wedge\dots\wedge\frac{df_n}{f_n}\right).$$

Здесь exp и log — стандартные формальные ряды, которые применяются либо к нильпотентным элементам из кольца (в случае exp), либо к элементам вида (1+нильпотент) (в случае log). Поэтому эти ряды становятся конечными суммами после применения к таким элементам.

Многомерный символ Конту-Каррера CC_n имеет многочисленные связи с многомерной теорией полей классов Паршина-Като, в которой основным локальным объектом является n-мерное локальное поле $\mathbb{F}_q((t_1))\dots((t_n))$, возникающее из n-мерной арифметической схемы, см. [3].

Список цитированной литературы

1. Горчинский С. О., Осипов Д. В. Явная формула для многомерного символа Конту-Каррера // Успехи математических наук. 2015. Т. 68, № 1. С. 183–184.

2. Горчинский С. О., Осипов Д. В. Касательное пространство к K-группам Милнора колец // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 2015. Т. 290 (2015), принята к печати.

3. Горчинский С. О., Осипов Д. В. Многомерный символ Конту-Каррера: локальная теория // Математический сборник. 2015, принята к печати.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Получено 14.04.2015

УДК 512.57

Ihm-квазипорядок и оператор алгебраического замыкания на универсальных алгебрах

А. Г. Пинус[1] (Новосибирск)
ag.pinus@gmail.com

Подмножество $B \subseteq A^n$ декартовой степени A^n основного множества A универсальной алгебры $\mathfrak{A} = < A; \sigma >$ называется *алгебраическим (алгебраически замкнутым)*, если оно является совокупностью решений в $\mathfrak{A}$ некоторой (возможно бесконечной) совокупности $\mathfrak{T}(\bar{x})$ термальных уравнений сигнатуры σ $\mathfrak{T} = \{t_i^1(x_1,...,x_n) = t_i^2(x_1,...,x_n) | i \in I\}$: $B = \{\bar{a} \in A^n | \mathfrak{A} \vDash \mathfrak{T}(\bar{a})\}$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по государственному заданию № 2014/138, проект 1052

Через $\bar{B}_{\mathfrak{A}}$, для любого $B \subseteq A^n$, обозначим наименьшее алгебраическое множество алгебры $\mathfrak{A}$ включающее в себя B. Оператор $B \to \bar{B}_{\mathfrak{A}}$ является оператором замыкания на совокупностях подмножеств декартовых степеней множества A.

На универсальной алгебре $\mathfrak{A} = < A; \sigma >$ определим отношение Ihm-квазипорядка $\leqslant_{Inm\mathfrak{A}}$ следующим образом: для $a, b \in A$ $a \leqslant_{Ihm\mathfrak{A}} b$ тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм φ алгебры $< b >_{\mathfrak{A}}$ на алгебру $< a >_{\mathfrak{A}}$ такой, что $\varphi(b) = a$. Здесь $< c >_{\mathfrak{A}}$ (для $c \in A$) – подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$ порожденная элементом c.

Найдено описание алгебраических замыканий $\bar{B}_{\mathfrak{A}}$ для $B \subseteq A^n$ в терминах пересечения главных идеалов квазипорядка $< A'; \leqslant_{Ihm\mathfrak{A}'} >$ с множеством A^n для некоторого канонического расширения $\mathfrak{A}' = < A'; \sigma >$ матричной степени $\mathfrak{A}^{[n]}$ универсальной алгебры $\mathfrak{A}$.

Аналогичное описание найдено и для одного из логических замыканий $B \to \bar{B}_{\mathfrak{A}}^{L_0}$ для множеств $B \subseteq A^n$. Здесь $\bar{B}^{\mathfrak{A}}_{L_0} = \{\bar{b} \in A^n | \mathfrak{A} \vDash \Phi(\bar{b})$, $\Phi(\bar{x})$ произвольная бескванторная формула сигнатуры σ такая, что $\mathfrak{A} \vDash \Phi(\bar{a})$ для любого $\bar{a} \in B\}$.

Новосибирский государственный технический университет
Получено 03.02.2015

УДК 511.6+512.74

Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых

В. П. Платонов (Москва)
platonov@niisi.ras.ru

В последние четыре года развита теория для нахождения фундаментальных единиц в гиперэллиптических полях и на ее основе построены и реализованы принципиально новые высокоэффективные алгоритмы их вычисления. Открыт новый локально-глобальный принцип, дающий критерий существования нетривиальных единиц в гиперэллиптических полях.

Естественная связь проблемы вычисления фундаментальных единиц с проблемой кручения в якобиевых многообразиях гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел позволила получить прорывные результаты в решении этой проблемы.

Основные результаты настоящего обзора в существенной степени получены с использованием симбиоза глубокой теории, эффективных алгоритмов и супервычислений. Подобный симбиоз будет играть все большую роль в математике 21-го века.

Список цитированной литературы

1. В. П. Платонов Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // УМН. 2014. Т. 69, № 1(415). С. 3–38.

Научно-исследовательский институт системных исследований РАН,
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Получено 21.04.2015

УДК 519

Классические проблемы комбинаторной геометрии

А. М. Райгородский[1] (Москва)
mraigor@yandex.ru

В докладе речь пойдет о нескольких классических проблемах, находящихся на стыке комбинаторной геометрии, теории кодирования, теории графов и гиперграфов. В частности, мы обсудим следующие вопросы:

1. (**Проблема Борсука.**) Каково минимальное число частей меньшего диаметра, на которые может быть разбито произвольное множество точек диаметра 1 в пространстве?

2. (**Проблема Нелсона–Хадвигера.**) Каково минимальное число цветов, в которые можно так покрасить точки пространства, чтобы между точками одного цвета не было расстояния 1?

3. (**Геометрическая теория Рамсея.**) Растет ли минимальное число цветов, в которые можно так покрасить точки пространства, чтобы точки одного цвета не могли образовывать конгруэнтную копию заданного наперед множества?

МГУ им. М.В. Ломоносова, МФТИ.
Получено 13.04.2015

УДК 511.335

Короткие кубические двойные тригонометрические суммы с «длинным» сплошным суммированием

З. Х. Рахмонов, Б. М. Замонов (Душанбе, Таджикистан)
zarullo_r@mail.ru, zamonov@mail.ru

[1]Грант РФФИ № 15-01-03530

И.М. Виноградов [1] первым начал изучать короткие тригонометрической суммы с простыми числами. Для короткой тригонометрической суммы с простыми числами вида:

$$S_k(\alpha;x,y)=\sum_{x-y<n\leqslant x}\Lambda(n)e(\alpha n^k),\quad \alpha=\frac{a}{q}+\lambda,\quad |\lambda|\leqslant\frac{1}{q\tau},\quad 1\leqslant q\leqslant\tau.$$

при $k=1$ используя свой метод оценок сумм с простыми числами, доказал нетривиальную оценку при

$$\exp(c(\ln\ln x)^2)\ll q\ll x^{1/3},\qquad y>x^{2/3+\varepsilon},$$

основу которой наряду с «решетом Виноградова», при $k=1$ составляют оценки коротких двойных тригонометрических сумм вида

$$J_k(\alpha;x,y,M,N)=\sum_{M<m\leqslant 2M}a(m)\sum_{\substack{U<n\leqslant 2N\\ x-y<mn\leqslant x}}b(n)e(\alpha(mn)^k),$$

где $a(m)$ и $b(n)$ – произвольные комплекснозначные функции, M, N – натуральные, $N\leqslant U<2N$, $x>x_0$, y – вещественные числа.

Затем Хейзелгроув [2], В. Статулявычус [3], Пан Чен-дон и Пан Чен-бьяо [4], Zhan Tao [5] получили нетривиальную оценку суммы $S_1(\alpha;x,y)$, $y\geqslant x^\theta$, q — произвольное, и доказали асимптотическую формулу в тернарной проблемы Гольдбаха с почти равными слагаемыми с условиями $|p_i-N/3|\leqslant H$, $H=N^\theta$, соответственно при

$$\theta=\frac{63}{64}+\varepsilon,\qquad \frac{279}{308}+\varepsilon,\qquad \frac{2}{3}+\varepsilon,\qquad \frac{5}{8}+\varepsilon.$$

Сумму $J_2(\alpha;x,y,M,N)$ изучили Jianya Liu и Zhan Tao [6] и получили нетривиальную оценку суммы $S_2(\alpha;x,y)$ при $y\geqslant x^{\frac{11}{16}+\varepsilon}$.

Доклад посвящен выводу нетривиальных оценок сумм $J_3(\alpha;x,y,M,N)$, в которых имеется «длинная» сплошная сумма, то есть сумм вида

$$W=\sum_{M<m\leq 2M}a(m)\sum_{\substack{U<u\leq 2N\\ x-y<mu\leqslant x}}e(\alpha(mu)^3),\quad \alpha=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\quad (a,q)=1,$$

и её доказательство[7] проводится методом оценок тригонометрических сумм с простыми числами И.М.Виноградова в сочетании с методами работ [8, 9].

Теорема 1. *Пусть* $|a(m)|\leqslant\tau(m)$, $\mathscr{L}=\ln xq$, $\sqrt{x}<y<x\mathscr{L}^{-1}$, *тогда при выполнении условий*

$$\mathscr{L}^{2^{14}+8A+8}<q<y^3\mathscr{L}^{-2^{14}-8A-8},\qquad \mathscr{L}^{2A+12,5}<M\leqslant y^{\frac14}\mathscr{L}^{-2^{12}-2A-2},$$

где A — *абсолютная постоянная, справедлива оценка*

$$W\ll\frac{y}{\mathscr{L}^A}.$$

Список цитированной литературы

1. Виноградов И. М., Карацуба А. А. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Труды МИАН СССР. 1984. Т. 168. С. 4–30.

2. Haselgrove C. B. Some theorems in the analytic theory of number // J.London Math.Soc. 1951. P. 273–277.

3. Статулявичус В. О представлении нечетных чисел суммою трех почти равных простых чисел // Вильнюс. Ученые труды университета. сер. мат., физ. и хим. н. 1955. № 2. С. 5–23.

4. Pan Cheng-dong, Pan Cheng-biao. On estimations of trigonometric sums over primes in short intervals (III) // Chinese Ann. of Math. 1990. Vol. 2. P. 138–147.

5. Zhan Tao. On the Representation of large odd integer as a sum three almost equal primes // Acta Math Sinica, new ser. 1991. Vol. 7, no. 3. P. 135–170.

6. J Y Liu, T Zhan. Estimation of exponential sums over primes in short intervals I // Mh Math. 1999. Vol. 127. P. 27–41.

7. Рахмонов З. Х., Замонов Б. М. Короткие кубические двойные тригонометрические суммы с «длинным» сплошным суммированием // Известия АН РТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, 4 (157) 2014, с.3–17.

8. Rakhmonov Z. Kh., Rakhmonov F. Z. Sum of Short Exponential Sums over Prime Numbers // Doklady Mathematics. 2014. Vol. 90, no. 3. P. 1–2.

9. Rakhmonov Z. Kh., Rakhmonov F. Z. Сумма коротких двойных тригонометрических сумм // ДАН РТ. 2013. Т. 56. № 11. С. 853–860.

Институт математики Академии наук Республики Таджикистан
Получено 14.04.2015

УДК 512.541

Почти вполне разложимые группы

А. А.Фомин (Москва)
alexander.fomin@mail.ru

Абелева группа A называется факторно делимой, если она содержит свободную подгруппу конечного ранга F так, что факторгруппа A/F является делимой периодической группой, при этом сама группа A не содержит ненулевых делимых периодических подгрупп. Любой свободный базис группы F называется базисом факторно делимой группы A.

Рассмотрим две категории. Объектами категории $\mathcal{D}$ являются факторно делимые группы с отмеченными базисами. Объектами категории $\mathcal{TF}$ являются абелевы группы без кручения конечного ранга также с отмеченными базисами, т.е. максимальными линейно независимыми системами элементов. Морфизмами в обеих категориях служат обычные гомоморфизмы групп, матрицы которых относительно отмеченных базисов состоят из целых чисел.

Как было показано в [1-4], существуют два контравариантных функтора $\mathcal{D} \to \mathcal{TF}$ и $\mathcal{TF} \to \mathcal{D}$, композиция которых в любом порядке изоморфна тождественному функтору. То есть эти две категории являются взаимно двойственными. Если группа A с отмеченным базисом $x_1, ..., x_n$ составляет объект одной из этих двух категорий, то двойственный объект представляет собой двойственную группу A^* с отмеченным двойственным базисом $x_1^*, ..., x_n^*$.

Абелева группа без кручения называется вполне разложимой, если она раскладывается в прямую сумму групп ранга 1. Абелева группа без кручения называется почти вполне разложимой (пвр-группой), если она содержит вполне разложимую группу конечного ранга в качестве подгруппы конечного индекса. Пвр-группы изучаются давно, им посвящена обширная литература, из которой мы укажем монографии Адольфа Мадера [5] и Екатерины Анатольевны Благовещенской [6].

Целью настоящего доклада является демонстрация возможностей применения двойственности [1-4] для изучения пвр-групп. Сразу отметим, что переход по двойственности к факторно делимым группам упрощает ситуацию. В то время, как пвр-группа может быть неразложимой в прямую сумму или иметь аномальные разложения, как группа А.Л.С. Корнера [7], двойственная ей факторно делимая группа всегда раскладывается в прямую сумму факторно делимых групп ранга 1 ([2], Теорема 9).

Начнем с групп ранга 1. Пусть $\chi = (m_p)$ - некоторая характеристика. Обозначим через R_χ подгруппу аддитивной группы поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$ такую, что $\mathbf{Z} \subseteq R_\chi \subseteq \mathbf{Q}$ и единица 1 имеет характеристику χ в группе R_χ.

Рассмотрим кольцо $\mathbf{Z}_\chi = \prod\limits_p K_p$, где K_p - либо кольцо классов вычетов по модулю p^{m_p} при $m_p < \infty$, либо кольцо целых p-адических чисел при $m_p = \infty$. Сервантная оболочка единицы этого кольца $< 1 >_*$ является факторно делимой группой ранга 1, если χ - характеристика ненулевого типа, и обозначается R^χ. Если же χ - характеристика нулевого типа, то $R^\chi = \mathbf{Z}_\chi \oplus \mathbf{Q}$ также является факторно делимой группой ранга 1. В обоих случаях R^χ является кольцом с единицей, которая служит базисом факторно делимой группы R^χ. Группа без кручения R_χ с единицей в качестве базиса и факторно делимая группа R^χ с ее единицей в качестве базиса являются взаимно двойственными в смысле двойственности [1-4].

В аддитивной группе векторного пространства V над полем $\mathbf{Q}$ с базисом $x_1, \ldots, x_n$ рассмотрим подгруппу $B = x_1 R_{\chi_1} \oplus \ \ldots \oplus x_n R_{\chi_n}$, где $\Xi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)$ - некоторый набор характеристик. Группа B является вполне разложимой группой без кручения с базисом $x_1, \ldots, x_n$. Двойственная ей факторно делимая группа $B^* = x_1^* R^{\chi_1} \oplus \ \ldots \oplus x_n^* R^{\chi_n}$ является прямой суммой факторно делимых групп ранга 1. Базис $x_1^*, \ldots, x_n^*$ факторно делимой группы B^* является двойственным базису $x_1, \ldots, x_n$ группы без кручения B.

Теперь мы опишем решетку так называемых "допустимых"почти вполне разложимых групп A относительно фиксированной последовательности характеристик $\Xi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)$ при помощи последовательностей периодических элементов. Все эти группы имеют общий базис $x_1, \ldots, x_n, B \subseteq A$ и факторгруппа A/B является конечной группой.

Определение 1. *Элемент t некоторой группы называется допустимым относительно характеристики $\chi = (m_p)$, если его порядок конечен и $m_p = 0$ для любого простого делителя p порядка элемента t. Циклическая группа, порожденная элементом t, обозначается $\langle t \rangle$.*

Предложение 1. *Группа $R^\chi \oplus \langle t \rangle$ является факторно делимой тогда и только тогда, когда t - допустимый элемент относительно характеристики χ. Более того, если группа $R^\chi \oplus \langle t \rangle$ - факторно делимая, то элемент $1 + t \in R^\chi \oplus \langle t \rangle$ является базисом факторно делимой группы $R^\chi \oplus \langle t \rangle$.*

Определение 2. *Последовательность периодических элементов $T = (t_1, \ldots, t_n)$ конечной группы $G_T =< t_1, \ldots, t_n >$, порожденной этими элементами, называется допустимой относительно последовательности характеристик $\Xi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)$, если для всякого индекса i элемент t_i является допустимым относительно характеристики χ_i.*

Теорема 1. *Пусть $B = x_1 R_{\chi_1} \oplus \ \ldots \oplus x_n R_{\chi_n}$ и $B^* = x_1^* R^{\chi_1} \oplus \ \ldots \oplus x_n^* R^{\chi_n}$ - взаимно двойственные группы, как это было определено выше. Следующие утверждения имеют место для любой допустимой последовательности периодических элементов $T = (t_1, \ldots, t_n)$ относительно последовательности характеристик $\Xi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)$:*

- *Группа $B^* \oplus G_T$ является факторно делимой и раскладывается в прямую сумму факторно делимых групп ранга 1. Множество элементов $x_1^* + t_1, \ldots, x_n^* + t_n$ составляет базис факторно делимой группы $B^* \oplus G_T$.*

- *Группа без кручения A_T, двойственная факторно делимой группе $B^* \oplus G_T$ относительно базиса $x_1^* + t_1, \ldots, x_n^* + t_n$, является почти вполне разложимой группой с двойственным базисом $x_1, \ldots, x_n$. При этом, $B \subseteq A_T$ и $A_T/B \cong G_T$. Таким образом, всякая допустимая последовательность T определяет допустимую почти вполне разложимую группу A_T.*

- *Пусть* A_S *— допустимая почти вполне разложимая группа, которая соответствует другой допустимой последовательности периодических элементов* $S = (s_1, \ldots, s_n)$ *относительно той же последовательности характеристик* $\Xi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)$. *Включение* $A_T \subseteq A_S$ *имеет место тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм* $\eta : G_S \to G_T$, *при котором* $\eta(s_1) = t_1, \ldots, \eta(s_n) = t_n$.

Замечание 1. *Нетрудно заметить, что для любой почти вполне разложимой группы можно подобрать последовательность характеристик так, что данная группа является допустимой относительно этой последовательности характеристик. Таким образом, данный подход является универсальным для изучения почти вполне разложимых групп. Он был применен в [2] для анализа известных групп А.Л.С. Корнера [7] с аномальными прямыми разложениями.*

Список цитированной литературы

1. Фомин А. А. Категория матриц, представляющая две категории абелевых групп // Фундамент. и прикл. матем. 2007. Т.13, вып. 3. С. 223–244.

2. Fomin A. A. Quotient divisible and almost completely decomposable groups // in: Models, Modules and Abelian Groups in Memory of A. L. S. Corner, de Gruyter. Berlin - New York. 2008. P. 147-168.

3. Fomin A. A. Invariants for Abelian groups and dual exact sequences // J. Algebra.2009. Vol. 322, no. 7. P. 2544–2565.

4. Яковлев А. В. Двойственность категорий абелевых групп без кручения конечного ранга и факторно делимых групп // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2010. Т. 375. С. 195–202.

5. Mader A. Almost completely decomposed groups. CRC Press, 2000. Vol. 13.

6. Е. А. Благовещенская, Почти вполне разложимые группы и их кольца эндоморфизмов. СПб.: Политехнический университет, 2009. 216 с.

7. A.L.S. Corner, A note on rank and direct decomposition of torsion-free abelian groups // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1961. Vol.57. P. 230–233; 1969. Vol. 66. P. 239–240.

Московский педагогический государственный университет
Получено 15.04.2015

УДК 511.36

Арифметические свойства полиадических чисел

В. Г. Чирский (Москва)
vgchirskii@yandex.ru

Вводятся понятия трансцендентных, бесконечно трансцендентных, глобально трансцендентных, алгебраически независимых, бесконечно алгебраически независимых, глобально алгебраически независимых полиадических чисел.

Доказывается бесконечная алгебраическая независимость некоторых полиадических чисел, представляющих интерес.

Указываются связи с прикладными задачами.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Получено 14.01.2015

УДК 511.3

Арифметические функции и гауссова теорема умножения

В. Н. Чубариков (Москва)
chubarik2009@live.ru

Теорема умножения для гамма-функции Эйлера, доказанная К. Ф. Гауссом [1, 2, 3] в 1812 г., утверждает, что при любом $x > 0$ и любом натуральном n справедлива формула

$$\Gamma(x) = n^{x-1/2}(2\pi)^{-(n-1)/2}\prod_{s=0}^{n-1}\Gamma((x+s)/n).$$

При $x = 1$ ранее эта формула была найдена Л. Эйлером. Тот же вид имеет формула Л. Эйлера из элементарной тригонометрии

$$\sin x = 2^{n-1}\cdot\prod_{s=0}^{n-1}\sin\left(\frac{x+s\pi}{n}\right).$$

После логарифмирования из теоремы умножения приходим к следующему функциональному уравнению [4]

$$F(nx) = n^{s-1}\sum_{k=0}^{n-1}F\left(x+\frac{k}{n}\right). \tag{1}$$

При $s = 1$ этому уравнению удовлетворяют следующие функции

$$F(x) = \log(2|\sin\pi x|)$$

при нецелых значениях x,

$$F(x) = \rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\},$$

где символ $\{\cdot\}$ означает дробную часть числа. Подобному функциональному уравнению при натуральных s удовлетворяют многочлены Бернулли

$$B_s(nx) = n^{s-1} \sum_{k=0}^{n-1} B_s \left(x + \frac{k}{n} \right).$$

Сообщение посвящено доказательству следующего утверждения и его обобщения (см., напр., [5, 6].

Теорема 1. *Пусть функция $F(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению (1), $q > 1$ — натуральное число, и $f(x) = a_m x^m + \ldots + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами, $(a_m, \ldots, a_1, q) = 1$. Тогда имеем*

$$\sum_{x=0}^{q-1} F\left(\left\{ \frac{f(x)}{q} \right\} \right) \gg q^{1-\frac{1}{m}}.$$

Список цитированной литературы

1. Euler L. Introductio in Analysin Infinitorum. Lausannae: Marcum — Michaelem Bousquet, art. 240. 1748.

2. Gauβ K. F. Comment. Götting. Bd. 2. 1812. S. 30. Werke, Bd. III. P. 149–150.

3. Nielsen N. Handbuch der theorie der Gammafunktion. Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1906.. S. 17–20.

4. Романов Н. П. Теория чисел и функциональный анализ. Сборник трудов: Томск: Изд-во Том. ун-та. 2013. 478 с.

5. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука. 1987. 368 с.

6. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. М.: Дрофа. 2008. 560 с.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Получено 23.04.2015

1. Группы

Доклады данной секции отражают новые результаты в теории групп, относящиеся:

— к конечным группам и представлениям;

— к абелевым группам;

— к бесконечным группам различных классов (нильпотентным, разрешимым);

— к комбинаторной теории групп;

— к теории многообразий групп.

УДК 512.543

Аппроксимируемость некоторыми классами конечных групп свободных произведений групп с нормальными объединенными подгруппами

Д. Н. Азаров (Иваново)
azarovdn@mail.ru

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс групп. Напомним, что группа G называется $\mathcal{K}$-аппроксимируемой, если для любого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, при котором образ элемента a отличен от 1.

Пусть $\mathcal{F}$ — класс всех конечных групп, $\mathcal{F}_p$ — класс всех конечных p-групп (где p — простое число), $\mathcal{F}_\pi$ — класс всех конечных π-групп (где π — некоторое множество простых чисел).

В 1963 году Г. Баумслаг доказал, что свободное произведение двух полициклических групп с нормальной объединенной подгруппой является $\mathcal{F}$-аппроксимируемой группой. В действительности, для такого свободного произведения имеет место следующее более тонкое и нетривиальное утверждение, установленное А. В. Розовым [1] и являющееся частным случаем более общих результатов, приведенных далее.

Свободное произведение двух полициклических групп с нормальной объединенной подгруппой почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемо для каждого простого числа p.

Напомним, что группа обладает каким-либо свойством почти, если она содержит подгруппу конечного индекса с этим свойством. Почти $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость произвольной полициклической группы для каждого простого p была установлена А. Л. Шмелькиным.

Одним из обобщений понятия полициклической группы является понятие разрешимой группы конечного ранга. Напомним, что группа G называется группой конечного ранга (или, в другой терминологии, группой конечного ранга Прюфера), если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами.

Для разрешимых групп конечного ранга вопрос об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости решается следующей теоремой Д. Робинсона.

Предложение 1. *Разрешимая группа конечного ранга $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она редуцирована.*

Напомним, что группа называется редуцированной, если она не содержит неединичных полных подгрупп, т. е. таких неединичных подгрупп, в которых из каждого элемента можно извлечь корень любой натуральной степени. Очевидно, что любая финитно аппроксимируемая группа редуцирована.

Вопрос об $\mathcal{F}$-аппроксимируемости свободного произведения двух разрешимых групп конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой решается следующей теоремой Д. Н. Азарова и А. В. Розова.

Теорема 1. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение почти разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H, причем $H \neq A$ и $H \neq B$. Группа G $\mathcal{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группы A, B, A/H и B/H редуцированы.*

Непосредственным следствием этого результата является упомянутая выше теорема Баумслага.

Теперь выясним, при каких обстоятельствах свободное произведение двух почти разрешимых групп конечного ранга с нормальным объединением является $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемой группой для подходящего конечного множества π простых чисел. Прежде всего заметим, что для разрешимой группы конечного ранга этот вопрос решается следующим образом.

Предложение 2. *Разрешимая группа конечного ранга $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел тогда и только тогда, когда она редуцирована и является FATR-группой.*

Следуя Д. Робинсону, мы называем разрешимую группу FATR-группой (группой с конечными абелевыми тотальными рангами), если в ней существует конечный субнормальный ряд, каждый фактор которого является или циклической группой, или квазициклической группой, или группой, вложимой в аддитивную группу рациональных чисел. Достаточность в предложении 2 установлена Д. Робинсоном. Необходимость доказана в одной из работ автора доклада.

Возвращаясь к поставленному выше вопросу об $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости свободного произведения двух почти разрешимых групп конечного ранга с нормальным объединением, сформулируем первый основной результат доклада.

Теорема 2. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение почти разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H, причем $H \neq A$ и $H \neq B$. Группа G $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел тогда и только тогда, когда группы A, B, A/H и B/H редуцированы и являются почти FATR-группами.*

Таким образом, с учетом предложения 2 мы видим, что $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость группы G из теоремы 2 для некоторого конечного множества π простых чисел равносильна $\mathcal{F}_{\pi_1}$-аппроксимируемости групп A, B, A/H и B/H для некоторого конечного множества π_1 простых чисел.

Так как свободное произведение двух конечных p-групп с нормальным объединением не обязано быть $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемой группой, то для фиксированного конечного множества π простых чисел $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость обобщенного свободного произведения G из теоремы 2 не равносильна $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости групп A, B, A/H и B/H. Однако, если вместо $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости рассмотреть свойство почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемости, где π — фиксированное конечное множество простых чисел, то удается получить следующий результат.

Теорема 3. *Пусть π — конечное множество простых чисел. И пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение почти разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H, причем $H \neq A$ и $H \neq B$. Группа G почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группы A, B, A/H и B/H почти $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемы.*

Эта теорема (с учетом результата А. Л. Шмелькина) существенно обобщает сформулированный выше результат А. В. Розова.

Список цитированной литературы

1. Розов А. В. О почти аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения полициклических групп с нормальными объединенными подгруппами // Известия ВУЗов. Математика. 2014. № 11. С. 64–71.

Ивановский государственный университет
Получено 21.03.2015

УДК 512.542

Конечные простые группы, факторизуемые p-разрешимой и бипримарной подгруппами

С. Ю. Башун, Э. М. Пальчик (Новополоцк, Беларусь)
bashunsviat@mail.ru

Обозначения и терминология стандартные [1, 2]. G_p — силовская p-подгруппа группы G; E_n (D_n, Z_n, Q_n) — элементарная абелева (диэдральная, циклическая, кватернионная) группа порядка n; бипримарная группа G (бипримарное число n) — группа порядка $|G| = p^m \cdot r^n$, где p и r — простые числа ($n = p^m \cdot r^n$); группа Шмидта — минимальная ненильпотентная группа; $\varepsilon \in \{-1, +1\}$.

Факторизация групп вида $G = A \cdot B$ представляет важное направление в теории групп. Отметим, например, работы [3, 4]. Похожие результаты приводятся здесь.

Теорема 1. *Пусть $G = A \cdot B$ — конечная простая неабелева группа, где A — p-разложимая группа, $p \in \pi(A)$, B — группа Шмидта. Тогда $G = L_2(7)$, $A \cong D_8$, $B \cong Z_7 \leftthreetimes Z_3$, или $G = L_2(2^f)$, $2^f - 1$ — простое число Мерсенна, $A = Z_{2^f+1}$, $B \cong G_2 \leftthreetimes Z_{2^f-1}$.*

С использованием результатов работ [3 – 5] получается более глубокий результат.

Теорема 2. *Пусть $G = A \cdot B$ — конечная простая неабелева группа, где A — p-разрешимая группа, $p \in \pi(A)$, B — бипримарная группа, $|\pi(G : A)| > 1$. Тогда*

(1) $G = M_{11}$, $A \cong E_9 \leftthreetimes Q_8.Z_2$, $B \cong Z_{11} \leftthreetimes Z_5$;

(2) $G = PSp_4(3)$, $A \cong E_{16} \leftthreetimes D_{10}$ или $A \cong E_{16} \leftthreetimes Z_5$, $B \cong E_{27} \leftthreetimes S_4$;

(3) $G = L_2(2^f)$, $2^f - 1$ — простое число Мерсенна, $A \cong Z_{2^f+1}$ или $A \cong D_{2(2^f+1)}$, $B \cong G_2 \leftthreetimes Z_{2^f-1}$;

(4) $G = L_2(2^f)$, $A = G_2 \leftthreetimes Z_{2^f-1}$, $B \cong D_{2(2^f+1)}$, $2^f + 1$ — простое число Ферма;

(5) $G = L_2(2^f)$, $A = G_2 \leftthreetimes Z_{2^f-1}$, $B = Z_{2^f+1}$, $f = 2^k$ или $f = 2^k \cdot t$, t-простое число, $k \geq 0$;

(6) $G = L_2(p^f)$, $p > 2$, $A = N(G_p)$, $B \cong D_{p^f+1}$, $(p^f - 1)/2$ — нечетное число, $f = 2^k$ или $f = 2^k \cdot t$, t — простое число, $k \geq 0$;

(7) $G = L_2(p)$, $p > 2$, $(p - 1)/2$ — степень нечетного простого числа, $A = D_{p+1}$, $B = N(G_p)$;

(8) $G = L_2(p)$, $p \in \{7, 11, 23\}$, $A = N(G_p)$, и, соответственно p, $B \in \{S_4, A_4, S_4\}$;

(9) $G = L_3(3)$, $A \cong E_9 \leftthreetimes Z_2 S_4$, $B \cong Z_{13} \leftthreetimes Z_3$.

В некоторых пунктах A и B взаимозаменяемы.

Доказательство. По условию $|\pi(G : A)| = 2$. По [5] p-разрешимая подгруппа A является разрешимой (как и B). По [4]

$$G \in \{M_{11}; PSp_4(3); L_2(q); L_3(q), q < 9\}.$$

Из [3] и таблицы 4.1 в [5] следует утверждение. Теорема доказана.

Замечание 1. *Лемма 5.1 в [5] может быть уточнена в части, касающейся групп ${}^2B_2(q)$, $q = 2^{2m+1}$.*

Лемма 1. *Если группа* $G = {}^2B_2(q)$ *имеет подгруппу* X *бипримарного индекса, то* $q = 8$ *или* 32, $X \cong G_2 \leftthreetimes Z_{q-1}$, $|G : X| = 5 \cdot 13$ *или* $5^2 \cdot 41$ *соответственно.*

Доказательство. По [5] $|G : X| = q^2+1$. $q^2+1 = (2^{2m+1}-2^{m+1}+1)(2^{2m+1}+2^{m+1}+1) = 5^n \cdot s^m$. Рассмотрим уравнение $2^{2m+1}+\varepsilon 2^{m+1}+1 = 5^n$. Покажем, что либо $\varepsilon = -1$, $m = 1$, либо $m = 2$, $\varepsilon = -1$.

Если n — нечетное число, то $2^{m+1} = 4$. Пусть $n = 2k$. Тогда $2^{m+1}(2^m+\varepsilon) = (5^k-1)(5^k+1)$. Имеем два случая: (i) $5^k-1 = 2a$, $5^k+1 = 2^m \cdot b$, $(2, ab) = 1$ и (ii) $5^k-1 = 2^m \cdot a$, $5^k+1 = 2 \cdot b$, $(2, ab) = 1$, где всюду $(a, b) = 1$.

В случае (i) $a \neq 1 \neq b$, так как 5 — не простое число Мерсенна. $5^k+1 = 2^{-1}\cdot 2^{m+1}\cdot b$, $5^k-1 = 2^{-1}\cdot 2^{m+1}\cdot b-2$. $2^{m+1}(2^m+\varepsilon) = (2^{-1}\cdot 2^{m+1}\cdot b-2)(2^{-1}\cdot 2^{m+1}\cdot b)$. Откуда $2^m+\varepsilon = 2^{-2}\cdot 2^{m+1}b^2-b$, $b+\varepsilon = 2^{m-1}(b^2-2) \geq b^2-2 = (b-\sqrt{2})(b+\sqrt{2})$. Так как $b > 2$, то последнее неравенство невозможно.

В случае (ii) $b > 1$. Если $a = 1$, то $\{5^k, 2^m\} = \{5, 2^2\}$, $k = 1$, $n = 2 = m$. Пусть $a > 1$. $5^k-1 = 2^{-1}\cdot 2^{m+1}\cdot a$, $5^k+1 = 2^{-1}\cdot 2^{m+1}\cdot a+2$ и $2^{m+1}(2^m+\varepsilon) = 2^{-1}\cdot 2^{m+1}a\cdot(2^{-1}\cdot 2^{m+1}\cdot a+2)$. Откуда $-a+\varepsilon = 2^{m-1}a^2-2^m$, что ввиду $a > 2$ невозможно. Лемма доказана.

Замечание 2. *В работе [6] в теореме 1 пункт 5) должен иметь вид: 5)* ${}^2B_2(q)$*; (вместо* ${}^2F_4(q)$*); в лемме 1 символ* $W(G)$ *следует заменить на* $W(L)$*, где* L *— соответствующая типу* G *комплексная простая алгебра Ли; пункт (2) замечания после леммы 6 в [6] должен выглядеть следующим образом:*

(2) Группы $L_5(q)$ *с* $3|(q-1)$ *и* $U_5(q)$ *с* $3|(q+1)$ *имеют неабелевы* S_3*-подгруппы.*

Список цитированной литературы

1. Горенстейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1982. 352 с.

2. Вдовин Е. П., Ревин Д. О. Теоремы силовского типа // Успехи матем. н. 2011. Т. 66, вып. 5 (401). С. 3–46.

3. Ito N. On the factorizations of the linear fraction of group $LF(2, p^n)$ // Acta Sci. Math. Szeged. 1953. no. 15. P. 79–84.

4. Kazarin L. S. Groups which are the product of two solvable subgroups // Commun. Algebra. 1986. Vol. 14, no. 6. P. 1001–1066.

5. Li C. H., Li X. On permutation groups of degree a product of two prime-powers // Commun. Algebra. 2014. Vol. 42, P. 4722–4743.

6. Пальчик Э. М. О конечных группах, у которых силовскую 3-подгруппу нормализует силовская $3'$-подгруппа // Сиб. матем. ж. 2015. Т. 56, № 1. С. 158–164.

Полоцкий государственный университет
Получено 09.04.2015

УДК 512.55+512.545

Частичные K-порядки в кольцах

Д. А. Бервинов, Е. Е. Ширшова (Москва)
bervinov@inbox.ru
shirshova.elena@gmail.com

Определение 1. *Кольцо* $< R,+,\cdot,\leqslant>$ *называется частично* K*-упорядоченным, если* $< R,+,\leqslant>$ *– частично упорядоченная группа, и из* $0 < a$ *следует* $ab \leqslant a$ *и* $ba \leqslant a$ *для всех* $b \in R$ *(см. [1]).*

Пусть $G =< \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},+,\leqslant>$ – лексикографическое произведение линейно упорядоченных групп. Тогда G – линейно упорядоченная группа (см. [2], ч.I, гл.II, §7).

Определим на G умножение по правилу: $(a,b)(c,d) = (0,ad)$. Получим кольцо $R_1 =< G,+,\cdot,\leqslant>$, в котором из $0 < r$ следует $rs \leqslant r$ для всех $s \in R_1$.

С другой стороны, при $r = (0,2) > 0$ и $s = (2,0)$ получаем $sr = (0,4) > (0,2)$.

Определение 2. *Кольцо* $< R,+,\cdot,\leqslant>$ *называется частично* K*-упорядоченным справа, если* $< R,+,\leqslant>$ *– частично упорядоченная группа, и из* $0 < a$ *следует* $ab \leqslant a$ *для всех* $b \in R$.

Если аддитивная группа кольца является линейно упорядоченной группой, то кольцо называется линейно K*-упорядоченным справа.*

Теорема 1. *Пусть* R *– частично* K*-упорядоченное справа кольцо. Тогда справедливы утверждения:*

1. в кольце R *нет единицы и нет сравнимых с нулем идемпотентов, отличных от нуля;*

2. в кольце R *подмножество* P *является положительным конусом этого кольца в том и только в том случае, когда* P *– положительный конус аддитивной группы, и* $r + rs \in P$ *для всех* $r \in P$ *и* $s \in R$*;*

3. если в кольце R *идеал* I *является выпуклым подмножеством, то кольцо* R/I *– частично* K*-упорядоченное справа кольцо;*

4. если в кольце R *подмножество* H *является выпуклой направленной (см. [2]) подгруппой аддитивной группы, то* H *– правый идеал кольца* R.

Теорема 2. *В линейно* K*-упорядоченном справа кольце существует система правых идеалов, содержащая* $\{0\}$ *и* R*, которая вместе с любой своей подсистемой содержит пересечение и объединение идеалов, входящих в данную подсистему, и для любого скачка идеалов* $I \subset J$ *в этой системе имеет место включение* $JR \subset I$.

Список цитированной литературы

1. Бибаева В. Н, Ширшова Е. Е. О линейно K-упорядоченных кольцах// Фундаментальная и прикладная математика. 2011/2012. Т. 17, № 4. С. 13–23.

2. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. Москва: Наука, 1965. 342 с.

Московский педагогический государственный университет
Получено 14.04.2015

УДК 512.541

К теореме Бэра–Капланского для p-локальных групп без кручения с кубическим полем расщепления

С. В. Вершина (Москва)
svetlanavershina@gmail.com

Ранее [1] было показано, что теорема Бэра–Капланского имеет место для p-локальных абелевых групп без кручения конечного ранга с квадратичным полем расщепления.

Поле $K \subset \widehat{\mathbb{Q}}_p$ называется *полем расщепления* для p-локальной группы A, если

$$A \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \cong D \oplus F,$$

где $R = K \cap \widehat{\mathbb{Z}}_p$, D — делимый R-модуль, F — свободный R-модуль. Кольцо R в этом случае называется *кольцом расщепления* для группы A.

Теорема 1. *Пусть кубическое поле K является полем расщепления редуцированных p-локальных абелевых групп без кручения A и B конечного ранга. Тогда $\mathrm{E}(A) \cong \mathrm{E}(B) \Leftrightarrow A \cong B$ в том и только том случае, если $\mathrm{E}(A_1) \cong \mathrm{E}(B_1) \Leftrightarrow A_1 \cong B_1$ для прямых слагаемых A_1 и B_1 групп A и B соответственно, являющихся прямыми суммами групп двойственных аддитивной группе кольца расщепления R групп A и B.*

Следствие 1. *Если группы A и B не имеют неразложимых прямых слагаемых ранга 3 p-ранга 2, то из изоморфизма их колец эндоморфизмов следует изоморфизм групп A и B.*

Список цитированной литературы

1. Вершина С. В. К теореме Бэра–Капланского для квадратично-разложимых групп без кручения // Чебышевский сб. 2014. Т. 15, № 1. С. 77–88.

Московский Педагогический Государственный Университет
Получено 15.04.2015

УДК 511.335

Аппроксимируемость фундаментальной группы конечного графа групп корневым классом конечных групп

Д. В. Гольцов (Иваново)
goltsov_89@mail.ru

Абстрактный класс групп $\mathcal{K}$ называется *корневым,* если выполнены следующие три условия.

1. Если группа A принадлежит классу $\mathcal{K}$ и B — подгруппа группы A, то группа B также принадлежит классу $\mathcal{K}$.

2. Прямое произведение любых двух групп из класса $\mathcal{K}$ принадлежит классу $\mathcal{K}$.

3. Если $1 \leq C \leq B \leq A$ — субнормальный ряд группы A такой, что фактор-группы A/B и B/C принадлежат классу $\mathcal{K}$, то в группе A существует нормальная подгруппа D такая, что $D \subseteq C$ и A/D принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Напомним, что группа G называется *аппроксимируемой классом* $\mathcal{K}$ (или короче $\mathcal{K}$-аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента g группы G существует гомоморфизм φ группы G на некоторую группу из класса $\mathcal{K}$, переводящий элемент g в элемент отличный от 1. Группа G называется *почти $\mathcal{K}$-аппроксимируемой*, если в ней существует $\mathcal{K}$-аппроксимируемая подгруппа конечного индекса

Если класс $\mathcal{K}$ совпадает с классом $\mathcal{F}$ всех конечных групп, то понятие $\mathcal{K}$-аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости. Наряду с финитной аппроксимируемостью рассматривается также $\mathcal{F}_p$-аппроксимируемость и $\mathcal{F}_\pi$-аппроксимируемость, где p — простое число, π — множество простых чисел, $\mathcal{F}_p$ — класс всех конечных p-групп, $\mathcal{F}_\pi$ — класс всех конечных π-групп. Заметим, что все перечисленные классы $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_p$, $\mathcal{F}_\pi$ являются корневыми классами конечных групп.

Грюнберг доказал, что свободное произведение групп аппроксимируемых корневым классом само аппроксимируемо этим классом при условии, что любая свободная группа аппроксимируема этим классом. В последствии Д.Н. Азаров установил, что это условие всегда выполняется, т.е. любая свободная группа аппроксимируется любым корневым классом. Поэтому результат Грюнберга принимает следующий вид: свободное произведение групп аппроксимируемых корневым классом само обладает этим свойством.

Если теперь вместо свободного произведения рассмотреть свободное произведение с объединенными подгруппами, то для него результат, аналогичный теореме Грюнберга, уже не имеет место (даже в случае когда объединенная подгруппа конечная). Однако если вместо аппроксимируемости корневым классом рассмотреть почти аппроксимируемость корневым классом, то удается получить следующий результат [1].

Теорема 1. *Свободное произведение двух групп с конечными объединенными подгруппами почти аппроксимируемо корневым классом конечных групп тогда и только тогда, когда этим свойством обладают свободные множители.*

Аналогичный результат имеем место и для HNN-расширения с конечными связными подгруппами [1].

Теорема 2. *HNN-расширение группы с конечными связными подгруппами почти аппроксимируемо корневым классом конечных групп тогда и только тогда, когда этим свойством обладает база HNN-расширения.*

В действительности получен следующий результат обобщающий теоремы 1 и 2.

Теорема 3. *Фундаментальная группа конечного графа групп с конечными реберными группами почти аппроксимируема корневым классом конечных групп тогда и только тогда, когда этим свойством обладают все вершинные группы.*

В заключение, напомним определение фундаментальной группы графа групп. Понятие фундаментальной группы графа групп достаточно сложно и является одной из важнейших конструкций в геометрической теории групп. Это понятие было введено и рассмотрено Бассом и Серром в [2].

Пусть неориентированный связный *граф* Γ состоит из множества вершин X и из множества ребер Y. Для каждого ребра $y \in Y$ зафиксируем начало ребра $\alpha(y) \in X$ и конец ребра $\omega(y) \in X$.

Граф Γ называется *конечным* графом, если в этом графе множества X и Y являются конечными.

Граф групп $\Lambda(\Gamma)$ состоит из графа Γ, множества групп $\{G_x : x \in X\}$ (вершинные группы), множеста групп $\{H_y : y \in Y\}$ (реберные группы) и вложений групп $\alpha_y : H_y \to G_{\alpha(y)}$ и $\omega_y : H_y \to G_{\omega(y)}$ для всех $y \in Y$.

В графе Γ выберим некоторое максимальное поддерево S, т.е. максимальный подграф, являющийся деревом.

Фундаментальная группа графа групп $\Lambda(\Gamma)$ *относительно максимального поддерева* S — это группа, которая порождается всеми вершинными группами $G_x (x \in X)$ и множеством $\{t_y : y \in Y \setminus S\}$ и определяется следующими соотношениями:

$$t_y^{-1}\alpha_y(g)t_y = \omega_y(g) \quad (g \in H_y, y \in Y \setminus S),$$

$$\alpha_y(g) = \omega_y(g) \quad (g \in H_y, y \in S),$$

Если граф Г представляет собой две вершины, соединенные одним ребром, то фундаментальная группа G этого графа представляет собой свободное произведение двух вершинных групп с объединенными подгруппами.

Если граф Г представляет собой одну вершину, которая соединена сама с собой ребром в виде петли, тогда фундаментальная группа G этого графа представляет собой HNN-расширение вершинной группы.

Список цитированной литературы

1. Гольцов Д. В. О почти аппроксимируемости корневыми классами обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14. С. 53–59.

2. Serre J.-P. Trees, Springer-Verlag, 1980.

Ивановский государственный университет
Получено 18.04.2015

УДК 512.544

Модули над групповыми кольцами конечно порожденных разрешимых групп с ограничениями на систему подгрупп с бесконечными коцентрализаторами

О. Ю. Дашкова (Севастополь)
odashkova@yandex.ru

В [1] – [2] изучались модули над групповыми кольцами разрешимых групп с различными кольцами скаляров, у которых некоторые системы подгрупп удовлетворяли определенным условиям конечности. В настоящей работе изучается $\mathbf{R}G$-модуль A, где $\mathbf{R}$ — ассоциативное кольцо с единицей, G — конечно порожденная разрешимая группа. Если $H \le G$, то фактор-модуль $A/C_A(H)$, рассматриваемый как $\mathbf{R}$-модуль, называется коцентрализатором подгруппы H в модуле A [5].

Пусть $\mathbf{L}_{nf}(G)$ — система всех подгрупп группы G, коцентрализаторы которых в модуле A бесконечны. Будем говорить, что группа G удовлетворяет условию $max - nf$, если $\mathbf{L}_{nf}(G)$ удовлетворяет условию максимальности как упорядоченное множество.

Пусть $FFD(G)$ — множество всех элементов группы G, коцентрализатры которых в модуле A конечны. Тогда $FFD(G)$ является нормальной подгруппой группы G.

Основными результатами работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — конечно порожденная разрешимая группа, удовлетворяющая условию $max - nf$. Если фактор-модуль $A/C_A(G)$ бесконечен, а фактор-модуль $A/C_A(FFD(G))$ конечен, то G содержит нормальную абелеву подгруппу H, такую, что фактор-группа G/H — полициклическая.*

Теорема 2. *Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, G — конечно порожденная разрешимая группа, удовлетворяющая условию $max - nf$. Если фактор-модули $A/C_A(G)$ и $A/C_A(FFD(G))$ бесконечны, то G содержит нормальную подгруппу L, удовлетворяющую следующим условиям:*
(1) фактор-группа G/L — полициклическая;
(2) $L \leq FFD(G)$, и фактор-модуль $A/C_A(L)$ бесконечен;
(3) фактор-группа $L/[L, L]$ бесконечно порождена.

Список цитированной литературы

1. Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya. Linear groups with the maximal condition on subgroups of infinite central dimension // Publicacions Mat. 2006. Vol. 50, № 1. P. 103–131.

2. Дашкова О. Ю. Об одном классе модулей над групповыми кольцами разрешимых групп с ограничениями на некоторые системы подгрупп // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14, вып. 7. С. 111–119.

3. Dashkova Olga Yu. Modules over group rings of soluble groups with a certain condition of maximality // Cent. Eur. J. Math. 2011. Vol. 9, № 4. P. 922–928.

4. Дашкова О. Ю. Об одном классе модулей над целочисленными групповыми кольцами разрешимых групп // Доповіді НАН Украiни. 2012. № 3. С. 19–23.

5. Курдаченко Л. А. О группах с минимаксными классами сопряженных элементов // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Академия наук Украины. Киев, 1993. С. 160–177.

Филиал Московского государственного университета в г. Севастополе
Получено 13.04.2015

УДК 519.4

О нормализаторах подгрупп в свободных произведениях с объединением

И. В. Добрынина (Тула)
dobrynirina@yandex.ru

В работе И. С. Безверхней [1] доказана

Теорема 1. *Если в группе $G = A_1 * A_2$ сомножители $A_i, i = \overline{1,2}$, обладают свойством: нормализатор произвольной конечно порожденной подгруппы группы A_i конечно порожден, то нормализатор произвольной конечно порожденной подгруппы группы G конечно порожден.*

В доказательстве данной теоремы применяется обобщение метода Нильсена (см. напр. [2]), введенное В. Н. Безверхним [3] и называемое методом специального множества слов. Используя указанную технику, доказывается

Теорема 2. *Если в группе $G = A_1 *_U A_2$, где U – конечная подгруппа, сомножители $A_i, i = \overline{1,2}$, обладают свойством: нормализатор произвольной конечно порожденной подгруппы группы A_i конечно порожден, то нормализатор произвольной конечно порожденной подгруппы группы G конечно порожден.*

Применяя метод математической индукции, из теоремы 2 можно получить следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть группа G – древесное произведение групп G_1, $G_2, \ldots G_n$, объединенных по конечным подгруппам, причем нормализатор произвольной конечно порожденной подгруппы группы $G_i, i = \overline{1,n}$, конечно порожден. Тогда нормализатор произвольной конечно порожденной подгруппы группы G конечно порожден.*

Рассмотрим теперь конечно порожденную группу Кокстера, заданную копредставлением $G = \langle a_1, \ldots, a_n;\ (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1, i,j \in \overline{1,n}, i \neq j \rangle$, где m_{ij} – элементы симметрической матрицы Кокстера: $\forall i,j \in \overline{1,n}$, $m_{ii} = 1$, $m_{ij} \geqslant 2$, $i \neq j$.

Построим для группы G граф Γ такой, что вершинам его ребер соответствуют образующие a_i и a_j $(i \neq j)$, а каждому ребру соответствует соотношение $(a_i a_j)^{m_{ij}} = 1$. Если при этом получится дерево-граф Γ, то группа G называется группой Кокстера с древесной структурой.

Группу G можно представить как древесное произведение двупорожденных групп Кокстера объединенных по конечным циклическим подгруппам. При этом от графа Γ группы G перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ следующим образом: вершинам каждого ребра $\overline{e}$ графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Кокстера на двух образующих $G_{ij} =< a_i, a_j; a_i^2 = a_j^2 = 1, (a_i a_j)^{m_{ij}} = 1 >$ и $G_{jk} =< a_j, a_k; a_j^2 = a_k^2 = 1, (a_j a_k)^{m_{jk}} = 1 >$, а ребру $\overline{e}$ – циклическую подгруппу $< a_j; a_j^2 = 1 >$.

Данные группы введены В. Н. Беверхним (см. напр. [4]).

Из теоремы 3 и представления группы Кокстера с древесной структурой получим

Следствие 1. *В группе Кокстера G с древесной структурой нормализатор всякой конечно порожденной подгруппы конечно порожден.*

Для HNN-расширений справедливо утверждение:

Теорема 4. *Пусть группа* $\overline{G} = \langle G, t; t^{-1}U_1 t = U_{-1}, \varphi\rangle$ *является* HNN*-расширением группы* G *с помощью конечных изоморфных подгрупп* U_1, U_{-1} *и фиксированного изоморфизма* $\varphi : \varphi(U_1) = U_{-1}$, t *– не принадлежащая* G *правильная проходная буква. Если в группе* G *нормализатор произвольной конечно порожденной подгруппы конечно порожден, то нормализатор произвольной конечно порожденной подгруппы группы* $\overline{G}$ *конечно порожден.*

Список цитированной литературы

1. Безверхняя И. С. О сопряженности конечных множеств подгрупп в свободном произведении групп // Межвуз. сб. Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула: ТГПИ, 1981. С. 102–116.
2. Линдон Р. Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980. 447 с.
3. Безверхний В. Н. Неразрешимость проблемы вхождения в группах Артина конечного типа // Сибирский математический журнал. 1995. Т. 26, № 5. С. 27–42.
4. Безверхний В. Н. Инченко О. В. Проблема пересечения конечно порожденных подгрупп в группах Кокстера с древесной структурой // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2009. № 2. С. 16–31.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Получено 27.04.2015

УДК 512.5

Сеть, ассоциированная с элементарной группой

Р. Ю. Дряева, В. А. Койбаев (Владикавказ)
koibaev-K1@yandex.ru

Пусть Λ — произвольное коммутативное кольцо с единицей, n – натуральное число. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \le i, j \le n$, аддитивных подгрупп кольца Λ называется сетью (ковром) [1, 2] над кольцом Λ порядка n, если

$$\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$$

при всех значениях индексов i, r, j. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется элементарной сетью (элементарный ковер) [1, 2], [3, вопрос 15.46]. Таким образом, элементарная сеть это набор $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \le i \ne j \le n$, аддитивных подгрупп кольца Λ, для которых $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ для любой тройки попарно различных чисел i, r, j.

Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i \neq j \leq n$, называется дополняемой, если для некоторых аддитивных подгрупп σ_{ii} кольца Λ таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i, j \leq n$ является (полной) сетью. Другими словами, элементарная сеть σ является дополняемой, если ее можно дополнить (диагональю) до (полной) сети. Хорошо известно (например, [1]), что элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ является дополняемой тогда и только тогда, когда $\sigma_{ij}\sigma_{ji}\sigma_{ij} \subseteq \sigma_{ij}$ для любых $i \neq j$. В этом случае диагональные подгруппы σ_{ii} определяются формулой

$$\sigma_{ii} = \sum_{k \neq i} \sigma_{ki}\sigma_{ik}$$

где суммирование берется по всем k отличным от i.

В [4] определены замкнутые сети, приводятся примеры сетей, которые не являются дополняемыми. Интерес к дополняемым сетям состоит в том, что по таким сетям строятся сетевые группы [1, 2]. В этой заметке для произвольной элементарной сети σ мы построим сеть Ω (D-замыкание сети σ), ассоциированную с элементарной группой $E(\sigma) = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}) : 1 \leq i \neq j \leq n\rangle$, которая является наименьшей дополняемой сетью, содержащей σ.

Пусть α, β — подгруппы аддитивной группы кольца Λ. Для элементарной сети τ второго порядка

$$\tau = \begin{pmatrix} * & \alpha \\ \beta & * \end{pmatrix}$$

положим $\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha\beta)^k$.

Рассмотрим элементарную группу $E(\tau) = \langle t_{21}(\beta), \quad t_{12}(\alpha)\rangle$. Если $a \in E(\tau)$, $a = \begin{pmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1 + a_{22} \end{pmatrix}$, то $a_{11}, a_{22} \in \gamma, \quad a_{12} \in \alpha + \alpha\gamma, \quad a_{21} \in \beta + \beta\gamma$. Последнее замечание индуцирует следующее построение. Для произвольных $i \neq j$ положим

$$\Omega_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}\gamma_{ij},$$

где $\gamma_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} (\sigma_{ji}\sigma_{ij})^m$. Нетрудно видеть, что набор $\Omega = (\Omega_{ij})$ является элементарной сетью. Для (полной) сети Ω через $G(\Omega)$ обозначается сетевая группа [1].

Теорема 1. *Элементарная сеть Ω является наименьшей дополняемой сетью, содержащей элементарную сеть σ. Таким образом, сетевая группа $G(\Omega)$ является наименьшей сетевой группой, содержащей элементарную группу $E(\sigma)$.*

Работа В. А. Койбаева поддержана РФФИ (проект 13-01-00469). Результаты настоящей заметки были получены в рамках государственного задания Минобрнауки России.

Список цитированной литературы

1. Боревич З. И. О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями// Зап. науч. семин. ПОМИ РАН. 1978. Т. 75. С. 22–31.

2. Левчук В. М. Замечание к теореме Л. Диксона// Алгебра и логика. 1983. Т.22, № 5. С. 504–517.

3. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. Новосибирск. Издание 17-е, 2010. 218 с.

4. Койбаев В. А., Нужин Я. Н. Подгруппы групп Шевалле и кольца Ли, определяемые набором аддитивных подгрупп основного кольца // Фундамент. и прикл. матем. 2013. Т. 18, вып. 1. С. 75–84.

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова
Получено 13.02.2015

UDK 512.54

On the isomorphism problem for generalized Baumslag–Solitar groups

F. A. Dudkin (Novosibirsk)
DudkinF@ngs.ru

Call a finitely generated group G a *generalized Baumslag-Solitar group* or a GBS group if G can act on a tree so that the stabilizers of vertices and edges are infinite cyclic groups. By the Bass-Serre theorem, G is representable as $\pi_1(\mathbb{A})$, the fundamental group of a graph of groups $\mathbb{A}$ (see [1]).

Given a GBS group G, we can present the corresponding graph of groups $\mathbb{A}$ by a labeled graph (A, λ), where A is a finite connected graph and $\lambda\colon E(A) \to \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ labels the edges of A. The label λ_e of an edge e with the source vertex v defines an embedding $\alpha_e\colon e \to v^{\lambda_e}$ of the cyclic edge group $\langle e\rangle$ into the cyclic vertex group $\langle v\rangle$. Using the notion of expansion for labeled graphs, we can easily see that every GBS group can be presented by infinitely many labeled graphs.

Recently GBS groups have been quite actively studied [2], [3], [4]. In particular, the isomorphism problem for GBS groups has been discussed: to determine algorithmically when two given labeled graphs define isomorphic GBS groups. Despite that, the isomorphism problem is solved only in several special cases [5], [6], [7], the general solution is not established.

If two labeled graphs $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ define isomorphic GBS groups $\pi_1(\mathbb{A}) \cong \pi_1(\mathbb{B})$ and $\pi_1(\mathbb{A})$ is not isomorphic to $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2$ or Klein bottle group then there exists a finite sequence of *expansion* and *collapse* (see fig.1) moves connecting $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ [8]. A labeled graph is called *reduced* if it admits no collapse move (equivalently, the labeled graph contains no edges with distinct endpoints and labels ± 1).

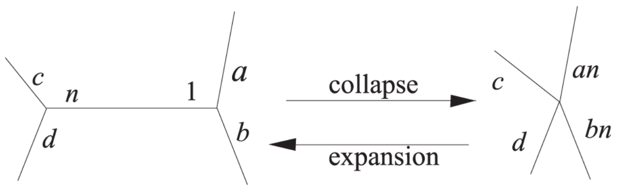


Fig. 1: Expansion and collapse moves.

Given a labeled graph $\mathbb{A}$ (a GBS group G), denote the set of reduced labeled graphs with the fundamental group isomorphic to $\pi_1(\mathbb{A})$ (resp. G) by $R(\mathbb{A})$ (resp. $R(G)$).

Three types of transformations of labeled graphs plays an important role in studing GBS groups: slide (see fig. 2), induction, $\mathscr{A}^{\pm}$–moves.

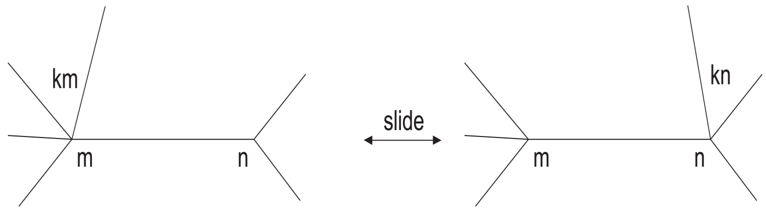


Fig. 2: Slide.

Theorem 1. *(Clay M., Forester M. [2]) Given GBS group G and $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in R(G)$, then $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$ related by a finite sequence of slides, inductions and $\mathscr{A}^{\pm 1}$–moves, with all intermediate labeled graphs reduced.*

An edge e of a labeled graph $\mathbb{A}$ is called *mobile* (see [6]), if there exists $t \in \pi_1(\mathbb{A})$ such that $G_e^t \subset G_e$. There G_e is an edge cyclic group, corresponding to the edge e. In [6] it is proved that there is an algorithm to decide if given edge e mobile or not.

The main result of this paper is another piece of the isomorphism problem for GBS groups:

Theorem 2. *Given labeled graph $\mathbb{A}$ and $\mathbb{B}$. Suppose $\mathbb{A}$ has at most one mobile edge. Then there is an algorithm to decide whether groups $\pi_1(\mathbb{A})$ and $\pi_1(\mathbb{B})$ isomorphic or not.*

Список цитированной литературы

1. Serre J. P., Trees. – Berlin/Heidelberg/New York: Springer, 1980. 164 p.

2. Clay M., Forester M., Whitehead moves for G-trees // Bull. London Math. Soc. 2009. Vol 41, no. 2. P. 205–212.

3. Forester M., On uniquenes of JSJ decomposition of finitely generated groups // Comm. Math. Helv. 2003. Vol. 78. P. 740–751.

4. Clay M., Deformation spaces of G–trees and automorphisms of Baumslag — Solitar groups // Groups Geom. Dyn. 2009. no. 3. P. 39–69.

5. Forester M., Splittings of generalized Baumslag-Solitar groups // Geometriae Dedicata. 2006. Vol. 121, no. 1. P. 43–59.

6. Clay M., Forester M., On the isomorphism problem for generalized Baumslag — Solitar groups // Algebraic & Geometric Topology. 2008. no. 8. P. 2289–2322.

7. Levitt G., On the automorphism group of generalized Baumslag-Solitar groups // Geometry & Topology. 2007. Vol. 11, P. 473–515.

8. Forester M., Deformation and rigidity of simplicial group actions on trees // Geometry & Topology. 2002. no. 6. P. 219–267.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia.
Received 14.04.2015

УДК 510.53+512.54.0+512.54.03+512.54.05+512.543.72

Об уравнениях в свободной группе с ограничениями на решения

В. Г. Дурнев, О. В. Зеткина, А. И. Зеткина (Ярославль)
durnev@univ.uniyar.ac.ru

Через F_m будем обозначать свободную группу ранга m со свободными образующими a_1, ..., a_m, а через $F_m^{(s)}$ – ее s-ый коммутант.

После построения Г. С. Маканиным [1] разрешающего алгоритма для систем уравнений в свободной группе F_m стал представлять интерес вопрос о существовании аналогичных алгоритмов для *уравнений в свободных группах с ограничениями на решения*. Хорошо известно, что вопрос о точности матричного представления Гасснер [2], [3] группы крашеных кос эквивалентен вопросу об отсутствии нетривиального решения в свободной группе F_m уравнения с ограничениями на решения

$$x_1 a_1 x_1^{-1} \cdot x_2 a_2 x_2^{-1} \cdots x_m a_m x_m^{-1} = a_1 \cdot a_2 \cdots a_m \mathbin{\&} \mathop{\&}_{i=1}^{n} x_i \in F_m^{(2)}.$$

В работе [4] первого автора был получен следующий результат.

Теорема 1. *В свободной группе F_2 можно построить такое уравнение с ограничениями на решения*

$$w\,(\,a_1^k,\,x_1,\,\dots\,,\,x_n,\,a_1,\,a_2\,)\;=\;1\,\&\,\mathop{\&}_{i=1}^{t}x_i\;\in\;F_2^{(1)},$$

что не существует алгоритма, позволяющего для произвольного натурального числа k определить, имеет ли оно решение.

В. Диекерт [5] показал, что проблема разрешимости в свободной группе F_m для уравнений с ограничениями на решения

$$w\,(\,x_1,\dots,x_n,a_1,\dots,a_m\,)\;=\;1\,\&\,\mathop{\&}_{i=1}^{n}x_i\;\in\;H_i,$$

где H_1,..., H_n – произвольные регулярные подмножества, алгоритмически разрешима и принадлежит классу $PSPACE$.

Обозначим через φ_i “*эндоморфизм выдергивания i-ой образующей*” свободной группы F_m

$$\varphi_i\,(\,a_j\,)\;\rightleftharpoons\;a_j\;\text{ при }\;j\neq i,\quad\varphi_i\,(\,a_i\,)\;\rightleftharpoons\;1.$$

Полагаем

$$P_n^{(i)}\;\rightleftharpoons\;Ker\,\varphi_i\quad P_m\;\rightleftharpoons\;\bigcap_{i=1}^{m}P_m^{(i)}$$

и назовем $P_m^{(i)}$ *подгруппой i-чистых элементов*, а P_m – *подгруппой чистых или гладких элементов.* Ясно, что P_m – нормальная подгруппа группы F_m, содержащаяся в ее коммутанте $F_m^{(1)}$ ($P_m\subseteq F_m^{(1)}$) и $P_2=F_2^{(1)}$, но при $m\geqslant 3$ $P_m\neq F_m^{(1)}$.

Теорема 2. *При $m\geqslant 3$ невозможен алгоритм, решающий проблему разрешимости для уравнений с ограничениями на решения в свободной группе F_m*

$$w\,(\,x_1,\,\dots\,,\,x_n,\,a_1,\,\dots\,,\,a_m\,)\;=\;1\,\&\,x_1\;\in\;P_m.$$

Теорема 3. *В свободной группе F_2 можно построить такое семейство разрешенных относительно неизвестных уравнений с ограничениями на решения*

$$w\,(\,x^k,\,x_1,\,\dots\,,\,x_n\,)\;=\;[\,a_1,\,a_2\,]\;\&\,\mathop{\&}_{i=1}^{t}x_i\;\in\;F_2^{(1)},$$

где t – некоторое фиксированное число ($1\leq i\leq n$), что невозможен алгоритм, позволяющий для произвольного натурального числа k определить, существует ли решение этого уравнения с ограничениями на решения.

В то же время справедлива теорема.

Теорема 4. *Существует алгоритм, позволяющий для произвольного уравнения с ограничениями на решения вида*

$$w\,(\,x_1,\,\ldots\,,\,x_n\,)\;=\;[\,a_1,\,a_2\,]\;\&\;\mathop{\&}_{i=1}^{n}\,x_i\;\in\;F_2^{(1)},$$

определить, имеет ли оно решение.

Теорема 5. *Невозможен алгоритм, позволяющий по произвольному уравнению с ограничением на решения вида*

$$w\,(\,x_1,\,...,\,x_n\,)\;=\;[a_1,a_2]\,\&\,x_1\;\in\;F_2^{(2)}.$$

в свободной группе F_2 определить, имеет ли оно решение.

Доказательства основаны на теореме Ю. В. Матиясевича [6] о диофантовости рекурсивно перечислимых множеств.

Слово $[a_1, a_2]$, стоящее в правой части рассматриваемых в доказанных теоремах уравнений, имеет длину 4. Следующая теорема показывает невозможность дальнейшего уменьшения длины правой части.

Теорема 6. *Существует полиномиальный алгоритм, позволяющий по произвольному разрешенному относительно неизвестных уравнению с ограничениями на решения вида*

$$w\,(\,x_1,\,\ldots\,,\,x_n\,)\;=\;g(\,a_1,\,a_2\,)\,\&\,\mathop{\&}_{i=1}^{t}\,x_i\;\in\;F_2^{(s)}$$

где $g(\,a_1,\,a_2\,)$ – элемент длины меньше 4 свободной группы F_2, а $F_2^{(s)}$ – ее s-й коммутант, определить, существует ли решение этого уравнения, где t – произвольное число между 1 и n.

Для уравнений с одним неизвестным ситуация иная.

Пусть $\mathbb{N}$ – это s-ый коммутант $F_m^{(s)}$ свободной группы F_m или s-й член $(F_m)_s$ ее нижнего центрального ряда.

Теорема 7. *Существует полиномиальный алгоритм, позволяющий по любому уравнению с одним неизвестным с ограничением на решение*

$$w\,(\,x_1,\,a_1,\,\ldots,\,a_m\,)\;=\;1\,\&\,x_1\;\in\;\mathbb{N}$$

в свободной группе F_m определить, имеет ли оно решение.

Доказательство базируется на результатах работ [7] и [8].

Список цитированной литературы

1. Маканин Г. С. Уравнения в свободной группе // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1982. Т. 46, № 6. С. 1199–1273.

2. Gassner B. J. On braid groups // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1961. Vol. 25. P. 10–22.

3. Birman J. S. Braids, links and mapping class groups // Ann.of Math. Studies no 82, Princeton University Press. Princeton, 1974.

4. Дурнев В. Г. Об уравнениях на свободных полугруппах и группах // Мат. заметки. 1974. Т. 16, № 5. С. 717–724.

5. Diekert V. Makanin's Algorithm for Solving Word Equations with Regular Constraints. Preliminary version of the chapter in M. Lothaire. Algebraic Combinatorics on Words. Report Nr. 1998/02. Fakultat Informatik. Universitat Stuttgart. 1998.

6. Матиясевич Ю. В. Диофантовость перечислимых множеств // Докл. АН СССР. 1970. Т. 130, № 3. С. 495–498.

7. Лоренц А. А. О представлении множеств решений систем уравнений с одним неизвестным в свободных группах // Докл. АН СССР. 1968. Т. 178, № 2. С. 290–292.

8. Bormotov D., Gilman R., Myasnikov A. Solving one-variable equation in free groups. // J. Group Theory. 2009. Vol. 12, no. 2. P. 317–330.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
Получено 28.03.2015

УДК 519.4

О проблеме пересечения подгрупп в конечно порожденных группах Кокстера с древесной структурой

О. В. Инченко (Тула)
inchenko_ov@mail.ru

Пусть G – конечно порожденная группа Кокстера с древесной структурой, представленная в виде свободного произведения двупорожденных групп Кокстера объединенных по конечным циклическим подгруппам:

$$G = \left\langle \prod_{s=1}^{k} G_s;\ rel\, G_1, .., rel\, G_s;\ a_i = a_i' \right\rangle.$$

В этом случае группе Кокстера G соответствует дерево – граф T такой, что, если вершинам некоторого ребра e графа T соответствуют группы Кокстера на двух образующих $G_{ij} = \left\langle a_i,\, a_j;\, a_i^2,\, a_j^2,\, (a_i a_j)^{m_{ij}} \right\rangle$ и $G_{ik} = \langle a_i,\, a_k;\, a_i^2,\, a_k^2,\, (a_i a_k)^{m_{ik}} \rangle$, то ребру e соответствует циклическая подгруппа $\langle a_i;\, a_i^2 \rangle$.

Будем говорить, что группа G обладает свойством Хаусона, если пересечение любых двух ее конечно порожденных подгрупп есть конечно порожденная подгруппа. Вопрос о нахождении образующих пересечения подалгебр данной алгебры был впервые сформулирован А.И. Мальцевым в 1958 г.

Рассмотрим свободное произведение $\bar{G}$ двупорожденных групп Кокстера $G_{ij} = \left\langle a_i,\, a_j;\, a_i^2,\, a_j^2,\, (a_i a_j)^{m_{ij}} \right\rangle$ и $G_{ik} = \langle a_i,\, a_k;\, a_i^2,\, a_k^2,\, (a_i a_k)^{m_{ik}} \rangle$ объединенных по циклической подгруппе $\langle a_i;\, a_i^2 \rangle$: $\bar{G} = G_{ij} \underset{\left\langle a_i; a_i^2 \right\rangle}{*} G_{ik}$.

В [1] показано, что в группе $\bar{G}$ разрешима проблема пересечения конечно порожденных подгрупп. Целью работы является обобщение полученного результата на всю группу G.

Представим конечно порожденную группу Кокстера с древесной структурой G в виде свободного произведения двух сомножителей, объединенных по конечной циклической подгруппе следующим образом: рассмотрим древесное произведение $k-1$ сомножителей, которому соответствует связный дерево-граф T_{k-1}, $T_{k-1} \subset T$. Группу, соответствующую графу T_{k-1} обозначим через G_{k-1}. Пусть k-ый сомножитель - подгруппа G_{xy} соответствует вершине дерева – графа T, которая связана с графом T_{k-1} ребром e_t. При этом ребру e_t соответствует циклическая подгруппа второго порядка $\langle a_x;\, a_x^2 \rangle$. Так группа G представлена как свободное произведение двух подгрупп - G_{k-1} и G_{xy}, объединенных по циклической подгруппе порядка два $\langle a_x;\, a_x^2 \rangle$, то есть $G = G_{k-1} \underset{\langle a_x; a_x^2 \rangle}{*} G_{xy}$.

Теорема 1. *В группе Кокстера с древесной структурой G пересечение конечного числа конечно порожденных подгрупп конечно порождено и существует алгоритм, выписывающий образующие этого пересечения.*

Теорема 2. *В группе Кокстера с древесной структурой G разрешима проблема пересечения классов смежности двух конечно порожденных подгрупп и существует алгоритм, выписывающий образующие этого пересечения.*

При доказательстве данных результатов используется метод специального множества слов введенный В.Н.Безверхним при решении некоторых алгоритмических проблем в свободных конструкциях групп [2].

Список цитированной литературы

1. Безверхний В. Н., Инченко О. В. Проблема пересечения конечно порожденных подгрупп в группах Кокстера с древесной структурой // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2009. Вып. 2. С. 16–31.

2. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в классе HNN-групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. Тула, 1981. С. 20–62.

Тульский государственный университет
Получено 13.04.2015

УДК 512.54

Ширина вербальных подгрупп для групп с одним определяющим соотношением

Д. З. Каган (Москва)
dmikagan@gmail.com

Вербальной подгруппой $V(G)$ группы G относительно множества слов V называется подгруппа, порожденная множеством значений слов из V на группе G, т. е. $V(G) =< v(g_1, g_2, ..., g_{n(v)})|v \in V, g \in G >$.

Согласно Ю. И. Мерзлякову [1] шириной $wid(G, V)$ вербальной подгруппы $V(G)$, определенной в группе G множеством слов V, относительно этого V называется наименьшее число $m \in N \cup +\infty$ такое, что любой элемент подгруппы $V(G)$ записывается в виде произведения не более, чем m значений слов из V.

Будем рассматривать случаи, когда V — собственное множество слов. Это означает, что для свободной группы F_n вербальная подгруппа $V(F_n)$ отлична от единичной и самой свободной группы F_n.

Напомним также определения коммутантных вербальных подгрупп из работы В. Г. Бардакова [2]. Пусть F_n — свободная группа со свободными порождающими $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Слово v из F_n называется коммутаторным, если оно лежит в коммутанте F_n'. Множество слов V называется коммутаторным, а определяемая им вербальная подгруппа $V(G)$ — коммутантной, если V содержит только коммутаторные слова.

А. Ремтулла ([3]) доказал, что для нетривиального свободного произведения $A * B$ ширина всякой собственной вербальной подгруппы $v(A * B)$ относительно слова v бесконечна тогда и только тогда, когда $|A| \geq 3$ и $|B| \geq 2$. Ширина вербальных подгрупп свободных произведений с объединением исследовалась в работах Р. И. Григорчука [4], В. А. Файзиева [5], И. В. Добрыниной [6]. Доказана бесконечность ширины $wid(G, V)$ всякой собственной вербальной подгруппы V для свободных произведений с объединением $(A * B,\ U)$, если число двойных смежных классов $|A :: U| \geq 3$, и $|B : U| \geq 2$.

В. Г. Бардаков ([7]) рассматривал ширину вербальных подгрупп HNN-расширений $G =< H, t|tAt^{-1} = B >$. В его работе доказано, что всякая собственная вербальная подгруппа $V(G)$ имеет бесконечную ширину относительно V, если изоморфные подгруппы A и B отличны от базовой группы H.

Р. И. Григорчук ([4]) показал, что ширина вербальных коммутантных подгрупп бесконечна для свободных произведений с объединением и HNN-расширений при некоторых ограничениях. При этом ширина таких подгрупп связана с возможностью построения на группах нетривиальных пседохарактеров ([4], [8]) и вторыми группами когомологий. Следствием этих результатов является бесконечность ширины собственных вербальных подгрупп для групп с одним определяющим соотношением, имеющих по меньшей мере три порождающих.

Григорчук и Бардаков ([4], [7]) ставили вопрос о ширине вербальных коммутантных подгрупп для групп с одним определяющим соотношением и двумя образующими $G =< a, t|r(a, t) = 1 >$. Этот вопрос приводит также к вопросам для HNN-расширений, в которой база совпадает с одной из изоморфных подгрупп.

В данной работе удалось полностью решить этот вопрос для групп с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром. Для таких групп ширина любой собственной коммутаторной вербальной подгруппы, заданной конечным множеством слов V бесконечна относительно $V, wid(G, V) = \infty$ за исключением случаев, когда эта группа будет аменабельной. В частности, для таких групп, коммутант имеет бесконечную ширину относительно коммутаторов.

Теорема 1. *Пусть G - группа с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром. Тогда любая вербальная коммутантная подгруппа $V(G)$, определенная конечным собственным множеством слов V имеет бесконечную ширину относительно V, за исключением следующих случаев: группа G — циклическая; свободная абелева второго ранга: $G =< t, a|ta = at >$; метабелева $G =< t, a|ta^{\pm1}t^{-1} = a^p >, p \in Z$; или $G =< t, a|t^2 = a^2 >$.*

В качестве примера группы, удовлетворяющей условию теоремы можно привести группу $G =< t, a|t^2at^{-2} = a^{-1} >$. В этой группе элемент t^4 будет принадлежать центру. Согласно теореме для этой группы ширина любой вербальной подгруппы $V(G)$, заданной конечным собственным множеством слов V из коммутанта G', будет бесконечной относительно $V : wid(G, V) = \infty$

В общем случае группы с одним определяющим соотношением и двумя образующими $G =< a, t|r(a, t) = 1 >$ при помощи метода Магнуса представляются в виде HNN-расширения $< t, a_0, \dots, a_n|s(a_0, \dots, a_n) = 1, ta_it^{-1} = a_{i+1}, i = 0, 1, \dots, n-1 >$.

Наиболее сложный случай возникает, если одна из изоморфных подгрупп совпадает с базой. Тогда не выполнено условие бесконечности ширины вербальных подгрупп для HNN-расширений. Это возможно только, если определяющее соотношение $s = 1$ представляется в виде $a_n = T(a_0, \dots, a_{n-1})$, где $T-$ некоторое слово в порождающих свободной группы $< a_0, a_1, \dots, a_{n-1} >$. Базой такого HNN-расширения является свободная группа $F_n =< a_0, \dots, a_{n-1} >$.

В зависимости от вида слова $T(a_0, a_{k+1}, \dots, a_{n-1})$ удается получить критерии бесконечности ширины вербальных подгрупп. Несократимая запись элемента T определенным образом разбивается на слоги $T \equiv U_{01}U_{00}U_{02}$. При этом важно в каком порядке входят в запись порождающие a_i с максимальным и минимальным индексом. Для записи T получены определенные условия, При выполнении которых, на исходной группы с одним определяющим соотношением и двумя образующими $G =< t, a|r(t, a) = 1 >$ ширина любой собственной коммутаторной вербальной подгруппы, заданной конечным множеством слов V будет бесконечной. В качестве примера таких результатов приведем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть группа с одним определяющим соотношением $G =< t, a|r(t, a) = 1 >$ сводится к HNN-расширению $G =< t, a_0, \ldots, a_n|s(a_0, \ldots, a_n) = 1, ta_it^{-1} = a_{i+1}, i = 0, 1, \ldots, n - 1 >$, $(n > 1)$, где база совпадает с одной из изоморфных подгрупп. Пусть соотношение $s = 1$ представляется в виде $a_n = T(a_0, \ldots, a_{n-1}) = U_{01}U_{00}U_{02}$. Если U_{00} — циклически несократимо и U_{00} содержит в несократимой записи порождающий a_i с максимальным индексом a_{n-1}, то для группы G ширина любой собственной вербальной коммутантной подгруппы бесконечна.*

Список цитированной литературы

1. Ю. И. Мерзляков Рациональные группы. 2-е изд. М.: Наука, 1987.

2. В. Г. Бардаков К теории групп кос // Мат. сб. 1992. Т. 183, № 6. С. 3–42.

3. A. H. Rhemtulla A problem of bounded expressibility in free products // Proc. Cambridge Phil. Soc., 1969. Vol. 64, № . 3. P. 573–584.

4. Григорчук Р. И. Ограниченные когомологии групповых конструкций // Математические заметки. 1996. Т. 59, № 4. С. 546–550.

5. Faiziev V. A. A problem of expressibility in some amalgamated products of groups // J. Aust. Math. Soc. 2001. Vol. 71. P. 105–115.

6. Добрынина И. В. Решение проблемы ширины в свободных произведениях с объединением // Фундамент. и прикл. математика. 2009. Т. 15, вып. 1. С. 23–30.

7. Бардаков В. Г. О ширине вербальных подгрупп некоторых свободных конструкций // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 5. С. 494–517.

8. Каган Д. З. Псевдохарактеры на свободных группах, инвариантные относительно некоторых типов эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. математика. 2012. Т. 17, вып. 2. С. 167–176.

Московский государственный университет путей сообщения
Получено 14.04.2015

УДК 512.541

Умножения на абелевых группах без кручения конечного ранга

Е. И. Компанцева (Москва)
kompantseva@yandex.ru

Все группы, рассматриваемые в работе, абелевы, и слово "группа" всюду в дальнейшем означает "абелева группа". Умножением на группе G называется любой гомоморфизм $\mu\colon G \otimes G \to G$. Это умножение часто обозначают знаком $\times$, т.е. $\mu(g_1 \otimes g_2) = g_1 \times g_2$ для всех $g_1, g_2 \in G$. Группа G с заданным на ней умножением называется кольцом на группе G, которое обозначается $(G, \times)$. Зависимость между строением абелевой группы и свойствами колец на ней изучалась в работах Л. Фукса, Р. Бьюмонта, Р. Пирса, С. Фейгельстока, Е. Благовещенской, Т. Фам и др. В работах [1,2,3,4] исследовались подгруппы группы G, являющиеся идеалами в любом кольце на G. Такие подгруппы называют абсолютными идеалами группы G. Кольцо на группе G, в котором нет идеалов, кроме абсолютных, называется AI-кольцом. Группу G называют RAI-группой, если на ней существует хотя бы одно AI-кольцо. Проблема описания RAI-групп сформулирована Л.Фуксом в [1] (проблема 93).

Настоящая работа посвящена изучению колец на почти вполне разложимых абелевых группах. Группа без кручения конечного ранга называется почти вполне разложимой (ПВР-группой), если она содержит вполне разложимую подгруппу конечного индекса. ПВР-группы изучались в [5, 6] и др. Любая ПВР-группа G содержит некоторую вполне характеристическую подгруппу A конечного индекса, которая является вполне разложимой и называется регулятором группы G. Факторгруппа G/A называется регуляторным фактором группы G, индекс подгруппы A в группе G – регуляторным индексом. ПВР-группы с циклическим регуляторным фактором часто называют ЦРФ-группами.

Регулятор A группы G является прямой суммой групп A_i ранга 1, $A = \oplus_{i=\overline{1,k}} A_i$. Если типы групп $A_i\,(i = \overline{1,k})$ попарно не сравнимы, то G называется жесткой группой. Если к тому же тип каждого слагаемого идемпотентен, то G – группа кольцевого типа. В этом случае каждая из групп $A_i\,(i = \overline{1,k})$ является циклическим модулем над некоторым подкольцом R_i с единицей поля рациональных чисел, т.е. $A_i = R_i e_i$, $e_i \in A_i$.

Далее везде G – жесткая ЦРФ-группа кольцевого типа. В [5] показано, что если регуляторный фактор $G/A =< \overline{d} >$, $\overline{d} = d + A$, а регуляторный индекс группы G равен n, то существуют целые числа m_i и s_i $(i = \overline{1,k})$ такие, что при подходящем выборе $e_i \in A_i\,(i = \overline{1,k})$ элемент nd записывается в виде

$$nd = \sum_{i=\overline{1,k}} \frac{n}{m_i} s_i e_i, \qquad (1)$$

$n = [m_i \,|\, i = \overline{1,k}]$, $(n, m_i) = 1$, $(s_i, m_i) = 1$ при всех $i = \overline{1,k}$. Равенство (1) называется стандартным представлением жесткой ЦРФ-группы $G =< A, d >$. При этом числа m_i являются инвариантами почти изоморфизма.

В [8] показано, что в любом кольце $(G, \times)$ на группе G со стандартным представлением (1) выполняется $A_i \times A_i \subset m_i A_i$ при всех $i = \overline{1,k}$, кроме того $A_i \times A_j = 0$ при всех $i \neq j$ в силу жесткости группы G. Ясно, что при любом выборе элементов $\delta_i \in R_i \, (i = \overline{1,k})$ существует умножение $\times$ на A, для которого $e_i \times e_i = m_i \delta_i e_i$ при всех $i = \overline{1,k}$. Однако не любое из этих умножений продолжается до умножения на G.

Будем говорить, что элементы $\delta_i \in R_i \, (i = \overline{1,k})$ определяют умножение на G относительно системы $e_1, \ldots, e_k$, если существует кольцо $(G, \times)$, в котором $e_i \times e_i = m_i \delta_i e_i$ для всех $i = \overline{1,k}$. Чтобы описать умножения на жесткой ЦРФ-группе G, введем следующие обозначения. Для любых чисел $x_i \in R_i$ обозначим $\overline{x_i} = x_i + m_i R_i \in R_i / m_i R_i$, $\overline{x_i}^{-1}$ – элемент, обратный к $\overline{x_i}$ в кольце $R_i / m_i R_i$, если он существует. Тогда в прямом произведении колец $\prod_{i=\overline{1,k}} (R_i / m_i R_i)$ можно рассмотреть элементы $\overline{x} = (\overline{x_i})_{i=\overline{1,k}}$, $\overline{x}^{-1} = (\overline{x_i}^{-1})_{i=\overline{1,k}}$.

Теорема 1. *Пусть G – жесткая ЦРФ-группа кольцевого типа. Пусть $nd = \sum_{i=\overline{1,k}} \dfrac{n}{n_i} s_i e_i$ – стандартное представление группы G. Элементы $\delta_i \in R_i \, (i = \overline{1,k})$ определяют умножение на G относительно системы $e_i \, (i = \overline{1,k})$ тогда и только тогда, когда*

$$\overline{\delta} = \alpha \overline{s}^{-1} \tag{2}$$

для некоторого $\alpha \in Z$.

Поскольку при фиксированной системе $e_i \, (i = \overline{1,k})$ вектор $\overline{s}$ в стандартном представлении группы G определен однозначно с точностью до множителя $\beta \in Z$, $(\beta, n) = 1$, то условие (2) для вектора $\overline{\delta}$ не зависит от выбора элементов $s_i \, (i = \overline{1,k})$. Отметим также, что элементы $\delta_i \, (i = \overline{1,k})$ могут определять умножение на G относительно одной системы образующих циклических модулей $A_i \, (i = \overline{1,k})$, и не определять ни одного умножения относительно другой системы.

Описание умножений на жестких ЦРФ-группах кольцевого типа позволяет доказать существование AI-кольца на любой группе из этого класса.

Теорема 2. *Любая жесткая ЦРФ-группа G кольцевого типа является RAI-группой. При этом для любого $\alpha \in Z$, $(\alpha, n) = 1$, существует AI-кольцо $(G, \times)$ такое, что $\overline{d} \times \overline{d} = \alpha \overline{d}$.*

Список цитированной литературы

1. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы, Т. 2, М.: Мир. 1977.

2. Fried E. On the subgroups of abelian groups that are ideals in every ring // Proc. Colloq. Abelian Groups, Budapest. 1964. P. 51–55.

3. McLean K. R. The additive ideals of a p-ring // J. London Math. Soc. 1975. Vol. 2. P. 523–529.

4. Чехлов А. Р. Об абелевых группах, все подгруппы которых являются идеалами // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матема. и мех. 2009. № 3. С. 64–67.

5. Кожухов С. Ф. Об одном классе почти вполне разложимых абелевых групп без кручения // Изв. вузов. Математика. 1983. Т. 10. С. 29–36.

6. Mader A., Schultg P. Endomorphism rings and automorphism groups of almost completely decomposable groups // Comm. in Algebra. 2000. Vol. 28. P. 51–68.

7. Благовещенская Е. А. Почти вполне разложимые абелевы группы и их кольца эндоморфизмов, СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009.

8. Компанцева Е. И. Кольца на почти вполне разложимых абелевых группах // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14, № 5. С. 93–101.

Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва
Московский педагогический государственный университет
Получено 23.04.2015

УДК 512.546.3

Факторно делимые абелевы группы и их группы характеров

Н. И. Крючков (Рязань)
kryuchkov.n@gmail.com

Под словом «группа» в дальнейшем подразумевается «абелева группа». Понятие факторно делимой группы без кручения было введено Р. Бьюмонтом и Р. Пирсом в 1961 г. и обобщено на случай смешанных групп А.А. Фоминым и У. Уиклессом в 1998 г., [1].

Напомним, что дискретная группа A называется *факторно делимой*, если она содержит свободную подгруппу конечного ранга F, такую что A/F — периодическая делимая группа и A не содержит ненулевых периодических делимых подгрупп. Ранг свободной подгруппы F называется рангом факторно делимой группы A.

Согласно двойственности Л.С. Понтрягина, категория компактных групп дуальна категории дискретных групп, поэтому каждое понятие и каждое утверждение в теории дискретных групп имеет «двойник» в теории компактных групп. Цель настоящей работы состоит в изучении групп, двойственных факторно делимым группам.

Стандартные обозначения из теории дискретных абелевых групп можно найти в монографии Л. Фукса [2]. Группа характеров локально компактной группы L, то есть группа непрерывных гомоморфизмов L в факторгруппу $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, снабженная компактно открытой топологией, обозначается L^*; $\mathbf{f}$ — функтор, «забывающий» топологическую структуру топологической группы.

Определение 1. *Компактная группа K называется факторно тороидальной, если она содержит вполне несвязную подгруппу без кручения F, такую, что $K/F \cong \mathbf{T}^n$, $n \in \mathbf{N}$ и при этом K не содержит прямых слагаемых, являющихся вполне несвязными группами без кручения.*

Теорема 1. *Компактная группа K является факторно тороидальной тогда и только тогда, когда ее группа характеров K^* является факторно делимой.*

Используя свойства факторно делимых групп, полученные А.А. Фоминым, получен ряд утверждений о факторно делимых группах. В частности, доказано, что ядро эпиморфизма факторно тороидальной группы на вполне несвязную компактную группу является факторно тороидальной. Отсюда следует, что связная компонента нуля факторно тороидальной группы является факторно тороидальной.

В следующих утверждениях изучаются группы расширений факторно делимых и факторно тороидальных групп.

Теорема 2. *Если F_d — факторно делимая группа ранга n, то для произвольной периодической группы A группа $\mathrm{Ext}(A, F_d)$ изоморфна факторгруппе группы $\mathbf{f}((A^*)^n)$. В частности, если F_d — факторно делимая группа ранга 1, то группа $\mathrm{Ext}(A, F_d)$ изоморфна факторгруппе группы $\mathbf{f}(A^*)$.*

Теорема 3. *Если K — факторно тороидальная группа размерности n, A — вполне несвязная компактная группа, то группа $\mathrm{Ext}(K, A)$ изоморфна факторгруппе $(\mathbf{f}A)^n$. В частности, если K — факторно тороидальная группа размерности 1, то $\mathrm{Ext}(K, A)$ изоморфна факторгруппе группы $\mathbf{f}A$.*

Теорема 4. *Пусть F_d — факторно делимая группа ранга n, F_n ее свободная подгруппа ранга n, $F_d/F_n \cong T$, где T — периодическая делимая группа. Тогда группа $\mathrm{Ext}(F_d, F_d)$ является гомоморфным образом $\mathbf{f}((T^*)^n)$.*

Теорема 5. *Если K — компактная факторно тороидальная группа, A — факторно делимая группа, то группа $\mathrm{Ext}(A, K)$ является счетным прямым произведением конечных циклических групп.*

Получены условия равенства нулю групп $\mathrm{Ext}(A, K)$ и $\mathrm{Ext}(K, A)$, где K и A соответственно факторно тороидальная и факторно делимая группы.

Дискретная группа A удовлетворяет условию $\mathrm{Ext}(A, F) = 0$ для произвольной факторно делимой группы F в точности тогда, когда A является группой Уайтхеда.

Список цитированной литературы

1. Fomin A. A., Wickless W. Quotient divisible Abelian groups. //Proc. Am. Math. Soc. 1998. Vol. 126, no.1. P. 45–52.

2. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т.1. М.: Мир, 1974. 332 с.

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина
Получено 14.04.2015

УДК 512.55

Большие абелевы подалгебры алгебр Шевалле и большие абелевы подгруппы конечных групп лиева типа

В. М. Левчук, Г. С. Сулейманова (Красноярск)
vlevchuk@sfu-kras.ru, suleymanova@list.ru

Алгебру Шевалле $L_\Phi(K)$ над полем K, ассоциированную с системой корней Φ, характеризуют базой Шевалле, состоящей из элементов e_r $(r \in \Phi)$ вместе с подходящей базой подалгебры Картана [1, § 4.4]. Подалгебру $N\Phi(K)$ с базой из элементов e_r $(r \in \Phi^+)$ называем нильтреугольной. В [2] записана следующая задача, исследованная при $K = C$ в [3]: *Описать абелевы подалгебры наивысшей размерности в алгебре $N\Phi(K)$ над произвольным полем K.*

В конечной группе подгруппу наибольшего порядка со свойством $\mathbb{P}$ называют *большой $\mathbb{P}$-подгруппой.* Большие нормальные абелевы подгруппы в U описаны в [6]. Проблема описания больших абелевых подгрупп унипотентного радикала U подгруппы Бореля конечной группы G лиева типа (см. обзор [4, Проблема (1.6)]) завершена в 2013 году [5]; из найденного решения вытекает

Теорема 1. *Каждая большая абелева подгруппа в U либо переводится автоморфизмом группы G в большую нормальную абелеву подгруппу в U, либо G типа G_2 и $charK \neq 3$, или типа F_4 и $2K = 0$, или типов ${}^3D_4$, ${}^2F_4$ или ${}^2E_6$.*

Подалгебру наивысшей размерности со свойством $\mathbb{P}$ в произвольной алгебре далее называем также *большой $\mathbb{P}$-подалгеброй.* Наряду с описанием максимальных абелевых идеалов алгебры $N\Phi(K)$, получено описание больших абелевых идеалов алгебры $N\Phi(K)$ и доказана

Теорема 2. *В алгебре Шевалле $L_\Phi(K)$ классического типа над полем каждая большая абелева подалгебра подалгебры $N\Phi(K)$ переводится автоморфизмом алгебры $L_\Phi(K)$ в идеал подалгебры $N\Phi(K)$.*

Список цитированной литературы

1. Carter R., Simple groups of Lie type, Wiley and Sons, New York, 1972.
2. Levchuk V.M., Suleimanova G.S. The generalized Mal'cev problem on abelian subalgebras of the Chevalley algebras // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2015. № 4.
3. Мальцев А. И. Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли // Известия АН СССР, сер. матем. 1945. Т. 9. № 4. С. 291-300.
4. Кондратьев А. С. Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи математических наук. 1986. Т. 41. № 1 (247). С. 57-96.
5. Сулейманова Г. С. Большие элементарные абелевы унипотентные подгруппы групп лиева типа // Известия Иркутского государственного университета. Серия "Математика". 2013. Т. 6. № 2. С. 69-76.
6. Levchuk V.M., Suleimanova G.S. Extremal and maximal normal abelian subgroups of a maximal unipotent subgroup in groups of Lie type // J. Algebra. 2012. Vol. 349 (2012). Iss. 1. № 1. P. 98-116.

Сибирский федеральный университет, Хакасский технический институт – филиал Сибирского федерального университета
Получено 16.04.2015

УДК 519.4

Теорема Магнуса для древесного произведения свободных групп с циклическим объединением

Е. С. Логачева (Тула)
Logacheva-es@mail.ru

Определение 1. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух слов w_1, w_2 из G установить, существует ли элемент $h \in G$ такой, что $h^{-1}w_1h = w_2$.*

Известно [2], что в свободных группах проблема сопряженности слов разрешима.

В 1973 году С. Липшуц [4] установил разрешимость проблемы сопряженности слов в классе групп $F_m *_C F_n$, где F_m и F_n — свободные группы рангов $m, n < \infty$, C — циклическая подгруппа.

В [1] решена проблема сопряженности и степенной сопряженности слов в группах с одним определяющим соотношением с кручением и в их свободном произведении с циклическим объединением.

Рассмотрим древесное произведение конечного семейства свободных групп с циклическими объединениями, которое определяется следующим образом. Пусть Γ — конечное дерево, вершины которого обозначены числами из множества $\{1, 2, ..., n\}$, и пусть каждой вершине i сопоставлена свободная группа F_{m_i} конечного ранга m_i, для каждой пары i и j смежных вершин графа Γ в соответствующих группах F_{m_i} и F_{m_j} фиксированы неединичные циклические подгруппы, порождаемые элементами $v_{ij}^{p_{ij}}$ и $v_{ji}^{p_{ji}}$ соответственно, причем элементы v_{ij} и v_{ji} не являются истинными степенями в соответствующей группе. Древесным произведением F_{m_1}, F_{m_2}, ... , F_{m_n} с объединенными подгруппами $\langle v_{ij}^{p_{ij}}\rangle$ и $\langle v_{ji}^{p_{ji}}\rangle$ называется фактор группа G_Γ свободного произведения групп F_{m_1}, F_{m_2}, ... , F_{m_n} по нормальному замыканию множества, состоящего из всевозможных элементов вида $v_{ij}^{p_{ij}}v_{ji}^{-p_{ji}}$. Группы F_{m_1}, F_{m_2}, ... , F_{m_n} вложимы в группу G_Γ естественным образом [5].

Копредставление группы G_Γ имеет вид:

$$G_\Gamma = \langle \prod_{i=1}^{n} *F_{m_i} | v_{ij}^{p_{ij}} = v_{ji}^{p_{ji}}\rangle, n \geq 2, i \in I_1, j \in I_2.$$

Лемма 1. *В группе G_Γ разрешимы следующие алгоритмические проблемы:*

I) алгоритм, позволяющий для любой конечно порожденной подгруппы $H < G_\Gamma$ и циклической подгруппы $\langle w\rangle \in F_{m_i}$, $i = \overline{1, n}$, найти образующие $H \cap \langle w\rangle$;

II) алгоритм, позволяющий для любого слова $v \in G_\Gamma$ и конечно порожденной подгруппы $H < G_\Gamma$ выяснить пусто или непусто пересечение vH с циклической подгруппой $\langle w\rangle \in F_{m_i}$, $i = \overline{1, n}$, т.е. $vH \cap \langle w\rangle$.

В работе [3] доказана следующая теорема:

Теорема 1. [3] *Пусть $G = A *_{H=K} B$. Тогда каждый элемент группы G сопряжен с некоторым циклически несократимым элементом. Далее, пусть g — циклически несократимый элемент группы G. Тогда*

(i) если g сопряжен с элементом $h \in H$, то g лежит в A или в B и существует последовательность элементов $h_1, h_2, ..., h_l, g$, где $h_i \in H$, соседние члены которой сопряжены в A или в B;

(ii) если g сопряжен с элементом g', причем $g' \in A$ или $g' \in B$, но g не лежит в подгруппе, сопряженной с H, то g и g' лежат в одном сомножителе (в A или в B) и сопряжены в нем;

(iii) если g сопряжен с элементом $p_1p_2...p_r$, где $r > 2$, и p_i, p_{i+1} так же как и p_1, p_r, не лежат в одном сомножителе, то g можно получить, циклически переставляя $p_1p_2...p_r$, а затем трансформируя полученный элемент подходящим элементом из H.

Представим группу G_Γ в виде свободного произведения двух групп с циклическим объединением следующим образом: выберем некоторую вершину n. Без потери общности можно считать, что вершина n графа Γ является концевой и что смежной с ней является вершина $n-1$. Обозначим через Γ_{n-1} полный подграф графа Γ с вершинами $\{1, 2, ..., n-1\}$ и через $G_{\Gamma_{n-1}}$ соответствущее древесное произведение групп F_{m_1}, F_{m_2}, ... , $F_{m_{n-1}}$ с теми же объединенными подгруппами. В соответствии с [5] группа G_Γ является свободным произведением

$$G_\Gamma = G_{\Gamma_{n-1}} *_{C_n} F_{m_n}$$

групп $G_{\Gamma_{n-1}}$ и F_{m_n} с объединенной подгруппой $C_n = \langle v_{n-1,n}^{p_{n-1,n}} \rangle = \langle v_{n,n-1}^{p_{n,n-1}} \rangle$. Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *В группе $G_\Gamma = G_{\Gamma_{n-1}} *_{C_n} F_{m_n}$, $C_n = \langle v_{n-1,n}^{p_{n-1,n}} \rangle = \langle v_{n,n-1}^{p_{n,n-1}} \rangle$, разрешима проблема сопряженности слов.*

Следуя теореме Магнуса при доказательстве теоремы 2 рассматриваются следующие случаи:

Случай I. Пусть $u_1 \in G_\Gamma$ - циклически несократимый элемент, сопряженный с элементом $h \in C_n$. Тогда $u_1 \in G_{\Gamma_{n-1}}$ либо $u_1 \in F_{m_n}$ и существует последовательность $h, h_1, h_2, ..., h_k, u_1$, где $h, h_i \in C_n, i = \overline{1,k}$, такая что $h = h_1 = h_2 = ... = h_k$.

Случай II. Пусть $u_1, u_2 \in G_{\Gamma_{n-1}}$ два циклически несократимых элемента и u_1, u_2 не сопряжены с объединяемой подгруппой C_n, тогда u_1 и u_2 сопряжены в G_Γ только тогда, когда они сопряжены в $G_{\Gamma_{n-1}}$.

Случай III. Пусть $u_1 = g_1 g_2 ... g_{2k} \in G_\Gamma$ сопряжен с элементом $g'_1 g'_2 ... g'_{2k} \in G_\Gamma$, где $2k > 2$, и g'_i, g'_{i+1}, так же как и g'_1, g'_{2k}, не лежат в одном сомножителе группы G_Γ, тогда существует алгоритм, позволяющий получить u_1, циклически переставляя $g'_1 g'_2 ... g'_{2k}$, а затем трансформируя полученный элемент подходящим элементом из C_n.

Список цитированной литературы

1. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности слов в некоторых классах групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвузовский сборник научных трудов. - 1990. - С. 103-152.

2. Линдон, Р. Комбинаторная теория групп / Р. Линдон, П. Шупп. - М.: Мир, 1980. - 450 с.

3. Магнус В. Комбинаторная теория групп./ В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитер. - М: "Наука 1974. - 456с.

4. Lipschutz S. The generalization of Dehn's result on the conjugacy problem / // Prog.. Amer. Math. Soc.Vol. 150/ - P. 759-762.

5. Karras A. The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroup / A. Karras, D. Solitar // Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 150. - P. 227-255.

Тульский государственный машиностроительный колледж имени Никиты Демидова.
Получено 27.04.2015

УДК 512.542

О конечных группах, изоспектральных простой группе $U_3(3)$

Ю. В. Лыткин[1] (Новосибирск)
jurasicus@gmail.com

В работе рассматриваются только конечные группы. Пусть G — группа. Множество порядков всех элементов группы G называется спектром и обозначается как $\omega(G)$. Множество $\omega(G)$ замкнуто относительно делимости и однозначно определяется своим подмножеством $\mu(G)$, которое состоит из максимальных по делимости элементов $\omega(G)$. Назовем группы G и H изоспектральными, если $\omega(G) = \omega(H)$. Под секцией группы G будем понимать факторгруппу H/N, где N, H — произвольные подгруппы группы G и $N \trianglelefteq H$.

Пусть ω — подмножество множества натуральных чисел. Следуя [1], назовем группу G критической относительно ω (или ω-критической), если $\omega(G) = \omega$ и $\omega(H/N) \neq \omega$ для любой собственной секции H/N группы G. В [1] доказано, что для любого множества ω количество ω-критических групп конечно.

Скажем, что группа G *распознаваема* (по спектру в классе конечных групп), если для любой группы H равенство $\omega(G) = \omega(H)$ влечет изоморфизм $G \simeq H$. Группа G *нераспознаваема* (по спектру), если существует бесконечно много попарно неизоморфных групп, изоспектральных G. *Накрытием* G называется любая группа H, содержащая нормальную подгруппу N (называемую *ядром* накрытия), для которой $H/N \simeq G$. Группа G *распознаваема среди своих накрытий*, если любое её накрытие, изоспектральное G, изоморфно G.

Удвоенной группой Фробениуса называется группа G, содержащая нормальную подгруппу Фробениуса B с ядром A такую, что G/A является группой Фробениуса с ядром B/A. *Графом простых чисел* (или *графом Грюнберга-Кегеля* $GK(G)$) группы G называется неориентированный граф, вершинами которого служат простые делители порядка G и два разных простых делителя p и q смежны, если G содержит элемент порядка pq.

В [2] доказано, что разрешимая группа G с несвязным графом $GK(G)$ является группой Фробениуса или удвоенной группой Фробениуса. В 2003 году М. Р. Алеева [3] показала, что список простых групп, изоспектральных группам Фробениуса, исчерпывается группами $L_3(3)$ и $U_3(3)$, а простыми группами, изоспектральными удвоенным группам Фробениуса, могут быть только группы

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 13-01-00505 и № 14-01-90013).

$U_3(3)$ и $S_4(3)$. Но вопрос о существовании таких удвоенных групп Фробениуса оставался открытым. В [4] было доказано, что простая группа, изоспектральная разрешимой группе, изоморфна одной из групп $L_3(3), U_3(3), S_4(3)$ или A_{10}. А. М. Старолетов [5] описал группы, изоспектральные A_{10}. Все они неразрешимы. Автор [6, 7] описал критические группы, изоспектральные $L_3(3)$ и A_{10}. А. В. Заварницин [8] построил пример удвоенной группы Фробениуса порядка $2^2 \cdot 3^{24} \cdot 5$, изоспектральной $S_4(3)$.

Цель настоящей работы — исследование групп, изоспектральных $U_3(3)$.

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа, изоспектральная группе $U_3(3)$. Тогда $\mu(G) = \{7, 8, 12\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

1. *G — группа Фробениуса или удвоенная группа Фробениуса;*

2. *G является расширением 2-группы N с помощью $L_2(7), PGL_2(7), U_3(3)$ или $Aut(U_3(3)) = U_3(3).2$. В частности, если $G/N \simeq PGL_2(7)$, то N имеет дополнение H в G и каждый G-главный фактор в N является H-модулем, изоморфным вполне неприводимому H-модулю V над полем $GF(2)$. Рассмотрим матрицы над $GF(2)$:*

$$a \sim \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \; b \sim \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix}, \; c \sim \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Тогда $\langle a, b, c \rangle \simeq PGL_2(7)$ и соответствующее представление изоморфно действию H на V. Естественное полупрямое произведение $V \leftthreetimes H$ изоспектрально группе $U_3(3)$ и с точностью до изоморфизма является единственной $\omega(U_3(3))$-критической группой такого типа.

Список цитированной литературы

1. Мазуров В. Д., Ши В. Дж. Признак нераспознаваемости конечной группы по спектру // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 2. С. 239–243.

2. Williams J.S. Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.

3. Алеева М.Р. О конечных простых группах с множеством порядков элементов, как у группы Фробениуса или двойной группы Фробениуса // Матем. заметки. 2003. Т. 73, № 3. С. 323–339.

4. Lucido M.S., Moghaddamfar A.R. Groups with complete prime graph connected components // J. Group Theory. 2004. Vol. 73, no. 3. P. 373–384.

5. Старолетов А.М. Неразрешимость конечных групп, изоспектральных знакопеременной группе степени 10 // Сибирские электронные математические известия. 2008. Т. 5. С. 20–24.

6. Lytkin Y.V. On groups critical with respect to a set of natural numbers // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2013. Vol. 10. P. 666-675; http://semr.math.nsc.ru/

7. Лыткин Ю.В. Группы, критические относительно спектров знакопеременных и спорадических групп // Сибирский математический журнал. 2015. Т. 56, № 1. С. 122–128.

8. Заварницин А.В. Разрешимая группа, изоспектральная группе $S_4(3)$ // Сибирский математический журнал. 2010. Т. 51, № 1. С. 26–31.

Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики.
Получено 07.04.2015

On integral representations of finite groups

Dmitry Malinin (Kingston, Jamaica)
dmalinin@gmail.com

We consider the arithmetic background of integral representations of finite groups over the maximal orders of local and algebraic number fields.

Some infinite series of integral pairwise inequivalent absolutely irreducible representations of finite p-groups with the extra congruence conditions are constructed. Certain problems concerning integral two-dimensional representations over number rings are discussed.

In his recent publication [9] J.-P. Serre emphasized remarkable connections between integral irreducible representations of the group of quaternions and genus theory of Gauss and Hilbert, and the theory of Hilbert's symbol. This was also considered in our recent paper [7] as an application to the description of globally irreducible representations over arithmetic rings which was earlier introduced by F. Van Oystaeyen and A. E. Zalesskii, see [8]. This is also motivated by the following question considered by J.-P. Serre, W. Feit and other mathematicians (see also [1], [9], [6], [2]):

Let $\rho : G \to GL_n(K)$ be a linear representation of a finite group G over a number field K. Is it possible to realize ρ over O_K, the ring of integers of K, i. e. is ρ conjugate to a homomorphism of G into $GL_n(O_K)$?

Another approach to generalization of integral representations of finite groups was proposed by D. K. Faddeev in [3] (see also [4] and [5]) where a generalization of the theory of Steinitz and Chevalley has been suggested.

REFERENCES

1. G. Cliff, J. Ritter, A. Weiss, Group representations and integrality, J. fur die reine und angew. Math., vol. 426, 1992, p. 193 – 202.

2. G.- M. Cram, O. Neisse, J. of Number Theory On Integral Representations over Cyclotomic Fields, vol. 61, nr. 1, p. 44 – 51, 1996

3. D. K. Faddeev, On generalized integral representations over Dedekind rings. (Russian) Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 227, 1995, Voprosy Teor. Predstav. Algebr i Grupp. 4, 113 – 118; English translation in J. Math. Sci. (New York) vol. 89, 1998, no. 2, p. 1154 – 1158

4. D. K. Faddeev, Tables of the fundamental unitary representations of the Fedorov groups, Trudy Mat. Steklov Inst., 1961, p. 3 – 174

5. D. K. Faddeev, An introduction to the multiplicative theory of modules of integral representations. (Russian) Trudy Mat. Inst. Steklov vol. 80, p. 145 – 182, 1965.

6. W. Knapp, P. Schmidt, An extension theorem for integral representations, J. Austral. Math. Soc. (Ser. A), 1997, vol. 63, p. 1–15.

7. Dmitry Malinin, Freddy Van Oystaeyen, Realizability of two-dimensional linear groups over rings of Integers of algebraic number fields, Algebras and Representation Theory, 2011, vol. 14, nr. 2, p. 201 – 211.

8. F. Van Oystaeyen and A.E. Zalesskiĭ, Finite groups over arithmetic rings and globally irreducible representations, J. Algera, 1999, vol. 215, p. 418-436.

9. J.-P. Serre, Three letters to Walter Feit on group representations and quaternions. J. Algebra, 2008, vol. 319, nr. 2, p. 549 – 557.

University of the West Indies, Jamaica
Received 15.04.2015

УДК 512.542

О порождаемости парой сопряженных элементов некоторых минимальных относительно простого спектра групп

Н. В. Маслова[1] (Екатеринбург)
butterson@mail.ru

Всюду в работе мы будем употреблять термин "группа" в значении "конечная группа".

Пусть G — группа. *Спектром* группы G называется множество $\omega(G)$ порядков всех ее элементов. Множество всех простых чисел, входящих в спектр группы G, будем называть *простым спектром группы* G и обозначать через $\pi(G)$.

Подгруппа H конечной группы G называется *холловой подгруппой*, если ее порядок $|H|$ и индекс $|G:H|$ взаимно просты. Будем говорить, что G — *группа с холловыми максимальными подгруппами*, если каждая максимальная подгруппа группы G является холловой.

П. Шумяцкий записал в "Коуровскую тетрадь" следующую гипотезу [1, проблема 17.125]:

Гипотеза 1. *В группе G всегда найдется пара сопряженных элементов a и b таких, что $\pi(G) = \pi(\langle a, b\rangle)$.*

Группу G назовем *минимальной относительно простого спектра*, если $\pi(H) \neq \pi(G)$ для любой собственной (равносильно, для любой максимальной) подгруппы H в G.

Можно показать (см. [2, лемма 5]), что гипотеза 1 эквивалентна следующей гипотезе:

Гипотеза 2. *Любая минимальная относительно простого спектра группа порождается двумя сопряженными элементами.*

В [2] авторами было получено частичное подтверждение гипотезы 2. Более точно, наряду с классом минимальных относительно простого спектра групп был рассмотрен класс всех групп с холловыми максимальными подгруппами. Этот класс является собственным подклассом класса минимальных относительно простого спектра групп, и любая разрешимая группа является группой с холловыми максимальными подгруппами тогда и только тогда, когда она минимальна относительно простого спектра [2, лемма 6]. В [2] было показано, что любая группа с холловыми максимальными подгруппами порождается парой сопряженных элементов.

Отметим, что доказать справедливость гипотезы 2 для групп с холловыми максимальными подгруппами удалось благодаря тому, что в работе [3] было показано, что неабелевы композиционные факторы таких групп исчерпываются группами из множества $\{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_5(2)\}$, а в работе [4] получено полное описание нормального строения таких групп.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Дмитрия Зимина "Династия", программы фундаментальных научных исследований УрО РАН и проекта повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение между Министерством образования и науки РФ и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013 № 02.A03.21.0006)

Отметим, что существуют группы, минимальные относительно простого спектра, неабелевы композиционные факторы которых исчерпываются группами из множества $\{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_5(2)\}$, но не являющиеся группами с холловыми максимальными подгруппами. Пример такой группы дает 5-элементарное фраттиниево расширение группы $PSL_2(11)$ с ядром порядка 5^{11}.

В настоящей работе мы доказываем следующее утверждение, обобщающее основной результат работы [2].

Теорема 1. *Пусть G — конечная минимальная относительно простого спектра группа, неабелевы композиционные факторы которой исчерпываются группами из множества $\{PSL_2(7), PSL_2(11), PSL_5(2)\}$. Тогда группа G порождается двумя сопряженными элементами.*

Список цитированной литературы

1. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Изд. 17-е, доп. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2010. 219 с. URL: http://math.nsc.ru/ alglog/17kt.pdf .

2. Маслова Н. В., Ревин Д. О. Порождаемость конечной группы с холловыми максимальными подгруппами парой сопряженных элементов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 199–206.

3. Маслова Н. В. Неабелевы композиционные факторы конечной группы, все максимальные подгруппы которой холловы // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 5. С. 1065–1076.

4. Маслова Н. В., Ревин Д. О. Конечные группы, в которых все максимальные подгруппы холловы // Мат. тр. 2012. Т. 15, № 2. С. 105–126.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина
Получено 14.04.2015

УДК 512.542

О p-длине конечной группы с минимальной несверхразрешимой холловой подгруппой

В. С. Монахов[1] (Гомель, Беларусь), О. А. Шпырко[2] (Севастополь)
[1]victor.monakhov@gmail.com; [2]shpyrko@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. Все используемые определения и обозначения соответствуют [1]. Всюду в этой сообщении p, q и r — простые числа. Симметрическая и знакопеременная группы степени n обозначаются S_n и A_n. Запись $[A]B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A. Класс всех сверхразрешимых групп обозначается $\mathfrak{U}$, а $X^{\mathfrak{U}}$ — $\mathfrak{U}$-корадикал группы X, т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым сверхразрешимы.

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$, $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Символом π обозначается также функция, определенная на множестве всех натуральных чисел $\mathbb{N}$ следующим образом: $\pi(a)$ — множество всех простых чисел, делящих натуральное число a. Для группы G считают, что $\pi(G) = \pi(|G|)$.

Зафиксируем некоторое множество простых чисел π. Если $\pi(m) \subseteq \pi$, то натуральное число m называется π-числом. Группа G называется π-группой, если $\pi(G) \subseteq \pi$, и π'-группой, если $\pi(G) \subseteq \pi'$. В последнем случае $\pi(G) \cap \pi = \varnothing$.

Субнормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_m = G, \tag{1}$$

в которой G_i нормальна в G_{i+1} для каждого i. Фактор-группы G_{i+1}/G_i называют факторами ряда (1). Если G_i нормальна в G для каждого i, то ряд (1) называется нормальным. Группа, обладающая нормальным рядом с циклическими факторами, называется сверхразрешимой.

Группа G называется π-разрешимой, если она обладает субнормальным рядом (1), факторы которого являются либо разрешимыми π-группами, либо π'-группами. Наименьшее число π-факторов, среди всех таких субнормальных рядов группы G, называется π-длиной π-разрешимой группы G и обозначается $l_\pi(G)$. В дальнейшем, рассматривая π-разрешимую группу G, условимся считать $\pi \subseteq \pi(G)$, а π-холлову подгруппу из G будем обозначать G_π. При $\pi = \{p\}$ конечная π-разрешимая группа становится p-разрешимой. Элементарная теория p-длины p-разрешимых групп изложена в [1, VI.6], [2, IX].

Пусть G — π-разрешимая группа, у которой π-холлова подгруппа G_π ненильпотентна, но все собственные подгруппы в G_π нильпотентны. Из [3, теорема 1] следует, что $l_r(G) = 1$ для всех $r \in \pi$, а $l_\pi(G) \leqslant 2$.

В настоящем сообщении исследуется p-длина π-разрешимой группы G, $p \in \pi$, когда G_π несверхразрешима, но все собственные подгруппы в G_π сверхразрешимы. В частности, доказывается следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть G — π-разрешимая группа, G_π — минимальная несверхразрешимая подгруппа и $r \in \pi$. Пусть $G_\pi = [P]T$, где $P = (G_\pi)^{\mathfrak{U}}$ — нормальная силовская p-подгруппа, T — дополнение к P в G_π. Если $l_r(G) \neq 1$, то справедливы следующие утверждения:*

(1) T — силовская r-подгруппа, $r \in \{2, 3\}$ и $l_r(G) = 2$;

(2) если $r = 2$, то G/N изоморфна S_3 для некоторой нормальной в G подгруппы N;

(3) если $r = 3$, то G содержит секцию, изоморфную A_4.

Следствие. *Если G — π-разрешимая группа и G_π — минимальная несверхразрешимая подгруппа, то $l_\pi(G) \leqslant l_\pi^n(G) \leqslant 3$.*

Список цитированной литературы

1. Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin–Heidelberg–New York: Springer–Verlag, 1967. 794 s.
2. Huppert B., Blackburn N. Finite Groups II. Berlin–Heidelberg–New York: Springer–Verlag, 1982. 532 p.
3. Монахов В. С., Грицук Д. В. О производной π-длине конечной π-разрешимой группы с заданной π-холловой подгруппой // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Том 19, № 3. С. 215–223.

[1] Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
[2] Филиал МГУ имени М. В. Ломоносова в Севастополе
Получено 16.04.2015

УДК 512.

О точности одного представления

А. И. Некрицухин (Тула)

В [1] рассмотренно расширение линейного представления Лоуренс-Крамера группы кос B_n, $n \geq 3$ на группу сопрягающих автоморфизмов свободной группы F_n. В этой же работе доказывается, что это расширение не является точным при $n \geq 5$ и ставится вопрос о точности для $n = 3$ и 4. Показывается, что и для $n = 3$ и 4 это расширение не является точным.

Список цитированной литературы

1. Бардаков В. Г. Линейные представления группы сопрягающих автоморфизмов и групп кос некоторых многообразий // Сиб. мат. журн. Январь-февраль. 2015. Т. 46, № 1 С. 17 – 31.

УДК 511.335

Полупростые группы ранга I и связанные с ними специальные функции

А. И. Нижников (Москва)
nizhnikov.ai@mail.ru

Данный обзор представляет собой изложение некоторых результатов применения теории представлений полупростых групп Ли к изучению специальных функций математической физики [1].

Как известно, теория полупростых алгебр и групп Ли связана с инвариантной корневой формулировкой и восходит к классическим работам Э. Картана и Г. Вейля [2]. Не излагая здесь основных понятий и результатов теории полупростых алгебр и групп Ли, мы введем лишь необходимые в дальнейшем обозначения и определения.

В качестве примера рассмотрим группу $G = SO(n,1)$ — многомерную группу Лоренца, сохраняющую квадратичную форму [3]

$$[x,x] = -x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$

Тогда имеем известные разложения группы G:

$G = KAK$ — разложение Картана,

$G = KAN$ — разложение Ивасавы,

$G = MANV$ — разложение Гельфанда-Наймарка-Брюа, где

$K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, k \in SO(n) \right\}$ — максимальная компактная подгруппа;

$A = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & E_{n-1} & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$ — максимальная некомпактная абелева подгруппа;

$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, m \in SO(n-2) \right\}$ — централизатор A в K;

$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1+\frac{b^2}{2} & \eta & \frac{b^2}{2} \\ \eta' & E_{n-1} & \eta' \\ -\frac{b^2}{2} & -\eta & 1-\frac{b^2}{2} \end{pmatrix}, {\scriptstyle \begin{matrix} \eta=(\eta_1,\ldots,\eta_{n-1}) \\ b^2=\eta_1^2+\ldots+\eta_{n-1}^2 \end{matrix}} \right\}$ — нильпотентная подгруппа;

V — подгруппа, контраградиентная N.

Обозначим через $\mathfrak{H}_\sigma$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций на конусе $[x,x] = 0$, однородных степени σ, где σ — комплексное число.

Квазирегулярное представление $g \to T_\sigma(g)$ многомерной группы Лоренца в пространстве $\mathfrak{H}_\sigma$ определяется сдвигом

$$T_\sigma(g)f(x) = f(g^{-1}x).$$

Это представление не приводимо, если σ не является целым числом. Мы полагаем, что $1 - \eta < Re\,\sigma < 0$. Данное условие обеспечивает абсолютную сходимость рассматриваемых интегралов.

Основываясь на представлениях многомерной группы Лоренца, укажем некоторые нетривиальные соотношения для специальных функций математической физики, имеющие интересное теоретико-групповое истолкование [4].

Вывод формул проводится следующим образом. Рассматриваются неприводимые представления группы $G = SO(n,1)$ в пространстве $\mathfrak{H}_\sigma$ на конусе. В пространстве представления строятся различные базисы, соответствующие редукции группы G на некоторые её подгруппы K, N, A, M, V. Выбирается некоторый элемент $g \in SO(n,1)$ такой, чтобы в одном из базисов представление $T_\sigma(g)$ приводилось к диагональному виду. Затем вычисляется ядро представления в различных базисах. Из сравнения полученных выражений ядра и вытекают интегральные соотношения, связывающие функции Мейера с гипергеометрическими функциями, например:

$$\int_0^\infty G_{13}^{21}\left(\frac{e^{2\alpha}\rho^2}{4}\middle|\begin{matrix}0\\ \sigma+n-2;0;\frac{n-3}{2}\end{matrix}\right)\cdot G_{13}^{21}\left(\frac{\rho^2}{4}\middle|\begin{matrix}0\\ -\sigma-1;0;\frac{n-3}{2}\end{matrix}\right)d\rho = (e^\alpha\cosh\alpha)^\sigma \times$$
$$\times\frac{(-4)\cdot\pi^{\frac{3}{2}}\cdot\Gamma(\sigma+n-1)}{\Gamma(n-1)\sin(\pi\sigma)}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+t\right)\Gamma(\sigma+1-t)}\cdot {}_2F_1\left(\begin{matrix}-\sigma,t+1;\\ \frac{n+1}{2}+t;\end{matrix}\tanh\alpha\right).$$

Для группы $SO(2,1)$ покажем связь функций Лежандра с функциями Уиттекера и Макдональда:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\rho d-\mu z)}(\cosh c)^{-\frac{1}{2}}\cdot P_{i\rho-\frac{1}{2}}^{-\sigma-\frac{1}{2}}(-\tanh c)dz =$$
$$= \begin{cases}\frac{i^{-\sigma-1}}{\Gamma(2\sigma+2)}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}K_{\sigma+\frac{1}{2}}(\mu)M_{i\rho,\sigma+\frac{1}{2}}(2i\mu v), & \mu>0,\\ \frac{i^{-\sigma-1}}{\Gamma(2\sigma+2)}\sqrt{\frac{\pi}{|\mu|}}K_{\sigma+\frac{1}{2}}(|\mu|)M_{-i\rho,\sigma+\frac{1}{2}}(-2i\mu v), & \mu<0,\end{cases}$$

где $v = \cosh c\cdot\cosh d + \sinh c$, $z = \cosh c\cdot\sinh d$, $\sinh c = \frac{1}{2}\left(v - \frac{1+z^2}{v}\right)$, $\tanh d = = \frac{2vz}{v^2+z^2+1}$.

Аналогичные формулы можно получить и для других групп, в частности, для групп Пуанкаре, де Ситтера и многомерной псевдоортогональной группы.

Список цитированной литературы

1. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991. 588 с.

2. Кнапп А., Стейн Е. Сплетающие операторы для полупростых групп // Математика. 1974. Т. 18, №5. С. 42–121.

3. Виленкин Н. Я., Нижников А. И. Интегральные соотношения для G-функций Мейера и представления n-мерной группы Лоренца // Известия ВУЗов, Математика, 1979. №5 (204), С. 13–19.

4. Shilin I. A., Nizhnikov A. I. Some formulas for Legendre functions induced by the Poisson transform // Acta Polytechnica. 2011. Vol. 51, no. 1. P. 70–73.

Московский педагогический государственный университет.
Получено 31.03.2015

УДК 512.542

Абелевость некоторых холловых подгрупп групп $Chev(r)$

Э. М. Пальчик (Новополоцк, Беларусь)
bashunsviat@mail.ru

Обозначения и терминология для конечных групп стандартные [1, 2]. Всюду ниже p, r — простые числа, $q = r^f$, n — натуральное число.

$G_p(S_p(G))$ — силовская p-подгруппа (S_p-подгруппа) группы G; $n_p = p^a$, $a \geq 0$, где $p^{a+1} \nmid n$; E_n — элементарная абелевпа группа порядка n; $m_p(G)$ — p-ранг группы G; под группой $G \in Chev(r)$ понимается любая фактор-группа универсальной группы лиева типа по центральной подгруппе; L_G — соответствующая типу $G \in Chev(r)$ комплексная простая алгебра Ли; $W(L_G)$ — группа Вейля алгебры L_G; $e(q,p) = ord_p(q)$;

Лемма 1. *Пусть $r \neq 3$, $G \in \{B_n(q); C_n(q); A_n(q), 3|(q-1); {}^2A_n(q), 3|(q+1); E_6(q); {}^2E_6(q); {}^2F_4(q)\}$, $n \geq 3$, $\overline{G} = G/Z(G)$. Тогда $G'_3 \neq 1 \neq \overline{G}'_3$.*

Лемма 2. *Пусть $p > 3$, $G \in \{SL_p(q), p|(q-1); SU_p(q), p|(q+1)\}$, $\overline{G} = G/Z(G)$. Тогда $G_{p'} \neq 1 \neq \overline{G}'_p$.*

Доказательство. Пусть $G = SU_p(q)$ (для $G = SL_p(q)$ рассуждения аналогичные). По [3, (4.10.1), с.237]

$$|G|_{r'} = \prod_i \Phi_i(q)^{n_i} = (q^2-1)(q^3+1)...(q^{p-1}-1)(q^p+1) \tag{1}$$

По условию $e(q,p) = 2 = e \equiv 2 \pmod 4$. По лемме 1.3.1 в [4] $e/2 = e^* = 1$ и $(q^p+1)_p = (q+1)_p \cdot (p/e^*)_p = p^k \cdot p$.

Если $k = 1$, то $(q^p+1)_p = p^2$. По этой же лемме для $i < p$ имеем $(q^i + 1)_p = (q+1)_p(i/e^*)_p = p$, $(q^i-1)_p = (q^2-1)_p(i/e)_p = p$, так как i — четное число. Поэтому $|G_p| = p^p$. По [2, табл.10:1, с.110] в (1) имеется множитель $\Phi_i^{n_i}(q)$ с $i = 2 \cdot p = e \cdot p \equiv 2 \pmod 4$, причем $n_i = [2p/2p] = 1$. По [2, (10-1) (2)] $G_p = (\times_{i=1}^{p-1} Z_p) \rtimes Z_p$, так как $p| \, |S_p| = |W(L_G)|$. $m_p(G_p) = p-1$ [3, теорема 4.10.3(a)]. Поэтому $G'_p \neq 1$. По [3, теорема 4.10.3(в)] $m_p(\overline{G}_p) = p-1$ или $p-2$. Если $m_p(\overline{G}_p) = p-1$, то $\overline{G}_p \cong E_{p^{p-1}}$, $\Phi(G_p) = G'_p \cong Z_p$. По [5, лемма 10.14(i)] $exp(G_p) = p$. Пусть $1 \neq y \in G_p \setminus Z(G_p)$, $C = C_{G_p}(y)$. Тогда $|G_p : C| = p$ [1, с.309] и по [5, лемма 10.20] $m_p(C) = p-1 = m_p(G_p)$ и $C' = 1$. Тогда G_p — минимальная неабелева группа. По [1, с.309] $G_p/\Phi(G_p) = p^2$, $|G_p| = p^3 = p^p$ и $p = 3$. Это противоречит условию. Итак, при $k = 1$ $m_p(\overline{G}_p) = p - 2$ и $\overline{G}'_p \neq 1$.

Пусть теперь $k > 1$, $m = p^k$. Тогда $G_p = (\times_{i=1}^{p-1} Z_m) \leftthreetimes Z_p$. Так как $|Z(G)_p| = p$, то $m_p(\overline{G}_p) = p - 1$, $\overline{G}'_p \neq 1$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $n \geq p > 3$, $G \in \{L_n(q), p|(q-1); U_n(q), p|(q+1)\}$. Тогда $G'_p \neq 1$.*

Теорема 1. *Пусть $G \in Chev(r)$, $\{p, s\} \in \pi(G)$, $\{2, r\} \cap \{p, s\} = \oslash$, $p < s$, p делит $q^2 - 1$. Если в G есть холлова $\{p, s\}$-подгруппа $H = H_p \leftthreetimes H_s$, то $H' = H'_p = H'_s = 1$.*

Доказательство. По [4, теорема 2.7.1] $H'_s = 1$, $H_s \lhd H$. Используем индукцию по числу $|G|$. Для групп из множества $Chev(r)$ с минимальным значением $|G|$ (равным $r(r^2-1)/(2, r-1)$) утверждение верно [1, теорема II.8.27].

Пусть $1 \neq x$ — элемент порядка s из H_s. По [3, теорема 4.2.2] $C_G(x) = C$ содержит нормальные подгруппы Y и TY такие, что $Y = D_1 \times ... \times D_m$, $m \geq 0$, где $D_k \in Chev(r)$ с полем определения порядка $q^{m_k} = q_k$, $m_k > 0$, T — абелева r'-подгруппа, индуцирующая на D_k, $k = \overline{1, m}$, внутренне-диагональные автоморфизмы, а C/TY — элементарная абелева s-подгруппа, изоморфная подгруппе из центра универсальной накрывающей для $G/Z(G)$. Ясно, что $H_p \subseteq TY$ и $m > 0$.

По условию p делит $(q^2 - 1)$. Предположим, что $H' \neq 1$, то есть $H'_p \neq 1$. По [4, лемма 2.7.2, теорема 2.7.17(2)] $ps|(q^2-1)|(q_k^2-1)$. Если

$$D_k \in \{{}^2B_2(q_k), {}^2G_2(q_k), {}^2F_4(q_k)\}$$

и $p > 3$, то $p \nmid |W(L_{D_k})|$ и по [2, (10-1)(3)] $S_p(D_k)$ — абелева. Если $p = 3$, то $3|\,|W(L_{D_k})|$, где $D_k = {}^2F_4(q_k)$ и по [4, с.156] $\{3, s\} \subseteq \pi(q_k^2 - 1)$. Так как $D_k \lhd \lhd C$, то $D_k \cap H = H_k$ — нильпотентная холлова $\{p, s\}$-подгруппа в D_k (заметим, что $(S_p({}^2B_2(q)))' = 1$).

Если $C = G$, то применение индукции к группам $\overline{D}_k$ в $\overline{G} = G/ < x >$, $k = \overline{1, m}$, дает абелевость S_p-подгрупп в $\overline{D}_k$ и, очевидно, в D_k. Если $C \subset G$, то опять к группам D_k, $k = \overline{1, m}$, применение индукции дает абелевость их S_p-подгрупп. Из строения группы Y следует тогда и абелевость S_p-подгруппы Y_p группы Y. Если $H_p \subseteq Y$, то все доказано. Пусть $1 \neq y \in T_p \setminus Y_p$. Как отмечено выше, $< y > \subseteq Outdiag(D_k)$. По [3, теорема 2.5.12] $D_k \in \{A_{n-1}(q_k)/Z, p|(n, q_k - 1); {}^2A_{n-1}(q_k)/Z, p|(n, q_k + 1); E_6(q_k)/Z; {}^2E_6(q_k)/Z\}$, где всюду Z — подгруппа из центра соответствующей группы. Если $p > 3$, то $n \geq p \geq 5$, и по лемме 3 имеем противоречие с абелевостью S_p-подгрупп у групп D_k, $k = \overline{1, m}$. Пусть $p = 3$. По лемме 1 имеем противоречие с абелевостью S_p-подгрупп у групп $D_k \in \{E_6(q_k)/Z; {}^2E_6(q_k)/Z\}$. Если $3|n$, то $n = 3$ или $n > 5$. В последнем случае по лемме 1 имеем противоречие с абелевостью S_3-подгрупп групп $D_k \in \{A_{n-1}(q_k)/Z, 3|(q_k-1); {}^2A_{n-1}(q_k)/Z, 3|(q_k+1)\}$. Пусть теперь $n = 3$. В этом случае по [3, теорема 6.5.3(b)] D_k не имеет нильпотентной холловой $\{3, s\}$-подгруппы. Поэтому предположение о неабелевости группы H неверно. Теорема доказана.

Список цитированной литературы

1. Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verlad, 1967.

2. Gorenstein D., Lyons R. The local structure of finite groups of characteristic 2 type // Mem. AMS. 1983. Vol 42, no. 276. P. 15–731.

3. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. The classification of the finite simple groups // Math. Surveys and Monogr. 1998. Vol 40, no. 3. 420 p.

4. Ревин Д. О. Холловы подгруппы конечных групп: дис. д-ра физ.-мат. наук: 01.01.06. // Новосибирск. 2008. 232 с.

5. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. The classification of the finite simple groups // Math. Surveys and Monogr. 1995. Vol 40, no. 2. 219 p.

Полоцкий государственный университет
Получено 09.04.2015

УДК 512.543

Аппроксимационные свойства некоторых обобщенных свободных произведений групп

А. В. Розов (Иваново)
post-box023@mail.ru

Пусть π — некоторое множество простых чисел, $\mathcal{F}_\pi$ — класс всех конечных π–групп. Группа G называется аппроксимируемой конечными π–группами (или, короче, $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемой), если для каждого неединичного элемента x из G существует гомоморфизм группы G на некоторую конечную π–группу, при котором образ элемента x отличен от единицы. В случае, когда множество π состоит из одного простого числа p, говорят об $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости. Группа G называется почти $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемой, если она содержит $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемую подгруппу конечного индекса.

Перейдем теперь к свободным произведениям групп с объединенными подгруппами. Пусть A и B — произвольные группы, H и K — подгруппы групп A и B соответственно, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. И пусть

$$G = (A * B; H = K, \varphi)$$

— свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K объединенными относительно изоморфизма φ. Рассмотрим далее свободные произведения, объединяемые подгруппы H и K которых нормальны в группах A и B соответственно.

Ранее нами было доказано [1], что свободное произведение двух полициклических групп с нормальными объединенными подгруппами почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемо для каждого простого числа p. Также нами был получен [2] критерий почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемости свободного произведения нильпотентных групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами. Согласно этому критерию, группа G почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируема в том и только том случае, когда группы A, B, A/H и B/K почти $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемы. Позже оба этих результата были обобщены Д. Н. Азаровым [3] с помощью следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть π — конечное множество простых чисел. И пусть G — свободное произведение разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B. Группа G почти $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда группы A, B, A/H и B/K почти $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемы.*

Напомним, что группа G называется группой конечного ранга, если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами.

Заметим, что аналогичные перечисленным выше результатам утверждения для $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемости уже не имеют места, поскольку даже свободное произведение двух конечных p–групп с нормальными объединенными подгруппами не обязано быть $\mathcal{F}_p$–аппроксимируемой группой.

Большего можно ожидать, если усилить условия, накладываемые на подгруппы H и K, до требования их центральности в группах A и B соответственно. Для случая, когда группа A является нильпотентной группой конечного ранга, нами был получен следующий критерий $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемости группы G.

Теорема 2. *Пусть G — свободное произведение групп A и B с нормальными объединенными подгруппами H и K, не совпадающими с группами A и B. И пусть A — нильпотентная группа конечного ранга, а H содержится в ее центре. Группа G $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируема тогда и только тогда, когда группы A, B, A/H и B/K $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемы.*

Заметим, что необходимость в теореме 2 имеет место и без предположения о том, что A — нильпотентная группа конечного ранга. Заметим еще, что теорема 2 обобщает полученный автором ранее критерий $\mathcal{F}_\pi$–аппроксимируемости группы G, в котором дополнительно требовалось, чтобы группа B была нильпотентной группой конечного ранга, а группа K содержалась в ее центре (см. [4]).

Кроме того, частным случаем теоремы 2 является один из результатов работы [5, теор. 4], доказанный для случая, когда A — конечно порожденная нильпотентная группа.

Список цитированной литературы

1. Розов А. В. О почти аппроксимируемости конечными p–группами свободного произведения полициклических групп с нормальными объединенными подгруппами // Известия ВУЗов. Математика. 2014. № 11. С. 64–71.

2. Розов А. В. Некоторые аппроксимационные свойства свободных произведений разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, вып. 1(41). С. 130–142.

3. Азаров Д. Н. Аппроксимируемость некоторыми классами конечных групп обобщенного свободного произведения групп с нормальной объединенной подгруппой // Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56, № 2. С. 249–264.

4. Розов А. В. Об аппроксимируемости конечными π–группами свободных произведений нильпотентных групп конечного ранга с центральными объединенными подгруппами // Ярославский пед. вестн. Естественные науки. 2013. Т. 3, № 2. С. 7–13.

5. Tumanova E. A. On the residual π–finiteness of generalized free products of groups // Math. Notes. 2014. Vol. 95, № 4. P. 544–551.

Ивановский государственный университет
Получено 9.04.2015

УДК 512.543

Нильпотентная аппроксимируемость некоторых свободных конструкций групп

Е. В. Соколов (Иваново)
ev-sokolov@yandex.ru

Напомним, что согласно общему определению группа X называется аппроксимируемой классом групп $\mathcal{C}$ (или, короче, $\mathcal{C}$-аппроксимируемой), если для каждого неединичного элемента $x \in X$ существует гомоморфизм ρ группы X на некоторую группу из класса $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$-группу) такой, что $x\rho \neq 1$. Напомним также, что периодическая группа называется π-группой, где π — некоторое множество простых чисел, если все простые делители порядков ее элементов принадлежат множеству π.

Пусть P — свободное произведение конечно порожденных нильпотентных групп A и B с конечными подгруппами $C \leqslant A$ и $D \leqslant B$, объединёнными в соответствии с изоморфизмом $\varphi\colon C \to D$. Пусть также E — HNN-расширение конечно порожденной нильпотентной группы G с конечными подгруппами $H \leqslant G$

и $K \leqslant G$, связанными при помощи изоморфизма $\psi \colon H \to K$. Из теоремы 3 работы [1] и теоремы 3.1 работы [2] следует, что группы P и E финитно аппроксимируемы. Критерии аппроксимируемости данных групп конечными p-группами указаны в [3] и [4], соответственно. Вопрос об аппроксимируемости групп P и E конечными π-группами рассматривался автором в [5]. Целью настоящей работы является отыскание критериев нильпотентной аппроксимируемости для указанных групп.

Хорошо известно (см., напр., [6, § 4]), что в локально нильпотентной группе N множество всех элементов конечного порядка образует характеристическую подгруппу, называемую периодической частью группы N и обозначаемую $\tau(N)$. Если группа N конечно порождена и, следовательно, нильпотентна, то подгруппа $\tau(N)$ является конечной и по теореме Бернсайда-Виландта раскладывается в прямое произведение своих силовских подгрупп. Стало быть, подгруппы $\tau(A)$, $\tau(B)$ и $\tau(G)$ конечны, и мы можем рассмотреть множество σ всех простых делителей порядка группы $\tau(G)$ и множество θ всех простых делителей порядков групп $\tau(A)$ и $\tau(B)$. Также через $\mathcal{FN}_\sigma$ и $\mathcal{FN}_\theta$ будем обозначать классы всех конечных нильпотентных σ-групп и всех конечных нильпотентных θ-групп, соответственно.

Теорема 1. *Приводимые далее утверждения равносильны.*

1. *Группа P аппроксимируется нильпотентными группами.*
2. *Группа P аппроксимируется классом $\mathcal{FN}_\theta$.*
3. *Подгруппы C и D p'-изолированы в группах A и B, соответственно, для некоторого простого числа p, и существует гомоморфизм группы P на $\mathcal{FN}_\theta$-группу, действующий инъективно на подгруппах $\tau(A)$ и $\tau(B)$.*

Теорема 2. *Приводимые далее утверждения равносильны.*

1. *Группа E аппроксимируется нильпотентными группами.*
2. *Группа E аппроксимируется классом $\mathcal{FN}_\sigma$.*
3. *Подгруппы H и K p'-изолированы в группе G для некоторого простого числа p, и существует гомоморфизм группы E на $\mathcal{FN}_\sigma$-группу, действующий инъективно на подгруппе $\tau(G)$.*

Напомним, что подгруппа Y группы X называется p'-изолированной в этой группе для заданного простого числа p, если для любого простого числа q, отличного от p, и для любого элемента $x \in X$ из соотношения $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$.

Отметим также, что условия, необходимые и достаточные для существования указанных в формулировках теорем 1 и 2 гомоморфизмов групп P и E, указаны в работе [5]. Теорема 1 обобщает и уточняет результаты работы [7].

Список цитированной литературы

1. Baumslag G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 106. P. 193–209.

2. Baumslag B., Tretkoff M. Residually finite HNN-extensions // Comm. Algebra. 1978. Vol. 6. P. 179–194.

3. Азаров Д. Н. Об аппроксимируемости конечными p-группами свободного произведения двух нильпотентных групп с конечными объединенными подгруппами // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. “Биология, Химия, Физика, Математика”. 2006. Вып. 3. С. 102–106.

4. Молдаванский Д. И. Об аппроксимируемости конечными p-группами HNN-расширений нильпотентных групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. “Биология, Химия, Физика, Математика”. 2006. Вып. 3. С. 128–132.

5. Соколов Е. В. Аппроксимируемость конечными π-группами некоторых свободных конструкций групп // Матер. XII Междунар. конфер. “Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения”, посвященной 80-летию профессора В. Н. Латышева. Тула, 21–25 апреля 2014 г. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2014. С. 95–97.

6. Холл Ф. Нильпотентные группы // Математика. Период. сб. перев. иностр. ст. 1968. Т. 12, № 1. С. 3–36.

7. Иванова Е. А. Аппроксимируемость нильпотентными группами свободного произведения двух групп с объединенными конечными подгруппами // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. “Биология, Химия, Физика, Математика”. 2004. Вып. 3. С. 120–125.

Ивановский государственный университет
Получено 15.03.2015

UDK 512.542

On finite groups isospectral to simple linear groups

A. M. Staroletov (Novosibirsk)
staroletov@math.nsc.ru

Given a finite group G, denote by $\omega(G)$ the *spectrum* of G, i. e., the set of its element orders. We call finite groups G and H *isospectral* if $\omega(G) = \omega(H)$. Let $h(G)$ be the number of pairwise nonisomorphic groups isospectral to G. Group G is called *recognizable* (by spectrum) if $h(G) = 1$, *almost recognizable* if $h(G) < \infty$, and *non-recognizable* if $h(G) = \infty$. Since every finite group with a nontrivial normal soluble subgroup is non-recognizable (see [1, Corollary 4] and [2, Lemma 1]), of prime interest is the recognition problem for nonabelian simple groups. It turned out that many of nonabelian finite simple groups are recognizable or at least almost recognizable. Recently it was proved in [3] the following

Theorem 1. *Suppose that $L = PSL_n(q)$ or $L = PSU_n(q)$ and $n \geq 45$. Then a finite group isospectral to L is isomorphic to a group G with $L \leq G \leq AutL$. In particular, there are only finitely many pairwise non-isomorphic finite groups G with $\omega(G) = \omega(L)$.*

It follows from this theorem that simple linear and unitary groups of sufficiently large dimension are almost-recognizable. We continue investigation of the recognition problem for simple linear groups and prove

Theorem 2. *Suppose that $L = PSL_n(q)$ and $27 \leq n \leq 44$. Then a finite group isospectral to L is isomorphic to a group G with $L \leq G \leq AutL$. In particular, there are only finitely many pairwise non-isomorphic finite groups G with $\omega(G) = \omega(L)$.*

The work is supported by Russian Science Foundation (project 14-21-00065).

REFERENCES

1. Shi W., A characterization of the sporadic simple groups by their element orders // Algebra Colloq. 1994. Vol. 1, no. 2, P. 159–166.

2. Mazurov V. D., Recognition of finite groups by a set of orders of their elements // Algebra and Logic. 1998. Vol. 37, no. 6, P. 371–379.

3. Vasil′ev A. V., On finite groups isospectral to simple classical groups // J. Algebra. 2015. Vol. 243, P. 318–374.

Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University
Received 16.04.2015

УДК 512.544

К условию максимальности для подгрупп локально разрешимой группы

С. Р. Султанов (Рязань)
s.sultanov@rsu.edu.ru

Как известно, из выполнимости условия минимальности или максимальности для абелевых подгрупп разрешимой группы G следует выполнимость данного условия для произвольных её подгрупп. Более того, и для локально разрешимой группы из выполнимости условия минимальности для абелевых подгрупп следует, что сама группа является разрешимой черниковской [1, с. 244]. Однако, для условия максимальности подобное обобщение невозможно. В данной работе мы определим подгруппу локально разрешимой группы такую, что из выполнимости на ней условия максимальности следует его выполнимость на самой группе. Дадим следующее определение.

Определение 1. *Пусть G - группа, $\{S_i\}_{i\in I}$ - множество классов сопряженных элементов группы G. Подгруппу H группы G мы назовем T_s - подгруппой группы G, если для каждого $i \in I$ $H \bigcap S_i \neq \emptyset$.*

Теорема 1. *Если в разрешимой группе G существует её конечно порожденная T_s - подгруппа, то она совпадает с группой G.*

Следствие 1. *Если в разрешимой группе G найдется T_s - подгруппа с условием максимальности для подгрупп, то сама группа G удовлетворяет этому условию.*

Теорема 2. *Если в локально разрешимой группе G найдётся T_s - подгруппа с условием максимальности для подгрупп, то сама группа G удовлетворяет этому условию.*

Список цитированной литературы

1. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. 3-е изд. М.: Наука, 1982. 288 с.

Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина
Получено 13.04.2015

УДК 512.543

Об аппроксимируемости корневыми классами обобщенных свободных произведений

Е. А. Туманова (Иваново)
helenfog@bk.ru

Согласно К. Грюнбергу [1] содержащий хотя бы одну неединичную группу класс групп $\mathcal{K}$ называется *корневым*, если он замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, а также удовлетворяет следующему условию: если X — некоторая группа и $1 \leqslant Z \leqslant Y \leqslant X$ — субнормальный ряд группы X такой, что X/Y, $Y/Z \in \mathcal{K}$, то в группе X существует нормальная подгруппа T такая, что $T \subseteq Z$ и $X/T \in \mathcal{K}$. Известно [2], что корневыми являются те и только те наследственные классы групп, которые замкнуты относительно декартовых сплетений. Что же касается корневых классов, состоящих только из конечных групп, то для них известна еще более понятная и легко проверяемая характеризация: класс конечных групп является корневым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений [3].

В работе [4] Д. Н. Азаров и Д. Тьеджо доказали аппроксимируемость произвольной свободной группы каждым корневым классом $\mathcal{K}$, что в сочетании с результатами К. Грюнберга [1] полностью положительно разрешило вопрос о $\mathcal{K}$-аппроксимируемости свободного произведения $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп.

В данной работе рассматривается вопрос об аппроксимируемости произвольными корневыми классами групп обобщенного свободного произведения G двух групп A и B с подгруппами $H \leqslant A$ и $K \leqslant B$, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi\colon H \to K$, при условии, что объединенная подгруппа является ретрактом в одном из сомножителей.

Напомним, что подгруппа Y группы X называется *ретрактом* этой группы, если существует подгруппа Z, нормальная в X и такая, что $X = YZ$ и $Z \cap Y = 1$. Иными словами, подгруппа Y является ретрактом в X тогда и только тогда, когда X представляет собой расщепляемое расширение некоторой группы Z при помощи Y.

Первым из результатов, полученных в данной работе, является

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, K — ретракт в группе B. Если группа A является $\mathcal{K}$-группой, а группа B $\mathcal{K}$-аппроксимируема, то группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

При помощи этого утверждения получено достаточное условие аппроксимируемости группы G корневым классом групп $\mathcal{K}$, в котором группа A уже не обязательно принадлежит классу $\mathcal{K}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, K — ретракт в группе B. Пусть группы A и B $\mathcal{K}$-аппроксимируемы, подгруппа H группы A $\mathcal{K}$-отделима. Пусть также группа A $\mathcal{K}$-квазирегулярна по подгруппе H, т. е. для любой подгруппы $M \leqslant H$, нормальной в H и такой, что $H/M \in \mathcal{K}$, найдется нормальная подгруппа N группы A, удовлетворяющая условиям $A/N \in \mathcal{K}$ и $N \cap H \leqslant M$. Тогда группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Напомним, что согласно общему определению, данному А. И. Мальцевым в [5], подмножество M группы X называется *$\mathcal{L}$-отделимым* в X для некоторого класса групп $\mathcal{L}$, если для любого элемента $x \in X$, не принадлежащего M, существует гомоморфизм σ группы X на некоторую группу из класса $\mathcal{L}$ такой, что $x\sigma \notin M\sigma$.

Можно показать, что условия $\mathcal{K}$-отделимости подгруппы H в группе A и $\mathcal{K}$-квазирегулярности группы A по подгруппе H, содержащиеся в формулировке теоремы 2, в общем случае не являются необходимыми для $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G. Таким образом, вопрос об отыскании критерия $\mathcal{K}$-аппроксимируемости группы G в случае, когда группа A является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой, но не принадлежит классу $\mathcal{K}$, остается открытым.

Из теоремы 2 вытекает справедливость следующих утверждений.

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, H — нормальная подгруппа группы A, K — ретракт в группе B. Если группа B $\mathcal{K}$-аппроксимируема и $A/H \in \mathcal{K}$, то группа G также является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой.*

Следствие 2. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, A — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая конечно порожденная нильпотентная группа, B — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая группа, подгруппа H $\mathcal{K}$-отделима в группе A, подгруппа K — ретракт в группе B. Тогда группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Следствие 3. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, группы A и B аппроксимируются $\mathcal{K}$-группами без кручения, подгруппы H и K имеют конечный ранг Гирша-Зайцева (т. е. обладают конечными субнормальными рядами, все факторы которых являются периодическими или бесконечными циклическими группами), K — ретракт в группе B. Тогда группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

Теорема 2 позволяет также дать простое доказательство теоремы 1 из работы [6], утверждающей, что если $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, то свободное произведение двух $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп с объединенными ретрактами в свою очередь аппроксимируется классом $\mathcal{K}$.

Список цитированной литературы

1. Gruenberg K. W. Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29–62.

2. Sokolov E. V. A characterization of root classes of groups // Comm. Algebra. 2015. Vol. 43, № 2. P. 856–860.

3. Гольцов Д. В., Яцкин Н. И. Классы групп и подгрупповые топологии // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. “Естественные, общественные науки”. 2011. Вып. 2. С. 115–128.

4. Азаров Д. Н., Тьеджо Д. Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2002. Вып. 5. С. 6–10.

5. Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.

6. Азаров Д. Н., Туманова Е. А. Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп корневыми классами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2008. Вып. 6. С. 29–42.

Ивановская пожарно-спасательная академия ГПС МЧС России
Ивановский государственный университет
Получено 15.03.2015

УДК 512.541

О нильпотентных эндоморфизмах p-локальных групп без кручения

В. Х. Фарукшин (Москва)
fvkh@mail.ru

Пусть A — p-локальная абелева группа без кручения конечного p-ранга. Обозначим через $\mathrm{E}(A)$ кольцо эндоморфизмов группы A, $\widehat{A}$ — p-адическое пополнение группы A, $\widehat{\mathrm{E}}(A)$ — p-адическое пополнение аддитивной группы кольца эндоморфизмов, $\mathbb{Q}\widehat{A}, \mathbb{Q}\widehat{E}(A)$ — их делимые оболочки. Считаем, что каждая группа A естественно вложена в p-адическое пополнение $\widehat{A}$. Тогда действие $\mathrm{E}(A)$ на группе A единственным образом продолжается до действия $\widehat{\mathrm{E}}(A)$ на $\widehat{A}$ и до действия $\mathbb{Q}\mathrm{E}(A)$ на $\mathbb{Q}(A)$.

Теорема 1. *Пусть A — редуцированная p-локальная абелева группа без кручения конечного p-ранга. Тогда*

1. *Если $\widehat{A}$ — неприводимый $\widehat{\mathrm{E}}(A)$-модуль, то ниль-радикал кольца эндоморфизмов $\mathrm{E}(A)$ группы A равен нулю;*
2. *Если $\mathbb{Q}A$ — неприводимый $\mathbb{Q}\widehat{\mathrm{E}}(A)$-модуль, то ниль-радикал кольца эндоморфизмов $\mathrm{E}(A)$ группы A равен нулю;*
3. *Ниль-радикал кольца эндоморфизмов $\mathrm{E}(A)$ группы A нильпотентен.*

Следствие 1. *Если группа A — вполне редуцирована, то имеют место утверждения 1), 2), 3) Теоремы 1.*

Московский Педагогический Государственный Университет
Получено 15.04.2015

2. Полугруппы и универсальные алгебры

В докладах представлен цикл новых работ, относящихся к современной теории полугрупп преобразований, к полугруппам частных; к конструкциям полугрупп и теории представлений полугрупп.

В программу секции включены также сообщения о результатах исследований, связанных с применением методов универсальной алгебры.

УДК 512.53

Оценка диагональных рангов 3-нильпотентных полугрупп

И. В. Барков (Москва)
zvord@b64.ru

Правым полигоном над полгруппой S [1] называется множество X вместе с операцией $\varphi : (X \times S) \to X$, $(x, s) \mapsto xs$, удовлетворяющей свойству $(xs)t = x(st)$ для любых $x \in X$, $s, t \in S$. Чтобы подчеркнуть, что X – правый полигон над S, его обозначают X_S.

Есил S – полугруппа, то декартово произведение $S \times S$ с операцией поэлементного умножения на элементы из S справа можно считать полигоном [2]. Такой полигон называется *правым диагональным полигоном над* S и обозначается $(S \times S)_S$.

Диагональный полигон можно рассматривать как унарную алгебру. Действительно, если $(S \times S)_S$ – диагональный полигон над полугруппой S, то умножение на $s \in S$ можно отождествить с унарной операцией $\varphi_s : S \times S \to S \times S$, $(a, b) \mapsto (as, bs)$.

Подмножество $A \subseteq S \times S$ будем называть *порождающим множеством* (или *множеством образующих*), если $AS^1 = S \times S$. Если никакое собственное подмножество порождающего множества не является порождающим, то оно называется *неприводимым.* Если же среди всех порождающих множеств данное является минимальным по мощности, будем называть его *минимальным.* Так как полигон над полугруппой является унарной алгеброй, то по Теореме 1 из [3] мы получаем, что в любом правом полигоне неприводимое множество образующих является минимальным.

Правым диагональным рангом полугруппы S будем называть *мощность минимального порождающего множество полигона* $(S \times S)_S$. Обозначать правый диагональный ранг будем $\operatorname{rdr} S$.

Напомним, что *3-нильпотентной полугруппой* называется такая полугруппа S с нулём 0, где выполняется тождество $xyz = 0$ для любых $x, y, z \in S$.

Полугруппа S с нулевым умножением, то есть такая, где $xy = 0$ для любых $x, y \in S$, тоже является 3-нильпотентной, однако её диагональный ранг несложно вычислить. Так как $(x, y)s = (0, 0)$ для любых x, y и z из S, то в порождающем множестве должны присутствовать все пары за исключением $(0,0)$. Отсюда $\operatorname{rdr} S = n^2 - 1$. Поэтому в дальнейшем под 3-нильпотентными полугруппами мы будем понимать все 3-нильпотентные за исключением полугрупп с нулевым умножением.

Предложение 1. *Пусть S – полугруппа из n элементов, среди которых p являются порождающими . Тогда* $\operatorname{rdr} S \geq 2np - p^2$.

Следствие 1. *Пусть S – 3-нильпотентная полугруппа из n элементов. Тогда* $\operatorname{rdr} S \geq n\left(\sqrt{4n-3}-1\right) - \frac{1}{2}\left(2n-1-\sqrt{4n-3}\right)$.

Теорема 1. *Пусть S – 3-нильпотентная полугруппа из n элементов, не являющаяся полугруппой с нулевым умножением. Тогда* $\operatorname{rdr} S \leq n^2 - 4$. *Для любого $n \geq 3$ существует 3-нильпотентная полугруппа из n элементов с правым диагональным рангом, равным $n^2 - 4$.*

Список цитированной литературы

1. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A.V. Monoids, acts and categories. Berlin - New York: W. de Gruyter, 2000.

2. Gallagher P., Ruškuc N. Finite generation of diagonal acts of some infinite semigroups of transformations and relations // Bull. Austral. Math. Soc. 2005. Vol. 72, no 1. P. 139–146.

3. Карташов В.К. Независимые системы порождающих и свойство Хопфа для унарных алгебр // Дискрет. матем. 2008. Т. 20, № 4. С 79—84.

НИУ МИЭТ
Получено 22.04.2015

УДК 512

Многообразие алгебр над операдой полых кубов

А. Р. Гайнуллина[1] (Казань)
GaynullinaAlina@gmail.com

В работе [1] было замечено, что семейства многомерных сфер и (полых) многомерных кубов образуют операды. В работе [2] было найдено (с точностью до рациональной эквивалентности [3, Определение 1.2.2]) многообразие алгебр над операдой многомерных сфер. В данной работе описывается многообразие

[1]Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения проектной части государственного задания в сфере научной деятельности, номер проекта 1.2045.2014

алгебр над операдой кубов. Точнее, в традиционных терминах некоторого набора операций и тождеств описано рационально эквивалентное ему многообразие.

Пусть $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел. Рассмотрим множества:

$$C(n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 1\},$$

$$C_+(n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in C(n) | x_i \geqslant 0, 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Положим $C = \{C(n) | n \geqslant 1\}, C_+ = \{C_+(n) | n \geqslant 1\}$ и $\Omega_1 = C(1)$, $\Omega_2 = C_+(2), \Omega = \{\Omega_1, \Omega_2\}$. Операду C в дальнейшем будем называть *операдой полых кубов*. Считая Ω_n множеством символов n-арных операций, можно рассматривать $Alg(C)$ как подмногообразие многообразия всех Ω-алгебр. Опишем многообразие $Alg(C)$ в терминах операций из семейства Ω и соответствующих им тождеств.

Рассмотрим C-алгебру A. Это значит, что для всех n определены отображения композиции $C(n) \times A^n \longrightarrow A, (\bar{x}, (a_1, \dots, a_n)) \mapsto \bar{x}(a_1 \dots a_n)$. Легко проверить, что C порождается $C(1)$ и $C_+(2)$. Из этого следует, что алгебры из $Alg(C)$ определяются отображениями $C(1) \times A \to A, \quad C_+(2) \times A^2 \to A$. Так как $C(1) = \{+1, -1\}$, то имеются две унарные операции вида $((\varepsilon), a) = (\varepsilon, a) \mapsto ((\varepsilon) \cdot a)$, где $\varepsilon = \pm 1$. Из определения алгебры над операдой следует, что выполняются соотношения:

$$(1) \cdot a = a, \qquad (\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2) \cdot a = (\varepsilon_1) \cdot ((\varepsilon_2) \cdot a) \tag{1}$$

Рассмотрим отображение $C_+(2) \times A^2 \to A$ и элемент $(\alpha_1, \alpha_2) \in C_+(2)$, то есть $\max(\alpha_1, \alpha_2) = 1, \quad \alpha_1, \alpha_2 \geq 0$. Разбиваем эти элементы на три группы: $(1, 1), (\alpha, 1), (1, \beta)$, где $0 \leq \alpha < 1$ и $0 \leq \beta < 1$.

Обозначим через $a_1 \circ a_2$ элемент $(1, 1)(a_1, a_2)$. Легко проверяется, что для любых a_1, a_2, a_3 из A имеют место равенства:

$$a_1 \circ a_2 = a_2 \circ a_1,$$

$$a_1 \circ (a_2 \circ a_3) = (a_1 \circ a_2) \circ a_3,$$

$$(\varepsilon)(a_1 \circ a_2) = ((\varepsilon) \cdot a_1) \circ ((\varepsilon) \cdot a_2).$$

По определению алгебры над операдой, справедливо равенство:

$$(\sigma\bar{\alpha})(x_1 \dots x_n) = \bar{\alpha}(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}),$$

где σ есть элемент группы подстановок n-й степени Σ_n, и действие σ на $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ таково:

$$\sigma\bar{\alpha} = (\alpha_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, \alpha_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Пусть $\alpha, \beta \in [0, 1]$. Положим по определению:

$$a_1 \overset{\alpha}{\circ} a_2 = (\alpha, 1)(a_1, a_2) \text{ и } a_1 \underset{\beta}{\circ} a_2 = (1, \beta)(a_1, a_2).$$

Очевидно, что $a_1 \overset{1}{\circ} a_2 = a_1 \underset{1}{\circ} a_2 = a_1 \circ a_2$. Для произвольных $a_1, a_2, a_3 \in A$ выполняются соотношения:

$$a_1 \overset{\alpha}{\circ} a_2 = a_2 \underset{\alpha}{\circ} a_1 \tag{2}$$

$$(\varepsilon)(a_1 \overset{\alpha}{\circ} a_2) = ((\varepsilon) \cdot a_1) \overset{\alpha}{\circ} ((\varepsilon) \cdot a_2) \tag{3}$$

$$a_1 \overset{\alpha}{\circ} (a_2 \underset{\beta}{\circ} a_3) = (a_1 \overset{\alpha}{\circ} a_2) \underset{\beta}{\circ} a_3 \tag{4}$$

$$a_1 \overset{\alpha}{\circ} (a_2 \circ a_3) = (a_1 \overset{\alpha}{\circ} a_2) \circ a_3 \tag{5}$$

$$(a_1 \underset{\beta}{\circ} a_2) \overset{\alpha}{\circ} a_3 = a_1 \overset{\alpha}{\circ} (a_2 \overset{\alpha\cdot\beta}{\circ} a_3) \tag{6}$$

$$a_1 \overset{\alpha}{\circ} (a_2 \overset{\beta}{\circ} a_3) = a_2 \overset{\beta}{\circ} (a_1 \overset{\alpha}{\circ} a_3) \tag{7}$$

$$(a_1 \overset{\alpha}{\circ} a_2) \overset{\beta}{\circ} a_3 = a_1 \overset{\beta\cdot\alpha}{\circ} (a_2 \overset{\beta}{\circ} a_3) \tag{8}$$

Теорема 1. *Многообразие $Alg(C)$ рационально эквивалентно многообразию алгебр со следующим набором операций:*

1) *Имеются две унарные операции вида $a \mapsto \varepsilon \cdot a$, где $\varepsilon = \pm 1$;*

2) *Для любого $\alpha \in [0,1]$ определены бинарные операции $a_1 \overset{\alpha}{\circ} a_2$ и $a_1 \underset{\alpha}{\circ} a_2$. В случае $\alpha = 1$ имеет место равенство $a_1 \overset{1}{\circ} a_2 = a_1 \underset{1}{\circ} a_2$. Результат этой операции будет обозначаться через $a_1 \circ a_2$.*

При этом должны выполняться тождества (1) — (8).

Список цитированной литературы

1. Тронин С. Н. Операды в категории конвексоров I. // Изв. вузов. Матем. 2002. № 3. С. 42–50.

2. Тронин С. Н. Алгебры над операдой сфер // Изв. вузов. Матем. 2010. № 3. С. 72–81.

3. Пинус А. Г. Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. 239 с.

Казанский федеральный университет
Получено 14.04.2015

UDK 512.579

On free n-nilpotent trioids

Yul. V. Zhuchok (Starobilsk, Ukraine)
yulia.mih@mail.ru

An element 0 of a trioid $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ (see, e.g., [1, 2]) is called zero, if $x * 0 = 0 * x = 0 * 0 = 0$ for all $x \in T$ and $* \in \{\dashv, \vdash, \perp\}$.

As usual, $\mathbb{N}$ denotes the set of all positive integers. A trioid $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ with zero will be called nilpotent, if for some $n \in \mathbb{N}$ and any $x_i \in T$, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, and $*_j \in \{\dashv, \vdash, \perp\}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, any parenthesizing of

$$x_1 *_1 x_2 *_2 \ldots *_n x_{n+1}$$

gives $0 \in T$. The least such n we shall call the nilpotency index of $(T, \dashv, \vdash, \perp)$. For $k \in \mathbb{N}$ a nilpotent trioid of nilpotency index $\leqslant k$ is said to be k-nilpotent.

It is clear that operations of any 1-nilpotent trioid coincide and it is a zero semigroup.

The class of all n-nilpotent trioids forms a subvariety of the variety of all trioids. A trioid which is free in the variety of n-nilpotent trioids will be called a free n-nilpotent trioid.

Let Y be an arbitrary nonempty set, $\overline{Y} = \{\overline{x} \,|\, x \in Y\}$, $X = Y \cup \overline{Y}$ and $F[X]$ be the free semigroup on X. For every $w \in F[X]$ denote the length of w by l_w. Let further $P \subset F[X]$ be the subsemigroup which contains words w with the element $\overline{x}$ $(x \in Y)$ occuring in w at least one time. For every $w \in P$ denote by $\widetilde{w}$ the word obtained from w by change of all letters $\overline{x}$ $(x \in Y)$ by x.

Let $n \in \mathbb{N}$ and $P_n \subset P$ be the set which contains words w with the length no more than n. Define operations $\prec, \succ$ and $\uparrow$ on the set $P_n \cup \{0\}$ by

$$w \prec u = \begin{cases} w\widetilde{u}, & l_{wu} \leq n, \\ 0, & l_{wu} > n, \end{cases} \qquad w \succ u = \begin{cases} \widetilde{w}u, & l_{wu} \leq n, \\ 0, & l_{wu} > n, \end{cases}$$

$$w \uparrow u = \begin{cases} wu, & l_{wu} \leq n, \\ 0, & l_{wu} > n, \end{cases} \qquad w * 0 = 0 * w = 0 * 0 = 0$$

for all $w, u \in P_n$ and $* \in \{\prec, \succ, \uparrow\}$. Denote the algebra $(P_n \cup \{0\}, \prec, \succ, \uparrow)$ by $P_n^0(Y)$.

Theorem 1. *$P_n^0(Y)$ is the free n-nilpotent trioid.*

In addition, we introduce the notion of a 0-triband of subtrioids and in terms of 0-tribands of subtrioids describe the structure of free n-nilpotent trioids. We also characterize the least n-nilpotent congruence on a free trioid and give examples of nilpotent trioids of nilpotency index 2.

REFERENCES

1. Loday J.-L., Ronco M. O., Trialgebras and families of polytopes // Contemp. Math. 2004. Vol. 346. P. 369–398.

2. Zhuchok A. V., Semiretractions of trioids // Ukr. Math. J. 2014. Vol. 66, no. 2. P. 218–231.

Luhansk Taras Shevchenko National University
Received 27.03.2015

УДК 512.57

Тождества и квазитождества унарных алгебр

В. К. Карташов (Волгоград)
kartashovvk@yandex.ru

Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие алгебраических систем произвольной сигнатуры Ω и $T_v(\mathfrak{M})$ – эквациональная теория класса $\mathfrak{M}$ (т.е.совокупность всех тождеств сигнатуры Ω, истинных на классе $\mathfrak{M}$). Подмножество $\Sigma \subseteq T_v(\mathfrak{M})$ называется *базисом тождеств* многообразия $\mathfrak{M}$, если класс всех алгебраических систем, на котором истинны все тождества из Σ совпадает с $\mathfrak{M}$.

Базис Σ называется *независимым*, если для любого $\varphi \in \Sigma$ найдется влгебраическая система A сигнатуры Ω, на которой все тождества из $\Sigma \setminus \{\varphi\}$ истинны, а φ – ложно. Аналогично определяется базис тождеств, квазитождеств, антитождеств и других формул.

В 1935 г. Г. Биркгоф доказал [1], что всякая конечная унарная алгебра с конечным числом операций имеет конечный базис тождеств. Автором в [2] показано, что любое многообразие коммутативных унарных алгебр с конечным числом операций также имеет конечный базис тождеств.

В 1951 г. Р. Г. Линдоном [3] показано, что любая двухэлементная алгебра произвольной сигнатуры имеет конечный базис тождеств.

В дальнешем было установлено также (см., например, [4]), что вопросы о существовании различных базисов квазитождеств квазимногообразий тесно связаны со свойствами решеток подквазимногообразий алгебраических систем.

В. А. Горбуновым в [4] приведен пример трехэлементной унарной алгебры с двумя операциями, не имеющей независимого базиса квазитождеств.

Автором в [5] показано, что каждый конечный унар имеет конечный базис квазитождеств. В [6] им доказано, что каждое квазимногообразие унаров, содержащее лишь конечное число циклов, имеет независимый базис квазитождеств. Отсюда, в частности, следует, что любой конечнопорожденный унар имеет независимый базис квазитождеств. В этой же работе построен алгоритм нахождения независимого базиса квазитождеств конечнопорожденного унара, а также – приведены некоторые факты о свойствах решеток квазимногообразий унаров.

Далее алгебру $\langle A, f, 0\rangle$ типа $\langle 1, 0\rangle$ при условии $f(0) = 0$ будем называть *унаром с нулём.*

Ниже формулируются результаты о квазимногообразиях унаров с нулём, некоторые из которых содержатся в работе [7] с неполными доказательствами.

Теорема 1. *Квазимногообразие $\mathfrak{N}$ унаров с нулём имеет конечный базис квазитождеств тогда и только тогда, когда оно порождается конечным множеством конечных алгебр либо содержит почти все циклы (т.е. не содержит только конечного числа циклов).*

Следствие 1. *Аксиоматический квазиранг любого квазимногообразия унаров с нулём не превосходит 4.*

Обозначим далее через LqU_0 решетку всех квазимногообразий с нулем.

Теорема 2. *Существует континуум квазимногообразий унаров с нулём, не имеющих покрытий в решетке LqU_0.*

Следствие 2. *Существует континуум квазимногообразий унаров с нулём, не имеющих независимого базиса квазитождеств.*

Теорема 3. *Свободная решетка счетного ранга вложима в решетку LqU_0.*

Список цитированной литературы

1. Birkhoff G. On the structure of abstract algebras // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1935. V. 31. № 4. P.433–454.

2. Карташов В.К. О конечной базируемости многообразий коммутативных унарных алгебр // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т.14. № 6. С.85–89.

3. Lyndon R.C. Identities in two-valued calculi // Trans. Am. Math. Soc. 1951. V. 71. P.457–465.

4. Горбунов В.А. Покрытия в решетках квазимногообразий и независимая аксиоматизируемость // Алгебра и логика. 1977. Т. 16. № 5. С.507–548.

5. Карташов В.К. Квазимногообразия унаров // Мат. заметки. 1980. Т. 27. № 1. С.7–20.

6. Карташов В.К. Квазимногообразия унаров с конечным числом циклов // Алгебра и логика. 1980. Т. 19. № 2. С.173–193.

7. Карташов В.К., Макаронов С.П. Квазимногообразия унаров с нулем // Алгебраические системы: межвуз. сб. науч. работ. – Волгоград: изд-во ВГПИ им. А.С. Серафимовича. 1989. С. 139–143.

Волгоградский государственный социально-педагогический университет
Получено 20.04.2015

УДК 512.567.5

О решетках конгруэнций и топологий коммутативных унарных алгебр

А. В. Карташова (Волгоград)
kartashovaan@yandex.ru

Решетки конгруэнций и топологий произвольной алгебры $\mathcal{A}$ обозначаются через $Con\mathcal{A}$ и $\Im(\mathcal{A})$, соответственно.

Исследования таких решеток достаточно глубоко продвинуты для случая, когда алгебра является унаром, т.е. алгеброй с одной унарной операцией. В [1] и [2] найдены условия, при которых решетка конгруэнций унара является решеткой с дополнениями, дистрибутивной, модулярной, либо цепью. В [3] аналогичные вопросы решены для решеток топологий унаров.

Для унарных алгебр, сигнатура которых содержит более одной операции, эти задачи оказались значительно более сложными ([4]).

Унарная алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ называется *коммутативной*, если $f(g(a)) = g(f(a))$ для всех $f, g \in \Omega$ и $a \in A$.

В [5] приведено несколько необходимых условий модулярности и дистрибутивности решетки конгруэнций коммутативной унарной алгебры.

Известно ([3], [6]), что конечность решетки топологий либо решетки конгруэнций унара равносильна конечности самого унара. В [7] это утверждение обобщено для коммутативных унарных алгебр. При этом показано, что существуют бесконечные некоммутативные унарные алгебры с конечными решетками конгруэнций и топологий.

Теорема 1. *([8]). Решетка топологий коммутативной унарной алгебры $\mathcal{A} = \langle A, \Omega\rangle$ является цепью тогда и только тогда, когда для некоторой операции $f \in \Omega$ редукт $\langle A, f\rangle$ является циклом длины p^k, где p – простое, а k – целое неотрицательное число.*

В [9] охарактеризован класс всех коммутативных унарных алгебр, решетка конгруэнций которых является цепью.

Унарная алгебра называется *сильно связной*, если она порождается любым своим элементом.

Будем говорить, что алгебра $\mathcal{A}' = \langle A', \Omega'\rangle$ получена из алгебры $\mathcal{A} = \langle A, \Omega\rangle$ присоединением петли e, если $A = A' \setminus \{e\}$ и $\Omega \subseteq \Omega'$, причем выполнены следующие условия:
1) алгебра $\mathcal{A}$ является подалгеброй редукта $\langle A', \Omega\rangle$ алгебры $\mathcal{A}'$;
2) $(\forall f \in \Omega')(f(e) = e)$;
3) $(\forall f \in \Omega' \setminus \Omega)(f(A) = \{e\})$.

Однопорожденный унар $\langle A, f \rangle$ с порождающим элементом a и определяющим соотношением $f^t(a) = f^{h+t}(a)$, где $h > 0$, $t \geqslant 0$, в дальнейшем обозначается через C_h^t.

Теорема 2. *Все нетривиальные конгруэнции произвольной коммутативной унарной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ попарно несравнимы тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий:*
1) $|A| \leqslant 3$;
2) $\mathfrak{A}$ – сильно связная алгебра, порядок которой равен pq или p^k, где p, q – простые числа, $0 \leqslant k \leqslant 2$;
3) алгебра $\mathfrak{A}$ получается из некоторой сильно связной алгебры простого порядка присоединением петли;
4) для некоторой операции $f \in \Omega$ редукт $\langle A, f \rangle$ алгебры $\mathfrak{A}$ изоморфен алгебре вида C_p^1, где p – простое число.

Теорема 3. *Все нетривиальные топологии произвольной коммутативной унарной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ попарно несравнимы тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий:*
1) $|A| \leqslant 2$;
2) $\mathfrak{A}$ – сильно связная алгебра, порядок которой равен pq или p^k, где p, q – простые числа, $0 \leqslant k \leqslant 2$.

Для любого кардинального числа α произвольную решетку L с нулем 0 и единицей 1, в которой все отличные от 0 и 1 элементы попарно несравнимы между собой и $|L \setminus \{0_L, 1_L\}| = \alpha$, будем обозначать через $\mathfrak{M}_\alpha$.

Следствие 1. *Пусть α – произвольное кардинальное число. Тогда решетка $\mathfrak{M}_\alpha$ изоморфна решетке конгруэнций (топологий) некоторой коммутативной унарной алгебры в том и только в том случае, когда либо $\alpha \leq 2$, либо $\alpha = p+1$, где p – простое число.*

Список цитированной литературы

1. Егорова Д.П., Скорняков Л.А. О структуре конгруэнций унарной алгебры // Упорядоченные множества и решетки: Межвуз. науч. сб. Саратов, 1977. Вып. 4. С. 28-40.

2. Егорова Д.П. Структура конгруэнций унарной алгебры // Упорядоченные множества и решетки: Межвуз. науч. сб. Саратов, 1978. Вып. 5. С. 11-44.

3. Kartashova A. V. On lattices of topologies of unary algebras // J. of Math. Sci. 2003. V. 114. N 2. P. 1086-1118.

4. Карташов В. К. О некоторых результатах и нерешенных проблемах теории унарных алгебр // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12. N 2. С. 18-26.

5. Карташов В. К., Карташова А. В., Пономарёв В. Н. Об условиях дистрибутивности и модулярности решеток конгруэнций коммутативных унарных алгебр // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2013, Т. 13. Вып. 4(2). С. 52–57.

6. Kopeček O. A note on some cardinal functions on unary algebras // Contrib. Gen. Algebra. 2. Proc. Klagenfurt Conf., June 10-13, 1982, Wien. Stutgart, 1983. P. 221-227.

7. Карташова А.В. О конечных решетках топологий коммутативных унарных алгебр // Дискретная математика. 2009. Т. 21. N 3. С. 119-132.

8. Карташова А.В. О решетках квазипорядков и топологий алгебр // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14. N 5. С. 85-92.

9. Карташова А.В. Коммутативные унарные алгебры с линейно упорядоченной решеткой конгруэнций // Матем. заметки. 2014. Т. 95. N 1. P. 80-92.

Волгоградский государственный социально-педагогический университет.
Получено 20.04.2015

УДК 512.579

Решётки конгруэнций полигонов над прямоугольными связками

И. Б. Кожухов, А. Р. Халиуллина (Москва)
kozhukhov_i_b@mail.ru, haliullinaar@gmail.com

Прямоугольной связкой называется прямое произведение $L \times R$, где L — полугруппа левых нулей, а R — полугруппа правых нулей. Прямоугольную связку можно определить также как полугруппу, удовлетворяющую тождествам $x^2 = x$ и $xyz = xz$. Прямоугольными связками, в частности, являются полугруппы левых/правых нулей.

Полигоном над полугруппой S называется (см. [1]) множество X, на котором действует полугруппа S, т.е. определено отображение $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$, удовлетворяющее условию $x(st) = (xs)t$ при всех $x \in X$, $s, t \in S$.

В работе [2] были описаны полигоны над вполне простой полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, где G – группа, I и Λ – множества, $P = \|p_{\lambda i}\|_{\lambda\in\Lambda, i\in I}$, $(p_{\lambda i} \in G)$ – сэндвич-матрица. Прямоугольную связку можно рассматривать как полугруппу $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, в которой $|G| = 1$. Таким образом, можно считать, что $S = I \times \Lambda$ и $(i, \lambda) \cdot (j, \mu) = (i, \mu)$ при любых $i, j \in I$, $\lambda, \mu \in \Lambda$.

Переформулируя следствие 9 из [2], мы получим:

Предложение 1. *Пусть Y – множество, разбитое некоторым отношением эквивалентности σ следующим образом: $Y = \cup_{i\in I} Y_i$. Пусть $\{y_{ir} | i \in I, r \in R\}$ – семейство элементов из Y таких, что $y_{ir} \in Y_i$ при всех $i \in I$, $r \in R$ и $Y_i = \{y_{ir} | r \in R\}$. Пусть A – множество такое, что $A \cap Y = \emptyset$, и для каждого $l \in L$ задано отображение $\varphi_l : A \to I$. Положим $X = Y \cup A$ и определим умножение элементов из X на элементы полугруппы S следующим образом: $y \cdot \langle l, r\rangle = y_{ir}$, если $y \in Y_i$; $a \cdot \langle l, r\rangle = y_{ir}$, если $a \in A$ и $a\varphi_l = i$. Тогда X – полигон над полугруппой $S = L \times R$, причём любой S-полигон изоморфен полигону, построенному таким образом.*

Используя это описание, можно получить условия модулярности решётки $\mathrm{Con}X$ конгруэнций произвольного полигона X над прямоугольной связкой $S = I \times \Lambda$. Для $i, j \in I$, $i \neq j$ определим двудольный граф Γ_{ij} с множеством вершин $Y_i \cup Y_j$ и множеством рёбер $\{(y_{ir}, y_{jr}) | r \in R\}$.

Теорема 1. *Пусть X – полигон над прямоугольной связкой $S = L \times R$. Тогда решётка $\mathrm{Con}X$ модулярна в том и только том случае, если $|A| \leqslant 2$ и выполнены условия:*

(i) $|I| \leqslant 3, |Y_i| \leqslant 3$ при $i \in I$, графы Γ_{ij} связны при $i \neq j$;

при $A = \{a\}$ выполнено условие (i), а также условие

(ii) если $a\varphi_l = i$ при некотором $i \in I$ и всех $l \in L$, то $|Y_i| \leqslant 2$;

при $A = \{a, b\}$ выполнено условие (i), а также условия

(iii) $a\varphi_l = b\varphi_{l'}$ при некоторых $l, l' \in L$;

(iv) если одно из множеств $\{a\varphi_l | l \in L\}$, $\{b\varphi_l | l \in L\}$ состоит из одного элемента i, а в другом более одного элемента, то $|Y_i| \leqslant 2$;

(v) если $\{a\varphi_l | l \in L\} = \{b\varphi_l | l \in L\} = \{i\}$, то $|Y_i| = 1$.

Следствиями этой теоремы являются условия модулярности решётки конгруэнций полигона над полугруппой правых/левых нулей, полученные в [3].

Список цитированной литературы

1. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, acts and cathegories // W. de Gruyter, N. Y. Berlin. 2000.

2. Avdeyev A. Yu., Kozhukhov I. B. Acts over completely 0-simple semigroups // Acta Cybernetica. 2000. Vol. 14, № . 4. P. 523–531.

3. Халиуллина А. Р. Условия модулярности решётки конгруэнций полигона над полугруппой правых и левых нулей. // Дальневост. матем. журнал (в печати).

Национальный исследовательский университет “МИЭТ”
Получено 16.04.2015

УДК 511.335

Об одном антиизоморфизме решетки разбиений множества

В. М. Кусов (Волгоград)
v.m.kusov@vspu.ru

Пусть M — множество $\{1, 2, \cdots, n\}$ с линейным порядком $1 < 2 < \cdots < n$, P_M — решетка разбиений множества M с отношением измельчения $\leqslant$, T_M — полная полугруппа преобразований множества M, а $E(T_M)$ (или просто E) — множество идемпотентов этой полугруппы. Для каждых разбиения $\pi \in P_M$ и элемента $i \in M$ через $[i]_\pi$ обозначим блок этого разбиения, определяемый элементом i. Для $f, g \in T_M$ их произведение выполняется слева направо: $(fg)(i) = f(g(i))$ для всех $i \in M$.

Во многих теоретико-полугрупповых рассмотрениях важную роль играет отношение *естественного частичного порядка* на E, заданное условием

$$f \sqsubseteq g \Leftrightarrow fg = gf = f$$

(см. напр. [1]). Рядом авторов (см. [2, 3, 4]) рассматривались также следующие отношения *правого* и *левого квази-порядков* на E:

$$f \sqsubseteq_R g \Leftrightarrow gf = f; f \sqsubseteq_L g \Leftrightarrow fg = f.$$

Индуцированный частичный порядок на T_M (и на E) вводится стандартным образом:

$$f \leqslant g \Leftrightarrow f(i) \leqslant g(i) \text{ для всех } i \in M.$$

Введем отображение $\Phi : P_M \to T_M$, которое каждому разбиению $\pi \in P_M$ ставит в соответствие преобразование $f \in T_M$, действующее по правилу:

$$f(i) = min[i]_\pi,$$

где $min[i]_\pi$ — наименьший элемент блока $[i]_\pi$. Введем также отображение $\Psi : T_M \to P_M$, которое каждому преобразованию $f \in T_M$ ставит в соответствие разбиение $\pi \in P_M$, определяемое правилом:

$$i \equiv j(\pi) \Leftrightarrow f(i) = f(j)$$

для всех $i \in M$ (таким образом, $\Psi(f) = \Psi(g) \Leftrightarrow \ker f = \ker g$).

Предложение 1. *$\Psi(\Phi(\pi)) = \pi$ для всех $\pi \in P_M$.*

Из предложения 1 следует инъективность отображения Φ, инъективность сужения $\Psi|_{\mathrm{im}\,\Phi}$ отображения Ψ на множество $\mathrm{im}\,\Phi$, а также равенство $\Psi|_{\mathrm{im}\,\Phi} = \Phi^{-1}$. Следующее предложение характеризует множество $\mathrm{im}\,\Phi$ в терминах полугруппы преобразований T_M.

Предложение 2. *Среди преобразований $f \in T_M$ элементы* $\mathrm{im}\,\Phi$ *и только они одновременно обладают свойствами:*

$$\text{i)}\quad f \leqslant 1_M,$$
$$\text{ii)}\quad f^2 = f$$

(здесь 1_M обозначает тождественное преобразование множества M). Таким образом, $\mathrm{im}\,\Phi \subseteq E$.

Теорема 1 (Основной результат). *Множество* $\mathrm{im}\,\Phi$ *с отношением* $\sqsubseteq$ *является решеткой и антиизоморфно P_M, т.е.*

$$\pi \leqslant \xi \Leftrightarrow \Phi(\pi) \sqsupseteq \Phi(\xi).$$

Назовем два разбиения π и ξ *когерентными* (см. [5]), если для любой пары блоков $[i]_\pi$ и $[j]_\xi$ справедливо утверждение: либо один из данных блоков лежит в другом, либо они не пересекаются. Очевидно, случай $\pi \leqslant \xi$ также покрывается этим определением.

Предложение 3. $\Phi(\pi)\Phi(\xi) = \Phi(\xi)\Phi(\pi) \Leftrightarrow \pi$ *и* ξ *когерентны* .

Следующее предложение показывает, что естественный частичный порядок на $\mathrm{im}\,\Phi$ можно ввести несколькими эквивалентными способами.

Предложение 4. *Если $f, g \in \mathrm{im}\,\Phi$, то следующие утверждения эквивалентны:*

$$\text{a)}\quad f \sqsubseteq g,$$
$$\text{b)}\quad f \sqsubseteq_R g,$$
$$\text{c)}\quad fg = gf \;\;\&\;\; f \leqslant g.$$

Конструкция, использованная при доказательстве теоремы 1, легко переносится на счетный случай.

Предложение 5. *Утверждение теоремы* 1 останется справедливым, если в качестве M взять счетное множество.

Список цитированной литературы

1. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. М.: Мир, 1972. 256 с.

2. Шайн Б. М. Псевдополурешетки и псевдорешетки // Изв. вузов. Матем., 1972, № 2. с. 81–94.

3. Nambooripad K. S. S. Structure of regular semigroups I. Fundamental regular semigroups // Semigroup Forum, 1974, Volume 9, Issue 1. p. 354-363.

4. Clifford A. H. The partial groupoid of idempotents of a regular semigroup // Semigroup Forum, 1975, Volume 10, Issue 1. p. 262-268.

5. Шрейдер Ю. А. Равенство, сходство, порядок. М.: Наука, 1971. 256 с.

Волгоградский государственный социально-педагогический университет
Получено 16.04.2015

УДК 512.579

Стоуновы решетки конгруэнций алгебр одного класса мальцевских алгебр с оператором

А. Н. Лата (Волгоград)
alex.lata@yandex.ru

Пусть $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ — решетка с нулем 0. Элемент $l^* \in L$ называется псевдодополнением элемента $l \in L$, если $l \wedge l^* = 0$ и для любого элемента $x \in L$ равенство $l \wedge x = 0$ влечет $x \leqslant l^*$.

Дистрибутивная решетка с псевдодополнениями, удовлетворяющая тождеству Стоуна $l^* \vee l^{**} = 1$, называется стоуновой решеткой.

Элемент $p \neq 0$ решетки L с нулем 0 называется атомом, если для любого элемента $x \in L$ неравенство $0 \leqslant x \leqslant p$ влечет $x = 0$ или $x = p$. Двойственным образом определяется коатом решетки.

Решетка L с нулем 0 называется атомной, если для любого элемента $a \in L$, $a \neq 0$, существует атом $p \in L$, для которого $p \leqslant a$.

Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра $\langle A, \Omega \rangle$ сигнатуры $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 \neq \emptyset$, $\Omega_2 \neq \emptyset$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, множество Ω_1 произвольно, а множество Ω_2 состоит из унарных операций, которые действуют как эндоморфизмы относительно операций из Ω_1. Унарные операции из Ω_2 называются операторами, а операции из Ω_1 — основными операциями алгебры $\langle A, \Omega \rangle$.

Алгебра с операторами называется тернарной [1], если она имеет единственную основную операцию, и эта операция является тернарной.

Мальцевской называется тернарная операция d, удовлетворяющая тождествам Мальцева $d(x, y, y) = d(y, y, x) = x$. Универсальная алгебра называется мальцевской, если ее сигнатура содержит мальцевскую операцию.

Унаром с мальцевской операцией [2] называется алгебра $\langle A, d, f \rangle$ с унарной операцией f и тернарной операцией d, на которой истинны тождества Мальцева и тождество $f(d(x, y, z)) = d(f(x), f(y), f(z))$. Таким образом, унар с мальцевской операцией является тернарной мальцевской алгеброй с одним оператором.

В [2] показано, что на любом унаре $\langle A, f\rangle$ можно задать тернарную операцию p так, что алгебра $\langle A, p, f\rangle$ становится унаром с мальцевской операцией. Ее определение приведено ниже.

Пусть $\langle A, f\rangle$ — произвольный унар и $x, y \in A$. Для любого элемента x унара $\langle A, f\rangle$ через $f^n(x)$ обозначается результат n-кратного применения операции f к элементу x; при этом $f^0(x) = x$. Положим $M_{x,y} = \{n \in N \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, а также $k(x, y) = \min\ M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$ и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$p(x, y, z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) \leqslant k(y, z) \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \tag{1}$$

Пусть $n \in N$. В [3] на произвольном унаре $\langle A, f\rangle$ определяется бинарное отношение σ_n, по следующему правилу: $x\sigma_n y$ выполнено тогда и только тогда, когда $f^n(x) = f^n(y)$; положим $\sigma_0 = \triangle$. Там же на унаре $\langle A, f\rangle$ определяется бинарное отношение σ по правилу: $x\sigma y$ выполнено тогда и только тогда, когда $f^n(x) = f^n(y)$ для некоторого $n > 0$. Другие определения, используемые ниже, можно найти в [3].

Теорема 1. *Пусть $\langle A, p, f\rangle$ — унар с мальцевской операцией $p(x, y, z)$, определенной по правилу* (1). *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Если $\langle A, f\rangle$ не является связным унаром с одноэлементным подунаром, то σ — единственный коатом решетки $Con\langle A, p, f\rangle$.*
2. *Если $\langle A, f\rangle$ — связный унар глубины 1, имеющий одноэлементный подунар, то $\triangle$ — единственный коатом решетки $Con\langle A, p, f\rangle$.*
3. *Если $\langle A, f\rangle$ — связный унар конечной глубины $m > 1$, имеющий одноэлементный подунар,*

   то σ_{m-1} — единственный коатом решетки $Con\langle A, p, f\rangle$.
4. *Если $\langle A, f\rangle$ — связный унар бесконечной глубины, имеющий одноэлементный подунар, то $Con\langle A, p, f\rangle$ не имеет коатомов.*

Предложение 1. *Пусть $\langle A, p, f\rangle$ — унар с мальцевской операцией $p(x, y, z)$, определенной по правилу* (1). *Решетка $Con\langle A, p, f\rangle$ является геометрической тогда и только тогда, когда либо операция f инъективна, либо унар $\langle A, f\rangle$ содержит такой элемент a, что $f(x) = a$ для любого $x \in A$.*

Предложение 2. *Пусть $\langle A, p, f\rangle$ — унар с мальцевской операцией $p(x, y, z)$, определенной по правилу* (1). *Решетка $Con\langle A, p, f\rangle$ является атомной решеткой.*

Теорема 2. *Пусть $\langle A, p, f\rangle$ — унар с мальцевской операцией $p(x, y, z)$, определенной по правилу* (1). *Решетка $Con\langle A, p, f\rangle$ является стоуновой тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f\rangle$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

1. *операция f инъективна;*

2. *унар $\langle A, f\rangle$ изоморфен C_1^t, где $t \in N \cup \{\infty\}$;*

3. *$\langle A, f\rangle$ — связный периодический унар, имеющий единственный узловой элемент, который является циклическим;*

4. *$\langle A, f\rangle$ — связный непериодический унар, имеющий единственный узловой элемент;*

5. *унар $\langle A, f\rangle$ представляется как сумма одной компоненты связности из пунктов 2–4 и произвольного числа компонент с инъективной операцией.*

Следствие 1. *Решетка $Con\langle A, p, f\rangle$ стоунова решетка тогда и только тогда, когда алгебра $\langle A, p, f\rangle$ подпрямо неразложима.*

Предложение 3. *Пусть $\langle A, p, f\rangle$ — унар с мальцевской операцией $p(x, y, z)$, определенной по правилу (1). Решетка $Con\langle A, p, f\rangle$ является дуально стоуновой решеткой.*

Список цитированной литературы

1. Усольцев В. Л. О строго простых тернарных алгебрах с операторами // Чебышевский сб. 2013. Т. 14. Вып. 4(48). С. 196–204.

2. Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // Универсальная алгебра и ее приложения: Тез. сообщ. участ. междунар. семинара, посвящ. памяти проф. Моск. гос. ун-та Л.А. Скорнякова. Волгоград: Перемена, 1999. С. 31–32.

3. Усольцев В. Л. Простые и псевдопростые алгебры с операторами // Фунд. и прикл. матем. 2008. Т. 14. Вып. 7. С. 189–207.

Волгоградский государственный социально-педагогический университет
Получено 15.04.2015

UDK 519.171.2 + 519.175

The application of special types of groupoids for definition of graphs

M. N. Nazarov (Moscow)
Nazarov-Maximilian@yandex.ru

We consider an alternative way of representing arbitrary graphs using an operation that is defined on the set of graph's vertices. For the resulting groupoids we give description for congruences, ideals and subalgebras, and consider the practical application of this approach for data compression tasks.

Definition 1: *A classical graph* (or simply a *graph*) we will call a pair $G = (V, E)$, where the set of vertices V — is any arbitrary set, and the set of edges $E \subseteq V \times V$ — is a binary relation, for which holds:

1. $\forall a, b \in V \quad ((a, b) \in E \Rightarrow (b, a) \in E)$ — relation is symmetric;

2. $\forall a \in V \quad ((a, a) \notin E)$ — relation is antireflexive.

Definition 2: Let $G = (V, E)$ be a classical graph. We will call $(V, \circ)$ *a classical graph groupoid* by defining operation as follows:

$$\begin{cases} a \circ b = a, & \text{if } (a, b) \in E; \\ a \circ b = b, & \text{if } (a, b) \notin E. \end{cases}$$

In the course of [1] the description of ideals and congruences on graph group-oids $(V, \circ)$ was obtained. In particular, the following theorems were proven.

THEOREM 1. *Let $G = (V, E)$ be any arbitrary classical graph. Then for each $c \in V$ and any class $[a]$ of arbitrary congruence ρ will hold at least one of the three following conditions:*

1. $c \in [a]$;

2. $(c, a^*) \in E$ for all $a^* \in [a]$;

3. $(c, a^*) \notin E$ for all $a^* \in [a]$.

THEOREM 2. *The minimum left ideal I_L — is a connected component of graph. Any other left ideal will be a set union of this minimal ones.*

Definition 3: Let $G = (V, E)$ be a graph. We will call the subset of vertices $I \subset V$ a *complete component* of graph G, if for any $i \in I$ and $v \in V \setminus I$ there will be an edge $(i, v) \in E$ in graph G.

THEOREM 3. *The minimum right ideal I_R — is a complete component of graph. Any other right ideal is a set union of this minimal ones.*

THEOREM 4. *Any arbitrary left I_L (or right I_R) ideal on graph groupoid will be a class of some congruence ρ on this groupoid.*

THEOREM 5. *The graph groupoid of G will be a semigroup if and only if G — is either a complete graph K_n, or an empty graph O_n.*

Most often the adjacency matrix for the graph vertices is used to store graphs in the computer memory. Let us remind that adjacency matrix of graph G is a binary matrix $A_{n\times n}$, which is indexed by the set of vertices $V(G)$ and $A(x,y) = 1 \Leftrightarrow (x,y) \in E(G)$. Considering the efficiency of storage this approach will be substantially redundant. Much more effective representation of graphs in computer memory is achievable with the introduction of any bijective mapping $N : V \to \{1,\ldots,n\}$ on the set of vertices $V(G)$ ($|V| = n$). In this case, the pairs $(x_i, U(x_i))$ could be used for graph storage, where:

$$x_i : N(x_i) = i, \quad U(x_i) = \{y : (x,y) \in E(G) \wedge \forall j < i \; (y \notin U(x_j))\}\,.$$

In the article [1] it was proposed to store the factor-graphs G/ρ for maximal nontrivial congruence ρ and all nontrivial classed $[a]_\rho$ of this congruence as pairs $(x_i, U(x_i))$, instead of adjacency matrix of graph G.

REFERENCES

1. Nazarov M. N. On the representation of graphs in the form of a special type of binary algebra // Applied Discrete Mathematics. 2015. no. 1. P. 96–104.

National Research University of Electronic Technology
Received 14.04.2015

УДК 512.53

О натуральных частичных порядках на полугруппе

В. Б. Поплавский (Саратов)
poplavskivb@mail.ru

Частичный порядок, который был бы определён естественным образом операцией на полугруппе, впервые был введён для инверсных полугрупп В. В. Вагнером в 1952г [1]. Он определялся следующим образом:

$$a \leq b \longleftrightarrow aa^{-1}b = a,$$

где aa^{-1}- идемпотент, равный произведению инверсных элементов.

Почти через 30 лет появился целый ряд работ, в которых вводился натуральный порядок на классе регулярных полугрупп различными, но эквивалентными способами. Как показал Митч [2], на произвольной полугруппе S можно ввести частичный порядок следующим образом:

$$a \leq_M b \qquad \longleftrightarrow \qquad (\exists x, y \in S^1) \quad a = xa = xb = by. \qquad (1)$$

Легко проверяется справедливость следующего утверждения.

Предложение 1. *Определяющая эквивалентность (1) может быть заменена на следующую эквивалентность*

$$a \leq_M b \qquad \longleftrightarrow \qquad (\exists x, y \in S^1) \quad a = xb = by = xby.$$

Предложение 2. *Пусть $a, b \in S$, a и b - различны и сравнимы ($a \leq_M b$). Тогда они не могут порождать один и тот же главный односторонний идеал.*

Доказательство. Пусть a и b порождают один и тот же главный левый идеал. Тогда найдутся такие элементы $u, v \in S^1$, что

$$a = bu, \quad b = av. \qquad (2)$$

Пусть также $a \leq_M b$. Тогда из (1) и (2) получаем $a = xb = x(av) = xav$. С другой стороны,$b = av = (xa)v = xav$. Следовательно, $a = b$, что противоречит тому, что a и b различны.■

Пусть $\mathcal{J}$– отношение эквивалентности Грина на полугруппе, и $(a, b) \in \mathcal{J}$ означает совпадение главных двусторонних идеалов $S^1aS^1 = S^1bS^1$.

Определение 1. *Будем писать $a \leq_{\mathcal{J}} b$ тогда и только тогда, когда найдутся такие элементы $x, y \in S^1$, что $a = xby$ и, если a и b различны, то они порождают различные главные двусторонние идеалы ($\mathcal{J}$-классы).*

Предложение 3. *Бинарное отношение $\leq_{\mathcal{J}}$ является отношением частичного порядка на произвольной полугруппе S.*

Как связаны частичные порядки $\leq_M$ и $\leq_{\mathcal{J}}$? Как охарактеризовать те полугруппы, для которых они совпадают? Эти вопросы остаются открытыми.

Список цитированной литературы

1. Вагнер В.В. Обобщённые группы// Доклады АН СССР. 1952. Т. 84. С. 1119–1122

2. Mitsch H. A Natural Partial Order for Semigroups // Proceedings of the Amer. Math. Society. 1986. Vol.97, no. 3. P. 384–388.

Саратовский государственный университет
Получено 15.04.2015

УДК 501.1

О многообразиях частично упорядоченных полугрупп бинарных отношений с операцией рефлексивной двойной цилиндрофикации

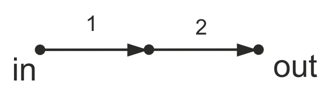
А. В. Попович, Д. А. Бредихин (Саратов)
popovich_al@mail.ru, bredikhin@mail.ru

Множество бинарных отношений Φ, замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру (Φ, Ω), называемую *алгеброй отношений*. Всякая такая алгебра может быть рассмотрена как упорядоченная $(\Phi, \Omega, \subset)$ отношением теоретико множественного включения $\subset$. Одной из важнейших операций над отношениями является операция умножения $\circ$. Алгебры отношений вида $(\Phi, \circ)$ и $(\Phi, \circ, \subset)$ образуют соответственно полугруппу и упорядоченную полугруппу отношений, и всякая полугруппа изоморфно представима полугруппами бинарных отношений. Вместе с операцией умножения отношений могут быть также рассмотрены и другие операции, несущие дополнительную информацию об этой полугруппе.

Операции над отношениями могут задаваться с помощью формул логики предикатов. Такие операции называются *логическими*. Логические операции могут быть классифицированы по виду задающих их формул. Важным классом логических операций над отношениями является класс диофантовых операций. Операция называется *диофантовой* [1, 2] (в другой терминологии – примитивно-позитивной [3]), если она может быть задана с помощью формулы, которая в своей предваренной нормальной форме содержит лишь операцию конъюнкции и кванторы существования.

Диофантовы операции описываются с помощью графов [1, 2, 3]. Пусть N – множество всех натуральных чисел. Помеченный граф – это пара вида $(V,\ E)$, где V – конечное множество, называемое множеством вершин, и $E \subseteq V \times N \times V$ – тернарное отношение. Тройку $(u, k, v) \in E$ будем называть ребром графа, идущим из вершины u в вершину v, помеченным меткой k, и графически изображать следующим образом: $u\cdot \xrightarrow{k} \cdot v$. Под двухполюсником мы понимаем помеченный граф с парой выделенных вершин, то есть систему вида $G = (V, E, in, out)$, где (V, E) – помеченный граф; in и out - две выделенные вершины, называемые входом и выходом двухполюсника соответственно.

Заметим, что двухполюсник, соответствующий операции $\circ$ умножения отношений, имеет следующий вид:



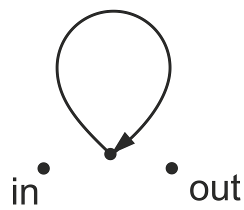
Сосредоточим свое внимание на операциях умножения отношений $\circ$ и рефлексивной двойной цилиндрофикации ∇. Операция ∇ определяется следующим образом:

$$\nabla(\rho) = \{(x, y) : (\exists z)(z, z) \in \rho\}.$$

Соответствующий ей двухполюсник, имеет вид:

Для заданного множества Ω операций над бинарными отношениями обозначим через $R\{\Omega\}$ класс алгебр, изоморфных алгебрам отношений с операциями из Ω. Пусть $Var\{\Omega\}$ — многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$.

Следующая теорема дает базис тождеств многообразия $Var\{\circ, \nabla\}$ алгебр,



порожденных операциями умножения отношений и рефлексивной двойной цилиндрофикации [4].

Теорема 1. *Алгебра* $(A, \cdot, ^*)$ *типа (2,1) принадлежит многообразию* $Var\{\circ, \nabla\}$ *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим тождествам:*

$$1)\ (xy)z = x(yz), \quad 2)\ (x^*)^2 = x^*, \quad 3)\ x^*xx^* = x^*, \quad 4)\ (x^*y)^2 = x^*y,$$

$$5)\ (xy^*)^2 = xy^*, \quad 6)\ (xy)^* = (yx)^*, \quad 7)\ x^*yz^* = z^*yx^*,$$

$$8)\ (xy^*z)^* = y^*zxy^*, \quad 9)\ x^*yx^*zx^* = x^*zx^*yx^*,$$

$$10)\ x^*(x^p)^* = x^* \text{ для любого простого числа } p.$$

Основным результатом работы является следующая теорема, которая дает базис тождеств многообразия $Var\{\circ, \nabla, \subset\}$ упорядоченных алгебр, порожденных операциями умножения отношений и рефлексивной двойной цилиндрофикации.

Теорема 2. *Частично упорядоченная алгебра* $(A, \cdot, ^*, \leq)$ *типа (2,1) принадлежит многообразию* $Var\{\circ, \nabla, \subset\}$ *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам 1),3)-9) из Теоремы 1 и следующим трем тождествам:*

$$xy^* \leq y^*, \quad x^*y \leq x^*, \quad x^* \leq (x^p)^* \text{ для любого простого числа } p.$$

Базисы тождеств в Теореме 1 и Теореме 2 являются бесконечными. Естественно возникает вопрос о конечной базируемости этих многообразий.

Теорема 3. *Многообразия* $Var\{\circ, \nabla, \}$ *и* $Var\{\circ, \nabla, \subset\}$ *не являются конечно базируемыми.*

Список цитированной литературы

1. Бредихин Д. А. О квазитождествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сибирский матем. журн. 1997. N 1. С. 29–41.

2. Бредихин Д. А. Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Доклады Российской Академии Наук 360. 1998. С. 594–595.

3. Böner F., Pöschel F.R. Clones of operations on binary relations. // Contributions to general algebras. 1991. Vol. 7. P. 50–70.

4. Бредихин Д. А., Попович А. В. Тождества полугрупп отношений с операцией двойной рефлексивной цилиндрофикации // Известия высших учебных заведений. Математика., 2014. № 8. С. 90–96.

Саратовский государственный университет
Получено 15.04.2015

УДК 512.577

Конечные формации унаров как категории

А. Л. Расстригин (Волгоград)
rasal@fizmat.vspu.ru

Формацией называется класс алгебраических систем, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений [1]. Формация называется конечной, если она состоит из конечных систем.

Унаром называется алгебраическая система с одной унарной операцией. Конечные формации унаров и решетки таких формаций по отношению включения изучались в [2, 3].

Пусть $\mathfrak{F}$ — произвольная непустая конечная формация унаров. Для формации $\mathfrak{F}$ можно рассматривать категорию $\mathrm{Alg}(\mathfrak{F})$: классом объектов $\mathrm{Ob}\,\mathrm{Alg}(\mathfrak{F})$ данной категории $\mathrm{Alg}(\mathfrak{F})$ является класс всех унаров формации $\mathfrak{F}$, а классом морфизмов $\mathrm{Mor}\,\mathrm{Alg}(\mathfrak{F})$ категории $\mathrm{Alg}(\mathfrak{F})$ — класс всех гомоморфизмов унаров формации $\mathfrak{F}$.

Теорема 1. *Непустые конечные формации унаров* $\mathfrak{F}_1$ *и* $\mathfrak{F}_2$ *совпадают тогда и только тогда, когда категории* $\mathrm{Alg}(\mathfrak{F}_1)$ *и* $\mathrm{Alg}(\mathfrak{F}_2)$ *эквивалентны.*

Список цитированной литературы

1. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989. 256 с.

2. Расстригин А. Л. Формации конечных унаров // Чебышевский сборник. 2011. Т. XII, № 2 (38). С. 102–109.

3. Jakubíková-Studenovská D., Pócs J. Formations of finite monounary algebras // Algebra universalis. 2012. Vol. 68, no. 3-4. P. 249–255.

Волгоградский государственный социально-педагогический университет
Получено 14.04.2015

УДК 512.548+512.571

О частичных алгебрах, у которых каждое отношение эквивалентности является конгруэнцией

А. В. Решетников (Москва)
a_reshetnikov@hush.com

Отображение $f : A' \to A$ называется *частичной n-арной операцией* на множестве A, если $A' \subseteq A^n$. Множество с заданными на нём частичными операциями называется *частичной универсальной алгеброй*. Множество с одной частичной бинарной операцией называется частичным группоидом.

Пусть A – частичная универсальная алгебра с набором частичных операций Σ. Отношение эквивалентности $\sigma \subseteq A^2$ называется *конгруэнцией* универсальной алгебры A, если для любой частичной операции $f \in \Sigma$ (арности n) и любых элементов a_1, ..., a_n, b_1, ..., $b_n \in A$ таких, что $(a_1, b_1) \in \sigma$, ..., $(a_n, b_n) \in \sigma$, выполняется следующее условие: из того, что $f(a_1, ..., a_n)$ и $f(b_1, ..., b_n)$ определены, следует, что $f(a_1, ..., a_n) \sim f(b_1, ..., b_n)$.

Частичная операция f на множестве A называется *константой*, если $|f(A, A, ..., A)| \leqslant 1$. Частичная операция f – *проекция*, если существует такое i, что для всех x_1, ..., x_i, ..., $x_n \in A$ значение $f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$ либо не определено, либо равно x_i.

В работе [1] были доказана теорема 3.3, характеризующая обычные (полные) универсальные алгебры, у которых каждое отношение эквивалентности является конгруэнцией:

Теорема 1. *Пусть A – универсальная алгебра с набором операций Σ. Все отношения эквивалентности на алгебре A являются её конгруэнциями в том и только том случае, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

(i) $|A| \leqslant 2$;

(ii) каждая операция $f \in \Sigma$ является константой или проекцией.

Автор выдвигает гипотезу, что данная теорема справедлива для достаточно широкого класса частичных универсальных алгебр. А именно, пусть A – частичная универсальная алгебра с набором частичных операций Σ. Пусть для любой частичной операции $f \in \Sigma$ (арности n) выполняется следующее условие: для любого i, для всех элементов x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., $x_n \in A$ значение $f(x_1,...,$ x_{i-1}, y, x_{i+1}, ..., $x_n)$ определено по крайней мере для трёх различных значений y. Тогда будем говорить, что частичная универсальная алгебра A принадлежит классу K. Гипотеза заключается в том, что теорема 1 справедлива для любой частичной универсальной алгебры из класса K. В работе [2] эта гипотеза была доказана для случая частичных группоидов (из класса K).

Список цитированной литературы

1. Кожухов И. Б., Решетников А. В. Алгебры, у которых все отношения эквивалентности являются конгруэнциями // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Т. 16, № 3. С. 161–192.

2. Решетников А. В. О частичных группоидах, у которых каждое отношение эквивалентности является конгруэнцией. // Вестник Московской государственной академии делового администрирования. Серия: Философские, социальные и естественные науки. 2011. № 5. С. 166–170

Московский институт электронной техники, кафедра высшей математики – 1
Получено 17.04.2015

УДК 511.335

Кольца формальных матриц и обобщения алгебр инцидентности

Д. Т. Тапкин (Казань)
danil.tapkin@yandex.ru

Алгебры инцидентности были введены в середине 60-ых годов как естественная среда для изучения комбинаторных проблем. Вскоре стало ясно, что этот объект интерестен и сам по себе. В частности он включает в себя произведение n копий кольца R и кольцо верхнетреугольных матриц над R. Существует тесная связь между алгебрами инцидентности и подалгебрами кольца матриц над полем. При изучении строения колец формальных матриц естественным образом возникает конструкция обобщающая алгебры инцидентности.

Все кольца будем считать ассоциативными и с единицей, а модули и бимодули - унитарными. Радикал Джекобсона и группу обратимых элементов кольца R будем обозначать $J(R)$ и $U(R)$ соответственно.

Определение 1. *Пусть дано коммутативное кольцо R и множество X с отношением $\leq$. Пусть также дан набор*
$\eta \supseteq \{\eta_{abc} \in R \,|\, a \leq b \leq c,\ a, b, c \in X\}$ *элементов кольца R, такой что выполняются следующие свойства:*
a) $a \leq a$, $\forall a \in X$ (рефлексивность);
b) $a \leq b$, $b \leq c$, $\eta_{abc} \neq 0$ влечет $a \leq c$ (η-транзитивность);
c) множество $\{z \,|\, x \leq z \leq y$ и $\eta_{xzy} \neq 0\}$ конечно $\forall x, y \in X$ (обобщенная локальная конечность).
Также потребуем чтобы
1) $\forall a, b \in X$, $\eta_{abb}, \eta_{aab} \in \eta$ и $\eta_{abb} = \eta_{aab} = 1$;
2) $\forall a \leq b \leq c \leq d \in X$, $\eta_{abc}, \eta_{acd}, \eta_{abd}, \eta_{bcd} \in \eta$ и $\eta_{abc}\eta_{acd} = \eta_{abd}\eta_{bcd}$.
Такое множество η будем называть мультипликативной системой, а коэффициенты $\eta_{abc} \in \eta$ - мультиплиативными коэффициентами. Рассмотрим множество $I(X, R; \{\eta_{abc}\}) = \{f : X \times X \to R \,|\, f(x, y) = 0$ если $x \not\leq y\}$. Введем на нем поэлементную операцию сложения и умножения на скаляр. А операцию умножения определим по правилу:
$(f \cdot g)(x, y) = \sum\limits_{x \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y)\eta_{xzy}$.
Непосредственная проверка показывает, что относительно введенных операций множество $I(X, R; \{\eta_{abc}\})$ становится ассоциативной R-алгеброй, которую будем называть обобщенной алгеброй инцидентности. Отношение '$\leq$' будем называть η-предпорядок. Если же дополнительно выполняется свойство
d) $a \leq b$, $b \leq a$, $\eta_{aba} \neq 0$ влечет $a = b$ (η-антисимметричность),
то будем говорить что на X задан частичный η-порядок.

Замечание 1. *Если все мультипликативные коэффициенты в приведенном выше определении равны 1, то получаем классическую алгебру инцидентности. А если $a < b$, $\forall a, b \in X$, то получаем кольцо формальных матриц со значением в кольце R.*

На полученную структуру переносятся следующие классические результаты:

Предложение 1. *Если множество X частично η-упорядочено, то $f \in I(X, R; \eta)$ обратим если и только если $f(x, x)$ обратим в R для каждого $x \in X$.*

Предложение 2. *Пусть F - поле и S - подалгебра кольца формальных матриц $M_n(F; \eta)$. Тогда найдется частично η-упорядоченное множество X порядка n такое что $I(X, F; \eta) \cong S$ если и только если*
1) S содержит n взаимно ортогональных идемпотентов;
2) $\frac{S}{J(S)}$ коммутативно.

Предложение 3. *Пусть F - поле, X - частично η-упорядоченное множество, а Y - частично μ-упорядоченное множеств. Тогда если $I(X, F; \eta) \cong I(Y, F; \mu)$, то найдутся изоморфизм $\varphi : X \to Y$ и функция $g : Y \times Y \to F^*$, такая что*
$\eta_{xyz}\, g(\varphi(x)\varphi(z)) = \mu_{\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)}\, g(\varphi(x)\varphi(y))\, g(\varphi(y)\varphi(z))$, *для любых $x \leq y \leq z \in X$.*

Здесь и далее будем считать что множество X конечно, $|X| = n$ и K - поле. Положим $M = I(X, K; \eta)$ и $\tau \in S_n$. Функцию $g : X \times X \to K$ будем называть *η-τ-транзитивной*, если $g(i, j) = 0$ при $i \not\leq j$ и $g(i, j) \in K^*$ иначе, и для любых $i \leq j \leq k$ имеем $\eta_{ijk}\, g(i, j)g(j, k) = \eta_{\tau^{-1}(i)\tau^{-1}(j)\tau^{-1}(k)}\, g(i, k)$.

Пусть перестановка τ такова, что $i \leq j \Leftrightarrow \tau(i) \leq \tau(j)$ и $\eta_{ijk} \neq 0 \Leftrightarrow \eta_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)} \neq 0$. Каждая такая η-τ-транзитивная функция g индуцирует автоморфизм α_g алгебры M, действующий по правилу: $E_{ij} \mapsto g(\tau(i), \tau(j))E_{\tau(i),\tau(j)}$. Такие автоморфизмы будем называть мультипликативно-перестановочными, или коротко - mp-автоморфизмами. Множество всех таких автоморфизмов обозначим: $\mathrm{Mult}(M)$.

В теории классических алгебр инцидентности выделяют два подкласса автоморфизмов: перестановочные $(i < j \Rightarrow g(i, j) = 1)$ и мультипликативные $(\tau = e)$. В работах [2] и позднее, используя иной метод, [1] было показано что в случае полупростой алгебры инцидентности каждый автоморфизм представим в виде композиции внутреннего и перестановочного. А в общем случае - в виде композиции внутреннего, перестановочного и мультипликативного. В случае обобщенных алгебр инцидентности ситуация уже сложнее.

Пусть дано произвольное отображение $h : X \to U(R)$. Тогда функция g_h, где $g_h(i, j) = \begin{cases} \frac{h(i)}{h(j)}, & i < j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$, является η-e-транзитивной. Такие функции будем называть *дробными*. Обозачим $\mathrm{Frac}(I(X, R; \eta)) = \{\alpha_{g_h} \mid g_h \text{ - дробная}\}$.

Предложение 4. *Пусть множество $X = \{1, ..., n\}$ снабжено частичным η-порядком, K - поле и $M = I(X, K; \eta)$. Тогда* $\mathrm{Frac}(M) = \mathrm{Mult}(M) \cap \mathrm{Inn}(M)$.

Теорема 1. *Пусть множество X конечно и K - поле. Если алгебра $M = I(X, K; \eta)$ полупроста и $\varphi \in \mathrm{Aut}(M)$, то мы можем написать $\varphi = \psi \circ \alpha_g$, где ψ - внутренний автоморфизм, а α_π - mp-автоморфизм.*

Теорема 2. *Пусть $M = I(\{x_i\}_1^n, K; \eta)$ - обобщенная алгебра инцидентности над полем K, снабженная η-предпорядком. Пусть $\varphi \in Aut(M)$. Тогда $\varphi = \psi \circ \alpha_g$, где ψ - внутрений автоморфизм, а α_g - mp-автоморфизм.*

Список цитированной литературы

1. Akkurt M., Akkurt E., Barker G. P. Automorphisms of structural matrix algebras // Operators and Matrices. 2013. no. 7. P. 431–439

2. Coelho S. P., The automorphism group of structural matrix algebra // Linear Algebra and its Appl. 1993. Vol. 195, P. 35–38

Казанский (Приволжский) Федеральный Университет

Получено 16.04.2015

УДК 512.562

О регулярности полугруппы многозначных преобразований, сохраняющих заданное бинарное отношение

А. В. Творогов, В. А. Ярошевич (Москва)
alex69tver@mail.ru, v-yaroshevich@yandex.ru

Пусть $\sigma \subseteq X \times X$ — бинарное отношение на множестве X и $\alpha \in T(X)$ — отображение X в X.

Определение 1. *Отображение α сохраняет σ, если*

$$\forall x, y \in X \quad (x, y) \in \sigma \Rightarrow (x\alpha, y\alpha) \in \sigma.$$

Отображение α можно рассматривать как бинарное отношение:

$$(x, y) \in \alpha \quad \Leftrightarrow \quad x\alpha = y. \tag{1}$$

Несложно проверить ([1, предложение 1]), что свойство отображения α сохранять σ эквивалентно

$$\sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma \tag{2}$$

(в смысле произведения бинарных отношений).

Исследованию свойств полугруппы отображений $T_{\leqslant}(X)$, сохраняющих частичный порядок $\leqslant$, посвящено много работ. В работе [2] получено описание частично упорядоченных множеств X, у которых полугруппа изотонных преобразований $T_{\leqslant}(X)$ регулярна. В работе [1] были описаны упорядоченные и квазиупорядоченные множества X с регулярной полугруппой частичных изотонных преобразований $PT_{\leqslant}(X)$. В [3] описано строение частично упорядоченных множеств X, у которых полугруппа изотонных преобразований, сохраняющих порядок на множестве X, слабо регулярна в широком смысле.

Для частичного отображения $\alpha \in PT(X)$ множества X в X, сохраняющего σ, включение (2) неверно. В связи с этим можно определить двумя различными неэквивалентными способами, что означает фраза «$\alpha \in PT(X)$ сохраняет $\sigma \subseteq X \times X$». А именно,

Определение 2. *$\alpha \in PT(X)$ допустимо для $\sigma \subseteq X \times X$, если*

$$\forall x, y \in \operatorname{dom}\alpha = X\alpha^{-1} \qquad (x, y) \in \sigma \Rightarrow (x\alpha, y\alpha) \in \sigma.$$

Определение 3. *$\alpha \in PT(X)$ согласуется с $\sigma \subseteq X \times X$, если*

$$\sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma.$$

Пусть $PT_\sigma(X) = \{\alpha \in PT(X) |\ \alpha$ допустимо для $\sigma\}$, $\widetilde{PT}_\sigma(X) = \{\alpha \in PT(X) |\ \alpha$ согласуется с $\sigma \subseteq X \times X\}$. Очевидно, $PT_\sigma(X)$ и $\widetilde{PT}_\sigma(X)$ — моноиды, являющиеся подмоноидами моноида $PT(X)$. В [1, предложение 2] доказано, что $\widetilde{PT}_\sigma(X) \subseteq PT_\sigma(X)$.

Рассмотрим теперь более общий случай многозначных отображений. Всякое многозначное отображение α аналогично (1) можно рассматривать как бинарное отношение. Понятие многозначного отображения обобщает понятие частичного отображения, поэтому появляется более широкий простор для того, как понимать сохранение бинарного отношения σ при многозначном отображении. Предложим три определения.

Определение 4. *Бинарное отношение $\alpha \in B(X)$ согласуется с σ, если $\sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma$.*

Определение 5. *Бинарное отношение $\alpha \in B(X)$ сохраняет σ в широком смысле, если*

$$\forall x, y \in X\ (x, y) \in \sigma \Rightarrow (\exists u \in x\alpha \quad \exists v \in y\alpha : (u, v) \in \sigma).$$

Определение 6. *Бинарное отношение $\alpha \in B(X)$ сохраняет σ в узком смысле, если*

$$\forall x, y \in X\ \forall u, v \in X\ (u \in x\alpha\ \&\ v \in y\alpha\ \&\ (x, y) \in \sigma \Rightarrow (u, v) \in \sigma).$$

Стоит отметить, что из сохранения σ в широком смысле в общем случае не следует сохранение σ в узком смысле. Множества бинарных отношений, удовлетворяющих каждому из последних трёх определений в отдельности, обозначим B_σ, B'_σ и B''_σ соответственно. Эти три множества являются полугруппами относительно операции умножения бинарных отношений. Далее сформулируем результаты, связанные с регулярностью этих полугрупп.

Теорема 1. *Для цепи X такой,что $|X| \geqslant 2$, полугруппа $B_\sigma(X)$ не является регулярной.*

Теорема 2. *Для любого отношения эквивалентности σ, заданного на множестве X таком,что $|X| \geqslant 3$, полугруппа $B_\sigma(X)$ является нерегулярной.*

Теорема 3. *Пусть X — множество с заданным бинарным отношением σ и $|X| \geqslant 3$. Тогда полугруппа бинарных отношений $B'_\sigma(X)$ нерегулярна.*

Теорема 4. *Пусть X — множество такое, что $|X| \geqslant 3$, а σ — заданное на X отношение эквивалентности. Полугруппа $B''_\sigma(X)$ регулярна в том и только в том случае, когда σ — отношение равенства на множестве X.*

Список цитированной литературы

1. Ярошевич В. А. О свойствах полугрупп частичных изотонных преобразований квазиупорядоченных множеств // Вестник МГАДА. 2011. № 3. С. 139–144.

2. *Айзенштат А. Я.* Регулярные полугруппы эндоморфизмов упорядоченных множеств // Уч. зап. Ленинградского гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена. 1968. Т. 387. С. 3–11.

3. Ким В. И., Кожухов И. Б., Ярошевич В. А. Слабо регулярные полугруппы изотонных преобразований // Фундамент. и прикл. матем. 2012. Т. 17. Вып. 4. С. 145–165.

Национальный исследовательский университет “МИЭТ”
Получено 29.04.2015

УДК 512.579

Гамильтоново простые алгебры одного класса мальцевских алгебр с оператором

В. Л. Усольцев (Волгоград)
usl2004@mail.ru

Универсальная алгебра A называется гамильтоновой [1], если носитель любой ее подалгебры является классом некоторой конгруэнции алгебры A.

Гамильтоновым замыканием [2] $\overline{B}$ подалгебры B универсальной алгебры A называется наименьшая подалгебра алгебры A, включающая в себя B и являющаяся классом некоторой конгруэнции алгебры A. Подалгебра B называется гамильтоново замкнутой, если $\overline{B} = B$.

Универсальная алгебра A называется гамильтоново простой [2], если гамильтоново замыкание любой ее неодноэлементной подалгебры совпадает с A.

Подалгебра B алгебры A называется подалгеброй Рисса [3], если объединение множества B^2 и отношения равенства на A есть конгруэнция алгебры A. Любая конгруэнция, представляющаяся как объединение B^2 и отношения равенства на A для некоторой подалгебры B алгебры A, называется конгруэнцией Рисса. Алгебра A называется алгеброй Рисса, если любая ее подалгебра является подалгеброй Рисса.

Гамильтоновость и гамильтонова простота являются, в некотором смысле, противоположными свойствами, поскольку любая подалгебра гамильтоновой алгебры гамильтоново замкнута. Проводя аналогию, можно ввести свойство, противоположное свойству быть алгеброй Рисса. Назовем универсальную алгебру риссово простой, если любая ее конгруэнция Рисса является тривиальной. Определение корректно, так как в случае отсутствия у алгебры одноэлементных подалгебр, можно рассматривать как подалгебру пустое множество, которое, очевидно, является подалгеброй Рисса. Отсюда, нулевая конгруэнция всегда является конгруэнцией Рисса.

Универсальная алгебра называется идемпотентной, если любое одноэлементное подмножество ее носителя является ее подалгеброй.

Алгеброй с операторами называется универсальная алгебра с дополнительной системой операторов — унарных операций, действующих как эндоморфизмы относительно основных операций.

Пусть $\langle A, f\rangle$ — произвольный унар. Для любого элемента $z \in A$ через $f^n(z)$ обозначим результат n-кратного применения операции f к элементу z; также положим $f^0(z) = z$. Через C_h^t $(h > 0, t \geq 0)$ обозначается унар $\langle a | f^t(a) = f^{t+h}(a)\rangle$.

Унар $\langle A, f\rangle$ называется связным, если для любых $x, y \in A$ выполняется условие $f^n(x) = f^m(y)$ для некоторых $n, m \geq 0$. Максимальный по включению связный подунар унара A называется компонентой связности унара A. Элемент a унара называется неподвижным, если $f(a) = a$.

Предложение 1. *Пусть $\langle A, \Omega\rangle$ — произвольная идемпотентная алгебра с оператором $f \in \Omega$. Если алгебра $\langle A, \Omega\rangle$ является гамильтоново простой, то унар $\langle A, f\rangle$ либо изоморфен C_1^0, либо содержит такой элемент a, что $f(x) = a$ для всех $x \in A$, либо несвязен и не содержит неодноэлементную компоненту связности, имеющую неподвижный элемент.*

Унаром с мальцевской операцией [4] называется алгебра $\langle A, d, f\rangle$ с оператором f, где $d(x, y, z)$ — тернарная операция, для которой выполнены тождества Мальцева $d(x, y, y) = d(y, y, x) = x$. В [4] на любом унаре $\langle A, f\rangle$ так задается тернарная операция $p(x, y, z)$, что алгебра $\langle A, p, f\rangle$ становится унаром с мальцевской операцией. Определение этой операции приведено ниже.

Пусть $\langle A, f\rangle$ — произвольный унар и $x, y \in A$. Положим $M_{x,y} = \{n \in \mathrm{N} \cup \{0\} \mid f^n(x) = f^n(y)\}$, а также $k(x, y) = \min\ M_{x,y}$, если $M_{x,y} \neq \emptyset$ и $k(x, y) = \infty$, если $M_{x,y} = \emptyset$. Положим далее

$$p(x, y, z) \stackrel{def}{=} \begin{cases} z, & \text{если } k(x, y) \leqslant k(y, z) \\ x, & \text{если } k(x, y) > k(y, z). \end{cases} \tag{1}$$

В [5] были полностью описаны гамильтоновы алгебры в классе алгебр $\langle A, p, f\rangle$, определенных выше.

Теорема 1. *Алгебра $\langle A, p, f\rangle$ с оператором f, где p — операция, определенная по правилу (1), является гамильтоново простой тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*
1) в случае связности унара $\langle A, f\rangle$, он либо не содержит неподвижных элементов, либо, если он имеет неподвижный элемент a, то $f(x) = a$ для любого $x \in A$;
2) в случае несвязности унара $\langle A, f\rangle$, он не содержит неодноэлементных компонент связности, имеющих неподвижные элементы.

Теорема 2. *Алгебра $\langle A, p, f\rangle$ с оператором f, где p — операция, определенная по правилу (1), является алгеброй Рисса тогда и только тогда, когда унар $\langle A, f\rangle$ изоморфен одному из следующих унаров:*
1) C_n^0 для некоторого $n > 0$;
2) $C_1^0 + C_1^0$;
3) C_1^t, для некоторого $t \in N \cup \{\infty\}$.

Следствие 1. *Алгебра $\langle A, p, f\rangle$ с оператором f, где p — операция, определенная по правилу (1), является алгеброй Рисса тогда и только тогда, когда она является гамильтоновой.*

Предложение 2. *Алгебра $\langle A, p, f\rangle$ с оператором f, где p — операция, определенная по правилу (1), является риссово простой тогда и только тогда, когда она является гамильтоново простой.*

Список цитированной литературы

1. Csákány B. Abelian properties of primitive classes of universal algebras // Acta. Sci. Math. 1964. Vol. 25. P. 202–208.

2. Пинус А. Г. Гамильтоново замыкание на универсальных алгебрах // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 3 (325). С. 610–616.

3. Tichy R. F. The Rees congruences in universal algebras // Publ. Inst. Math. (Beograd). 1981. Vol. 29. P. 229–239.

4. Карташов В. К. Об унарах с мальцевской операцией // Межд. сем. "Унив. алгебра и ее приложения": Тез. сообщ. Волгоград, 1999. С. 31–32.

5. Усольцев В. Л. О гамильтоновых тернарных алгебрах с операторами // Чебышевский сб. 2014. Т. 15, вып. 3. С. 100–113.

Волгоградский государственный социально-педагогический университет
Получено 15.04.2015

УДК 512. 548

Конечные полуабелевы n-арные группы

Н. А. Щучкин (Волгоград)
nikolaj_shchuchkin@mail.ru

Алгебру $\langle G, f\rangle$ с n-арной операцией f $(n \geq 3)$ называют n-арной группой, если в ней для всех $j = 1, \ldots, n$ разрешимо и имеет единственное решение каждое из уравнений $f(a_1,\ldots,a_{j-1},x_j,a_{j+1},\ldots,a_n)=b$ для любых $a_1,\ldots,a_{j-1},a_{j+1},\ldots$ $\ldots,a_n,b$ из G и выполняется обобщенный закон ассоциативности

$$f(f(a_1,\ldots,a_n),a_{n+1},\ldots,a_{2n-1})=f(a_1,\ldots,a_i,f(a_{i+1},\ldots,a_{i+n}),a_{i+n+1},\ldots,a_{2n-1})$$

для всех $i=1,\ldots,n-1$ (см. стр. 52, [1]).

n-Арными аналогами абелевой группы являются абелева и полуабелева n-арные группы. n-Арная группа называется полуабелевой, если в ней верно тождество $f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n)=f(x_n,x_2,\ldots,x_{n-1},x_1)$. Если же в n-арной группе верны тождества $f(x_1,\ldots,x_n)=f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$ для любой подстановки $\sigma\in S_n$, то ее называют абелевой. Ясно, что любая полуабелева n-арная группа является абелевой, обратно неверно.

Для конечной полуабелевой n-арной группы верна

Теорема 1. *. Любая полуабелева n-арная группа $\langle G,f\rangle$ порядка $|G|=p_1^{\alpha_1}\cdot$ $\cdot p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ изоморфна прямому произведению*

$$\langle G_1,f_1\rangle\times\langle G_2,f_2\rangle\times\ldots\times\langle G_k,f_k\rangle$$

n-арных групп $\langle G_i,f_i\rangle$, где $|G_i|=p_i^{\alpha_i}$, p_i – различные простые числа.

Важным дополнением к теореме 1 служит

Теорема 2. *. Если полуабелева n-арная группа $\langle G,f\rangle$ порядка $|G|=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdot$ $\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ изоморфна двум прямым произведениям*

$$\langle G_1,f_1\rangle\times\langle G_2,f_2\rangle\times\ldots\times\langle G_k,f_k\rangle,\quad \langle G'_1,f'_1\rangle\times\langle G'_2,f'_2\rangle\times\ldots\times\langle G'_k,f'_k\rangle$$

n-арных групп $\langle G_i,f_i\rangle$ и $\langle G'_i,f'_i\rangle$ порядков $|G_i|=|G'_i|=p_i^{\alpha_i}$, то $\langle G_i,f_i\rangle\cong\langle G'_i,f'_i\rangle$ для всех $i=1,2,\ldots,k$.

На полуабелевой n-арной группе $\langle G,f\rangle$ определяют абелеву группу $\langle G,+\rangle$, где $a+b=f(a,c,\ldots,c,\bar{c},b)$ для фиксированного элемента c из G. Тогда для элемента $d=f(c,\ldots,c)$ и отображения $\varphi(x)=f(c,x,c,\ldots,c,\bar{c})$, которое является автоморфизмом группы $\langle G,+\rangle$, верны равенства

$$\varphi(d)=d,\quad \varphi^{n-1}(x)=x \text{ для любого } x\in G, \tag{1}$$

$$f(a_1,\ldots,a_n)=a_1+\varphi(a_2)+\ldots+\varphi^{n-2}(a_{n-1})+a_n+d. \tag{2}$$

Группу $\langle G,+\rangle$ называют ретрактом n-арной группы $\langle G,f\rangle$ и обозначают $ret_c\langle G,f\rangle$.

Любые два ретракта одной и той же n-арной группы изоморфны [2],[3]. Отметим, что для абелевой n-арной группы $\langle G,f\rangle$ автоморфизм φ будет тождественным.

Верно и обратно: в любой абелевой группе $\langle G,+\rangle$ для выбранных автоморфизма φ и элемента d с условиями (1) задается полуабелева n-арная группа

$\langle G, f\rangle$, где f действует по правилу (2). n-Арную группу $\langle G, f\rangle$ в этом случае называют (φ, d)-определенной на группе $\langle G, +\rangle$. Среди всех полуабелевых n-арных групп выделим полуциклические, у которых ретракт является циклической группой [4].

В теории конечных абелевых групп неразложимыми являются примарные циклические группы и только они, которые служат компонентами прямого разложения конечной абелевой группы. В теории конечных полуабелевых n-арных групп известно (Предложение 13, [5]), что примарная полуциклическая n-арная группа является неразложимой. Но, в отличии от групп, среди конечных полуабелевых n-арных групп имеются и другие неразложимые n-арные группы.

Какие же конечные полуабелевы n-арные p-группы являются неразложимыми? На этот вопрос мы ответим в следующей теореме.

Автоморфизм ψ конечной абелевой p-группы $\langle G, +\rangle$ назовем разложимым, если группу $\langle G, +\rangle$ можно представить в виде прямой суммы

$$\langle G, +\rangle = \langle G_1, +\rangle \oplus \ldots \oplus \langle G_k, +\rangle$$

своих собственных подгрупп $\langle G_i, +\rangle$ (не обязательно циклических), так, чтобы ограничение ψ_{G_i} этого автоморфизма на каждую подгруппу $\langle G_i, +\rangle$ было бы автоморфизмом этой подгруппы.

Теорема 3. *. Конечная полуабелева n-арная p-группа $\langle G, f\rangle$ является разложимой тогда и только тогда, когда автоморфизм φ ретракта*

$$\langle G, +\rangle = ret_c\langle G, f\rangle$$

этой n-арной группы, действующий по правилу

$$\varphi(x) = f(c, x, c, \ldots, c, \bar{c}),$$

сопряжен (в группе автоморфизмов этого ретракта) некоторому разложимому автоморфизму.

Следствие 1. *(Предложение 13, [5]). Любая полуциклическая n-арная p-группа является неразложимой.*

Следствие 2. *(Теорема 8, [6]). Любая конечная абелева n-арная p-группа изоморфна прямому произведению абелевых полуциклических n-арных p-групп.*

Таким образом, среди конечных абелевых n-арных p-групп неразложимыми являются только полуциклические, остальные изоморфны прямым произведениям этих полуциклических n-арных p-групп. Для конечных полуабелевых n-арных групп ситуация иная. Конечная полуабелева неразложимая n-арная p-группа может не быть полуциклической, а значит, если конечная полуабелева n-арная p-группа изоморфна прямому произведению неразложимых n-арных p-групп меньших порядков, то каждый из множителей этого прямого произведения не обязательно является полуциклической n-арной группой.

Список цитированной литературы

1. Курош А. Г. Обща алгебра. Лекции 1969-1970 уч. года. М.: Наука. 1974.

2. Л. М. Глускин. Позиционные оперативы // Мат. сборник. 1965. Т. 68(110), №3. С 444–472.

3. M. Hosszu. On the explicit form of n-group operacions // Publ. Math. 1963. Vol. 10. №1-4. P. 88–92.

4. А. М. Гальмак. n-Арные группы. Часть I. — Гомель.: Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины, 2003.

5. Щучкин Н. А. Полуциклические n-арные группы // Известия ГГУ им. Ф. Скорины (2009) Т. 3 (54). С. 186–194.

6. Бощенко А. П., Щучкин Н. А. Конечные абелевы n-арные группы // Чебышевский сборник. 2011. Т. XII, вып. 2(38). С. 5–14.

Волгоградский государственный социально-педагогический университет
Получено 15.04.2015

3. Кольца и модули

Новые результаты в теории колец отражают современную тенденцию создания единой теории колец (ассоциативных и неассоциативных) и соответствующей теории представлений. Значительное внимание уделено обобщениям теории колец (полукольца, почтикольца), возникающие в приложениям, а также кольцам с дополнительными структурами (топологическим, упорядоченным, градуированным, фильтрованным).

В программе секции отметим результаты связанные с супералгебрами Ли и близкими классами алгебр, комбинаторными методами (рост алгебр), а также с развитием структурных методов (радикалов, алгебр частных).

УДК 512.505

Кольца формальных матриц, близкие к регулярным

А. Н. Абызов (Казань)
aabyzov@kpfu.ru

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули – унитарными.

Напомним определение кольца формальных матриц. Пусть даны два кольца R и S, R-S-бимодуль M, S-R-бимодуль N и бимодульные гомоморфизмы $\varphi\colon M\otimes_S N\to R$, $\psi\colon N\otimes_R M\to S$, для которых выполнены равенства ассоциативности $\varphi(mn)m'=m\psi(nm')$ и $\psi(nm)n'=n\varphi(mn')$ для всех $m,m'\in M$ и $n,n'\in N$. В дальнейшем мы будем придерживаться следующих обозначений $\varphi(m\otimes n)=mn$ и $\psi(n\otimes m)=nm$ для всех $m\in M$, $n\in N$. Непосредственная проверка показывает, что множество матриц вида $K=\{\begin{pmatrix} r & m\\ n & s\end{pmatrix}\mid r\in R, s\in S, m\in M, n\in N\}$ относительно матричных операций сложения и операции умножения является кольцом. Кольцо K называется *кольцом формальных матриц* и также обозначается через $\begin{pmatrix} R & M\\ N & S\end{pmatrix}$. При этом упорядоченный набор (R,S,M,N,φ,ψ) называется Морита контекстом, или ситуацией предэквивалентности.

Кольцо R называется *полуартиновым справа*, если каждый ненулевой правый R - модуль содержит простой подмодуль. Если над кольцом R каждый ненулевой правый модуль содержит максимальный подмодуль, то кольцо R называется *правым max - кольцом* .

Теорема 1. *Для кольца формальных матриц* $K=\begin{pmatrix} R & M\\ N & S\end{pmatrix}$ *следующие условия равносильны:*

1) K — *полуартиново справа кольцо;*

2) R, S — *полуартиновы справа кольца.*

Теорема 2. *Для кольца формальных матриц* $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ *следующие условия равносильны:*

1) K — *правое max - кольцо;*

2) R, S — *правые max - кольца.*

Описание совершенных справа колец формальных матриц $\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ было получено в работе [1] в случае, когда $MN = 0, NM = 0$, и в работе [2] в случае, когда правые модули M_S, N_R являются конечно порожденными.

Теорема 3. *Для кольца формальных матриц* $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ *следующие условия равносильны:*

1) K — *совершенное слева кольцо;*

2) R, S — *совершенные слева кольца.*

Пусть $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ — кольцо формальных матриц. Бимодуль M называется N — регулярным (соотв. N — вполне идемпотентным справа), если для каждого $m \in M$ выполнено условие $m \in mNm$ (соотв. $m \in mNmS$). Аналогично определяются понятия M - регулярности и M - вполне идемпотентности справа бимодуля N.

Кольцо, над которым каждый простой правый модуль является инъективным, называется *правым* V *- кольцом.* Кольцо R называется правым SV *- кольцом,* если R — полуартиново справа правое V - кольцо.

Теорема 4. *Пусть* $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ *— кольцо формальных матриц. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) K — *правое* V *- кольцо;*

(2) R, S — *правые* V *- кольца, модуль* M *-* N *- вполне идемпотентен и модуль* N *-* M *вполне идемпотентен.*

Следствие 1. *Пусть* $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ *— кольцо формальных матриц. Если* R, S *— коммутативные кольца, то следующие условия равносильны:*

(1) K — правое V - кольцо;

(2) K — регулярное кольцо.

Теорема 5. *Пусть $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ — кольцо формальных матриц. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) K — правое SV - кольцо;

(2) R, S — правые SV - кольца, модуль M — N - регулярен и модуль N — M регулярен;

(3) R, S — правые SV - кольца, модуль M — N - вполне идемпотентен и модуль N — M - вполне идемпотентен.

Следствие 2. *Пусть $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ — кольцо формальных матриц. Если K — регулярное кольцо, то следующие условия равносильны:*

(1) K — правое SV - кольцо;

(2) R, S — правые SV - кольца.

Список цитированной литературы

1. Крылов П. А., Туганбаев А. А. Модули над кольцами формальных матриц // Фундамент. и прикл. математика. 2009. Т. 15, № 8. С. 145–211.

2. Tang G., Li C., Zhou Y. Study of Morita contexts // Comm. Algebra. 2014. Vol. 42, no. 4. P. 1668–1681.

Казанский (приволжский) федеральный университет.
Получено 14.04.2015

УДК 512.558

Неидемпотентные циклические полукольца

А. С. Бестужев[1] (Киров)
bestuzhev.85@mail.ru

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ, проект № 1.1375.2014/K.

Полукольцом называется алгебраическая структура $< S,\ +,\ \cdot\ ,\ 0,\ 1 >$, в которой $< S,\ +,\ 0 >$ — коммутативный моноид, $< S,\ \cdot,\ 1 >$ — полугруппа, выполняются законы дистрибутивности умножения $\cdot$ относительно сложения $+$, и тождественно $s \cdot 0 = 0 \cdot s = 0$.

Мультипликативно циклическим полукольцом называется полукольцо, все элементы которого, кроме нуля 0 и единицы 1, являются натуральными степенями некоторого элемента a ($a \neq 0$ и $a \neq 1$), 0 и 1 могут являться, а могут и не являться натуральной степенью элемента a. В дальнейшем такие полукольца будем называть просто циклическими. Условимся считать, что $a^0 = 1$. Степенями элемента a могут быть только целые неотрицательные числа.

Строение полуколец, в которых нулевой элемент или единица являются натуральной степенью элемента a, известно.

В первом случая сложение в полукольце определяется законом:

$a^m + a^n = a^{min\{m,\ n\}}$ [1].

Во втором случае полукольцо является конечным полем.

В дальнейшем рассматриваются циклические полукольца, в которых ни единица 1, ни нулевой элемент 0 не являются натуральной степенью элемента a. В этом случае полукольцо будет устроено следующим образом:

$S = \{0,\ 1,\ a,\ \ldots,\ a^k\},\ a^{k+1} = a^k$.

Сумма любых двух элементов в полукольце отлична от нуля.

В таких полукольцах сумма $1+a^k$ может принимать одно из двух значений 1 или a^k. В первом случае $S\backslash\{0\}$ — циклическое полукольцо с нулевым элементом a^k. Во втором случае элемент a^k является поглощающим по сложению и по умножению:

$\forall n:\ 0 \leqslant n \leqslant k \Rightarrow a^n + a^k = a^k$.

Циклическое полукольцо называется неидемпотентным, если в нем $1+1 \neq 1$. В этом случае верное также: $a^t + a^t \neq a^t$, если $0 < t < k$.

Для классификации полуколец вводятся переменные m, n, и p такие, что в полукольце выполняются следующие равенства:

$a^m + a^{m+n} = a^{m+n+p}$; $a^{0,\ \ldots,\ k} + a^{m+n+1,\ \ldots,\ k} = a^{m+1,\ \ldots,\ k} + a^{m+n} = a^k$;

$k = m + n + p + 1$ (запись $a^{r,\ \ldots,\ s},\ s > r$ означает, что на ее месте может находиться любой из элементов $a^r,\ \ldots,\ a^s$).

Теорема 1. *Если в неидемпотентном циклическом полукольце с поглощающим элементом a^k выполняются равенства:*

$a^m + a^{m+n} = a^{m+n+p}$; $a^{0,\ \ldots,\ k} + a^{m+n+1,\ \ldots,\ k} = a^{m+1,\ \ldots,\ k} + a^{m+n} = a^k$;

$k = m + n + p + 1$, *— то: $p > 0$ и $p > m$.*

Возможен один из следующих пяти случаев:

- $m + n \leqslant p$
- $n \leqslant p < m + n$
- $p < n < m + p + 1$

- $n \geqslant m+p+1,\ 1+1 \neq a^n$
- $n \geqslant m+p+1,\ 1+1 \neq a^n$

Строение полуколец для первых четырех случаев известно. Для последнего, пятого случая найдены возможные значения сумм единицы со всеми элементами:

$1+a^{m+n+1} = \ldots = 1+a^k = a^k$
$1+a^{m+n} = a^{k-1,\ -,\ k}$
$\ldots$
$1+a^{m+n-r} = a^{k-(r+1),\ -,\ k},\ 0 \leqslant r \leqslant m-1$
$\ldots$
$1+a^{n+1} = a^{n+p+1,\ -,\ k}$
$1+a^n = a^{n+p}$
$1+a^{n-1} = a^{n+p,\ -,\ k}$
$\ldots$
$1+a^{n-s} = a^{n+p-(s-1),\ -,\ k},\ 1 \leqslant s \leqslant p-m$
$\ldots$
$1+a^{m+n-p} = a^{m+n+1,\ -,\ k}$
$\ldots$
$1+a^t = a^{m+n+1,\ -,\ k},\ m+1 \leqslant t \leqslant m+n-p$
$\ldots$
$1+a^{m+1} = a^{m+n+1,\ -,\ k}$
$1+a^m = a^{n+m,\ -,\ k}$
$\ldots$
$1+a^{m-u} = a^{m+n-u,\ -,\ k},\ 1 \leqslant u \leqslant m$
$\ldots$
$1+a = a^{m+1,\ -,\ k}$
$1+1 = a^n$

Запись $a^{r,\ -,\ s}$ означает, что на ее месте могут находиться только элементы из множества: $a^r,\ \ldots,\ a^s$. Приведенную выше структуру назовем таблицей возможных полуколец. Может оказаться, что не существует полукольца с одним из наборов сумм единицы со всеми элементами, допускаемых данной таблицей. Наша задача заключается в том, чтобы научиться определять, какие из структур, приведенных в таблице, являются полукольцами, а какие — нет.

Значения сумм: $1+a^{n+1,\ \ldots,\ n+m}$ и $1+a^{n-m,\ \ldots,\ n-m}$ — зависят от сумм вида: $1+a^{1,\ \ldots,\ m}$ — и определяются теоремой:

Теорема 2. *Положительные числа s и r такие, что $s+r \leqslant m$. Тогда:*

1. $1+a^s = a^{n+s} \Leftrightarrow 1+a^{n+s} = a^{n+s+p},\ 1+a^{n-s} = a^{n+p}$;
2. $1+a^s = a^{n+s+r} \Leftrightarrow 1+a^{n+s} = a^{n+s+r+p},\ 1+a^{n-s} = a^{n+r+p}$;
3. $1+a^s = a^{m+n+1,\ \ldots,\ k} \Leftrightarrow 1+a^{n+s} = a^k,\ 1+a^{n-s} = a^{k-s,\ \ldots,\ k}$.

Список цитированной литературы

1. Вечтомов Е. М., Лубягина И. В. // Циклические полукольца с идемпотентным некоммутативным сложением // Фундаментальная и прикладная математика. 2011/2012. Т. 17, вып. 9.

Вятский государственный гуманитарный университет
Получено 17.04.2015

УДК 512.556

Полукольца частичных функций

Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина[1] (Киров)
vecht@mail.ru, shishkina.en@mail.ru

I. *Полукольцом* называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$ с коммутативно-ассоциативной операцией сложения $+$ и ассоциативной операцией умножения $\cdot$, которая дистрибутивна относительно сложения с обеих сторон. Класс всевозможных полуколец образует многообразие.

Пусть S — полукольцо и X — произвольное множество. Положим:
S^X — множество всевозможных функций $X \to S$,
$SP^X = \cup\{SY : Y \subseteq X\}$ — множество всех частичных функций из X в S.
Множество S^X с поточечно заданными операциями сложения и умножения функций является полукольцом.

Через $D(f)$ обозначается область определения частичной функции f. На множестве SP^X определены полукольцевые операции по правилу: на $D(f + g) = D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g)$ функции $f + g$ и fg определяются поточечно. В результате множество SP^X становится полукольцом с *поглощающим* элементом $\varnothing$ — поглощающим как по умножению, так и по сложению $(+_\cap)$. Отношение

$$\rho_D : f\rho_D g \Leftrightarrow D(f) = D(g)$$

служит конгруэнцией на полукольце SP^X, причем, фактор-полукольцо SP^X/ρ_D является *моно-полукольцом*, изоморфным булеану $\langle B(X), \cap, \cap \rangle$ множества X, рассматриваемому с одной операцией $\cap$.

Пусть теперь на SP^X операция сложения $(+_\cup)$ задана формулой:
$D(f + g) = D(f) \cup D(g)$, $f + g$ определена поточечно на $D(f) \cap D(g)$,
$f + g = f$ на $D(f) \setminus D(g)$ и $f + g = g$ на $D(g) \setminus D(f)$, а умножение прежнее.
В этом случае элемент $\varnothing$ является *нулем* полукольца SP^X, а фактор-полукольцо SP^X/ρ_D будет булевой решеткой, изоморфной булеану
$\langle B(X), \cup, \cap \rangle$.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ, проект № 1.1375.2014/К.

Пусть S — полукольцо с единицей 1. Важную роль в полукольцах вида SP^X играют *идемпотенты* (по умножению) e_A, $A \subseteq X : D(e_A) = A$ и $e_A(x) = 1$ для всех $x \in A$. В частности, это идемпотенты $e_x = e_{\{x\}}$ при $x \in X$, $e_X = 1$ и $e_\varnothing = \varnothing$. Элемент e_A служит единицей полуколец S^A и SP^A. Полукольцо $SP^A = e_A SP^X$ является главным идеалом полукольца SP^X.

К любому полукольцу S можно внешним образом присоединить нуль 0 (поглощающий элемент ∞), в результате чего получим полукольцо $S \cup \{0\}$ ($S \cup \{\infty\}$) с нулем (соответственно, с поглощающим элементом).

Следующее утверждение показывает, что полукольца частичных функций изоморфны подходящим полукольцам (полных) функций.

Теорема 1. *Полукольцо $\langle SP^X, +_\cap, \cdot \rangle$ изоморфно полукольцу $(S \cup \{\infty\})^X$, а полукольцо $\langle SP^X, +_\cup, \cdot \rangle$ изоморфно полукольцу $(S \cup \{0\})^X$.*

Далее, для $X \supseteq B \supseteq A$ положим $\pi_{BA} : S^B \to S^A$ есть гомоморфизм ограничения: если $f \in S^B$, то $\pi_{BA}(f) = f_{|A} \in S^A$. Получаем *прямой спектр* полуколец (S^D, π_{BA}), $D \subseteq X$, над направленным упорядоченным множеством $\langle B(X), \supseteq \rangle$. *Прямым пределом* прямого спектра полуколец будет одноэлементное полукольцо $\{\varnothing\}$ с системой эпиморфизмов $\pi_{D\{\varnothing\}}$. Система (SP^D, π_{BA}) над направленным упорядоченным множеством $\langle B(X), \subseteq \rangle$ образует *обратный спектр* полуколец, *обратным пределом* которого служит полукольцо SP^X с системой эпиморфизмов π_{XD}. Кроме того, полукольцо SP^X с системой вложений $SP^D \subseteq SP^X$ является пределом (объединением) прямого спектра полуколец SP^D с гомоморфизмами вложения над $\langle B(X), \subseteq \rangle$.

Замечание 1. *1. Вместо булеана $B(X)$ можно рассматривать произвольную решетку множеств, не обязательно с наибольшим и/или наименьшим элементами.*

2. Для каждого индекса (точки) $x \in X$ можно взять свое полукольцо S_x. Если (Π, X) – пучок полуколец (S_x), то естественно рассматривать полукольцо $\Gamma'(\Pi, X)$ частичных сечений.

3. Для любых кольца S и непустого множества X полукольца частичных функций $\langle SP^X, +_\cap, \cdot \rangle$ и $\langle SP^X, +_\cup, \cdot \rangle$ не являются кольцами, но будут дизъюнктными объединениями колец функций S^Y по всем $Y \subseteq X$.

4. Класс мультипликативно идемпотентных полуколец S (то есть полуколец с тождеством $xx = x$) замкнут относительно взятия: полуколец частичных S-значных функций, прямых и обратных пределов.

II. Пусть теперь S — топологическое полукольцо, X — топологическое пространство. Полукольцо $C(X, S)$ всех непрерывных S-значных на X является подполукольцом полукольца S^X. Положим

$$CP(X, S) = \cup\{C(Y, S) : Y \subseteq X\}-$$

полукольцо всех непрерывных частичных S-значных функций на X с поточечными операциями сложения и умножения над частичными функциями f и g на их общей области определения $D(f) \cap D(g)$. Если пространство X дискретно, то $C(X,S) = S^X$ и $CP(X,S) = SP^X$.

Ясно, что $CP(X,S)$ есть подполукольцо в SP^X с поглощающим элементом $\varnothing$, а фактор-полукольцо $CP(X,S)/\rho_D$ снова изоморфно моно-полукольцу $\langle B(X), \cap, \cap \rangle$.

Если S — полукольцо с единицей 1, то полукольцо $CP(X,S)$ также будет полукольцом с единицей $1 \in C(X,S)$.

Следующее утверждение развивает тематику определяемости топологических пространств различными алгебрами функций на них [1].

Теорема 2. *Пусть S — неодноэлементное топологическое полукольцо с единицей 1 с замкнутым множеством $\{1\}$ и X, Y — произвольные T_1-пространства. Тогда эквивалентны следующие условия:*
1) X и Y гомеоморфны;
2) полукольца $CP(X,S)$ и $CP(Y,S)$ изоморфны;
3) мультипликативные полугруппы $CP(X,S)$ и $CP(Y,S)$ изоморфны.

Исследуются также структурные свойства полуколец $CP(X,S)$, в частности получена:

Теорема 3. *Максимальные идеалы полукольца $CP(X,S)$ имеют вид*

$$(CP(X,S) \setminus C(X,S)) \cup M,$$

где M — произвольный максимальный идеал полукольца $C(X,S)$.

Список цитированной литературы

1. Вечтомов Е. М. Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Алгебра. Геометрия. Топология. 1990. Т. 28. С. 3–46.

Вятский государственный гуманитарный университет
Получено 31.03.2015

УДК 512.558

О свойствах решетки многообразий мультипликативно идемпотентных полуколец

Е. М. Вечтомов, А. А. Петров[1] (Киров)
vecht@mail.ru, andreipetrow@mail.ru

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ, проект №1.1375.2014/К.

Полукольцом называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$, такая, что $\langle S, + \rangle$ — коммутативная полугруппа, $\langle S, \cdot \rangle$ — полугруппа, умножение $\cdot$ дистрибутивно относительно сложения $+$ с обеих сторон.

Полукольцо S называется *мультипликативно идемпотентным* (*аддитивно идемпотентным*), если на нем тождественно $xx = x$ (соответственно, $x+x = x$). Полукольцо, одновременно мультипликативно и аддитивно идемпотентное, назовем *идемпотентным.* Будем говорить, что полукольцо S *обладает константным сложением*, если оно удовлетворяет тождеству $x + y = u + v$. Полукольцо S назывется *моно-полукольцом,* если на нем тождественно $x + y = xy$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие всех мультипликативно идемпотентных полуколец. Для семейства мультипликативно идемпотентных полуколец $S_1, \ldots, S_n$ через $\mathfrak{M}(S_1, \ldots, S_n)$ обозначим многообразие полуколец, порожденное этими полукольцами. Для полукольцевого тождества $f = g$ через $\mathfrak{M}(f = g)$ обозначим многообразие мультипликативно идемпотентных полуколец, порожденное данным тождеством. Пусть также $\boldsymbol{O} = \mathfrak{M}(x = y)$ — тривиальное многообразие полуколец.

С точностью до изоморфизма существует шесть двухэлементных мультипликативно идемпотентных полуколец: цепь $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, поле $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, идемпотентное моно-полукольцо $\mathbb{D} = \{1, \infty\}$ с единицей 1, полукольцо $\mathbb{T} = \{1, \infty\}$ с единицей 1 и константным сложением, идемпотентное полукольцо $\mathbb{L} = \{a, b\}$, удовлетворяющее тождеству $xy = x$, идемпотентное полукольцо $\mathbb{R} = \{a, b\}$, удовлетворяющее тождеству $xy = y$.

Теорема 1. *Произвольное мультипликативно идемпотентное полукольцо является подпрямым произведением полуколец, одно из которых обладает тождеством $3x = 2x$, а другое обладает тождеством $3x = x$. Стало быть, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(3x = x) \vee \mathfrak{M}(3x = 2x)$.*

Для класса коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец этот результат был получен ранее в [1, предложение 4].

Для произвольной решетки $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ с 0 элемент a^* называется *псевдодополнением* элемента a, если a^* — наибольший элемент в L, для которого $a \wedge a^* = 0$. Если каждый элемент решетки L с нулем имеет псевдодополнение, то L называется *решеткой с псевдодополнениями.* Любая решетка с псевдодополнениями 0-*дистрибутивна*, то есть $\forall a, b, c \in L:$

$$a \wedge c = 0 = b \wedge c \Rightarrow (a \vee b) \wedge c = 0.$$

Обозначим через $L(\mathfrak{M})$ решетку всех подмногообразий многообразия $\mathfrak{M}$.

Предложение 1. *Многообразия $\mathfrak{M}(\mathbb{B})$, $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2)$, $\mathfrak{M}(\mathbb{D})$, $\mathfrak{M}(\mathbb{T})$, $\mathfrak{M}(\mathbb{L})$, $\mathfrak{M}(\mathbb{R})$ суть в точности атомы атомной решетки $L(\mathfrak{M})$.*

Для многообразия $A \in L(\mathfrak{M})$ через $m(A)$ обозначим множество атомов решетки $L(\mathfrak{M})$, содержащихся в A.

Теорема 2. *Решетка $L(\mathfrak{M})$ является решеткой с псевдодополнениями.*

Именно, всякое многообразие $A \in L(\mathfrak{M})$ имеет псевдодополнение

$$A^* = \bigcap_{C \in m(A)} C^*.$$

Заметим, что для любого $A \in L(\mathfrak{M})$:

$$A^{**} = \bigcap_{C \in \mathfrak{X} \setminus m(A)} C^* \text{ —}$$

наибольшее среди подмногообразий $B \subseteq \mathfrak{M}$ с условием $m(B) = m(A)$. Для любых $A, B \in L(\mathfrak{M})$ имеем $A^* = B^* \Leftrightarrow m(A) = m(B)$. Всего в $\mathfrak{M}$ получаем 64 подмногообразия вида A^* (псевдодополнения) по числу подмножеств $m(A) \subseteq \mathfrak{X}$, в том числе $\boldsymbol{O}^* = \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^* = \boldsymbol{O}$.

Лемма 1. *Для любых $A, B \in L(\mathfrak{M})$ справедливы равенства:*

- $m(A \cap B) = m(A) \cap m(B)$;
- $m(A \vee B) = m(A) \cup m(B)$;
- $m(A^*) = \mathfrak{X} \setminus m(A)$.

На решетке $L(\mathfrak{M})$ введем отношение эквивалентности $\sim_m$:

$$A \sim_m B \Leftrightarrow m(A) = m(B).$$

Теорема 3. *Бинарное отношение $\sim_m$ является конгруэнцией на решетке $L(\mathfrak{M})$, факторрешетка $L(\mathfrak{M})/\sim_m$ по которой будет 64-элементной булевой решеткой.*

Каждый класс $[A]_{\sim_m}$ представляет собой отрезок $[\vee m(A), A^{**}]$.

Предложение 2. *Классы конгруэнции $\sim_m$ $[\mathfrak{M}(\mathbb{B})]_{\sim_m}$, $[\mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2)]_{\sim_m}$, $[\mathfrak{M}(\mathbb{D})]_{\sim_m}$, $[\mathfrak{M}(\mathbb{R})]_{\sim_m}$, $[\mathfrak{M}(\mathbb{L})]_{\sim_m}$ одноэлементны, а класс $[\mathfrak{M}(\mathbb{T})]_{\sim_m}$ является счетной дистрибутивной подрешеткой решетки $L(\mathfrak{M})$.*

Теорема 4. *Решетка $L(\mathfrak{M})$ счетна, не модулярна и 0-дистрибутивна.*

В [1, теорема 3] доказано, что $L(\mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}, \mathbb{T}))$ есть 16-элементная булева решетка.

С помощью [2, теорема] доказано

Предложение 3. *Решетка $L(\mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}, \mathbb{L}, \mathbb{R}))$ будет 32-элементной булевой решеткой.*

Предложение 4. *Решетка $L(\mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}, \mathbb{T}, \mathbb{L}, \mathbb{R}))$ не модулярна и конечна.*

Список цитированной литературы

1. Вечтомов Е. М., Петров А. А. Многообразие полуколец, порожденное двухэлементными полукольцами с коммутативным идемпотентным умножением // Чебышевский сборник. 2014. Т. XV, Вып. 3. С. 12–30.

2. Верников Б. М., Волков М. В. Дополнения в решетках многообразий и квазимногообразий // Изв. вузов. Мат. 1982. № 11. С. 17–20.

Вятский государственный гуманитарный университет
Получено 01.04.2015

УДК 512.566

Об идеалах в полукольцах непрерывных $(0, \infty]$-значных функций

Е. М. Вечтомов[1], Н. В. Шалагинова (Киров)
vecht@mail.ru, korshunnv@mail.ru

Изучение полуколец непрерывных функций на топологических пространствах X с поточечно определенными операциями сложения и умножения функций началось с полуколец $C^+(X)$ всех непрерывных неотрицательных действительнозначных функций [1]. Далее полукольцо $[0;\infty)$ значений функций было расширено до полукольца $[0;\infty]$ [2]. В данной работе начато изучение полуколец непрерывных функций со значениями в полукольце $(0;\infty]$.

Полукольцом называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot\rangle$, в которой $\langle S, +\rangle$ – коммутативная полугруппа, $\langle S, \cdot\rangle$ – полугруппа, выполняются законы дистрибутивности операции умножения $\cdot$ относительно сложения $+$. Полукольцо S называется *моно-полукольцом*, если в нем выполняется тождество $x + y = xy$. Если в полукольце коммутативно умножение, то полукольцо называется *коммутативным*, если в нем есть нейтральный элемент по умножению, то — *полукольцом с единицей 1*. Элемент $a \in S$ называется: *аддитивно* (*мультипликативно*) *поглощающим*, если $a + s = s + a = a$ ($as = sa = a$) для любого $s \in S$; *поглощающим*, если он является и мультипликативно и аддитивно поглощающим. Промежуток $(0, \infty]$ с естественными операциями и естественной топологией является коммутативным топологическим полукольцом с 1 и с поглощающим элементом ∞. Элементы a из $(0, \infty)$ обратимы.

Непустое подмножество I полукольца S называется *идеалом* в S, если для любых $x, y \in I$ и $s \in S$ элементы $x + y, sx \in I$. Идеал I полукольца S называется *биидеалом*, если он выдерживает сложение с любым элементом из S. В полукольце $(0, \infty]$ идеалами являются только само полукольцо $(0, \infty]$ и $\{\infty\}$.

[1]Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ, проект N 1.1375.2014/K

Обозначим через $C^{\infty}(X)$ полукольцо всех непрерывных функций на произвольном топологическом пространстве X со значениями в $(0,\infty]$ с поточечными операциями сложения и умножения функций.

Для любой функции $f \in C^{\infty}(X)$ определим множество $\mathrm{H}(f) = f^{-1}(\infty)$. Идеал I в $C^{\infty}(X)$ называется H-*идеалом*, если $\mathrm{H}(f) = \mathrm{H}(g)$ влечет $g \in I$ для любых $f \in I$ и $g \in C^{\infty}(X)$.

Для любого пространства X полукольцо $C^{\infty}(X)$ имеет наибольший собсвенный идеал

$$M = \{f \in C^{\infty}(X) : \mathrm{H}(f) \neq \varnothing\}.$$

Легко видеть, что H-идеалы в полукольце $C^{\infty}(X)$ являются биидеалами.

Тихоновское пространство X называется P-*пространством*, если все множества вида $f^{-1}(\infty), f \in C^{\infty}(X)$, открыто-замкнуты. Нетрудно показать, что тихоновское пространство X будет P-пространством тогда и только тогда, когда в полукольце $C^{\infty}(X)$ все идеалы являются H-идеалами.

Пусть далее $X = \{1, 2, ..., n\}, n \in \mathbf{N}$, — дискретное пространство. Тогда все идеалы в $C^{\infty}(X)$ будут H-идеалами. Непрерывными функциями в $C^{\infty}(X)$ являются всевозможные n-ки элементов из $(0,\infty]$. Таким образом, $C^{\infty}(X) = (0,\infty]^n$.

Зададим на множестве $\mathbf{D} = \{1,\infty\}$ структуру моно-полукольца, полагая что 1 — единичный элемент, ∞ — поглощающий элемент и 1+1=1. Поставим в соответствие каждой функции $f \in C^{\infty}(X)$ функцию $\bar{f} \in C(X, \mathbf{D})$ по правилу: $\mathrm{H}(\bar{f}) = \mathrm{H}(f)$ и $\bar{f}(X \setminus \mathrm{H}(f)) = \{1\}$. Получаем естественный изоморфизм $\mathrm{Id}(0,\infty]^n \cong \mathrm{Id}\mathbf{D}^n$ решеток идеалов. Объединение идеалов в полукольце $\mathbf{D}^n$ так же является идеалом. Идеал $I \bigcup J$ является точной верхней гранью, идеал $I \bigcap J = I + J = I \cdot J$ — точной нижней гранью идеалов I, J в решетке $\mathrm{Id}\mathbf{D}^n$.

Естественный порядок $1 < \infty$ на $\mathbf{D}$ определяет покоординатный порядок на $\mathbf{D}^n$. Полукольцо $< \mathbf{D}^n, +, \cdot >$ является решоточно-упорядоченным моно-полукольцом. В моно-полукольце $\mathbf{D}^n$ выделим базисные функции

$$a_i = (1, 1, ..., \infty, ..., 1), i = 1, 2, ..., n,$$

в которых i-ая координата равна ∞, а остальные равны 1. Каждая функция a_i определяет идеал как множество всех функций, содержащих $\mathrm{H}(a_i)$, функция $a_i a_j$ — идеал всех функций, содержащих $\mathrm{H}(a_i) \bigcup \mathrm{H}(a_j)$ и т.д. Рассмотрим формальную сумму $\sum a_i$, задающую множество функций, H-множества которых включают некоторое $\mathrm{H}(a_i)$. Тогда $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = (\infty, \infty, ..., \infty)$ образует наименьший идеал в $\mathbf{D}^n$, элемент $a_1 + a_2 + ... + a_n$ порождает наибольший собственный идеал M в $\mathbf{D}^n$, а элемент $(1, 1, ..., 1)$ порождает все полукольцо $\mathbf{D}^n$.

Каждый идеал I полукольца $\mathbf{D}^n$ однозначно определяется суммой $\sum_{min}(I)$ своих минимальных элементов. Для любых идеалов I, J полукольца $\mathbf{D}^n$ идеалы $I \bigcup J$ и $I \bigcap J$ определяются формальным суммам $\sum(I) + \sum(J)$ и $\sum(I) \sum(J)$, соответственно.

Заметим, что моно-полукольцо $\mathbf{D}^n$ изоморфно булеану $\mathrm{B}(X)$, рассматриваемому с одной операцией $\bigcup$.

Имеет место

Теорема 1. *Решетка всех идеалов полукольца $\mathbf{D}^n, n \in \mathbf{N}$, изоморфна свободной дистрибутивной решетке $F_D(n)$ с n свободными образующими, дополненной новым наибольшим элементом e:*

$$\mathrm{Id}\mathbf{D}^n \cong \mathrm{F}_D(n) \bigcup \{e\}.$$

Следствие 1. *Число антицепей в булеане n-элементного множества равно* $|\mathrm{F}_D(n)| + 1$.

Пример. В случае $X = \{1, 2, 3\}$ решетка собственных идеалов полукольца $\mathbf{D}^3$ является свободной дистрибутивной решеткой с тремя свободными образующими $a_1 = (\infty, 1, 1), a_2 = (1, \infty, 1), a_3 = (1, 1, \infty)$. Число элементов в такой дистрибутивной решетке равно 18, [3, с. 61]. Следовательно, число всех идеалов полукольца $\mathbf{D}^3$ равно 19. При этом наибольший собственный идеал полукольца $\mathbf{D}^3$ соответствует наибольшему элементу $a_1 + a_2 + a_3$ дистрибутивной решетки $\mathrm{F}_D(3)$.

Список цитированной литературы

1. Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семенова И. А. Полукольца непрерывных функций: делимость, идеалы, конгруэнции // Фундам. и прикл. математика, 1998. Т. 4, № 2. С. 493–510.

2. Вечтомов Е. М., Шалагинова Н. В. Простые идеалы в частичных полукольцах непрерывных $[0, \infty]$-значных функций // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2014. Вып. 1. С. 5–12.

3. Грецер Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.

Вятский государственный гуманитарный университет
Получено 01.04.2015

УДК 512.626

Критерий сильной неразложимости локализации дедекиндова кольца по простому идеалу в случае расширений Галуа

А.В. Гришин (Москва)
grishinaleksandr@yandex.ru

Пусть A – дедекиндово кольцо, B – целое замыкание кольца A в некотором расширении Галуа поля частных кольца A. В теории $\mathcal{E}$ – замкнутых абелевых групп, т. е. абелевых групп, изоморфных аддитивной группе своего кольца эндоморфизмов, важную роль играет следующий вопрос. Пусть $\mathfrak{P}$ – простой идеал кольца B и $B_{\mathfrak{Y}}$ – соответствующая локализация. При каких условиях на $\mathfrak{P}$ эта локализация сильно неразложима, как A – модуль, т. е. не содержит нетривиальной прямой суммы $M_1 \bigoplus M_2$ своих A подмодулей, для которой $B_{\mathfrak{Y}}$ / $M_1 \bigoplus M_2$ аннулируется некоторым ненулевым элементом из A?

В [1] приведены достаточные условия для произвольных расширений. Здесь будет дан исчерпывающий критерий для расширений Галуа.

Пусть $p = \mathfrak{P} \bigcap A$ и $pB = \mathfrak{P}^e \mathfrak{Q}$, где идеал $\mathfrak{Q}$ взаимно прост с $\mathfrak{P}$, e – *индекс ветвления*. Пусть, далее, $f = [B/\mathfrak{V} : A/p]$ – *степень расширения полей вычетов*.

Теорема 1. *Для сильной неразложимости A– модуля $B_{\mathfrak{Y}}$ необходимо и достаточно, чтобы $ef = 1$.*

Список цитированной литературы

1. Гришин А.В. О сильно неразложимых локализациях дедекиндовых колец // XII Международная конференция по алгебре и теории чисел, посвященная 80-летию проф. В.Н. Латышева. Тезисы докладов. – Тула: Изд-во Тульского гос. пед. ун-та, 2014. – С. 161.

Московский педагогический государственный университет
Получено 24.01.2015

УДК 512.552.4

О T-идеалах, порожденных длинными коммутаторами, и обобщенных многочленах Холла

А. В. Гришин, С. В. Пчелинцев (Москва)
grishinaleksandr@yandex.ru, pchelinzev@mail.ru

Пусть F – свободная счетнопорожденная ассоциативная алгебра над полем характеристики $\neq 2$, 3 и $T^{(m)}$ – T-идеал алгебры F, порожденный длинным коммутатором $[x_1, \ldots, x_m]$.

В [1] доказано, что $T^{(m)}T^{(n)} \subset T^{(m+n-2)}$, а в [2] доказано, что $T^{(m)}T^{(3)} \subset T^{(m+2)}$. Имеет место следующее продолжение этих результатов.

Теорема 1. *Если хотя бы одно из чисел m или n нечетно, то $T^{(m)}T^{(n)} \subset T^{(m+n-1)}$*

Можно показать, что если оба числа m и n четные, то аналогичный результат места не имеет.

Следствие 1. *Если m четно, то $T^{(m-1)}/\,T^{(m)}$ лежит в центре алгебры $F^{(m)} = F\,/\,T^{(m)}$.*

Назовем *многочленом Холла* многочлен вида $h\,(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2]^2, x_3]$. Назовем *слабым многочленом Холла* многочлен $h' = (x_1, x_2) = [[x_1, x_2]^2, x_1]$. Рассмотрим следующие *обобщенные многочлены Холла*

$$H_n = [h, y_1, z_1, \ldots, y_n, z_n]\,, H'_n = [h', y_1, z_1, \ldots, y_n, z_n]\,.$$

При этом $H_0 = h, H'_0 = h'$.

Пусть $Z(A)$ – центр алгебры A. Назовем ядром алгебры A наибольший ее идеал $Z^*(A)$, лежащий в $Z(A)$. Ядро, в принципе, может быть и нулевым.

Будем отождествлять многочлены H_n и H'_n с их образами в $F^{(2n+5)}$.

Теорема 2. *Для любого $n \geqslant 0$ $H_n \in Z\left(F^{(2n+5)}\right) \setminus Z^*(F^{(2n+5)})$; $0 \neq H'_n \in Z^*(F^{(2n+5)})$.*

Из теорем 1 и 2 получаем

Следствие 2. *Для любого $m \geqslant 4$ алгебра $F^{(m)}$ имеет ненулевое ядро.*

Нетрудно показать, что ядро алгебры $F^{(3)}$ тривиально.

Список цитированной литературы

1. Латышев В. Н. О конечной порожденности T-идеала с элементом $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ // Сиб. матем. журн., 1965. Т. 6, № 6, С. 1432–1434.

2. Воличенко И. Б. T-идеал, порожденный элементом $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ // Препринт, Институт математики АН БССР. Минск. 1978.

Московский педагогический государственный университет
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации
Получено 24.01.2015

UDK 512.558

On injective envelopes of semimodules

S. N. Il'in (Kazan)
silyin@kpfu.ru

As is well-known, every module over a ring has an injective envelope. That fact does not hold, in general, for semimodules over semirings; nevertheless, it was shown by X. Wang [1] that every semimodule over an additively idempotent semiring has an injective envelope. A few years later both those facts were significantly generalized by Y. Katsov [2] for semimodules over additively regular semirings. Also, it was shown in [3, Theorem 2.7] that every simple semimodule over a zeroic semiring has an injective envelope. In light of these facts it is natural to ask the following question: Given a type of semimodules, what are semirings whose all semimodules of this type have injective envelopes? We present here results answering this question for some important types of semimodules.

Remind that a semiring S is additively π-regular iff, for any $a \in S$, the equation $na + x + na = na$ is solvable in S for suitable $n \geqslant 1$. We say S is *semizeroic* iff the equation $a + x + y = y$ is solvable in S for any $a \in S$.

THEOREM 1. *For a semiring S the following conditions are equivalent:*

(1) *Each simple right (left) S-semimodule has an injective envelope;*

(2) *Each additively idempotent simple right (left) S-semimodule has an injective envelope;*

(3) *Each simple right (left) S-module has an injective envelope;*

(4) *Each right (left) S-module has an injective envelope;*

(5) *S is semizeroic.*

THEOREM 2. *For a semiring S the following conditions are equivalent:*

(1) *Every additively idempotent right (left) S-semimodule has an injective envelope;*

(2) *Every additively regular right (left) S-semimodule has an injective envelope;*

(3) *S is additively π-regular.*

REFERENCES

1. Wang H., Injective hulls of semimodules over additively-idempotent semirings // Semigroup Forum. 1994. Vol. 48, no. 3. P. 377–379.

2. Katsov Y., Tensor products and injective envelopes of semimodules over additively regular semirings // Algebra Colloq. 1997. Vol. 4, no. 2. P. 121–131.

3. Il'in S. N., V-semirings // Siberian Math. J. 2012. Vol. 53, no. 2. P. 222–231.

Kazan (Volga Region) Federal University
Received 11.04.2015

УДК 512.554

Простые симметрические лиевы пучки ранга 1

Н. А. Корешков (Казань)
Nikolai.Koreshkov@kpfu.ru

Лиевы пучки были введены в работе [1]. Их конструкция связана с нахождением первых интегралов гамильтоновых систем (см. [2] [3]). Приведем определение лиева пучка. Пусть L — конечномерное векторное пространство над полем P. Обозначим через K пространство всех билинейных кососиметричесих отображений из $L \times L$ в L.

Определение 1. *Векторное пространство L над полем P называется лиевым пучком, если существует подпространство S из K такое, что для любых s и s' из S имеет место соотношение*

$$J(a,b,c,s,s') + J(a,b,c,s',s) = 0, \quad a,b,c \in L, \tag{1}$$

где $J(a,b,c,s,s') = (asb)s'c + (bsc)s'a + (csa)s'b$ (здесь xsy — образ пары $(x,y) \in L \times L$ при отображении s.)

Лиев пучок будем обозначать $L(S)$.

Подпространство U в лиевом пучке $L(S)$ назовем подалгеброй, если $xsy \in U$ при $x, y \in U$, $s \in S$.

Подпространство H в $L(S)$ назовем картановской подалгеброй лиева пучка $L(S)$, если H — нильпотентная алгебра, совпадающая со своим нормализатором $N_{L(S)}(H) = \{x \in L \mid hsx \in H \ \forall h \in H, \forall s \in S\}$.

В работе [4] показано, что любой лиев пучок содержит картановскую подалгебру H, которая является нульпространством L_0 относительно регулярной пары $(x_0, s_0) \in L \times S$, т.е. $L_0 = L_0(x_0, s_0) = \{x \in L \mid (\mathrm{ad}_{s_0} x_0)^k x = 0, \ k \in \mathbb{N}\}$, где ad_{s_0} — оператор левого умножения, определенный элементом $s_0 \in S$. (Пара $(x_0, s_0) \in L \times S$ называется регулярной, если $\dim_P L_0$ минимальна.) Размерность нулькомпоненты $L_0(x_0, s_0)$ регулярной пары (x_0, s_0) назовем рангом лиева пучка $L(S)$.

Определение 2. *Лиев пучок $L(S)$ называется симметрическим, если*

$$J(a,b,c,s,s') = 0$$

для любых $a, b, c \in L$ и любых $s, s' \in S$.

Описание простых симметрических лиевых пучков мы получим в терминах сэндвичевых алгебр.

Определение 3. *Сэндвичевой алгеброй $M_r(L, S)$ называется пара пространств L, S, удовлетворяющих условию $asb - bsa \in L$, когда $a, b \in L$, $s \in S$ (здесь asb и bsa — обычные произведения матриц.)*

Для любого фиксированного $s \in S \subset M_r(P)$ отображение $(a, b) \to asb - bsa$, $a, b \in L \subset M_r(P)$ задает билинейное кососимметрическое отображение из $L \times L$ в L. Легко проверить, что оно удовлетворяет соотношению (1), т. е. $M_r(L, S)$ — лиев пучок.

Теорема 1. *Любой простой симметрический лиев пучок $L(S)$ ранга один над алгебраически замкнутым полем P характеристики нуль совпадает с одним из следующих*:

1. $L(S) = M_3(R, T)$, *где R — пространство всех кососимметричских матриц в $M_3(P)$, T — любое подпространство в пространстве всех симметрических матриц в $M_3(P)$, содержащее $\langle E \rangle$ (E — единичная матрица). В частности, когда $T = \langle E \rangle$, пучок $L(S)$ — это простая трехмерная алгебра Ли.*

2. $L(S) = M_2(I, I^t)$, *где I – минимальный левый идеал в алгебре матриц $M_2(P)$, $I^t = \{A \in M_2(P) \mid A^t \in I\}$. (Здесь A^t — матрица, транспонированная к A).*

Список цитированной литературы

1. Кантор И.Л., Персиц Д.Б. О замкнутых пучках линейных скобок Пуассона // IX Всесоюзная геометрич. конф. Штиинца: Кишинев, 1988. С. 141.

2. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.:Мир. 1989.

3. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Факториал; Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. ун-та «Просперус». 1995.

4. Корешков Н.А. Теоремы Ли и Энгеля для n-кратных алгебр Ли // Сиб. мат. журн. 2013. Т.54, № 3. С. 601–609.

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Получено 09.04.2015

УДК 512.552+512.545

О свойствах элементов решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр

Ю.В. Кочетова (Москва)
jkochetova@mail.ru

Пусть на линейной алгебре $A = \langle A; +; \cdot \rangle$ над частично упорядоченным полем F задан частичный порядок $\leqslant$, относительно которого A является решёточно упорядоченным векторным пространством над полем F (см. [1]).

Будем говорить, что при данном порядке элемент $b \in A$ *бесконечно мал* относительно элемента $a \in A$ $(0 < a)$ и писать $b \ll a$, если $\gamma b \leqslant a$ для всех $\gamma \in F$.

Если рассмотренный выше решёточный порядок $\leqslant$ на A таков, что

$$\text{из } a > 0 \text{ следует } ab \ll a \text{ и } ba \ll a \text{ для всех } b \in A,$$

то говорят (см., например, [2]), что на алгебре A определён решёточный $\mathcal{K}$-*порядок* $\leqslant$, а алгебру A над полем F называют *решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгеброй*

Рассмотрим свойства бесконечно малых элементов в решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебрах над полями.

Теорема 1. *В частично $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебре A над частично упорядоченным полем F для любых элементов $x, y, z \in A$ и $\alpha \in F$ справедливы соотношения:*

$$x \not\ll x \text{ для } x > 0;$$

$$x^n \ll x \text{ для } x > 0 \text{ и любого } n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2;$$

$$\text{из } x \ll y \text{ и } y \ll z \text{ следует } x \ll z \text{ для } y, z > 0;$$

$$\text{если } y \ll x \text{ и } z \ll x, \text{ то } y \pm z \ll x \text{ и } \alpha z \ll x \text{ для } x > 0.$$

Следствие 1. *$\mathcal{K}$-упорядочена может быть только алгебра без единицы.*

Теорема 2. *Если A — линейно $\mathcal{K}$-упорядоченная алгебра над линейно упорядоченным полем, то для всех элементов $x, y, z, t \in A$*

$$|xy| \ll x \text{ и } |yx| \ll x \text{ для } x > 0;$$

$$\text{из } y \ll x, \text{ следует } yt \ll x \text{ для } x > 0;$$

$$\text{если } y \ll x \text{ и } z \ll x, \text{ то из } y \leqslant t \leqslant z \text{ следует } t \ll x \text{ для } x > 0;$$

$$\text{из } z \ll x \text{ следует } z \ll y \text{ для } y > 0 \text{ и } x > 0 \text{ таких, что } y \not\ll x.$$

Следствие 2. *В линейно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебре над линейно упорядоченным полем множество всех элементов, бесконечно малых относительно некоторого фиксированного положительного элемента алгебры, образует её собственный l-идеал.*

Список цитированной литературы

1. Биркгоф Г. Теория решеток. – М.: Наука, 1984.
2. Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. Первичный радикал решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр // Фундаментальная и прикладная математика. 2013. Т. 18, вып. 1. С. 85–158.

Московский педагогический государственный университет
Получено 14.04.2015

УДК 512.554

О некоторых полуполевых плоскостях нечетного порядка

О. В. Кравцова[1] (Красноярск)
ol71@bk.ru

Полуполем называется алгебраическая система $\langle W, +, \circ\rangle$, удовлетворяющая условиям:

1) $\langle W, +\rangle$ – абелева группа;
2) $\langle W^*, \circ\rangle$ – лупа;
3) выполняются дистрибутивные законы.

Проективная плоскость π, координатизируемая полуполем W, называется *полуполевой плоскостью.*

Пусть π – полуполевая плоскость порядка p^{2n}, p – простое число. Автоморфизм плоскости, поточечно фиксирующий подплоскость порядка p^n, называется *бэровской коллинеацией.* В [1] указан способ построения полуполевой плоскости порядка p^{2n}, допускающей бэровскую инволюцию. Координатизирующее полуполе такой плоскости записано в виде линейного пространства размерности $2n$ над $\mathbb{Z}_p$, с умножением

$$x \circ y = x\theta(y), \quad x, y \in W.$$

Здесь $\theta : W \to GL_{2n}(p) \cup \{0\}$ – биективное отображение, удовлетворяющее условиям:

1) $\theta(y + z) = \theta(y) + \theta(z)\ \forall y, z \in W$;
2) $\theta(0, 0, \ldots, 0, 0) = 0$, $\theta(0, 0, \ldots, 0, 1) = E$ (единичная матрица).

Множество матриц $R = \{\theta(y) | y \in W\}$ называется *регулярным множеством.*

С использованием доказанных в [1] результатов построены 12 попарно неизоморфных полуполевых плоскостей порядка 81, допускающих бэровскую инволюцию в трансляционном дополнении. Перечислим основные свойства их координатизирующих полуполей.

[1]Грант РФФИ № 15-01-04897 А

Теорема 1. *Пусть π – полуполевая плоскость порядка 81, допускающая бэровскую инволюцию в трансляционном дополнении,*

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_i \in \mathbb{Z}_3,\ i = \overline{1,4}\}$$

– координатизирующее полуполе. Тогда:

1) W допускает автоморфизм порядка 2;

2) W содержит подполе порядка 9

$$W_0 = \{(0, 0, x_3, x_4) | x_3, x_3 \in \mathbb{Z}_3\};$$

3) лупа ненулевых элементов W^* является однопорожденной и правоциклической (левоциклической);

4) W^* содержит единственный элемент порядка 2;

5) W^* содержит одну либо три подгруппы порядка 4, подлупу порядка 16

$$\{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_3^*\} \cup \{(0, 0, x_3, x_4) | x_3, x_3 \in \mathbb{Z}_3^*\}.$$

Вычислены порядки и правые (левые) порядки всех ненулевых элементов построенных полуполей. Построены правое, среднее и левое ядра полуполя (и полуполевой плоскости). Показано, что три полуполя из рассмотренных содержат по три различных подполя порядка 9.

Список цитированной литературы

1. Кравцова О. В. Полуполевые плоскости, допускающие бэровскую инволюцию // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2013. № 2. С. 26–38.

Сибирский федеральный университет
Получено 16.04.2015

УДК 512.552

О подалгебре центральных многочленов градуированной ассоциативной алгебры

Г. С. Дерябина (Москва),
А. Н. Красильников (Бразилиа, Бразилия)
galina_deryabina@mail.ru alexei@unb.br

Доклад основан на работе [1].

Пусть $F\langle X\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра с единицей над полем F, свободно порожденная множеством $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Напомним, что двусторонний идеал I в $F\langle X\rangle$ называется T*-идеалом*, если $\phi(I) \subseteq I$ для всех эндоморфизмов ϕ алгебры $F\langle X\rangle$. Аналогично, подалгебра (векторное подпространство)

U в $F\langle X\rangle$ называется *T-подалгеброй* (*T-подпространством*), если $\phi(U) \subseteq U$ для всех эндоморфизмов ϕ алгебры $F\langle X\rangle$.

Пусть G — ассоциативная алгебра с единицей над полем F. Напомним, что $f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X\rangle$ называется *полиномиальным тождеством* в G, если $f(g_1, \dots, g_n) = 0$ для всех $g_1, \dots, g_n \in G$. Нетрудно проверить, что для любой алгебры G ее полиномиальные тождества образуют T-идеал $T(G)$ в $F\langle X\rangle$; с другой стороны, для каждого T-идеала I в $F\langle X\rangle$ найдется алгебра G такая, что I — T-идеал всех полиномиальных тождеств алгебры G, $I = T(G)$.

Элемент $f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X\rangle$ является *центральным многочленом* алгебры G, если для любых $g_1, \dots, g_n \in G$ элемент $f(g_1, \dots, g_n)$ централен в G. Ясно, что $f = f(x_1, \dots, x_n)$ — центральный многочлен в G тогда и только тогда, когда $(fx_{n+1} - x_{n+1}f)$ — полиномиальное тождество в G. Для любой алгебры G ее центральные многочлены образуют T-подалгебру $C(G)$ в $F\langle X\rangle$, но не любая T-подалгебра в $F\langle X\rangle$ является T-подалгеброй всех центральных многочленов некоторой алгебры G.

Пусть I — T-идеал в $F\langle X\rangle$. Напомним, что подмножество $S \subset I$ *порождает I как T-идеал*, если I — наименьший T-идеал в $F\langle X\rangle$, содержащий S. Аналогично определяются T-подалгебра и T-подпространство в $F\langle X\rangle$, порожденные S.

Над полем F характеристики 0 для любой ассоциативной F-алгебры G ее идеал полиномиальных тождеств $T(G)$ конечнопорожден как T-идеал, а ее подалгебра центральных многочленов $C(G)$ является конечнопорожденной как T-подпространство (а значит, и как T-подалгебра) в $F\langle X\rangle$. Это следует из результата В.В. Щиголева (2001), доказавшего, что над таким полем F каждое T-подпространство в $F\langle X\rangle$ конечнопорождено. Для T-идеалов в $F\langle X\rangle$, если F — поле характеристики 0, конечная порожденность была доказана ранее А.Р. Кемером, решившим этим знаменитую проблему Шпехта.

С другой стороны, над полем F характеристики $p > 0$ существуют ассоциативные алгебры G, чьи идеалы полиномальных тождеств $T(G)$ не являются конечнопорожденными T-идеалами в $F\langle X\rangle$. Такие алгебры были найдены А.Я. Беловым (1999), А.В Гришиным (1999) и В.В. Щиголевым (1999).

Над полем F характеристики $p > 2$ существуют ассоциативные алгебры G, чьи множества $C(G)$ всех центральных многочленов не являются конечнопорожденными *T-подпространствами* в $F\langle X\rangle$. Например, такой является бесконечномерная алгебра Грассмана E над бесконечным полем F характеристики $p > 2$: ее алгебра $C(E)$ всех центральных многочленов — неконечнопорожденное *T-подпространство* в $F\langle X\rangle$ (см. [2,3,4]). Однако как *T-подалгебра* в $F\langle X\rangle$ алгебра $C(E)$ конечнопорождена. Насколько нам известно, остается открытой следующая проблема.

Проблема 1. *Пусть F — поле характеристики $p > 0$. Найти ассоциативную F-алгебру B (с единицей), у которой алгебра всех ее центральных многочленов $C(B)$ не является конечнопорожденной T-подалгеброй в $F\langle X\rangle$.*

Отметим, что над полем характеристики $p > 2$ известно много T-подалгебр в $F\langle X\rangle$, не являющихся конечнопорожденными как T-подалгебры (Щиголев, 2000), однако ни одна из них не является алгеброй $C(B)$ всех центральных многочленов ни для какой алгебры B.

Пусть $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$, $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$. Пусть $A = F\langle Y, Z\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра с единицей над F, свободно порожденная множеством $Y \cup Z$. Определим 2-градуировку на A, полагая $y_i \in A_0$, $z_j \in A_1$ для всех i, j.

Цель нашей работы — решить следующий (более простой) градуированный аналог Проблемы 1.

Проблема 2. *Пусть F — поле характеристики $p > 0$. Найти 2-градуированную ассоциативную F-алгебру B (с единицей), чья алгебра 2-градуированных центральных многочленов $C_2(B)$ не является конечнопорожденной как T_2-подалгебра в A.*

Пусть T — (двусторонний) идеал в A, порожденный всеми элементами $[a_1, a_2, a_3]$ $(a_i \in A)$. Ясно, что T — T-идеал, а потому и T_2-идеал в A.

Пусть $A^{(k)}$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ — линейная оболочка всех одночленов от переменных $y_i \in Y, z_j \in Z$, которые имеют степень k относительно переменных z_j $(j = 1, 2, \dots)$. Например, $y_1 z_2 y_3 z_4 z_5 \in A^{(3)}$. Тогда $A = \oplus_{i=0}^{\infty} A^{(i)}$. Определим $I_k = \sum_{i \geqslant k} A^{(i)}$ $(k = 1, 2, \dots)$. Ясно, что для каждого k множество I_k является T_2-идеалом в A.

Положим $U = (T \cap I_p) + I_{p+1}$. Пусть $B = A/U$. Так как U — 2-градуированный идеал в A, то фактор-алгебра B является 2-градуированной ассоциативной алгеброй с единицей с 2-градуировкой, унаследованной от A, $B = B_0 \oplus B_1$, $B_0 = (A_0 + U)/U$, $B_1 = (A_1 + U)/U$. Наш основной результат — следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть F — бесконечное поле характеристики $p > 2$. Тогда алгебра $C_2(B)$ всех 2-градуированных центральных многочленов алгебры B не является конечнопорожденной как T_2-подалгебра в $A = F\langle Y, Z\rangle$.*

Список цитированной литературы

1. Deryabina G., Krasilnikov A. The subalgebra of graded central polynomials of an associative algebra // J. Algebra. 2015. Vol. 425, P. 313–323.

2. Bekh-Ochir C., Rankin S.A. The central polynomials of the infinite dimensional unitary and nonunitary Grassmann algebras // J. Algebra Appl. 2010. Vol. 9. P. 687–704.

3. Brandão Jr. A., Koshlukov P., Krasilnikov A., da Silva E.A. The central polynomials for the Grassmann algebra // Israel J. Math. 2010. Vol. 179. P. 127–144.

4. Гришин А.В. О строении центра относительно свободной алгебры Грассмана // УМН. 2010. Т. 65, № 4(394). С. 191–192.

МГТУ им. Н. Э. Баумана (Г. С. Дерябина)
Universidade de Brasilia, Brasil (А. Н. Красильников)
Получено 15.04.2015

УДК 512.572

О многообразии всех коммутативных алгебр с тождеством метабелевости

С. П. Мищенко, Н. П. Панов[1] (Ульяновск)
mishchenkosp@mail.ru, nppanov@yandex.ru

Работа касается линейных алгебр над полем с одной бинарной билинейной операцией. Все не объясняемые понятия можно найти в [1].

Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое многообразие алгебр над полем нулевой характеристики. Обозначим через $F(X, \mathbf{V})$ относительно свободную алгебру этого многообразия от счетного множества свободных образующих $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, а через $P_n(\mathbf{V})$ подпространство в $F(X, \mathbf{V})$, образованное всеми полилинейными элементами степени n от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Также обозначим $c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V})$ размерность пространства $P_n(\mathbf{V})$.

Напомним, что тождества коммутативности и метабелевости имеют вид (1) и (2) соответственно:

$$xy \equiv yx, \tag{1}$$

$$(xy)(zt) \equiv 0. \tag{2}$$

Обозначим через $\mathbf{MC}$ многообразие, определенное этими тождествами, то есть многообразие всех коммутативных алгебр, в которых выполняется тождество метабелевости.

Тождества (1) и (2) позволяют представить любое произведение элементов алгебры $A \in \mathbf{MC}$ в виде линейной комбинации произведений с левонормированной расстановкой скобок $(((a_1a_2)a_3)\cdots a_n), a_i \in A$. Поэтому условимся опускать скобки в случае их левонормированной расстановки: $x_1x_2\ldots x_n = (((x_1x_2)x_3)\ldots x_n)$.

Представим серию важных примеров коммутативных метабелевых алгебр A_m, $m \in \mathbb{N}$. Пусть A_m задана m^2+1 образующими z, t_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, и следующими определяющими соотношениями. Для любых i, j, k, l, $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant m$, выполняются равенства:

1. $zt_{ij} = t_{ij}z = 0$,

[1]Грант РФФИ № 14-01-06005

2. $t_{ij}t_{kl} = 0$,

3. $z^2 t_{ij} = t_{ij} z^2$,

4. $uv = 0$, $deg_z u + deg_z v > 2$,

5. $(z^2 t_{ij}) t_{kl} = t_{kl}(z^2 t_{ij}) = \delta_{jk} z^2 t_{il}$, где δ_{jk} - символ Кронекера.

Легко проверить, что в A_m выполняются тождества коммутативности (1) и метабелевости (2).

Теорема 1. *Базис пространства $P_n(\mathbf{MC})$ образуют элементы вида*

$$x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}, \quad i_1 < i_2,$$

и выполняется равенство

$$c_n(\mathbf{MC}) = \frac{n!}{2}. \tag{3}$$

Понятно, что число выписанных элементов равно $\frac{n!}{2}$. Отметим, что условие $i_1 < i_2$ связано с выполнением тождества коммутативности, а для доказательства линейной независимости элементов использовались описанные выше алгебры A_m.

Известно, что пространство $P_n(\mathbf{V})$ является вполне приводимым модулем симметрической группы S_n. Разложение его характера в целочисленную комбинацию неприводимых характеров χ_λ с кратностями m_λ, где λ - разбиение числа n, имеет вид $\chi(P_n(\mathbf{V})) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$. Также имеет место равенство

$$c_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda, \tag{4}$$

где d_λ - размерность неприводимого модуля, соответствующего разбиению λ.

Так как модуль $P_n(\mathbf{V})$ является фактор-модулем регулярного, то кратность для одночленного разбиения равна единице, то есть $m_{(n)} = 1$. В частности, в случае $n = 2$ получаем $\chi(P_2(\mathbf{V})) = \chi_{(2)}$.

Опишем алгоритм поиска кратностей m_λ многообразия **MC** для других разбиений.

Алгоритм 1. *Зафиксируем диаграмму Юнга $\lambda \vdash n$, $n > 2$, состоящую из двух или более строк. В двух различных столбцах диаграммы λ выберем и удалим по одной клетке так, чтобы в результате получилась диаграмма μ разбиения числа $n-2$, $\mu \vdash (n-2)$. Для всех таких диаграмм μ по формуле крюков найдем соответствующие значения размерностей d_μ. Тогда кратность m_λ определяется как сумма полученных значений d_μ.*

Приведем пример вычисления m_λ и d_λ для $n = 5$:

$$
\begin{array}{ll}
m_{(5)} = d_{(3)} = 1, & d_{(5)} = 1, \\
m_{(4,1)} = d_{(3)} + d_{(2,1)} = 3, & d_{(4,1)} = 4, \\
m_{(3,2)} = d_{(3)} + d_{(2,1)} = 3, & d_{(3,2)} = 5, \\
m_{(3,1,1)} = d_{(2,1)} + d_{(1,1,1)} = 3, & d_{(3,1,1)} = 6, \\
m_{(2,2,1)} = d_{(2,1)} = 2, & d_{(2,2,1)} = 5, \\
m_{(2,1,1,1)} = d_{(1,1,1)} = 1, & d_{(2,1,1,1)} = 4.
\end{array}
$$

Непосредственная подстановка значений в (4) позволяет убедиться, что в рассматриваемом случае равенство (3) выполняется.

Также важно заметить, что помимо программной проверки алгоритма для $n \leqslant 70$ было получено его теоретическое обоснование.

Список цитированной литературы

1. Giambruno A., Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. Mathematical Surveys and Monographs. AMS, Providence, RI, 2005. V. 122. 352 p.

Ульяновский государственный университет
Получено 08.04.2015

УДК 512.554

О почти нильпотентных многообразиях в классе коммутативных метабелевых алгебр

С. П. Мищенко, О. В. Шулежко (Ульяновск)

mishchenkosp@mail.ru, ol.shulezhko@gmail.com

Совокупность линейных алгебр, в которых выполняется фиксированный набор тождеств, в терминологии А. И. Мальцева, называют многообразием. Многообразие называется почти нильпотентным, если само оно не является нильпотентным, но каждое его собственное подмногообразие нильпотентно. Все неопределяемые понятия можно найти в книге [1]. По аналогии со случаем алгебр Ли алгебру будем называть метабелевой, если в ней выполнено тождество

$$(x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0. \tag{1}$$

Так как ассоциативность не предполагается, то в произведениях необходимо следить за расстановками скобок. Договоримся опускать скобки в случае их левонормированной расстановки, например, вместо $((ab)c)d$ писать просто $abcd$. Обозначим через R_a оператор умножения справа на элемент a и будем записывать $bR_a = ba$. Это обозначение оказывается удобным, можно записывать ассоциативные слова от линейных операторов правого умножения. Например, левонормированное произведение $ba\ldots a$ степени $k+1$ нельзя записать, как ba^k, но можно записать bR_a^k.

В статье [2] для любого натурального $m \geqslant 2$ определена неассоциативная линейная алгебра A_m, а многообразие определенное ею обозначим $\mathbf{U_m}$. Пусть $Q_n(\mathbf{U_m}) = \mathrm{span}\{x_0 x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} | \sigma \in S_n\}$ — пространство полилинейных левонормированных элементов относительно свободной алгебры многообразия $\mathbf{U_m}$, у которых зафиксирована первая слева образующая. Симметрическая группа S_n действует на $Q_n(\mathbf{U_m})$ перестановкой образующих $x_1, \ldots, x_n$, оставляя на месте образующую x_0, задавая структуру S_n-модуля. Соответствующий характер раскладывается на неприводимые S_n-характеры

$$\chi_n^Q((\mathbf{U_m})) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda^Q(\mathbf{U_m})\chi_\lambda, \tag{2}$$

где $m_\lambda^Q(\mathbf{U_m})$ — кратность неприводимого характера χ_λ в $\chi_n^Q(\mathbf{U_m})$, а сумма берется по разбиениям λ числа n.

Сформулируем некоторые результаты, полученные в [2] (см. Предложения 1 и 3), в виде одного утверждения.

Предложение 1. *Алгебра A_m удовлетворяет тождествам $x_1(x_2x_3) \equiv 0$ и $x_0xxx \equiv 0$, а также тождеству $x_0xxz_1 \cdots z_syy \equiv 0$, в котором остаток при делении s на m отличен от $m-2$. Если в (2) $m_\lambda^Q(\mathbf{U_m}) \neq 0$, то выполняется неравенство $n - m \cdot \lambda_m < 4m$. Кроме того, существует константа C, не зависящая от n, что для кратностей в сумме (2) выполняется неравенство $m_\lambda^Q(\mathbf{U_m}) \leqslant C$.*

Модифицируем определение алгебры A_m из работы [2] так, чтобы она была коммутативной и в ней вместо тождества левой нильпотентности ступени два $x(yz) \equiv 0$ выполнялось тождество метабелевости (1). Будем использовать те же самые обозначения для образующих, чтобы подчеркнуть сходство свойств алгебр. Обозначим B_m, $m \geqslant 2$, алгебру, порожденную образующими $\{z, a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ и удовлетворяющую следующим определяющим соотношениям:

$$a_ia_j = a_iz = za_i = 0,\ 1 \leqslant i,j \leqslant m;\ \ z^2z = zz^2 = 0;$$
$$(z^2w(R_{a_1}, \ldots, R_{a_m}))(z^2w'(R_{a_1}, \ldots, R_{a_m})) = 0,$$

для всех, включая пустых, слов w, w' от операторов правого умножения R_{a_i}. Кроме того, $ua_k = a_ku$, $1 \leqslant k \leqslant m$, для любого элемента $u \in B_m$ степени по образующим не менее двух и

$$z^2(R_{a_1}\ldots R_{a_m})^k a_{i_1}\ldots a_{i_s}a_{i_{s+1}}\ldots a_{i_t} + z^2(R_{a_1}\ldots R_{a_m})^k a_{i_1}\ldots a_{i_{s+1}}a_{i_s}\ldots a_{i_t} = 0$$

для всех $k \geqslant 0$ и $1 \leqslant s < t \leqslant m$, $1 \leqslant i_1, \ldots, i_t \leqslant m$.

Отметим, что единственным ненулевым элементом степени два относительно образующих является z^2. Алгебра B_m удовлетворяет тождеству коммутативности и тождеству метабелевости (1). Из этих тождеств получаем, что любой элемент относительно свободной алгебры может быть записан как линейная комбинация левонормированных мономов, причем слева расположен z^2, а далее слева направо a_i, $1 \leqslant i \leqslant m$. В алгебре B_m выполняются следующие тождественные соотношения:

$$y_1 y_2 xxx \equiv 0, \quad y_1 y_2 xxz_1 \cdots z_s yy \equiv 0,$$

где натуральное число s имеет остаток при делении на m отличный от $m-2$.

Пусть $\mathbf{V_m}$ – многообразие, порожденное алгеброй B_m, а

$$T_n(\mathbf{V_m}) = \mathrm{span}\{y_1 y_2 x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} | \sigma \in S_n\}$$

— пространство полилинейных левонормированных элементов относительно свободной алгебры многообразия $\mathbf{V_m}$. Как всегда симметрическая группа S_n действует на $T_n(\mathbf{V_m})$ перестановкой образующих $x_1, \ldots, x_n$, оставляя на месте образующие y_1 и y_2, задавая структуру S_n-модуля. Соответствующий характер раскладывается на неприводимые S_n-характеры

$$\chi_n^T((\mathbf{V_m})) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda^T(\mathbf{V_m}) \chi_\lambda, \tag{3}$$

где $m_\lambda^T(\mathbf{V_m})$ — кратность неприводимого характера χ_λ в $\chi_n^T(\mathbf{V_m})$, а сумма берется по разбиениям λ числа n.

Из определений алгебр A_m и B_m видно, что модули $Q_n(\mathbf{U_m})$ и $T_n(\mathbf{V_m})$ изоморфны, поэтому из сформулированного предложения получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Если в (3) $m_\lambda^T(\mathbf{V_m}) \neq 0$, то выполняется неравенство $n - m \cdot \lambda_m < 4m$. Существует константа C, не зависящая от n, что для кратностей в сумме (3) выполняется неравенство $m_\lambda^T(\mathbf{V_m}) \leqslant C$.*

Сформулируем основную теорему.

Теорема 2. *В случае нулевой характеристики основного поля для любого целого m, $m \geqslant 2$, существует почти нильпотентное коммутативное метабелево многообразие экспоненты m.*

Список цитированной литературы

1. Giambruno A., Zaicev M.V. Polynomial identities and Asymptotic Methods // American Mathematical Society, Providence, RI: Mathematical Surveys and Monographs. 2005. V. 122. P. 352.

2. Мищенко С.П., Шулежко О. В. Почти нильпотентные многообразия любой целой экспоненты // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2015. № . 2. С. 53–57.

Ульяновский государственный университет
Получено 09.04.2015

UDK 512.505

Essentially Baer modules

T. H. N. Nhan (Kazan)
tranhoaingocnhan@gmail.com

Maeda (1958) defined Rickart rings (known as p.p. rings). Also, defined by Kaplansky, Hattori (1960): A ring is called right Rickart if the right annihilator of any single element is generated by an idempotent element. The notion of Rickart rings was generalized to a module theoretic version by Lee, Rizvi, and Roman (2010): A right R-module M is called a *Rickart module* if for every $\varphi \in S = \mathrm{End}_R(M)$ then $\mathrm{Ker}\varphi = eM$ for some $e^2 = e \in S$. Dually, a module M is called a *d-Rickart module* (or a *dual Rickart module*) if for every $\varphi \in S = \mathrm{End}_R(M)$ then $\mathrm{Im}\varphi = eM$ for some $e^2 = e \in S$.

A ring R is called a right *ACS ring* if the right annihilator of every element of R is an essential submodule of a direct summand of R_R. According to [1] and [2], a module M is called a *CS-Rickart module* (res., *strongly CS-Rickart module*) if $\mathrm{Ker}\varphi$ is essential in a direct summand (res., fully invariant direct summand) of M for every $\varphi \in S = \mathrm{End}_R(M)$. Dually, a module M is called a *d-CS-Rickart module* (res., *strongly d-CS-Rickart module*) if $\mathrm{Im}\varphi$ lies above a direct summand (res., fully invariant direct summand) of M for every $\varphi \in S = \mathrm{End}_R(M)$.

Kaplansky (1965) introduced a Baer ring as the right annihilator of every non empty subset of the ring is generated by an idempotent element. Clark (1967) introduced a quasi-Baer ring as the right annihilator of every two sided ideal of the ring is generated by an idempotent element. In 2004, Rizvi and Roman [4] introduced the notions of Baer and quasi-Baer modules in general module theoretic settings. A module M is called a *Baer module* if $r_M(I)$ is a direct summand of M for every left ideal I of S. A module M is quasi-Baer if the right annihilator in M of every ideal of the ring $S = \mathrm{End}_R(M)$ is generated by an idempotent of S. In 2010, Tütüncü and Tribak [5] introduced the notion of dual Baer modules. A module M is called a *dual Baer module* if $\sum_{\varphi \in I} \mathrm{Im}\varphi$ is a direct summand of M for every right ideal I of S.

Birkenmeier, Park, and Rizvi (2006) introduced a *right essentially Baer ring* as the right annihilator of any nonempty subset of the ring is essential in a right ideal generated by an idempotent. In this paper, we introduce the concept of essentially Baer modules, dual essentially Baer modules in general module theoretic settings. A module M is called a *essentially Baer module* (res., *strongly essentially Baer module*) if $r_M(I)$ is essential in a direct summand (res., fully invariant direct summand) of M for every left ideal I of S. A module M is called a *dual essentially Baer module* (res., *strongly dual essentially Baer module*) if $\sum_{\varphi \in I} \mathrm{Im}\varphi$ lies above a direct summand (res., fully invariant direct summand) of M for every right ideal I of S.

Theorem 1. *The following implications hold for a module M:*
(1) M is Baer if and only if M is K-nonsingular essentially Baer.
(2) M is dual Baer if and only if M is T-noncosingular dual essentially Baer.

Theorem 2. *Let M be a right R-module.*
(1) If M is CS-Rickart and M has the SSIP-CS then M is essentially Baer. The converse is true if $\mathrm{Soc}M \trianglelefteq M$.
(2) If M is d-CS-Rickart and M has the SSSP-d-CS then M is dual essentially Baer. The converse is true if $\mathrm{Rad}M \ll M$.

Recall that a ring R is called a *right semi-artinian ring* if every non-zero right R-module has non-zero socle. A ring R is called a *right max ring* if every nonzero right R-module has a maximal submodule.

Corollary 1. *Let M be a right R-module.*
(1) If R is a right semi-artinian ring, then M is essentially Baer if and only if M is CS-Rickart and M has the SSIP-CS.
(2) If R is a right max ring, then M is dual essentially Baer if and only if M is d-CS-Rickart and M has the SSSP-d-CS.

Theorem 3. *The following implications hold:*
(1) Every direct summand of a (dual) essentially Baer module is also a (dual) essentially Baer module.
(2) Every direct summand of a strongly essentially Baer module is also a strongly essentially Baer module.
(3) Every direct summand of a strongly dual essentially Baer module is also a strongly dual essentially Baer module.
(4) [2, Proposition 3.7] Every direct summand of a strongly CS-Rickart module is also a strongly CS-Rickart module.
(5) Every direct summand of a strongly d-CS-Rickart module is also a strongly d-CS-Rickart module.

Corollary 2. *([4, Theorem 2.17], [5, Corollary 2.5]) The following implications hold:*
(1) Every direct summand of a Baer module is also a Baer module.
(2) Every direct summand of a dual Baer module is also a dual Baer module.

According to Bican et al. ([3]), the product of submodules A and B of M is defined by: $A *_M B = \mathrm{Hom}_R(M, B)A = \sum\{f(A) \mid f \in \mathrm{Hom}_R(M, B)\}$. A proper submodule N of a module M is called *2-prime* if $A *_M B \leq N$ implies $A \leq N$ or $B \leq N$, whenever A, B are submodules of N. A module M is *prime* if 0 is a 2-prime submodule of M (see [3, Lemma 2.5]). Let $\mathcal{A}$ be the class of all prime modules. Denote by $\mathcal{P}(M)$ the set $\bigcap_{f\in\mathrm{Hom}(M,A), A\in\mathcal{A}} \mathrm{Ker}f$.

Theorem 4. *Let M be a projective module and $\mathcal{P}(M) = 0$. Then the following are equivalent.*

(1) M is a quasi-Baer module.
(2) Every fully invariant submodule of M is essential in a fully invariant direct summand of M.
(3) The right annihilator in M of every ideal of $S = \mathrm{End}_R(M)$ is essential in a fully invariant direct summand of M.

Corollary 3. *The following conditions are equivalent for a semiprime ring R:*
(1) R is a quasi-Baer ring.
(2) For every ideal I of the ring R, there exists an idempotent $e \in R$, such that I_R is essential in R_R and $(1-e)Re = 0$.
(3) For every ideal I of the ring R, there exists an idempotent $e \in R$, such that $r(I)$ is essential in R_R and $(1-e)Re = 0$.

REFERENCES

1. A. N. Abyzov, T. H. N. Nhan. CS-Rickart Modules // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2014. Vol. 35(4). P. 317–326.

2. S. A. Al-Saadi, T. A. Ibrahiem. Strongly Rickart Modules // Journal of Advances in Mathematics. 2014. Vol.9, no.4

3. L. Bican, P. Jambor, T. Kepka, P. Nemec. Prime and coprime modules // Fundamenta Mathematicae CVII. 1980. P. 33–45.

4. S.T. Rizvi, C.S. Roman. Baer and quasi-Baer modules // Comm. Algebra. 2004. Vol.32, no. 1. P. 103–123.

5. D.K. Tütüncü, R. Tribak. On dual Baer Modules // Glasgow Math. J. 2010. Vol.52. P. 261–269.

Kazan (Volga Region) Federal University
Received 15.04.2015

УДК 512.572

О новых свойствах некоторых многообразий алгебр Ли и Лейбница почти полиномиального роста

Ю. Р. Пестова[1] (Ульяновск)
fyathut28@rambler.ru

[1]Грант РФФИ № 14-01-06005

На протяжении всей работы основное поле имеет нулевую характеристику. Все неопределяемые понятия можно найти, например, в монографии [1].

Напомним, что алгебра Ли определяется тождеством антикоммутативности $x^2 \equiv 0$ и тождеством Якоби $xyz + yzx + zxy \equiv 0$. Алгебра Лейбница определяется тождеством $(xy)z \equiv (xz)y + x(yz)$. Заметим, что понятие алгебры Лейбница является обобщением понятия алгебр Ли, так как из тождеств алгебры Ли следует, в частности, тождество Лейбница. Эти две алгебры являются неассоциативными, поэтому необходимо следить за скобочной структурой. Договоримся в левонормированных произведениях опускать скобки, то есть $abc = (ab)c$.

В классе алгебр Ли известны пять многообразий почти полиномиального роста. Сохраним принятые для них в работе [2] обозначения $\mathbf{V}_0$, $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$, $\mathbf{V}_4$. Все эти многообразия, кроме первого, являются разрешимыми. Подробную информацию об этих многообразиях можно найти, например, в работах [2], [3]. В случае многообразий алгебр Лейбница, кроме лиевых многообразий почти полиномиального роста, построены еще четыре многообразия почти полиномиального роста $\widetilde{\mathbf{V}}_1$, $\widetilde{\mathbf{V}}_2$, $\widetilde{\mathbf{V}}_3$, $\widetilde{\mathbf{V}}_4$, которые по своим свойствам схожи с разрешимыми лиевыми.

Мы представим свойства двух лиевых многообразий $\mathbf{V}_0$, $\mathbf{V}_1$ и многообразия алгебр Лейбница $\widetilde{\mathbf{V}}_1$ почти полиномиального роста над полем нулевой характеристики, полученные в последнее время.

Множество матриц второго порядка со следом нуль над основным полем относительно операции коммутирования образует трехмерную простую алгебру Ли, которую обозначим sl_2. Следуя [2] многообразие, порожденное этой алгеброй, обозначим $\mathbf{V}_0$. Оно достаточно хорошо изучено. Так, например, в работах [4], [5] доказано, что оно является шпехтовым и найден базис тождеств этого многообразия. В статье [6] получен результат о кратностях этого многообразия. Используя этот результат и некоторые вспомогательные результаты, недавно автором была найдена формула его кодлины [7].

Теорема 1. *Для всех $n \geq 2$ кодлина многообразия $\mathbf{V}_0$ вычисляется по формулам*

$$l_n(\mathbf{V}_0) = \begin{cases} \frac{n^2+4n}{16}, & \text{если } n = 4k; \\ \frac{n^2+6n-7}{16}, & \text{если } n = 4k+1; \\ \frac{n^2+4n+4}{16}, & \text{если } n = 4k+2; \\ \frac{n^2+6n-11}{16}, & \text{если } n = 4k+3. \end{cases}$$

Многообразие алгебр Ли $\mathbf{V}_1 = \mathbf{N}_2\mathbf{A}$ определяется тождеством

$$(x_1x_2)(x_3x_4)(x_5x_6) \equiv 0$$

и состоит из алгебр Ли с нильпотентным ступени не выше двух коммутантом. Это многообразие было достаточно подробно исследовано в работе [8]. Сформулируем новые результаты, касающиеся этого многообразия [9].

Теорема 2. *Для $n \geqslant 2$ кодлина многообразия $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ вычисляется по следующим формулам:*

$$l_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A}) = \begin{cases} \frac{5n^2-24n+32}{8}, & \text{если } n = 4m; \\ \frac{5n^2-24n+36}{8}, & \text{если } n = 4m+2; \\ \frac{5n^2-24n+35}{8}, & \text{если } n = 4m+1 \text{ или } n = 4m+3. \end{cases}$$

Теорема 3. *При $n \geqslant 2$ коразмерность многообразия $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ задается формулой $c_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A}) = (n-1)\left((n-4)2^{n-3}+2\right)$, а базис полилинейной части $P_n(\mathbf{N}_2\mathbf{A})$ при $n \geqslant 2$ состоит из элементов вида:*

$$x_{i_1}x_nx_{i_2}\dots x_{i_{n-1}}, \text{где } i_1 < n > i_2 > \dots > i_{n-1};$$

$$(x_{i_1}x_nx_{i_2}\dots x_{i_{n-k-1}})(x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_k}), \text{где } k = 2, 3, \dots, (n-2) \text{ и}$$

$i_1 < n > i_2 > \dots > i_{n-k-1},\ j_1 < j_2 > j_3 > \dots > j_k.$

Многообразие $\widetilde{\mathbf{V}}_1$ состоит из алгебр Лейбница и определяется тождеством $x_1(x_2x_3)(x_4x_5) \equiv 0$. Это многообразие было достаточно подробно исследовано в работе [10]. Нами был получен следующий новый результат [11].

Теорема 4. *Базис полилинейной части многообразия $\widetilde{\mathbf{V}}_1$ состоит из элементов: $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}$, где $i_2 > \dots > i_n$; $(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_{n-k}})(x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_k})$, где $k = 2, \dots, (n-1)$, $i_2 > \dots > i_{n-k}$, $j_1 < j_2$ и $j_2 > j_3 > \dots > j_k$.*

Список цитированной литературы

1. Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1980. 226 с.

2. Мищенко С. П. Рост многообразий алгебр Ли // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, № 6. С. 25–45.

3. Мищенко С. П. О многообразиях разрешимых алгебр Ли // ДАН СССР. 1990. Т. 313, № 6. С. 1345–1348.

4. Размыслов Ю. П. О конечной базируемости тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 1. С. 83–113.

5. Размыслов Ю. П. Конечная базируемость некоторых многообразий алгебр // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 6. С. 685–693.

6. Дренски В. С. Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр // Матем. сб. 1980. Т. 115, № 1(5). С. 98—115.

7. Пестова Ю. Р. Кодлина многообразия, порожденного трехмерной простой алгеброй Ли sl_2 // Вестник Моск. Унив-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2015. № 3. С. 58–61.

8. Мищенко С. П. Многообразия алгебр Ли с двуступенно нильпотентным коммутантом // Весцi АН БССР: Сер. фiз. матем. наук. 1987. № 6. С. 39–43.

9. Мищенко С. П., Фятхутдинова Ю. Р. Новые свойства многообразия алгебр Ли $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17, № 7. С. 165–173.

10. Mishchenko S. and Valenti A. A Leibniz variety with almost polynomial growth // Journal of Algebra. 2000. Vol. 223. P. 66–84.

11. Мищенко С. П., Пестова Ю. Р. Базис полилинейной части многообразия алгебр Лейбница $\widetilde{\mathbf{V}}_1$ // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2014. № 3 (114). С. 72–78.

Ульяновский Государственный Университет
Получено 31.03.2015

УДК 512.552, 512.664.2

Об одной градуированной алгебре

Д. И. Пионтковский[1] (Москва)
piont@mccme.ru

Изучение базисов Грёбнера (они же — базисы Грёбнера–Ширшова) идеала соотношений ассоциативной алгебрах часто позволяет установить структурные и гомологические свойства алгебры. Однако, при таких исследованиях иногда приходится строить базисы Грёбнера в несколько более общем контексте, чем это было бы естественно для данной алгебры, и, кроме того, рассматривать не только минимальные базисы Грёбнера. Иллюстрации этого наблюдения и посвящен доклад.

Мы будем рассматривать алгебру, которая введена Ефимовым, Орловым и Лунцем как координатное кольцо некоммутативного грассманиана [1, Part 3]. Пусть $m < n$ — два натуральных числа, V — n- мерное векторное пространство. Рассматривается квадратичная $\mathbb{Z}$–алгебра[2] $A = A^{m,V}$ с тривиальными компонентами $A_{ii} = k$ (основное поле) и порожденная компонентами

$$A_{i,i+1} = \begin{cases} \Lambda^d V, & (d+1)|i, \\ V^*, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где $d = n - m$. Квадратичные соотношения алгебры A определяются естественными точными последовательностями

$$0 \to \Lambda^{d-1} V \to A_{i+1,i+2} \otimes A_{i,i+1} \to A_{i,i+2} \to 0 \text{ при } (d+1)|i, i+1$$

[1]Грант РФФИ № 14-01-00416

[2]$\mathbb{Z}$–алгеброй называется ассоциативная алгебра $A = \oplus_{i,j\in\mathbb{Z}} A_{ij}$ такая, что $A_{ij} = 0$ при $i > j$, $A_{ij}A_{kl} = 0$ при $j \neq k$ и $A_{ij}A_{jl} \subset= A_{il}$.

и

$$0 \to \Lambda^2 V^* \to A_{i+1,i+2} \otimes A_{i,i+1} \to A_{i,i+2} \to 0, \text{ иначе.}$$

Здесь рассматривается случай, когда число $d = m - n$ ("коразмерность грассманиана") равно 2. Тогда A — $\mathbb{Z}$–геометрическая алгебра, соответствующая спирали, порожденной трехэлементным исключительным набором

$$(\mathcal{O}(-1), \mathcal{O}, \mathcal{O}(1))$$

в производной категории когерентных пучков на $(n-1)$–мерном проективном пространстве [2]. Например, как отметили Бондал и Ждановский [3], в случае $n = 4$ соответствующая категория включает математические инстантоны на $\mathbb{P}^3$.

Для описания этой категории важна

Теорема 1. *$\mathbb{Z}$–алгебра A когерентна справа и слева при $d = 2$.*

Полное доказательство см. в [4]. Оно использует понятие алгеброй с ограниченной переработкой: такие алгебры когерентны, подобно конечно определенным мономиальным алгебрам [5]. Для установления этого свойства сначала строится квадратичный базис Грёбнера соотношений алгебры A. Здесь интересны две особенности.

Во-первых, алгебра A — 3-периодическая, т.е. она эквивалентна алгебре, порожденной пространством $A_{01} \oplus A_{12} \oplus A_{23}$ (первый индекс рассматривается по модулю 3). Тем не менее, ее идеал соотношений обладает квадратичным базисом Грёбнера лишь в категории 6-периодических алгебр, т.е. требуется искусственно удвоить количество порождающих. Во-вторых, будучи квадратичной, алгебра A не является алгеброй с 1-переработкой (как квадратичная мономиальная алгебра), но лишь алгеброй с 3–переработкой (подобно мономиальной алгебре с соотношениями степени не выше 4). Это означает, что для решения линейных уравнений над этой алгеброй требуется использовать не только минимальный базис Грёбнера, но и некоторые другие элементы идеала соотношений алгебры — члены не минимального базиса Грёбнера.

Список цитированной литературы

1. Efimov A. I., Lunts V. A., Orlov D. O. Deformation theory of objects in homotopy and derived categories III: Abelian categories.// Adv. Math. 2011. Vol. 226, no. 5. P. 3857–3911.

2. Бондал А. И., Полищук А. Е. Гомологические свойства ассоциативных алгебр: метод спиралей.// Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57, № 2. С. 3–50.

3. Bondal A., Zhdanovskiy I. Coherence of relatively quasi-free algebras. 2015. arXiv preprint arXiv:1501.02521.

4. Piontkovski D. Noncommutative Grassmannian of codimension two has coherent coordinate ring. 2014. arXiv preprint arXiv:1401.6549. J. Noncommutative Geometry, to appear

5. Пионтковский Д. И. Некоммутативные базисы Грёбнера, когерентность ассоциативных алгебр и делимость в полугруппах.// Фунд. и прикл. математика. 2001. Т. 7, №. 2. С. 495–513.

Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"
Получено 15.04.2015

УДК 512.554.5

Простые конечномерные правоальтернативные супералгебры абелева типа характеристики 0

С. В. Пчелинцев (Москва), О. В. Шашков (Орехово-Зуево)
pchelinzev@mail.ru, o.v.shashkov@yandex.ru

Изучение простых супералгебр является важным направлением в теории колец. К настоящему времени известна классификация простых супералгебр в следующих классах:

– конечномерные ассоциативные супералгебры над алгебраически замкнутым полем (C.E. Уолл, 1964, [1]),

– конечномерные лиевы и йордановы супералгебры над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 (В. Кац, 1977, [2]),

– альтернативные супералгебры характеристики $\neq 2, 3$ (Е.И. Зельманов, И.П. Шестаков, 1990, [3]) и в случае произвольной характеристики (И.П. Шестаков, 1997, [4]),

– (-1,1)-супералгебры (И.П. Шестаков, 1998, [5]),

– конечномерные йордановы супералгебры характеристики $\neq 2$ с полупростой четной частью (М. Расин, Е. Зельманов, 1994, [6]),

– конечномерные унитальные йордановы супералгебры, четная часть которых имеет ненулевой нильпотентный идеал (К. Мартинес, Е. Зельманов, 2001, [7]);

– йордановы супералгебры абелева типа (В.Н. Желябин, И.П. Шестаков, 2004, [8]),

– конечномерные некоммутативные йордановы супералгебры над полем характеристики 0 (А.П. Пожидаев и И.П. Шестаков, 2010, 2013, [9, 10]).

Задача описания простых конечномерных правоальтернативных супералгебр была сформулирована И.П. Шестаковым в Днестровской тетради [11]. Строение некоторых правоальтернативных супералгебр малых размерностей недавно получено Д.П. Силва, Л.С.И. Мураками и И.П. Шестаковым.

Супералгебру $A = A_0 \oplus A_1$ назовем *супералгеброй абелева типа,* если A_0 ассоциативна и коммутативна, а A_1 — ассоциативный A_0−бимодуль.

Нами получена классификация простых конечномерных правоальтернативных супералгебр $A = A_0 \oplus A_1$ над полем характеристики 0. Доказано, что всякая такая супералгебра $A = A_0 \oplus A_1$ получается удвоением полупростой четной части A_0, а умножение в A определяется с помощью подходящего автоморфизма и линейного оператора, действующих на четной части A_0. Кроме того, показано, что группы автоморфизмов таких супералгебр являются абелевыми, а дифференцирования тривиальными.

Список цитированной литературы

1. Wall C. T. C. Graded Brauer groups // J.Reine Angew.Math. 1964. no. 213. P. 187–199.

2. Kac V. Classification of simple Z-graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras // Comm. in Algebra. 1977. no. 5. P. 1375–1400.

3. Зельманов Е. И., Шестаков И. П. Первичные альтернативные супералгебры и нильпотентность радикала свободной альтернативной алгебры // Изв. АН СССР, сер. матем. 1990. Т. 54, № 4. С. 676–693.

4. Шестаков И. П. Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 6. С. 675–716.

5. Шестаков И. П. Простые $(-1,1)$–супералгебры // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 6. С. 721–739.

6. Racine M., Zelmanov E. Simple Jordan superalgebras // Nonassociative algebras and its applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994. P. 344–349.

7. Martinez C., Zelmanov E. Simple Finite-Demiseonal Jordan superalgebras of Prime Characteristic // Jornal of Algebra. 2001. no. 236. P. 575–629.

8. Желябин В.Ḣ., Шестаков И. П. Простые специальные йордановы супералгебры с ассоциативной четной частью // Сиб. матем. ж. 2004. Т. 45, № 5. С. 1046–1072.

9. Пожидаев А. П., Шестаков И. П. Некоммутативные йордановы супералгебры степени $\geqslant 2$ // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 1. С. 26–59.

10. Пожидаев А. П., Шестаков И. П. Простые конечномерные некоммутативные йордановы супералгебры характеристики 0 // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54, № 2. С. 389–406.

11. Днестровская тетрадь, Нерешенные проблемы теории колец и модулей. Издание четвертое. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1993.

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации
Московский государственный областной гуманитарный институт
Получено 24.01.2015

УДК 512.572

О коразмерностях алгебр Лейбница с нильпонентным коммутантом

С. М. Рацеев (Ульяновск)
RatseevSM@mail.ru

Алгебры Лейбница определяются тождеством $(xy)z = (xz)y + x(yz)$ и являются обобщениями алгебр Ли. Пусть $L(X)$ — свободная алгебра Лейбница над полем K, где $X = \{x_1, x_2, ...\}$ — счетное множество свободных образующих, P_n — подпространство в $L(X)$, состоящее из всех полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, ..., x_n$, $\mathbf{V}$ — многообразие алгебр Лейбница, $Id(\mathbf{V})$ — идеал тождеств многообразия $\mathbf{V}$ в свободной алгебре $L(X)$. Обозначим

$$P_n(\mathbf{V}) = P_n/(P_n \cap Id(\mathbf{V})), \quad c_n(\mathbf{V}) = dim\, P_n(\mathbf{V}).$$

Будем опускать скобки при их левонормированной расстановке:
$((ab)c) = abc$.

Лемма 1. *Пусть A — некоторая ассоциативная алгебра с операцией умножения $\wedge$ над произвольным полем K. На декартовом квадрате $B = A \times A$ определим операции сложения и умножения элементов множества B, а также операцию умножения на элементы поля K:*

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

$$(x_1, x_2)(y_1, y_2) = ([x_1, y_1], [x_2, y_1]),$$
$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2),$$

где $[x, y] = x \wedge y - y \wedge x$, $\alpha \in K$, $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in B$. Тогда полученная алгебра B будет являться алгеброй Лейбница.

Определим многообразие алгебр Лейбница $\widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}$ тождеством

$$(x_1x_2)\dots(x_{2s+1}x_{2s+2}) = 0.$$

В работах [1, 2] приводятся оценки роста подмногообразий в $\widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}$, а в работе [3] получены эквивалентные условия для значений экспонент многообразий алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом.

Пусть $UT_s = UT_s(K)$ — алгебра верхнетреугольных матриц порядка s над полем K, $\widetilde{U}_s = UT_s \times UT_s$ — алгебра Лейбница построенная с помощью леммы 1. Нетрудно видеть, что $\widetilde{U}_s \in \widetilde{\mathbf{N}_{s-1}\mathbf{A}}$.

Теорема 1. *(i) В случае произвольного поля K следующие полилинейные элементы от переменных $x_1, \ldots, x_n$ образуют базис пространства $P_n(\widetilde{U}_s)$, $s \geq 2$:*

$$x_{m_1} x_{m_2} x_{i_1} \ldots x_{i_k} (x_{11} \ldots x_{1a_1}) \ldots (x_{c1} \ldots x_{ca_c}),$$

$$m_1, m_2 \in \{1, 2, \ldots, n\},\ m_1 \neq m_2,\ k \geq 0,\ i_1 < \ldots < i_k,$$

$$a_i \geq 2,\ i = 1, \ldots, c,\ 0 \leq c \leq s - 2,$$

и переменные в каждой скобке $(x_{j1} \ldots x_{ja_j})$ упорядочены следующим образом:

$$j1 > j2 < \ldots < ja_j.$$

(ii) Если характеристика поля K равна нулю, то тождество

$$(x_1 x_2) \ldots (x_{2s-1} x_{2s}) = 0$$

порождает идеал тождеств алгебры $\widetilde{U}_s$ (иными словами, алгебра $\widetilde{U}_s$ является носителем многообразия $\widetilde{\mathbf{N}_{s-1}\mathbf{A}}$).

Для произвольного многообразия $\mathbf{V}$ определим функцию сложности

$$\mathcal{C}(\mathbf{V}, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(\mathbf{V})}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Это один из примеров экспоненциальной производящей функции. Функции сложности оказываются полезными для вычисления асимптотики роста многообразий.

Пусть $f(n)$ и $g(n)$ — две функции натурального аргумента. Будем обозначать $f(n) \approx g(n)$, если $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

Теорема 2. *Для многообразия алгебр Лейбница $\widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}$ над произвольным полем верны следующие утверждения:*

1) *$\widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}$ имеет следующую функцию сложности:*

$$\mathcal{C}(\widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}, z) = z + \frac{z^2}{z-1}\left(\Big(1 + (z-1)exp(z)\Big)^s - 1\right);$$

2) *для любого $n \geq 2$ выполнено равенство*

$$c_n(\widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}) = \sum_{k=1}^{s} k^n \sum_{i=0}^{k-1} C_s^k C_{k-1}^i (-1)^{k-1-i} k^{-i-2} \frac{n!}{(n-i-2)!};$$

3) *$c_n(\widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}) \approx n^{s+1} s^{n-s-1}$, $n \to \infty$.*

Список цитированной литературы

1. Рацеев С.М. Рост некоторых многообразий алгебр Лейбница // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. 2006. Т. 46, № 6/1. С. 70–77.

2. Рацеев С.М. Рост многообразий алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом // Матем. заметки. 2007. Т. 82, № 1. С. 108–117.

3. Рацеев С.М. Оценки роста многообразий алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. 2010. Т. 78, № 4. С. 65–72.

Ульяновский государственный университет
Получено 10.03.2015

УДК 512.572

О коразмерностях некоторых алгебр Лейбница-Пуассона

С. М. Рацеев, О. И. Череватенко (Ульяновск)
RatseevSM@mail.ru, chai@pisem.net

Векторное пространство A над полем K с двумя K-билинейными операциями умножения $\cdot$ и $\{,\}$ называется алгеброй Лейбница–Пуассона, если относительно операции $\cdot$ пространство A является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей, относительно операции $\{,\}$ — алгеброй Лейбница, и данные операции связаны правилами

$$\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b, \quad \{c, a \cdot b\} = a \cdot \{c, b\} + \{c, a\} \cdot b,$$

где $a, b, c \in A$. При этом алгебра Лейбница $A(+, \{,\}, K)$ над полем K определяется тождеством

$$\{\{x, y\}, z\} = \{\{x, z\}, y\} + \{x, \{y, z\}\}.$$

Алгебры Лейбница–Пуассона впервые были введены в работе [1]. Данные алгебры являются обобщениями алгебр Пуассона, которые возникают естественным образом в некоторых разделах алгебры, дифференциальной геометрии, топологии, современной теоретической физике и т.д. В работе [2] исследована взаимосвязь многообразий алгебр Лейбница и многообразий алгебр Лейбница-Пуассона «на языке» тождеств.

Договоримся опускать скобки $\{,\}$ при их левонормированной расстановке: $\{\{a, b\}, c\} = \{a, b, c\}$.

Пусть $F(X)$ — свободная алгебра Лейбница–Пуассона над счетным множеством свободных образующих $X = \{x_1, x_2, ...\}$, P_n — подпространство в $F(X)$, состоящее из всех полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, ..., x_n$,

$\mathbf{V}$ — многообразие алгебр Лейбница-Пуассона, $Id(\mathbf{V})$ — идеал тождеств многообразия $\mathbf{V}$ в свободной алгебре $F(X)$. Обозначим

$$P_n(\mathbf{V}) = P_n/(P_n \cap Id(\mathbf{V})), \quad c_n(\mathbf{V}) = dim\, P_n(\mathbf{V}).$$

Определим многообразия алгебр Лейбница-Пуассона $\mathbf{V}_s$ и $\mathbf{W}_s$ следующими полилинейными тождествами:

$$\mathbf{V}_s: \ \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0, \quad \{x_0, \{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{2s-1}, x_{2s}\}\} = 0,$$

$$\mathbf{W}_s: \ \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0, \quad \{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \ldots, \{x_{2s+1}, x_{2s+2}\}\} = 0.$$

Для произвольного многообразия $\mathbf{V}$ определим функцию сложности

$$\mathcal{C}(\mathbf{V}, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(\mathbf{V})}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Пусть $f(n)$ и $g(n)$ — две функции натурального аргумента. Будем обозначать $f(n) \approx g(n)$, если $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

Теорема 1. *Для многообразия $\mathbf{V}_s$ над произвольным полем выполнены следующие равенства:*

$$\mathcal{C}(\mathbf{V}_s, z) = exp(z) - exp(z)z + \frac{exp(z)z}{z-1}\left(\Big(1 + (z-1)exp(z)\Big)^s - 1\right),$$

$$c_n(\mathbf{V}_s) = 1 - n + \sum_{k=2}^{s+1} k^n \sum_{i=0}^{k-2} C_s^{k-1} C_{k-2}^i (-1)^{k-2-i} k^{-i-1} \frac{n!}{(n-i-1)!}, \ n \geq 1,$$

$$c_n(\mathbf{V}_s) \approx n^s (s+1)^{n-s}, \ n \to \infty,$$

где C_n^k — число сочетаний из n по k.

Теорема 2. *Для многообразия $\mathbf{W}_s$ над произвольным полем выполнены следующие равенства:*

$$\mathcal{C}(\mathbf{W}_s, z) = exp(z) + \frac{exp(z)z^2}{z-1}\left(\Big(1 + (z-1)exp(z)\Big)^s - 1\right),$$

$$c_n(\mathbf{W}_s) = 1 + \sum_{k=2}^{s+1} k^n \sum_{i=0}^{k-2} C_s^{k-1} C_{k-2}^i (-1)^{k-2-i} k^{-i-2} \frac{n!}{(n-i-2)!}, \ n \geq 1,$$

$$c_n(\mathbf{W}_s) \approx n^{s+1} (s+1)^{n-s-1}, \ n \to \infty.$$

Список цитированной литературы

1. Рацеев С.М. Коммутативные алгебры Лейбница-Пуассона полиномиального роста // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. 2012. Т. 94, № 3/1. С. 54–65.

2. Ratseev S.M. On varieties of Leibniz-Poisson algebras with the identity $\{x, y\} \cdot \{z, t\} = 0$ // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2013. Т. 6, № 1. С. 97–104.

Ульяновский государственный университет
Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова
Получено 10.03.2015

УДК 512.556

Изоморфизмы полуполей непрерывных положительных функций с max-сложением

В. В. Сидоров[1] (Киров)
sedoy_vadim@mail.ru

Пусть X — топологическое пространство, $\mathbb{P}$ — множество положительных действительных чисел, $U^{\vee}(X)$ — полуполе непрерывных функций из X в $\mathbb{P}$ с поточечными операциями max-сложения и умножения. Множество $A \subseteq U^{\vee}(X)$ будем называть *подалгеброй*, если оно замкнуто относительно max-сложения, умножения и выдерживает умножение на константы из $\mathbb{P}$.

Множество всех подалгебр полуполя $U^{\vee}(X)$ с добавленной пустой подалгеброй относительно включения образует решетку $\mathbb{A}(U^{\vee}(X))$ всех подалгебр полуполя $U^{\vee}(X)$.

В 1997 г. Е. М. Вечтомовым [1] была доказана определяемость любого хьюиттовского пространства X решеткой подалгебр кольца функций $C(X)$. В 2010 году [2] данный результат был перенесен на решетки подалгебр полуколец $C^{+}(X)$ непрерывных неотрицательных функций, а позже и для полуколец $C^{\vee}(X)$ непрерывных неотрицательных функций с max-сложением. В связи с развитием теории полуполей непрерывных функций возник вопрос о справедливости аналогичного результата для решеток подалгебр соответствующих полуполей $U^{+}(X)$ и $U^{\vee}(X)$ непрерывных положительных функций.

Нами доказана

Теорема 1. *Для произвольных хьюиттовских пространств X и Y решетки $\mathbb{A}(U^{\vee}(X))$ и $\mathbb{A}(U^{\vee}(Y))$ изоморфны тогда и только тогда, когда пространства X и Y гомеоморфны.*

[1] Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки, проект № 1.1375.2014/К.

Доклад посвящен следующей гипотезе:

Гипотеза. *Для произвольных хьюиттовских пространств X и Y любой изоморфизм α решеток $\mathbb{A}(U^{\vee}(X))$ и $\mathbb{A}(U^{\vee}(Y))$ порождается однозначно определенным изоморфизмом φ полуполей $U^{\vee}(X)$ и $U^{\vee}(Y)$. Исключение составляет случай, когда X — одно- или двухточечное дискретное пространство.*

Список цитированной литературы

1. Вечтомов Е. М. Решетка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства // Математические заметки. 1997. Т. 62. № 5. С. 687–693.

2. Вечтомов Е. М., Сидоров В. В. Изоморфизмы решеток подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Т. 16. Вып. 3. С. 63–103.

Вятский государственный гуманитарный университет
Получено 15.01.2015

УДК 512.552.7

О первичном радикале полугрупповых алгебр

А. Г. Сокольский (Белгород)

Все определения, используемых ниже понятий, можно найти, например, в [2].

До сих пор немного известно о строении первичного радикала полугруппового кольца в общем случае. Полностью строение первичного радикала групповой алгебры для поля простой характеристики получено Дыментом и Залесским в [1].

В описании радикалов полугрупповых алгебр коммутативных полугрупп, 2-нильпотентных полугрупп и др. важную роль играет идеал

$$I(\rho, S, F) = \{\sum_i \alpha_i(s_i - t_i) | (s_i, t_i) \in \rho, s_i, t_i \in S, \alpha_i \in F\},$$

где S – полугруппа, F – поле, ρ конгруэнция на S.

Известно, что радикал Джекобсона для коммутативных полугрупп совпадает с первичным радикалом и обобщенно нильпотентным радикалом, при этом, радикал Джекобсона и первичный радикал полугрупповой алгебры равен $I(C, S, F)$, где C – наименьшая сепаративная конгруэнция (компрессивный радикал), F – поле нулевой характеристики. Аналогичный результат справедлив для 2-нильпотентных полугрупп. Для групп указанные радикалы равны нулю и для поля нулевой характеристики первичный радикал групповой алгебры равен нулю.

Для поля простой характеристики нашлись два радикала группы, совпадение которых эквивалентно тому, что первичный радикал групповой алгебры равен идеалу $I(\rho, S, F)$, где ρ один из указанных радикалов.

Для полугрупповой алгебры полугруппы с сокращением и поля простой характеристики рассмотрим следующую конгруэнцию.

(1) $(s,t) \in \rho$, если для всех $x \in S^1, \quad sxS \cap txS \neq \emptyset$;

(2) $(s,t) \in \rho'$, если для всех $x \in S^1, \quad Sxs \cap Sxt \neq \emptyset$;

(3) $\tau = \rho \cap \rho'$;

(4) $(s,t) \in \omega$, если существует конечное множество $F \subseteq S$, лежащее в одном τ-классе и такое, что $sxF \cap txF \neq \emptyset$ для всех $x \in S^1$. Обозначим через ω_p отношение на полугруппе S, задаваемое следующим образом $\forall a, b \in S, (a,b) \in \omega \Leftrightarrow (a,b) \in \omega, ab = ba, a^{p^k} = b^{p^k}$ для некоторого натурального k.

Теорема 1. *Пусть S – сократимая полугруппа, F – поле простой характеристики p. Тогда*

(а) $\mathcal{B}(F[S]) \subseteq I(\Omega_p, S, F)$;

(б) $\mathcal{B}(F[S]) = I(\sigma, S, F)$, для некоторой конгруэнции σ, возможно лишь в случае когда $\sigma = \Omega_p$.

Для общего случая справедлива

Теорема 2. *Для первичного радикала полугрупповой алгебры F[S], где F– поле нулевой характеристики имеет место*

$$I(\beta_S, S, F) \subseteq B(F[S]) \subseteq I(C_S, S, F),$$

β_S – радикал Бэра полугруппы S, C_S – компрессивный радикал полугруппы S.

Отсюда непосредственно следует, что для полугруппы, на которой эти радикалы совпадают имеет место равенство $B(F[S]) = I(C_S, S, F)$

Список цитированной литературы

1. З. З. Дымент, А. Е. Залесский О нижнем радикале группового кольца // Докл. АН БССР. 1975. Т. XIX, № 10. С. 876–979.

2. А. Г. Сокольский Радикалы полугрупп и полугрупповых алгебр // Математический сборник. 2010. Т. 201. № 5. С. 135–160.

Белгородский государственный университет
Получено 12.05.2015

УДК 512.554

Описание почти нильпотентных коммутативных метабелевых многообразий подэкспоненциального роста

Нгуен Т. К. Чанг, Ю. Ю. Фролова (Ульяновск)
trangnguyen.ulsu@gmail.com, yuyufrolova@mail.ru

Характеристика основного поля равна нулю. Все необходимые понятия можно найти в книгах [1] и [2]. Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое многообразие линейных алгебр, а $P_n(\mathbf{V})$ — множество полилинейных элементов относительно свободной алгебры этого многообразия степени n от свободных образующих $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Хорошо известно, что в случае нулевой характеристики основного поля любое тождество эквивалентно некоторой системе полилинейных тождеств, поэтому исследование строения полилинейных частей относительно свободной алгебры некоторого многообразия дает полную информацию об этом многообразии. Коразмерностью степени n многообразия $\mathbf{V}$ называют размерность $c_n(\mathbf{V}) = dim(P_n(\mathbf{V}))$ пространства $P_n(\mathbf{V})$. Асимптотическое поведение последовательности коразмерностей называют ростом многообразия $\mathbf{V}$. Назовем рост многообразия $\mathbf{V}$ подэкспоненциальным, если для любого действительного числа $r > 1$ найдется такое натуральное число N и действительное число $C > 0$, что для всех $n \geq N$ выполнено условие $c_n(\mathbf{V}) < Cr^n$.

Напомним, что многообразие называется метабелевым, если в нем выполнено тождество $(xy)(zt) \equiv 0$ и почти нильпотентным, если любое его собственное подмногообразие нильпотентно, а само оно нильпотентным не является. Примером такого многообразия является многообразие, порожденное йордановой алгеброй (см. [2], пример 2, стр. 104.) Опишем строение этой алгебры. Пусть M — векторное пространство с базисом $\{e_1, e_2, ...\}$, $\wedge(M)$ — его внешняя алгебра и $\wedge^0(M)$ — подалгебра алгебры $\wedge(M)$, порожденная множеством M. Рассмотрим пространство $C = \wedge^0(M) \oplus M$ и определим умножение в C правилом $(u + x)(v + y) = u \wedge y + v \wedge x$, где $u, v \in \wedge^0(M)$, $x, y \in M$. Известно, что многообразие $\mathbf{V}_{alt} = var(C)$, порожденное алгеброй C, является метабелевым, коммутативным, почти нильпотентным.

Рассмотрим однопорожденную алгебру $A =< a >$, такую, что $uv = 0$ и $ua = au$, где u, v — неассоциативные слова данной алгебры, длины больше единицы.

Предложение 1. *Многообразие $\mathbf{V}_{sym} = var(A)$, порожденное алгеброй A, является метабелевым, коммутативным, почти нильпотентным.*

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{W}$ — коммутативное метабелево многообразие подэкспоненциального роста и $\mathbf{V}_{sym}, \mathbf{V}_{alt} \nsubseteq \mathbf{W}$, тогда $\mathbf{W}$ — нильпотентное многообразие.*

Таким образом, в классе коммутативных метабелевых алгебр существует ровно два почти нильпотентных многообразия подэкспоненциального роста.

Список цитированной литературы

1. Giambruno, A. and Zaicev, M. Polynomial identities and asymptotic methods. American Mathematical Society Providence, RI. 2005. 352 p.

2. Жевлаков, К.А., Слинько, А.М., Шестаков, И.П., Ширшов А.И. Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.

Ульяновский государственный университет
Получено 18.04.2015

УДК 512.55

Функциональное представление drl-полукольца

В. В. Чермных, О. В. Чермных[1] (Киров)
vv146@mail.ru

Пучковые представления l-колец были подробно изучены в [1]. Нами получен аналог результатов К. Кеймеля для решеточно упорядоченных полуколец.

Определение 1. *Алгебраическую структуру* $(S, +, \cdot, -, \vee, \wedge, 0)$ *назовем* drl*-полукольцом, если выполняются следующие аксиомы:*
1. $(S, +, \cdot, 0)$ *— полукольцо с нулем* 0*;*
2. $(S, \vee, \wedge)$ *— решетка с порядком* $\leq$*;*
3. $x - y$ *— наименьший элемент* z*, такой, что* $y + z \geq x$*;*
4. $x + y \vee z = (x + y) \vee (x + z), x + y \wedge z = (x + y) \wedge (x + z)$ *для любых* $x, y, z \in S$*;*
5. $x(y - z) = xy - xz, (x - y)z = xz - yz$ *для любых* $x, y, z \in S$*;*
6. $(x - y) \vee 0 + y \leq x \vee y$*;*
7. $x - x \geq 0$ *для любого* $x \in S$*;*
8. $xy \geq 0$ *для любых* $0 \leq x, y \in S$*.*

Полукольцо мы понимаем как алгебру, отличающуюся от ассоциативного кольца, возможно, необратимостью аддитивной операции. Под названием l-полукольцо drl-полукольца впервые были рассмотрены R. Rao [2]. Без учета "мультипликативных" аксиом определение задает drl-полугруппу, введенную в обиход K. Swamy [3].

С помощью *симметрической разности* $x * y = (x - y) \vee (y - x)$ на drl-полукольце задается норма.

Определение 2. *Непустое подмножество* A drl*-полукольца* S *называется* l*-идеалом, если выполняются условия:*
1. $x + y \in A$ *для любых* $x, y \in A$*;*
2. если $x * 0 \leq y * 0$ *и* $y \in A$*, то* $x \in A$*;*
3. $sx, xs \in A$ *для любых* $x \in A, s \in S$*.*

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ, проект № 1.1375.2014/K

Другими словами, l-идеал — это полукольцевой идеал и выпуклая подрешетка одновременно. Ядро (класс нуля) произвольной конгруэнции на drl-полукольце есть l-идеал, и каждый l-идеал A однозначно определяет конгруэнцию с ядром A (именно, $x \equiv y(A) \Leftrightarrow x * y \in A$). Фактор-$drl$-алгебру drl-полукольца S будем обозначать S/A, где A — l-идеал. Элемент a drl-полукольца называется *положительным*, если $a \geq 0$.

Отметим свойства, используемые для доказательства основной теоремы.

Предложение 1. *Пусть S — drl-полукольцо.*

1. $(S, \vee, \wedge)$ — дистрибутивная решетка;

2. решетка всех l-идеалов из S дистрибутивна;

3. каждый элемент из S представим в виде разности двух положительных элементов;

4. если $b \in A_1 + \ldots + A_n, A_i$ — l-идеал и $b \geq 0$, то $b = a_1 \vee \ldots \vee a_n$ для некоторых положительных $a_i \in A_i$.

Определение 3. *l-идеал P drl-полукольца S называется неприводимым, если $A \cap B \subseteq P$ влечет $A \subseteq P$ или $B \subseteq P$ для любых l-идеалов A, B.*

На множестве $SpecS$ всех неприводимых l-идеалов из S введем стоуновскую топологию. Пусть $P \in SpecS$ и U — открытое в $SpecS$ подмножество, содержащее P. Положим:

$$0_U = \cap\{Q \in SpecS : Q \in U\},$$

$$0_P = \cup\{0_V : V \text{ — открыто в } SpecS \text{ и } P \in V\}.$$

Предложение 2. *Пусть S — drl-полукольцо.*

1. 0_P является l-идеалом для любого $P \in SpecS$;

2. множество всех l-идеалов вида $0_P, P \in SpecS$, образуют открытое семейство l-идеалов.

Множество конгруэнций $\{\alpha_x\}$ на алгебре A, индексированных точками топологического пространства X, называется *открытым*, если множество $\{x \in X : a \equiv b(\alpha_x)\}$ открыто в X для любых $a, b \in A$. Об открытых множествах конгруэнций (открытых множествах идеалов) и их связью с пучками алгебр см. [4], [5]. Получаем пучок $(P(S), SpecS)$, где $P(S)$ — дизъюнктное объединение drl-полуколец $S/0_P$, а P пробегает множество $SpecS$. Если σ — глобальное (т. е. определенное на всем $SpecS$) сечение пучка $P(S)$, то *носителем* сечения σ называется множество $supp\ \sigma = \{P \in SpecS : \sigma(P) \neq 0\}$.

Теорема 1. (i) *Произвольное drl-полукольцо S изоморфно drl-полукольцу всех глобальных сечений с компактными носителями пучка $(P(S), SpecS)$;*

(ii) *если S содержит единицу, то S изоморфно drl-полукольцу всех глобальных сечений пучка $(P(S), SpecS)$.*

Список цитированной литературы

1. Keimel K. The representation of lattice ordered groups and rings by sections in sheaves // Lect. Notes Math., no 248. Springer–Verlag. 1971. P. 2–96.

2. Rao P. R. Lattice ordered semirings // Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 1981. Vol. 9. P. 119–149.

3. Swamy K. L. N. Duallity residuated lattice ordered semigroups // Math. Ann. 1965. Vol. 159. P. 105–114.

4. Davey B. A. Sheaf spaces and sheaves of universal algebras // Math. Z. 1973. Vol. 134, no 4. P. 275–290.

5. Чермных В. В. Функциональные представления полуколец // Фундамент. и прикл. матем. 2012. Т. 17, № 3. С. 111–227.

Вятский государственный гуманитарный университет
Получено 16.04.2015

УДК 512.554

Квазиполя проективных плоскостей трансляций порядка 32

П. К. Штуккерт (Красноярск – Норильск)
Poli422@yandex.ru

Отказ от свойств коммутативности и ассоциативности полей приводит к понятию полуполя – это кольцо S, в котором ненулевые элементы по умножению образуют лупу S^*. Напомним, что группоид L с бинарной операцией $\cdot$ называют *квазигруппой*, если при любых $a, b \in L$ каждое из уравнений $ax = b$ и $xa = b$ однозначно разрешимо в L, и называют *лупой*, если также существует единица e (нуль 0 в аддитивной терминологии), см., например, [1].

Исследования недезарговых проективных плоскостей трансляций восходят к работам Веблена – Веддерберна [2] и Диксона [3] начала 1900-х годов, опираются на более общее понятие квазиполя, ослабляющее в полуполе двустороннюю дистрибутивность до односторонней.

Построение квазиполей тесно связано с построениями проективных плоскостей трансляций. Строение *собственных* (или не являющихся полем) конечных полуполей и квазиполей и их лупы ненулевых элементов изучено мало, см. обзор [4].

Для конечных полуполей и квазиполей S в [5] и [6] записаны следующие задачи.

(А) *Перечислить максимальные подполя и их порядки.*
(Б) *Выявить конечные квазиполя S с не однопорожденной лупой S^*.*
(В) *Выявить возможные спектры лупы S^* конечного полуполя и квазиполя.*

Порядком $|v|$ элемента v лупы называем наименьшее целое число $m \geq 1$ такое, что существует m-я степень v, равная e; порядок бесконечен, если такое m не существует. Множество порядков всех элементов лупы назовем ее *спектром*.

Мы решаем вопросы (А) – (В) для представителей изотопных классов собственных квазиполей порядка 32.

В 2011 году все плоскости трансляций порядка 32 классифицировали У. Демпволф и Р. Рокенфеллер [7], наряду с описанием регулярных множеств (см. сайт Демпволфа [8]). С точностью до изоморфизмов, число недезарговых плоскостей трансляций порядка 32 равно 8; 5 из них кординатизируются собственными полуполями, оставшиеся 3 плоскости координатизируются собственными квазиполями.

Регулярные множества представителей всех изоморфных классов не- дезарговых полуполевых плоскостей выписаны в статье [9]. Строение соответствующих им собственных полуполей P_i $(1 \leq i \leq 5)$ выявляют следующие две теоремы, опубликованные в [9, Теоремы 4 и 5].

Теорема 1. *В каждом полуполе P_i, $i = 1, 2, 3, 4$, подполе порядка 2 есть единственное подполе. Всякий элемент порядка > 1 порождает лупу P_i^*, а спектр лупы P_i^* совпадает с $\{1, 4, 5, 6, 7\}$ при $i = 1, 2$, с $\{1, 4, 5, 6, 7, 8\}$ при $i = 3$, и с $\{1, 5, 6, 7, 8, 9\}$ при $i = 4$.*

Следующая теорема выявляет полуполе порядка 32, содержащее подполе порядка 4.

Теорема 2. *В полуполе P_5 существует подполе H порядка 4, являющееся единственным максимальным подполем. Каждый элемент из $P_5 \backslash H$ имеет порядок > 3 и порождает лупу P_5^*; спектр лупы P_5^* совпадает с $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.*

Строение трех представителей изотопных классов квазиполей $Q_i, i = 1, 2, 3$, порядка 32 выявляет следующая общая теорема.

Теорема 3. *В квазиполе Q_i подполе Z_2e максимально. Лупа Q_i^* однопорождена и ее спектр совпадает с $\{1, 4, 5, 6, 7\}$.*

Список цитированной литературы

1. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. С-П.: Лань, 2007. 560 с.

2. Veblen O. and Maclagan-Wedderburn J. H. Non-Desarguesian and Non-Pascalian Geometries // Trans. Amer. Math. Soc. 1907. Vol. 8, no. 3. P. 379–388.

3. Dickson L. E. Linear algebras in which division is always uniquely possible // Trans. Amer. Math. Soc. 1906. Vol. 7, no. 3. P. 370–390.

4. Johnson N. L., Jha V., Biliotti M. Handbook of finite translation planes // London New York. 2007. 861 p.

5. Levchuk V. M., Panov S.V., Shtukkert P.K. The structure of finite quasifields and their projective translation planes // Proceed. XII Intern. Conf. on Algebra and Number Theory: Tula, 2014. P. 106–108.

6. Levchuk V. M., Shtukkert P.K. Problems on structure for quasifields of orders 16 and 32 // J. of Siberian Federal University. Ser. Math. & Physics. 2014. Vol.7, no. 3. P. 362–372.

7. Rockenfeller R. Translationsebenen der Ordnung 32 (Diploma Thesis) // FB Mathematik. University of Kaiserslautern. 2011. 93 p.

8. Dempwolff U. File of Translation Planes of Small Order http://www.mathematik.uni-kl.de/∼ dempw/dempw_-Plane.html.

9. Штуккерт П. К. Квазиполя и проективные плоскости трансляций малых четных порядков // Известия Ирк.ГУ. 2014. Т.7, № 1. С. 144–159.

Сибирский федеральный университет – Норильский индустриальный институт
Получено 16.04.2015

4. Прикладная и компьютерная алгебры, криптография и дискретная математика

Доклады данной секции объединяют широкий круг алгебраических приложений в информатики, экономике, физики, управлении и криптографии.

UDK 512.77

Structure of Discriminant Set of Real Polynomial

A. B. Batkhin (Moscow)
batkhin@gmail.com

Let $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ be a generic monic polynomial of degree n with real coefficients.

Definition 1. *The* ***discriminant set*** $\mathcal{D}(f)$ *of the polynomial* $f(x)$ *is called the set of all points of the space* $\Pi = \mathrm{R}^n$ *of its coefficients* a_i, $i = 0, \ldots, n-1$ *at which discriminant* $D(f)$ *is vanished.*

Study of the structure of the set $\mathcal{D}(f)$ is important in the solution of many applied problems, for instance, in the study of stability of the equilibrium position of multiparameter mechanical systems (see [1]).

The set $\mathcal{D}(f)$ contains the algebraic hypersurface $\mathcal{H}$ of codimension 1 in the space Π. This hypersurface divides the last into $1 + [n/2]$ domains with fixed number of real zeroes of the polynomial $f(x)$ (see [2]).

Theorem 1. *In the space of coefficients* Π *the domains with the same number of real zeroes of the polynomial* $f(x)$ *are separated from each other by discriminant hypersurface* $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(f)$.

Discriminant $D(f)$ can be computed with the help of the Sylvester-Habicht matrix

$$\mathrm{SylHab}\,(f, f') = \begin{pmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots\ldots\ldots & & a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & \ldots\ldots\ldots & & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} & \ldots\ldots\ldots & & \ldots & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n & (n-1)a_{n-1} & \ldots\ldots & & 2a_2 & a_1 \\ \vdots & & \ddots & & & & & \ddots & & \\ 0 & n & \ldots\ldots\ldots & & 2a_2 & a_1 & 0 & \ldots\ldots & & 0 \\ n & \ldots\ldots\ldots & & 2a_2 & a_1 & 0 & & \ldots\ldots\ldots & & 0 \end{pmatrix}$$

Definition 2. *The determinant of a matrix, resulting from the Sylvester-Habicht matrix* $\mathrm{SylHab}\,(f, f')$ *by deleting the first k and the last k rows, and the first k and the last k columns, is called k-th* ***subdiscriminant*** *[3] of the discriminant $D(f)$ and is denoted by $D^{(k)}(f)$. When $k = 0$ one has the discriminant of the polynomial $f(x)$: $D^{(0)}(f) \equiv D(f)$.*

Theorem 2. *The polynomial $f(x)$ has exactly d common zeroes with its derivative $f'(x)$ iff the following conditions take place*

$$\underbrace{D^{(0)}(f) = \ldots = D^{(d-1)}(f)}_{d} = 0, \quad D^{(d)}(f) \neq 0.$$

Multiple zeroes of the polynomial $f(x)$ are the zeroes of the polynomial $\mathrm{GCD}\,(f, f')$, *which can be written as follows:*

$$\mathrm{GCD}\,(f, f') = D^{(d)}\mu^d + \det M_d^{(1)}\mu^{d-1} + \cdots + \det M_d^{(d)},$$

where matrix $M_d^{(j)}$ is the d-th inner of the matrix which is obtained from the Sylvester-Habicht matrix by replacing $(d+1)$-th from the right column to the same j-th to the right column.

We propose the following procedure to construct the polynomial parametrization of hypersurface $\mathcal{H}$ of codimension 1 in Π.

1. We compute variety $\mathcal{V}_1$ with parametrization

   $$\mathcal{V}_1 : \left\{a_i = (-1)^{n-i} C_n^i t_1^{n-i},\ i = 0, \ldots, n-1\right\},$$

   which solve the system $\left\{D^{(j)}(f) = 0\right\}, j = 0, \ldots, n-2$. The polynomial $f(x)$ has the only zero $x_1 = t_1$ with multiplicity n on it.

2. Using $\mathcal{V}_1$ as a directrix we obtain the variety $\mathcal{V}_2$ with parametrization

   $$\mathcal{V}_2 : \left\{a_i = (-1)^{n-i} C_n^i t_1^{n-i} + (-1)^{n-i} C_{n-1}^i t_1^{n-1-i} t_2,\ i = 0, \ldots, n-1\right\},$$

   which solve the system $\left\{D^{(j)}(f) = 0\right\}, j = 0, \ldots, n-3$. The polynomial $f(x)$ has two zeroes on it: $x_1 = t_1$ with multiplicity $n-1$ and $x_2 = t_1 + t_2$. The variety $\mathcal{V}_2$ is tangent develope surface of dimension 2 in Π.

3. Considering $\mathcal{V}_2$ as an envelope of two-dimensional planes one get variety $\mathcal{V}_3$, on which the polynomial $f(x)$ has zero of mupltiplicity $n-2$ and pair of simple zeroes.

4. Finally, repeating the steps described above one obtain the variety V_{n-1}, which is the tangent develope hypersurface H in Π. On this hypersurface polynomial $f(x)$ has one double zero and $n-2$ simple zeroes.

Proposition 1. *The subset of codimension* 1 *of the discriminant set* $\mathcal{D}(f)$ *of a generic monic polynomial with real coefficients is a tangent develope hypersurface* $\mathcal{H}$ *in the space* Π. *Therefore it has polynomial paramerization.*

It is possible to describe the mentioned above varieties $\mathcal{V}_i$, $i = 1, \ldots, n-1$ as singular points of the discriminant set $\mathcal{D}(f)$ of orders $n-1-i$ correspondingly.

Definition 3. *Let* $\varphi(X)$ *be a polynomial of* $X = (x_1, \ldots, x_n)$. *The point* $X = X^0$ *of the set* $\varphi(X) = 0$ *is said to be a* ***singular point*** *of the* k*-th order if all the partial derivatives of* $\varphi(X)$ *with respect to* $x_1, \ldots, x_n$ *of order* k, *inclusive, vanish and at least one partial derivative of order* $k+1$ *does not vanish.*

Compose the ideal $\mathcal{J}_k$ from the discriminant $D(f)$ and all its partial derivatives up to the order k inclusive. The ideal $\mathcal{J}_k$ include all singular points of order k and below. The direct computations show that ideal $\mathcal{J}_k$ for certain value $k \leqslant n-2$ does not equal to the ideal $\mathcal{I}_k \equiv \left\{D^{(j)}(f) | j = 0, \ldots, k\right\}$, which include the variety $\mathcal{V}_{n-k-1}$. With the help of computer algebra algorithms (Gröbner basis and procedures for polynomial ideals) it was shown that $\operatorname{Rad} J_k = \operatorname{Rad} I_k$ for the following values of $n = 3, 4, 5$, where $\operatorname{Rad} \mathcal{P}$ is the radical of ideal $\mathcal{P}$. It is quite possible that this statement takes place for any $n \in \mathbb{N}$.

Remark 1. *If the hypothesis formulated above is right, the subdiscriminant approach is equal to the singular point approach.*

REFERENCES

1. A. B. Batkhin, A. D. Bruno, V. P. Varin, *Stability sets of multiparameter Hamiltonian systems* // J. Appl. Math. Mech. (2012), vol. 76, no. 1, P. 56–92.

2. N. N. Neiman, *Some problems of layout of zeroes of polynomials* // UMN(1949), vol. 4, no 6(34), pp. 154–188. (in Russian)

3. A. Yu. Uteshev, T. M. Cherkasov, *The search for the maximum of a polynomial* // J. Symbolic Computation (1998), vol. 25, no 5. pp. 587–618.

Keldysh Institute of Applied Mathematics
Received 15.04.2015

УДК 512.77

О представлении подкодов рационального кода Гоппы в виде след-кода

Ю. С. Касаткина, А. С. Касаткина (Калининград)
yuliya_kasatkina@list.ru kasatkina_ana@mail.ru

Коды, исправляющие ошибки, являются основным инструментом для решения вопроса управления правильностью передачи информации, поэтому проблема получения новых кодов с хорошими характеристиками представляется актуальной. Конструкция некоторых классов кодов требует кривые, обладающие достаточным числом рациональных точек. Для построения таких кривых возможно использовать кодовые слова малого веса. Этим кодовым словам можно поставить в соответствие кривые Артина – Шрайера. Соответствие, в свою очередь, может быть продолжено до подкодов, на которых достигается обобщенный вес Хемминга, и расслоенного произведения кривых Артина — Шрайера. В работе [1] предложен алгоритм, позволяющий конструировать кривые при помощи геометрических кодов Гоппы. На определенном этапе реализации этого алгоритма возникает необходимость в представлении подкода наименьшего веса в виде след-кода. В статье описана конструкция подкодов малого веса и предложен метод представления подкодов рационального кода Гоппы в виде след-кода.

Напомним определение геометрического кода Гоппы и введем для этого следующие обозначения:

F/F_p – поле алгебраических функций рода g;

$P_1, \ldots, P_n$ – различные рациональные точки поля F/F_p;

$D \in Div(F/F_p)$ и $D = P_1 + \ldots + P_n$;

$G \in Div(F/F_p)$ и $suppD \cap suppG = \emptyset$;

$L(G)$ –пространство, ассоциированное с дивизором G.

Геометрический код Гоппы $C_L(D, G)$ над конечным полем F_p определяется как

$$C_L(D, G) = \{(x(P_1), \ldots, x(P_n)) \,| x \in L(G)\} \subseteq F_p^n,$$

при этом длина кода равна n, размерность кода будем обозначать k. В работе исследуются геометрические коды Гоппы вида $C_L(D, aP_\infty)$, где

$$C_L(D, aP_\infty) = \{\varphi(f) \,| f \in F_p[x] \,, \deg f \leqslant a\}.$$

На начальном этапе реализации алгоритма требуется определить иерархию весов Хемминга кода. Обобщенный вес Хемминга связан с весом кода следующим образом.

Пусть C — линейный код длины n и размерности k. Носитель подкода $D \subset C$ определяют как множество номеров координат, в которых по крайне мере одно кодовое слово имеет ненулевую координату. Обозначим носитель $\chi(D)$. Тогда

$$\chi(D) = \{i \,| \exists x = (x_1, \ldots, x_n) \in D, x_i \neq 0\}.$$

Количество элементов в носителе определяет вес подкода D:

$$\omega(D) = |\chi(D)|.$$

r-й обобщенный вес Хемминга кода C равен весу, оказавшемуся наименьшим среди весов подкодов кода C, размерности r, т.е.

$$d_r(C) = \min\{\omega(D) \,|D \subseteq C, \dim D = r\}, 1 \leqslant r \leqslant k.$$

Весовой иерархией кода C называется набор:

$$\{d_r(C) \,|1 \leqslant r \leqslant k\}.$$

Известно, что r-й обобщенный вес Хемминга кода $C_L(D, aP_\infty)$ может быть вычислен по формуле

$$d_r(C_L(D, aP_\infty)) = n - k + r, 1 \leqslant r \leqslant k.$$

Но, кроме иерархии весов кода, алгоритм требует явной конструкции подкода на котором достигается обобщенный вес Хемминга. В частности, для геометрических кодов Гоппы вида $C_L(D, aP_\infty)$ подкоды минимального веса можно построить следующим образом.

Пусть D_r — r-мерный подкод F_p-кода C, носитель которого удовлетворяет условию

$$|\chi(D_r)| = d_r(C). \ (*)$$

Предположим, что этот подкод порождается элементами $\varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_r)$. Выполнение условия (*) говорит о том, что в базисе кода D_r все кодовые слова имеют точно $n - d_r$ различных координат, значения которых равны нулю для всех элементов базиса. Или, формулируя вышесказанное в терминах дивизоров, получим

$$(f_i) = A + B_i - aP_\infty, 1 \leqslant i \leqslant r,$$

где дивизоры A и B_i такие, что:

$$0 \leqslant A \leqslant D, \deg A = n - d_r, B_i \geqslant 0, 1 \leqslant i \leqslant r.$$

Причем, носитель дивизора B_i может состоять из рациональных точек. Построенные таким образом элементы f_i, $1 \leq i \leq r$ представимы в виде:

$$f_i(x) = \prod_{j=1}^{a} (x - \alpha_{ij}), \alpha_{ij} \in F_p, 1 \leqslant i \leqslant r.$$

Исследуем представление подкода в виде след-кода. Пусть f_i – элементы поля $F_p(x)$, причем

$$f_i(x) = \prod_{j=1}^{a} (x - \alpha_{ij}), \alpha_{ij} \in F_p, 1 \leqslant i \leqslant r.$$

Каждому элементу f_i поставим в соответствие элемент $R_{f_i(x)}$, определяемый следующим образом:

$$R_{f_i(x)} = \left(\sum_{s=0}^{m-1} (bx)^{p^s}\right)^{a-1} bx - \sum_{j=1}^{a} \alpha_{ij} \left(\sum_{s=0}^{m-1} (bx)^{p^s}\right)^{a-2} bx +$$

$$+\sum_{j\neq k}^{a}\alpha_{ij}\alpha_{ik}\left(\sum_{s=0}^{m-1}(bx)^{p^s}\right)^{a-3}bx-\dots+$$
$$(-1)^{a-2}\sum_{j_1<\ldots<j_{a-2}}^{a}\alpha_{ij_1}\cdot\ldots\cdot\alpha_{ij_{a-2}}\sum_{s=0}^{m-1}(bx)^{p^s}bx+$$
$$(-1)^{a-1}\sum_{j_1<\ldots<j_{a-1}}^{a}\alpha_{ij_1}\cdot\ldots\cdot\alpha_{ij_{a-1}}bx+(-1)^a\alpha_i,$$

где $Tr(\alpha_i)=\prod_{j=1}^{a}\alpha_{ij}$. Здесь Tr – отображение следа:

$$Tr: F_{p^m}\to F_p,\ m\in Z,\ m>1.$$

Элемент $b\in F_{p^m}$ такой, что $Tr(b)=1$.

Теорема 1. *Пусть D_r – r-мерный подкод F_p-кода $C=C_L(D,aP_\infty)$, носитель которого удовлетворяет условию $|\chi(D_r)|=d_r(C)$. Для любого кодового слова $c\in D_r$ существует элемент $R\in F_{p^m}[x]$ такой, что $Tr_{Con_D}(R)=c$.*

Доказательство. Пусть D_r – r-мерный подкод F_p-кода $C=C_L(D,aP_\infty)$. Предположим, что код D_r порождается кодовыми словами $c_1,\dots,c_r$, где $c_i=\varphi(f_i)$. Элементы $f_1,\dots,f_r\in L(aP_\infty)$ являются линейно независимыми над F_p. Осуществим выбор базиса кода D_r таким образом, чтобы элемены $f_i,\ 1\leqslant i\leqslant r$ допускали представление в виде $f_i(x)=\prod_{j=1}^{a}(x-\alpha_{ij})$, где $\alpha_{ij}\in F_p,\ 1\leqslant i\leqslant r$. Каждому элемену $f_i(x)$ поставим в соответствие элемент $R_i\in F_{p^m}[x]$. Пусть точка $P_s\in\operatorname{supp}(Con(D)),\ 1\leqslant s\leqslant n$ тогда $P_s=P_{x-\gamma_s},\ \gamma_s\in F_p$. Для точек $P_s\in\operatorname{supp}(Con(D)),\ 1\leqslant s\leqslant n$ выполняется

$$Tr(R_i(P_s))=f_i(\gamma_s).$$

Тогда, для $1\leqslant i\leqslant r$, получим

$$Tr_{Con(D)}(R_i)=Tr(R_i(P_1),\dots,R_i(P_n))=(f_i(\gamma_1),\dots,f_i(\gamma_n))=c_i.$$

Пусть c – кодовое слово, тогда $c=\sum_{i=1}^{r}\beta_ic_i,\ \beta_i\in F_p$, следовательно, получим

$$c=\sum_{i=1}^{r}\beta_ic_i=\sum_{i=1}^{r}\beta_iTr_{Con(D)}(R_i)=Tr_{Con(D)}(\sum_{i=1}^{r}\beta_iR_i).$$

Теорема доказана.

Таким образом, если D_r – r-мерный подкод F_p-кода $C=C_L(D,aP_\infty)$, носитель которого удовлетворяет условию $|\chi(D_r)|=d_r(C)$, элементы $R_1,\ldots R_r\in F_{p^m}(x)$ такие, что $Tr_{Con(D)}(R_i)=c_i,\ 1\leqslant i\leqslant r$, где $c_1,\ldots,c_r$ − базис кода D_r то, обозначив $U=\langle R_1,\dots,R_r\rangle$ – r-мерное векторное пространство над полем F_p, получим $Tr_{Con(D)}(U)=D_r$.

Список цитированной литературы

1. Касаткина Ю. С. Алгоритм построения элементарных абелевых кривых // Вестник РГУ им. И. Канта. Сер. Физико-математические науки. 2006. Вып. 10. С. 109–112.

Институт прикладной математики и информационных технологий БФУ им. И. Канта.
Западный филиал РАНХиГС.

Получено 14.04.2015

UDK 512.772

On the first Stiefel-Whitney class of $\overline{\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}}$

E. M. Kreines[1] (Moscow)
elena_msu@mail.ru

The investigation of moduli spaces of algebraic curves is an active research area, see [2, 3, 4] and references therein. Necessary definitions and notations can be found in [5, 6, 7].

We compute the Poincaré dual class to the first Stiefel-Whitney class for the Deligne-Mumford compactification of the real moduli space of algebraic curves with n marked and numbered points. The computation is given in terms of the natural cell decomposition of the variety under consideration. Let $n \geqslant 5$, $\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}$ be the real moduli space of algebraic curves of the genus 0 with n marked and numbered points, say $\{1, 2, \ldots, n\}$. Let $\overline{\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}}$ be its Deligne-Mumford compactification. We consider the cell decomposition of $\overline{\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}}$, introduced in [1, Constructions 2.3 and 2.6].

In particular, we prove the following result:

Theorem 1. *The class $W_{n-4}(\overline{\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}})$, which is Poincaré dual to the first Stiefel-Whitney class of $\overline{\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}}$, consists of those cells of codimension 1 that satisfy the condition: irreducible component of the curve which contains at most one point from the set $\{1, 2, 3\}$ contains an odd number of points from the set $\{1, 2, \ldots, n\}$.*

The talk is based on our joint results with N. Ya. Amburg.

REFERENCES

1. Amburg N.Ya, Kreines E.M., Computation of the first Stiefel-Whitney class for the variety $\overline{\mathcal{M}_{0,n}^{\mathbb{R}}}$ // Fundamental and Applied Mathematics. 2013. Vol. 18, no. 6. P. 51–75.

[1]The work is partially supported by the RFBR research grant 15-01-01132

2. Etingof P., Henriques A., Kamnitzer J., Rains E., The cohomology ring of the real locus of the moduli space of stable curves of genus 0 with marked points // Annals of Mathematics. 2010. Vol. 171, no. 2. P. 731–777.

3. S. Keel, "Intersection theory of moduli space of stable n-pointed curves of genus zero," *Trans. Amer. Math. Soc.*, **330**, no. 2, 545–574 (1992).

4. Ceyhan O., On moduli of pointed real curves of genus zero // arXiv:math.AG/0207058.v5. 2007.

5. Deligne P., Mumford D., The irreducibility of the space of curves of given genus // Inst.Hautes Etudes Sci.Publ.Math. 1969. Vol. 36. P. 75–109.

6. Devadoss S., Tessellations of moduli spaces and the mosaic operad // Contemporary Mathematics. 1999. Vol. 239. P. 91–114.

7. Halperin S., Toledo D., Stiefel-Whitney homology classes // Ann. Math. 1972. Vol. 96. P. 511–525.

Moscow State University
Received 14.04.2015

УДК 512

Разложимость в произведение идеалов в некоторых дедекиндовых кольцах и приложения к криптографии

К. А. Петухова[1] (Казань)
ksenypet@mail.ru

В работе [1] была продемонстрирована возможность видоизменения криптографического алгоритма RSA таким образом, чтобы роль натуральных чисел играли идеалы дедекиндова кольца. Этот протокол использует аналог функции Эйлера, аргументами которой являются идеалы дедекиндовых колец [2]. Он выглядит следующим образом:

Пусть R — дедекиндово кольцо. Требуется, чтобы для каждого максимального идеала $\mathfrak{M}$ поле $R/\mathfrak{M}$ было конечным. Предположим, что Алиса хочет позволить кому-то послать ей секретное сообщение, которое сможет расшифровать только она. Она выбирает в R два различных максимальных идеала $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$, вычисляет $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2$, и выбирает некоторое множество W представителей

[1]Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения проектной части государственного задания в сфере научной деятельности, номер проекта 1.2045.2014

смежных классов R по $\mathfrak{A}$, элементами которого можно представлять шифруемые сообщения. Далее Алиса выбирает число E с условием НОД$(E, \varphi(\mathfrak{A})) = 1$. Открытым ключом является пара $(\mathfrak{A}, E)$. Далее вычисляется число d такое, что $E \cdot d + \varphi(\mathfrak{A})t{=}1$. Секретный ключ Алисы состоит из тройки $(d, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$.

Шифруемое сообщение представляется в виде элемента $m \in W$. Шифротекст получается следующим образом:

$$C = m^E \pmod{\mathfrak{A}} \in W.$$

Алиса, получив C, может расшифровать его так:

$$m = C^d \pmod{\mathfrak{A}} \in W.$$

Криптостойкость описанного выше алгоритма существенно зависит от сложности задачи о разложении идеала дедекиндова кольца в произведение максимальных идеалов. В свою очередь, эта задача имеет смысл при условии, что задан удобный способ представления дедекиндовых колец, его идеалов и фактор-колец. Можно использовать, например, базовое представление из [3]:

Определение 1. *Пусть R — конечное кольцо, базовым представлением кольца R называют последовательность целых чисел*

$(m; d_1, \ldots, d_m; (l_{ijk})_{i,j,k=1,\ldots,m})$*, где* $m > 0$*,* $d \geq 2$ *и* $0 \leq l_{ijk} < d_k$*, такую что*

(1) аддитивная группа $(R, +) = \mathbb{Z}_{d_1}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_m}v_m$*, где* d_i *— аддитивные порядки образующих* v_i*, и*

(2) произведение $v_1, ..., v_m$ *определено следующим образом:*

$$v_i v_j = \sum_{k=1}^{m} (l_{ijk} v_k)$$

В работе [3] показано, что если дедекиндово кольцо R является свободной абелевой группой конечного ранга, то существует алгоритм полиномиальной сложности, позволяющий ответить на вопрос о том, является ли идеал I степенью простого идеала. Задача о резложимости I в произведение $I = I_1 I_2$, $I_1 + I_2 = R$, сводится к вопросу о том, существует ли в R/I нетривиальный идемпотент. Если известно, что R/I — конечная сепарабельная алгебра над конечным полем, то существует алгоритм, который решает этот вопрос. Алгоритм можно найти в [4] (предложение 6.2.8, с.319) или [5] (§ 4.3.4, алгоритм 4.3.7) . Применение этого алгоритма существенно затруднено тем, что не всегда просто заранее определить, является ли R/I сепарабельной алгеброй.

В нашем докладе будет рассмотрено несколько примеров дедекиндовых колец, для которых вопрос о сепарабельности фактор-кольца по идеалу может быть решен алгоритмически, и даны оценки сложности соответствующих алгоритмов разложения идеалов в произведение.

Список цитированной литературы

1. Tronin S. N., Petikhova K. A. RSA cryptosystem for Dedekind rings // Материалы конференции “Алгебра и математическая логика: теория и приложения” (г.Казань, 2-6 июня 2014 г.) и сопутствующей молодежной летней школы “Вычислимость и вычислимые структуры”. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. С. 148–149.

2. Петухова К. А. Об аналоге функции Эйлера для идеалов дедекиндовых колец // Труды Математичееского центра имени Н.И. Лобачевского: Материалы тринадцатой молодежной школы-конференции “Лобачевские чтения - 2014” (г.Казань, 2-6 июня 2014 г.) и сопутствующей молодежной летней школы “Вычислимость и вычислимые структуры”. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. Т. 50. С. 144–146.

3. Huang D., Deng Y Deterministic polynomial-time tests for prime ideals of a finite rank Dedekind domain // arxiv:1406.3523v3. 2014.

4. Cohen H. A course in computational algebraic number theory. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1996. xii+545 p.

5. Stein W. Algebraic Number Theory, a Computational Approach. 2012. 215 p. http://wstein.org/books/ant/ant.pdf.

Казанский федеральный университет
Получено 14.04.2015

УДК 519.6

Неограниченность ведущих элементов R-метода Гаусса для подпоследовательности матриц, порожденных процедурой Сильвестра

П. Н. Сорокин, Н. Н. Ченцова (Москва)
s_p_n_1974@bk.ru

В настоящей работе продолжаются исследования R-метода Гаусса, изложенные в [1]. Напомним несколько определений.

Определение 1. *Пусть заданы число $k \in \mathbb{N}^+$, квадратная матрица $A^{(k)} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ с матричными элементами $(A^{(k)})_{i,j} \in \mathbb{R}$ с индексами $i, j = \overline{1,k}$, вектора-столбцы $x^{(k)}, b^{(k)}, p^{(k)} \in \mathbb{R}^k$ с координатами $(x^{(k)})_i, (b^{(k)})_i, (p^{(k)})_i \in \mathbb{R}$ с индексами $i = \overline{1,k}$. R-методом Гаусса решения системы линейных уравнений:*

$$\sum_{1\le j\le k} (A^{(k)})_{i,j} \cdot (x^{(k)})_j = (b^{(k)})_i, \quad i = \overline{1,k} \tag{1}$$

называется такая модификация метода Гаусса [2, 3], что при каждом $n = \overline{1, k-1}$ *выбирается ведущий элемент* n*-го шага* $\ell_n^{(k)}$ *– матричный элемент матрицы* $A_{n-1}^{(k)}$ *с максимальным значением модуля и с минимальным значением индексов, т.е.*

$$(i_+^{(k)}(n), j_+^{(k)}(n)) =$$

$$= \min\{((i_1, j_1), j_1 = \overline{n, k}), i_1 = \overline{n, k} : \ (A_{n-1}^{(k)})_{i_1, j_1} = \max_{n \le i, j \le k} |(A_{n-1}^{(k)})_{i,j}|\}, \tag{2}$$

$$\ell_n^{(k)} = (A_{n-1}^{(k)})_{i_+^{(k)}(n), j_+^{(k)}(n)}, \quad n = \overline{1, k}. \tag{3}$$

Если $\ell_n^{(k)} = 0$, то матрица линейной системы (1) вырождена и программа заканчивает работу, иначе вычисляются матрица $A_n^{(k)}$, вектора-столбцы $b_n^{(k)}$ и $p_n^{(k)}$ по формулам, приведенным в [1], а $q_n^{(k)}$ задается как

$$q_n^{(k)} = |\ell_n^{(k)} / \ell_{n-1}^{(k)}|, \quad 2 \le n \le k. \tag{4}$$

В начале работы программы выполняются начальные присвоения:

$$A_0^{(k)} = A^{(k)}, \quad b_0^{(k)} = b^{(k)}, \quad (p_0^{(k)})_i = i, \quad i = \overline{1, k}. \tag{5}$$

Обозначение **1.** *Пусть* $k \in \mathbb{N}^+$ *и пусть* $q_j^{(k)}$ *— семейство вещественных последовательностей (4) по параметру* k*,* $j = \overline{2, k}$*. Определим*

$$q_-^{(k)} = \min_{2 \le j \le k} q_j^{(k)}, \quad q_+^{(k)} = \max_{2 \le j \le k} q_j^{(k)}. \tag{6}$$

$$q^- = \varliminf_{k \to \infty} q_-^{(k)}, \quad q^+ = \varlimsup_{k \to \infty} q_+^{(k)}. \tag{7}$$

Определение 2. *Подпоследовательность матриц* $A^{(k)}$ *порождена процедурой Сильвестра, если*

$$k = 2^p, \quad p \in \mathbb{N}^+, \tag{8}$$

$$A^{(1)} = 1, \quad A^{(2 \cdot k)} = \begin{pmatrix} A^{(k)} & A^{(k)} \\ A^{(k)} & -A^{(k)} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Теорема 1. *Ведущие элементы R-метода Гаусса для подпоследовательности матриц, порожденных процедурой Сильвестра (8), (9), неограничены, т.е. выполнены следующие соотношения:*

$$|\ell_k^{(k)}| = k, \quad |\ell_{k-1}^{(k)}| = k/2, \quad |\ell_{k-2}^{(k)}| = k/2, \tag{10}$$

$$|\ell_n^{(k)}| \le k/2, \quad 1 \le n \le k-1, \quad k \ge 2, \tag{11}$$

$$q_-^{(k)} = 4/k, \quad q_+^{(k)} = 2, \tag{12}$$

$$q^- = 0, \quad q^+ = 2, \quad q^- \ne q^+. \tag{13}$$

Список цитированной литературы

1. Сорокин П. Н., Ченцова Н. Н. Предельные теоремы для R-метода Гаусса // Материалы 12 международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения". Тула, 2014. С. 210–214.

2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Наука, 1987. 600 с.

3. Богачев К. Ю. Практикум на ЭВМ. Методы решения линейных систем и нахождения собственных значений. М.: Изд-во мехмата МГУ, 1999, 200 с.

НИИ Системных Исследований РАН
МГУ им. М.В.Ломоносова
Получено 27.04.2015

УДК 512

Коммутативные операды и их приложение к криптографии с открытым ключом

С. Н. Тронин [1] (Казань)
stronin@kpfu.ru

Коммутативные операды были введены автором в [1]. В этой работе, помимо всего прочего, было показано, что можно использовать многообразия алгебр над коммутативными операдами для построения такого обобщения теории мультиоператорных алгебр, частными случаями которого является как традиционная (нелинейная) универсальная алгебра, так и теория линейных мультиоператорных алгебр. В работе [2] было введено понятие естественного мультипреобразования мультифункторов между мультикатегориями (определенными над вербальными категориями, содержащими Σ), что позволило определить центр мультикатегории как класс всех естественных эндоморфизмов тождественного мультифунктора (по аналогии с центром категории). Оказалось, что центры мультикатегорий — это в точности коммутативные операды. Центром коммутативной операды является она сама.Известно, что любое многообразие универсальных алгебр рационально эквивалентно многообразию алгебр над некоторой (определенной не однозначно) операдой (в случае многосортных алгебр — над мультикатегорией), и при достаточно слабых предположениях эта операда (или мультикатегория) обладает центром, являющимся коммутативной операдой.

[1]Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения проектной части государственного задания в сфере научной деятельности, номер проекта 1.2045.2014

Таким образом, класс коммутативных операд должнен быть довольно обширным. В него можно включить (причем двумя способами) все коммутативные полугруппы с единицей, и все коммутативные ассоциативные кольца и полукольца с единицей. Многообразиями алгебр над коммутативными операдами являются (в том числе) категории модулей над коммутативными кольцами, и даже вся категория множеств. Некоторые другие примеры коммутативных операд и многообразий алгебр над ними рассматривались в работах [3],[4]. Вместе с тем на данный момент коммутативные операды изучены совершенно недостаточно. Например, мало что известно о свободных коммутативных операдах (существующих как свободные алгебры в многообразии многосортных универсальных алгебр, которым является категория всех коммутативных операд). Почти ничего неизвестно о линеаризациях свободных коммутативных операд, являющихся многомерными аналогами алгебр многочленов.

При общей малоизученности коммутативных операд у них уже обнаружились приложения. В работе [5] были построены несколько криптографических протоколов, демонстрирующих принципиальную возможность использования коммутативных операд в криптографии с открытым ключом. Предполагается, что в дальнейшем эти протоколы будут детализированы, и будет исследована их криптостойкость.

В докладе определяются двухсторонние операды, отличающиеся от традиционных операд тем, что в них присутствует два набора компонент, перенумерованных натуральными числами (условно говоря, левый и правый). В случае, если один из наборов тривиален, получаются обычные операды. Далее вводится класс коммутативных двухсторонних операд, и демонстрируются примеры таких операд.

Основными результатами доклада являются несколько примеров криптографических протоколов, использующих двухсторонние коммутативные операды.

Отметим, что в настоящий момент уже оформилось научное направление на стыке алгебры и криптографии, называемое алгебраической криптографией (см., например, монографию [6]).

Список цитированной литературы

1. Тронин С. Н. Операды и многообразия алгебр, определяемые полилинейными тождествами // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47. № 3. С. 670–694.

2. Тронин С. Н. Естественные мультипреобразования мультифункторов // Изв. вузов. Математика. 2011. № 11. С. 58–71.

3. Тронин С. Н. Операды в категории конвексоров. I. // Изв. вузов. Математика. 2002. № 3. С. 42–50.

4. Тронин С. Н. Алгебры над операдой сфер // Изв. вузов. Математика. 2010. № 3. С. 72–81.

5. Tronin S. N. , Gaynullina A. R. Some applications of the operad theory in public-key cryptography // Материалы конференции “Алгебра и математическая логика: теория и приложения” (г.Казань, 2-6 июня 2014 г.) и сопутствующей молодежной летней школы “Вычислимость и вычислимые структуры”. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. С. 146–147.

6. Романьков В. А. Алгебраическая криптография : монография. Омск: Изд-во ОмГУ, 2013. 135 с.

Казанский федеральный университет
Получено 14.04.2015

УДК 519.7, 519.213.8

О преобразованиях случайных величин над линейно упорядоченным трехэлементным множеством

А. Д. Яшунский[1] (Москва)
yashunsky@keldysh.ru

Будем рассматривать линейно упорядоченное множество из трех элементов $E = \{0, 1, 2\}$, $0 < 1 < 2$ с определенными на нем операциями максимума $x \vee y$ и минимума $x \wedge y$.

Определим *формулу* с операциями $\vee, \wedge$ индуктивно: любая переменная является формулой; если Φ_1 и Φ_2 — формулы, то формулами также являются $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$ и $(\Phi_1 \wedge \Phi_2)$. Формула называется *бесповторной*, если в ней все переменные различны.

Поставляя вместо всех переменных бесповторной формулы независимые случайные величины со значениями из E и известными распределениями, получаем новую случайную величину, распределение которой может быть вычислено непосредственно.

Рассматривается задача о приближении распределений вероятностей на E с помощью бесповторных формул, в которых вместо переменных подставлены случайные величины, имеющие заданное (*начальное*) распределение. Данная задача для множества E из трех элементов естественным образом обобщает рассматривавшуюся ранее задачу для $E = \{0, 1\}$ (см., например, [1, 2]).

Случайной величине x на E соответствует стохастический вектор ее распределения (x_0, x_1, x_2), где $x_i \geqslant 0$, $\sum x_i = 1$. Операции $\vee, \wedge$ со случайными величинами x и y индуцируют операции с их векторами распределений. Легко проверить, что:

$$(x \vee y)_0 = x_0 y_0, \qquad (x \vee y)_2 = x_2 + y_2 - x_2 y_2,$$
$$(x \wedge y)_0 = x_0 + y_0 - x_0 y_0, \qquad (x \wedge y)_2 = x_2 y_2.$$

[1]Грант РФФИ № 14-01-00598, ПФИ ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения».

Эти соотношения позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть для некоторого* $\alpha > 1$ *выполнено* $x_0 \leqslant (1-x_2)^\alpha$, $y_0 \leqslant (1-y_2)^\alpha$. *Тогда* $(x \vee y)_0 \leqslant (1-(x\vee y)_2)^\alpha$ *и* $(x \wedge y)_0 \leqslant (1-(x\wedge y)_2)^\alpha$.

Пусть для некоторого $\beta > 1$ *выполнено* $x_2 \leqslant (1-x_0)^\beta$, $y_2 \leqslant (1-y_0)^\beta$. *Тогда* $(x \vee y)_2 \leqslant (1-(x\vee y)_0)^\beta$ *и* $(x \wedge y)_2 \leqslant (1-(x\wedge y)_0)^\beta$.

Распределение (x_0, x_1, x_2) будем называть *невырожденным*, если все его компоненты положительны. Для $E = \{0, 1\}$ в работах [1, 2] показано, что невырожденное начальное распределение позволяет сколь угодно точно бесповторно приблизить любое распределение на множестве E. Теорема 1 показывает, что для $E = \{0, 1, 2\}$ это не так: все распределения, порождаемые некоторым невырожденным начальным распределением, принадлежат подмножеству, не совпадающему с множеством всех распределений.

Несмотря на невозможность приблизить произвольное распределение, можно описать семейство распределений на $\{0, 1, 2\}$, которые могут быть сколь угодно точно приближены.

Теорема 2. *Пусть начальное распределение невырождено. Тогда для любого* η, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, *распределения вида* $(\eta, 1-\eta, 0)$ *и* $(0, 1-\eta, \eta)$ *приближаются сколь угодно точно.*

Теорема 2 описывает лишь одномерные подмножества приближаемых распределений (отрезки), однако можно построить и двумерные множества.

Теорема 3. *Если невырожденное распределение* (x_0, x_1, x_2) *приближается сколь угодно точно, то также приближаются сколь угодно точно все такие распределения* (y_0, y_1, y_2), *что* $y_0 \leqslant x_0$, $y_2 \leqslant x_2$.

Доопределим операции $\vee, \wedge$ для множеств распределений естественным образом:

$$X \vee Y = \{x \vee y \mid x \in X, y \in Y\}, \quad X \wedge Y = \{x \wedge y \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Многократное применение утверждения теоремы 3 позволяет получить рекуррентную последовательность множеств приближаемых распределений. Пусть задано некоторое начальное невырожденное распределение $p = (p_0, p_1, p_2)$. Положим:

$$\begin{aligned} A_0 &= \{x \mid x_0 \leqslant p_0, x_2 \leqslant p_2\}, \\ A_{i+1} &= A_i \cup (\{p\} \vee A_i) \cup (\{p\} \wedge A_i) \text{ при } i \geqslant 0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что каждое A_i состоит из сколь угодно точно приближаемых распределений. Объединение всех множеств A_i дает уже весьма обширный класс приближаемых распределений.

Автор выражает благодарность О. М. Касим-Заде за внимание к работе.

Список цитированной литературы

1. Схиртладзе Р. Л. О методе построения булевой величины с заданным распределением вероятностей // Дискретный анализ. Вып. 7. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1966. С. 71–80.

2. Яшунский А. Д. О преобразованиях вероятности бесповторными булевыми формулами // Материалы XVI Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Санкт-Петербург, 26–30 июня 2006 г.). М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2006. С. 150–155.

ИПМ им. М. В. Келдыша РАН
Получено 11.04.2015

5. Аналитическая теория чисел

Доклады данной секции посвящены исследованиям по классическим направлениям аналитической теории чисел:
— теории дзета-функции Римана и L-функциям Дирихле;
— аддитивным задачам;
— методу тригонометрических сумм.

UDC 511.5

On the Kellner-Erdős-Moser equation

Ioulia N. Baoulina (Moscow), Pieter Moree (Bonn)
jbaulina@mail.ru, moree@mpim-bonn.mpg.de

Let

$$S_k(m) := \sum_{j=1}^{m-1} j^k$$

be the sum of the first $m-1$ consecutive kth powers. In 2011 B. Kellner [1] formulated the conjecture that for $m \geqslant 4$ the ratio $S_k(m+1)/S_k(m)$ is never an integer. Since $S_k(m+1) = S_k(m) + m^k$, this conjecture can be reformulated in the following way: *for any positive integer a, the equation $aS_k(m) = m^k$ has no solutions with $m \geqslant 4$.* In the case $a = 1$ the equation is called the *Erdős-Moser equation*. In this case the conjecture was formulated by P. Erdős around 1950 and in 1953 L. Moser [2] proved that if $(m,k) \neq (3,1)$ is a solution then $m > 10^{10^6}$. A survey of work on the Erdős-Moser equation can be found in Moree [3].

In this talk, we present recent results on the Kellner-Erdős-Moser conjecture. We are able to establish the unsolvability of the equation $aS_k(m) = m^k$ for many integers $a > 1$ while the Erdős-Moser conjecture remains open.

Recall that an odd prime p is said to be *regular* if it does not divide any of the numerators of the Bernoulli numbers $B_2, B_4, B_6, \ldots, B_{p-3}$, otherwise it is said to be *irregular*. For an irregular prime p, the pair (r,p) with even r is called an *irregular pair* if $2 \leqslant r \leqslant p-3$ and p divides the numerator of B_r. The next result is a generalization of [4, Lemma 10 (b, d)].

Proposition 1. *Suppose that $aS_k(m) = m^k$ with $m \geqslant 4$. Let p be a prime dividing m. Then*
(a) *p is an irregular prime;*
(b) *$k \equiv r \pmod{p-1}$ for some irregular pair (r,p).*

Proposition 1 and the fact that each prime divisor of a divides m imply

Theorem 1. *If a is even or has a regular prime divisor, then the equation $aS_k(m) = m^k$ has no solutions with $m \geqslant 4$.*

Theorem 2. *Let p_1 and p_2 be distinct irregular prime divisors of a. Assume that for every pair (r_1, p_1), (r_2, p_2) of irregular pairs we have $\gcd(p_1-1, p_2-1) \nmid (r_1-r_2)$. Then the equation $aS_k(m) = m^k$ has no solutions.*

Another way to exclude a given $a > 1$ is by using helpful pairs. For a positive integer a, let us call a pair $(t, q)_a$ with q a prime and $2 \leqslant t \leqslant q-3$ even, *helpful* if $q \nmid a$, for every $c = 1, \dots, q-1$ we have $aS_t(c) \not\equiv c^t \pmod{q}$ and, in the case that q is an irregular prime, (t, q) is not an irregular pair. Our method is based on the following result.

Proposition 2. *Let p be an irregular prime dividing a. Assume that for every irregular pair (r, p) there exists a positive integer ℓ_r such that for every $j = 0, 1, \dots$ $\dots, \ell_r - 1$ there is a helpful pair $(t_j, q_j)_a$ with $(q_j - 1) \mid \ell_r(p-1)$ and $t_j \equiv r + j(p-1)$ $\pmod{q_j - 1}$. Then the equation $aS_k(m) = m^k$ has no solutions.*

Combining Proposition 2 with Theorem 1, we deduce

Theorem 3. *If $2 \leqslant a \leqslant 1500$, then the equation $aS_k(m) = m^k$ has no solutions with $m \geqslant 4$.*

In case we are not able to exclude a square-free a, we are able to show that if $aS_k(m) = m^k$ holds with $m \geqslant 4$, then both m and k are large. More precisely, we have the following theorem (for a similar result in the case $a = 1$ see [3, Theorem 2] or [5, Theorem 4]).

Theorem 4. *Assume that $a > 1$ is square-free and that $aS_k(m) = m^k$ with $m \geqslant 4$. Put $a_1 = \gcd(a+1, m+1)$ and $a_2 = \gcd(a+1, 2m+1)$. Put*

$$M = \frac{(m^2-1)(4m^2-1)}{6a_1a_2}.$$

Then
(a) *m is composite;*
(b) *$m-1$, $2m-1$, $(m+1)/a_1$, and $(2m+1)/a_2$ are all square-free;*
(c) *if p divides at least one of the above four integers, then $(p-1) \mid k$;*
(d) *$\min(m, k) > 3.44 \cdot 10^{82}$;*
(e) *the number M is square-free and has at least 139 prime factors;*
(f) *if $m \equiv 1 \pmod 3$, then $\min(m, k) > 1.484 \cdot 10^{9321155}$ and the number M has at least 4990906 prime factors.*

REFERENCES

1. Kellner B. C., On stronger conjectures that imply the Erdős-Moser conjecture // J. Number Theory. 2011. Vol. 131, no. 6. P. 1054–1061.

2. Moser L., On the diophantine equation $1^n + 2^n + 3^n + \dots + (m-1)^n = m^n$ // Scripta Math. 1953. Vol. 19. P. 84–88.

3. Moree P., Moser's mathemagical work on the equation $1^k+2^k+\ldots+(m-1)^k=m^k$ // Rocky Mountain J. Math. 2013. Vol. 43, no. 5. P. 1707–1737.

4. Moree P., te Riele H. J. J., Urbanowicz J., Divisibility properties of integers x, k satisfying $1^k+\cdots+(x-1)^k=x^k$ // Math. Comp. 1994. Vol. 63, no. 208. P. 799–815.

5. Moree P., A top hat for Moser's four mathemagical rabbits // Amer. Math. Monthly. 2011. Vol. 118, no. 4. P. 364–370.

Max-Planck-Institut für Mathematik
Received 16.04.2015

УДК 511

О монографиях по методам решета

Е. В. Вахитова, С. Р. Вахитова (Воронеж)
algebraist@yandex.ru

Метод решета внес весомый вклад в теорию чисел. Древнейшим из известных методов решета является метод решета Эратосфена (276 – 196 гг. до нашей эры). Этот метод разработал в 1918 г. Вигго Брун (1885 – 1978), а другой вид метода решета в 1949 г. – Атле Сельберг (1917 – 2007). Метод решета Бруна имеет комбинаторную природу и очень сложный.

В 1938 г. Александр Адольфович Бухштаб (1905 – 1990) [1] дал более совершенную структуру метода решета Бруна, применив интегро-конечно-разностные уравнения. Методам решета посвящены докторские диссертации [2] и [3]. В 1967 г. А. А. Бухштаб [4] разработал комбинаторное весовое решето. Некоторым усовершенствованиям этого метода посвящены кандидатские диссертации [5] и [6].

Различным методам решета посвящены монографии [7] – [9]. В монографии [7] исследованы методы решета Сельберга, комбинаторное решето, решето Россера, весовое решето с весами Рихерта. Известно, что веса Рихерта являются частным случаем весов Бухштаба в непрерывной форме и дают худшие результаты. Отметим, что в монографии [7] в список литературы включено 10 работ А. А. Бухштаба за период с 1937 г. по 1967 г., в их числе работы [1] и [4].

Монография [8] (и перевод с англ. В. Н. Чубарикова [9]) охватывает сразу большое число проблем и написана сжато. В ней дан обзор методов решета и рассмотрены приложения методов решета Сельберга, простого асимптотического решета и большого решета.

В 1985 г. А. А. Бухштаб [10] анонсировал новый тип весового решета. Отметим, что веса Бухштаба, анонсированные в 1985 г., были изучены в работах [11] и [12].

В последние годы по методам решета изданы монографии [13] – [16]. В монографии [13] изложены метод решета Сельберга, комбинаторное решето и решето с весами. Отметим, что в монографии [13] приведено тождество Бухштаба и в список литературы включены 4 работы А. А. Бухштаба: (1937 г.) и [1], [4], [10] и работы Е. В. Вахитовой [11] и [12].

В монографии [14] сформулированы проблемы теории чисел, результаты, полученные в этом направлении, и изложены метод решета Сельберга и его применения, метод решета Россера и весовое решето.

В монографии [15] исследованы методы решета Сельберга в сочетании с весами Бухштаба и решета Бруна в сочетании с весами Бухштаба и их приложения: дано изложение теории метода решета Сельберга в сочетании с весами Бухштаба, анонсированными в 1985 г., и на ряде примеров показано применение метода весового решета при решении задач в теории чисел. В ней исследованы приложения к полиномиальным последовательностям и коротким интервалам. Кроме того, исследовано приложение метода решета Бруна в сочетании с весами Бухштаба, анонсированными в 1985 г., к полиномиальной последовательности.

Монография [16] является вторым изданием монографии [15], подготовлена двумя авторами и значительно отличается от первого издания, является его переработкой. Внесены новые результаты, дополнен список литературы. Отметим, что в монографии [16] в список литературы включено 15 работ А. А. Бухштаба и 53 работы Е. В. Вахитовой, в их числе 13 работ в соавторстве с С. Р. Вахитовой. Монография [16] относится к фундаментальным исследованиям по аналитической теории чисел и является исследованием в области теории метода весового решета, активно разрабатываемого в современной теории чисел.

Список цитированной литературы

1. Бухштаб А. А. Новые улучшения в методе эратосфенова решета // Матем. сб. 1938. Т. 4(46). N. 2. С. 375–387.

2. Бухштаб А. А. Новые исследования по методу эратосфенова решета : дис. ... д-ра физико-матем. наук. М., 1944. 129 с.

3. Левин Б. В. Метод решета и его применения : дис. ... д-ра физико-матем. наук. М., 1963. 240 с.

4. Бухштаб А. А. Комбинаторное усиление метода эратосфенова решета // УМН. 1967. Т. 22. N. 3 (135). С. 199–226.

5. Чекин А. Л. Двумерное решето с весами и его приложение к некоторым теоретико-числовым задачам : дис. ... канд. физико-матем. наук. М., 1987. 133 с.

6. Вахитова Е. В. Одномерное решето с весами и его приложение к некоторым теоретико-числовым задачам : дис. ... канд. физико-матем. наук. М., 1992. 132 с.

7. Halberstam H., Richert H.–E. Sieve methods. London: Acad. Press, 1974. 364 p.

8. Hooley C. Applications of sieve methods to the theory of numbers. London: Cambr. Univ. Press, 1976. 122 p.

9. Хооли К. Применения методов решета в теории чисел : перевод с англ. В. Н. Чубарикова. М.: Наука, 1987. 135 с.

10. Бухштаб А. А. Новый тип весового решета // Теория чисел и её приложения : тез. докл. Всесоюз. конф. Тбилиси. 1985. С. 22–24.

11. Вахитова Е. В. О приложении функций Бухштаба // Математические заметки. 1995. Т. 57. N. 1 С. 121–125.
= Vakhitova E. V. Application of Bukhstab functions // Plenum Publishing Corporation. 1995. Mathematical Notes. 1995. V. 57. N. 1–2. P. 85–87.

12. Вахитова Е. В. Об одномерном решете Сельберга с весами Бухштаба нового типа // Математические заметки. 1999. Т. 66. N. 1. С. 38–49.
= Vakhitova E. V. Selbergs One − Dimensional Sieve With Bukhstab Weights of New Type // Kinwer Academic / Plenum Publishees. 2000. Mathematical Notes. 1999. V. 66. N. 1. P. 30–39.

13. Greaves G. Sieves in number theory. Berlin: Springer–Verlag, 2001. 304 p.

14. Heath–Brown D. R. Lectures on sieves. Bonn: Univ. Bonn, 2003. 50 p.

15. Вахитова Е. В. Методы решета с весами Бухштаба и их приложения : монография. М.: Изд-во МПГУ "Прометей", 2002. 268 с.

16. Вахитова Е. В., Вахитова С. Р. Методы решета с весами Бухштаба и их приложения : монография : 2-е изд., перераб. и доп. Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2014. 332 с.

Воронежский государственный университет
Получено 25.03.2015

УДК 511.335

Вопросы суммирования функций, родственных функции делителей

Е. И. Деза, Л. В. Варухина (Москва)
Elena.Deza@gmail.com lidadgemma@mail.ru

Многие вопросы теории чисел связаны с исследованием рядов Дирихле

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

и сумматорных функций их коэффициентов.

Известный пример рядов Дирихле — L-функции Дирихле, при $\Re s>1$ определяемые равенством

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s}$$

(χ — характер Дирихле). Произведение нескольких L-функций дает ряд

$$L_1(s,\chi_1)\cdot\ldots\cdot L_k(s,\chi_k)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n n^{-s},$$

сумматорная функция коэффициентов которого имеет вид

$$C_k(x)=\sum_{n\le x}c_n=\sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_k\le x}\chi_1(n_1)\cdot\ldots\cdot\chi_k(n_k).$$

Задача об асимптотической оценке $C_k(x)$ является обобщением проблемы делителей Дирихле и связана с проблемой делителей в числовых полях.

Мы уточняем значение константы c в показателе остаточного члена

$$O(x^{1-ck^{-2/3}})$$

асимптотической формулы для $C_k(x)$, получив величину $c=\frac{1}{13}$ (теорема 3), и соответствующие константы остаточных членов проблемы делителей в квадратичном и m-круговом полях (теорема 4). Это улучшает результаты работы [1], где было получено значение $c=\frac{2}{31}$.

Доказательство опирается на новые оценки L-функций Дирихле в критической полосе (теорема 2) и новые оценки тригонометрических сумм $\sum_{n\le N}\chi(n)n^{it}$ методом Виноградова (теорема 1), полученные в [2] с применением новых результатов в теореме о среднем и оптимального выбора ряда параметров, возникающих в ходе исследования.

Теорема 1. *Для $N_1\le N\le t$, заданного характера Дирихле χ по модулю D, $D\le N$, и некоторой абсолютной константы $A>0$ имеет место формула*

$$\left|\sum_{N<n\le N_1}\chi(n)n^{it}\right|\le ANe^{-\frac{1}{1560}\cdot\frac{\log^3 ND^{-1}}{\log^2 t}}.$$

Теорема 2. *Для $|t|\ge 2$, $0,5\le\sigma\le 1$, заданного характера Дирихле χ по модулю D и некоторой абсолютной константы $B>0$ имеет место оценка*

$$|L(\sigma+it,\chi)|\le BD^{1-\sigma}|t|^{15,24(1-\sigma)^{1,5}}\max(\log D,\log^{2/3+\epsilon}|t|).$$

Теорема 3. *Для сумматорной функции*

$$C_k(x) = \sum_{n\le x} c_n = \sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_k\le x} \chi_1(n_1)\cdot\ldots\cdot\chi_k(n_k)$$

коэффициентов ряда Дирихле

$$L_1(s,\chi_1)\cdot\ldots\cdot L_k(s,\chi_k) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}, \Re s > 1,$$

имеет место формула

$$C_k(x) = xP_m(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{13}k^{-2/3}}(C\log x)^k,$$

где $L_1(s,\chi_1)$, ..., $L_k(s,\chi_k)$ — L*-ряды Дирихле с характерами Дирихде* $\chi_1,\ldots,\chi_k$ *по модулям* $D_1,\ldots,D_k$, m — *число главных характеров среди* $\chi_1,\ldots,\chi_k$, P_m — *многочлен степени* $m-1$, $2\le k << \log^{5/6}x$, $\max(D_1,\ldots,D_k) << \log^2 x$, $|\theta|\le 1$ *и* $C>0$ — *абсолютная константа.*

Доказательство теоремы 3 использует теорему 2 в ходе классической схемы рассуждений, основанной на лемме А. А. Карацубы [3] о поведении величины

$$\int_1^x A(y)dy, \quad \text{где } A(y) = \sum_{n\le y} a_n$$

— сумматорная функция коэффициентов ряда

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

абсолютно сходящегося при $\Re s > 1$, и идее асимптотического дифференцирования.

Результаты теоремы 3 позволяют получить новые оценки остаточных членов проблемы делителей для квадратичного и m-кругового поля.

Теорема 4. *Для квадратичного поля* $K = R(\sqrt{D})$ *имеет место формула*

$$\sum_{N(U_1\cdot\ldots\cdot U_k)\le x} 1 = xP_k(\log x) + \theta x^{1-\frac{1}{19}k^{-2/3}}(C\log x)^{2k},$$

где D — *бесквадратное число,* $|D|\le\log^2 x$, $U_1,\ldots,U_k$ — *целые дивизоры поля* K, P_k — *многочлен степени* $k-1$, $1\le k << \log^{5/6}x$, $|\theta|\le 1$, $C>0$ — *абсолютная константа;*

для m*-кругового поля* $K = R(\zeta)$ *имеет место формула*

$$\sum_{N(U_1\cdot\ldots\cdot U_k)\le x} 1 = xP_k(\log x) + \theta_1 x^{1-\frac{1}{13}(\varphi(m)k)^{-2/3}}(C_1\log x)^{\varphi(m)k},$$

где m — *натуральное число,* $m\le\log x$, $\zeta^m = 1$, $U_1,\ldots,U_k$ — *целые дивизоры поля* K, P_k — *многочлен степени* $k-1$, $1\le k << \log^{5/6}x$, $|\theta_1|\le 1$, $C_1>0$ — *абсолютная константа.*

Доказательство первого утверждения основано на том, что дзета-функция Дедекинда квадратичного поля имеет вид

$$\zeta_K(s) = \zeta(s)L(s,\chi),$$

где χ — неглавный характер по модулю $|D|$. Взяв в [3] $F(s) = \zeta^k(s)L^k(s,\chi)$, $A(y) = \sum_{N(U_1\cdot\ldots\cdot U_k)\le y} 1$, $b = 1 + \frac{1}{\log x}$, $e^2 \le T \le x$ и учитывая, что $|A(y)| \le \sum_{n\le y} \tau_{2k}(n)$, мы получим первое утверждение из теоремы 3 при замене m на k и k на $2k$, соответственно.

Дзета-функция Дедекинда m-кругового поля имеет вид

$$\zeta_K(s) = \prod_{d|m} \prod_{\chi^*\, mod\, d} L(s,\chi^*),$$

где d пробегает все натуральные делители числа m, и, при заданном d, χ^* пробегает все примитивные характеры по модулю d. Так как число примитивных характеров по модулю d равно $\sum_{\delta|d} \mu(\delta)\varphi(d/\delta)$, то количество L-функций, входящих в произведение для $\zeta_K(s)$, равно $\varphi(m)$. Кроме того, среди примитивных характеров имеется лишь один главный, принимающий значение 1 для всех целых чисел. Таким образом,

$$\zeta_K(s) = \zeta(s)L_2(s,\chi_2^*)\cdot\ldots\cdot L_{\varphi(m)}(s,\chi_{\varphi(m)}^*),$$

где $\chi_2^*, \ldots, \chi_{\varphi(m)}^*$ — неглавные характеры по модулям $d_2(d_2|m)$, ..., $d_{\varphi(m)}(d_{\varphi(m)}|m)$.

Взяв в [3]

$$F(s) = \zeta^k(s)\cdot L_2^k(s,\chi_2^*)\cdot\ldots\cdot L_{\varphi(m)}^k(s,\chi_{\varphi(m)}^*), \quad A(y) = \sum_{N(U_1\cdot\ldots\cdot U_k)\le y} 1,$$

$$b = 1 + \frac{1}{\log x}, \quad e^2 \le T \le x$$

и учитывая, что

$$|A(y)| \le \sum_{n\le y} \tau_{\varphi(m)k}(n),$$

мы получим второе утверждение из теоремы 3 при замене m на k и k на $\varphi(m)k$, соответственно.

Аналогичные результаты можно получить для средних значений функций $\tau_k(n_1)\cdot\ldots\cdot\tau_k(n_l)$ и $\tau_k(n^2)$, родственных функции делителей, и их аналогов в числовых полях [4].

Список цитированной литературы

1. Пантелеева (Деза) Е. И. К вопросу о проблеме делителей Дирихле в числовых полях // Математические заметки. 1988. Т. 44, вып. 4. С. 494 - 505.

2. Деза Е. И., Варухина Л. В. Об оценке дзетовой суммы и проблеме делителей Дирихле // Вестник Сант-Петербургского университета. 2013. Серия 2, вып. 4. С. 15 - 24.

3. Карацуба А. А. Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле // Известия АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36, № 3. С. 475 - 483.

4. Deza E., Varukhina L. On mean values of some arithmetic functions in number fields // Discrete Mathematics. 2008. Vol. 308, Issue 21. P. 4892 - 4899.

Московский педагогический государственный университет
Получено 03.04.2015

УДК 517

О почти периодических функциях Безиковича

И. Ш. Джаббаров (Гянджа, Азербайджан)
ilgar_j@rambler.ru

Г. Бор показал (см. [1]), что почти периодическую функцию можно представить как "диагональную"функцию предельно- периодической функции. Множество почти периодических функций в смысле Безиковича определяется [2-4] как замыкание множества почти периодических функций в смысле Бора относительно нормы Безиковича

$$\|f\|_{B_2} = \overline{\lim_{T\to\infty}} \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^2 \, dx \right]^{1/2}.$$

Некоторые характеристики почти-периодических функций Безиковича даны в [2-3]. Нашей целью является установление свойств, указанных Бором, для почти периодических функций Безиковича, естественно, уже почти всюду *в смысле Лебега*. Основная идея здесь – идея построения показателей Фурье методом Боголюбова Н. Н., данная в работе [5]. Мы ограничиваемся только классом B_2, определяемым условием

$$\|f\|_{B_2} = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^2 \, dx < +\infty.$$

Метод работы основан на новой мере построенной в [6-7].

Теорема 1. *Пусть f – некоторая функция из класса $f \in B_2$. Тогда найдется функция $\bar{f}(x)$ эквивалентная $f(x)$ по норме Безиковича такая, что*

$$\bar{f}(x) = \lim_{k\to\infty} F_k(x)$$

поточечно почти всюду, причем $(F_k(x))$ – последовательность почти периодических функций Бора.

Пусть $\Omega = [0,1] \times [0,1] \times \cdots$ обозначает бесконечномерный единичный куб. При условиях теоремы 1 существует не более, чем счетная система показателей Фурье (λ_n). Пусть (μ_n) рациональный базис (см. [4, стр. 30]) для показателей Фурье. Обозначим $L_2(\Omega)$ Лебеговый класс, при этом мера определена как в [6-7].

Теорема 2. *Пусть условия теоремы 1 выполнены. Тогда, найдется функция $F(\bar{\theta}) \in L_2(\Omega)$ и функция $\bar{f} \sim f$(по норме Безиковича) такая, что*

$$\bar{f}(x) = F(\mu_1 x, \mu_2 x, ...)$$

почти всюду в R (по Лебегу).

Теорема 3. *Пусть условия теоремы 1 выполнены. Пусть, далее, (a_n) – последовательность коэффициентов Фурье функции $f(x)$. Тогда*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^2 \, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 .$$

Список цитированной литературы

1. Bohr H. Almost periodic functions. M.OGIZ, 1934.(rus)
2. Besicovitch A.S. Almost periodic functions. Cambridge Place Type University Press, Cambridge, 1932.
3. Левитан Б.М. Почти-периодические функции. М.:Гостехиздат, 1953.
4. Левитан Б.М., Жиков В.В. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. Изд. МГУ, 1978.
5. Боголюбов Н. Н., Крылов Н. М. О приближении функций тригонометрическими суммами. Избранные труды Боголюбова Н. Н. В 3-х томах., т. 1., Киев:Наукова Думка. 1969. С. 57-62.
6. Jabbarov I. Sh. On the connection between measure and metric in infinite dimensional space . Inter. Conf. on diff. equat. and Dynam. Systems. Abstracts. Suzdal, July, 2-7, 2010.
7. Jabbarov I. Sh. On a new measure in infinite dimensional unite cube. arXiv:1102.5668.

Гянджинский государственный университет
Получено 12.04.2015

UDK 511.335

Mixed joint universality of Dirichlet L-functions and Hurwitz type zeta-functions

K. Janulis (Vilnius, Lithuania)
Kestutis.Janulis@gmail.com

The universality property of zeta-functions was discovered by S. M. Voronin. In [4], he obtained the universality of the Riemann zeta-function. It turned out that some other zeta and L-functions are also universal in the Voronin sense.

We consider the so-colled mixed joint universality when collection of analytic functions are simultaneously approximated by a collection of shifts consisting of Dirichlet L-functions and either Hurwitz or periodic Hurwitz zeta-functions. Let α, $0 < \alpha \leq 1$, be a fixed parameter, and $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ be a periodic sequence of complex numbers with a minimal period $k \in \mathbb{N}$. Then the periodic Hurwitz zeta-function $\zeta(s, \alpha, \mathfrak{a})$, $s = \sigma + it$, is defined, for $\sigma > 1$, by the series

$$\zeta(s, \alpha, \mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m+\alpha)^s},$$

and is moromorphically continued to the whole complex plane. When $a_m = 1$, we obtain the classical Hurwitz zeta-function $\zeta(s, \alpha)$. As usual, denote by $L(s, \chi)$ a Dirichlet L-function with character χ.

Let $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$. Denote by $\mathcal{K}$ the class of compact subsets of D with connected complements, by $H_0(K)$ and $H(K)$, $K \in \mathcal{K}$, the classes of non-vanishing continuous and continuous functions on K, respectively, which are analytic in the interior of K. Let $meas\{A\}$ stand for the Lebesgue measure of a measurable set $A \subset \mathbb{R}$.

First we consider the joint universality of Dirichlet L-functions and Hurwitz zeta-functions [2].

Theorem 1. *Suppose that $\chi_1, \ldots, \chi_{r_1}$ are pairwise non-equivalent Dirichlet characters, and that the numbers $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_1}$ are algebraically independent over the field of rational numbers $\mathbb{Q}$. For $j = 1, \ldots, r_1$, let $K_j \in \mathcal{K}$ and $f_j \in H_0(K_j)$, while, for $j = 1, \ldots, r_2$, let $\widehat{K}_j \in \mathcal{K}$ and $f_j \in H(\widehat{K}_j)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0;T] : \sup_{1\leq j\leq r_1} \sup_{s\in K_j} |L(s+i\tau, \chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon,$$

$$\sup_{1\leq j\leq r_2} \sup_{s\in \widehat{K}_j} |\zeta(s+i\tau, \alpha_j) - \widehat{f}_j(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Let $H(D)$ be the space of analytic functions on D equipped with the topology of uniform convergence on compacta. Then Theorem 1 implies the following statement [1].

Theorem 2. *Suppose that $\chi_1, \dots, \chi_{r_1}$ are pairwise non-equivalent Dirichlet characters, the numbers $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_2}$ are algebraically independent over $\mathbb{Q}$, and that $F : H^{r_1+r_2}(D) \to H(D)$ is a continuous operator such that, for every open set $G \subset H(D)$, the set $(F^{-1}G) \cap (S^{r_1} \times H^{r_2}(D))$ is non-empty, where $S = \{g \in H(D) : g(s) \neq 0$ or $g(s) \equiv 0\}$. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0;T] : \sup_{s\in K} |F(L(s+i\tau,\chi_1), \dots, L(s+i\tau,\chi_{r_1}),$$

$$\zeta(s+i\tau,\alpha_1), \dots, \zeta(s+i\tau,\alpha_{r_2})) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

In [1] and [2], other modifications of Theorem 2 also are given.

Now we replace in Theorem 1 Hurwitz zeta-functions by periodic Hurwitz zeta-functions. For $j = 1, \dots, r$, let $l_j \in \mathbb{N}$ and $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ be a periodic sequence of complex numbers with a minimal period $k_{jl} \in \mathbb{N}$. Moreover, let $k_j = [k_{j1}, \dots, k_{jl_j}]$ denote the least common multiple of the periods $k_{j1}, \dots, k_{jl_j}$. Define the matrix

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j1} & a_{1j2} & \cdots & a_{1jl_j} \\ a_{2j1} & a_{2j2} & \cdots & a_{2jl_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k_jj1} & a_{k_jj2} & \cdots & a_{k_jjl_1} \end{pmatrix}, j = 1, \dots, r.$$

Then the following statement is true [3].

Theorem 3. *Suppose that $\chi_1, \dots, \chi_d$ are pairwise non-equivalent Dirichlet characters, the numbers $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, are palgebraically independent over $\mathbb{Q}$, and that $rank(A_j) = l_j$, $j = 1 \dots, r$. For $j = 1, \dots, d$, let $K_j \in \mathcal{K}$, and $f_j(s) \in H_0(K_j)$, and, for $j = 1, \dots, r$, $l = 1, \dots, l_j$, let $K_{jl} \in \mathcal{K}$ and $f_{jl}(s) \in H(K_{jl})$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0;T] : \sup_{1\le j\le d} \sup_{s\in K_j} |L(s+i\tau,\chi_j) - f_j(s)| < \varepsilon,$$

$$\sup_{1\le j\le r} \sup_{1\le l\le l_j} \sup_{s\in K_{jl}} |\zeta(s+i\tau,\alpha_j,\mathfrak{a}_{jl}) - f_{jl}(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Theorem 3 has a series of corollaries on the universality of composite functions. We give two examples. Let $v = d + l_1 +, \dots, +l_r$, $v_1 = l_1 +, \dots, +l_r$.

Theorem 4. *Suppose that the Dirichlet characters $\chi_1, \dots, \chi_d$, the numbers $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ and the sequences $\mathfrak{a}_{11}, \dots, \mathfrak{a}_{1l_1}, \dots, \mathfrak{a}_{r1}, \dots, \mathfrak{a}_{rl_r}$ satisfy the hypotheses of Theorem 3, and that $F : H^v(D) \to H(D)$ is a continuous operator such* *that, for every polynomial $p = p(s)$, the set $(F^{-1}\{p\}) \cap (S^d \times H^{v_1}(D))$ is non-empty. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0;T] : \sup_{s\in K} |F(L(s+i\tau,\chi_1),\dots,L(s+i\tau,\chi_d),$$

$$\zeta(s+i\tau,\alpha_1,\mathfrak{a}_{11}),\dots,\zeta(s+i\tau,\alpha_1,\mathfrak{a}_{1l_1}),\dots,\zeta(s+i\tau,\alpha_r,\mathfrak{a}_{r1})$$

$$,\dots,\zeta(s+i\tau,\alpha_r,\mathfrak{a}_{rl_r})) - f(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Non-vanishing of a polynomial $p(s)$ in a bounded region can be controlled by its constant term. Therefore, sometimes it is more convenient to consider operator F on the space $H(D_V, D) = H^d(D_V) \times H^{v_1}(D)$, where, for $V > 0$, $D_V = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1, |t| < V\}$. Analogically, let $S_V = \{g \in H(D_V) : g(s) \neq 0 \text{ or } g(s) \equiv 0\}$. Then we have the following result.

Theorem 5. *Suppose that the Dirichlet characters $\chi_1,\dots,\chi_d$, the numbers $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ and the sequences $\mathfrak{a}_{11},\dots,\mathfrak{a}_{1l_1},\dots,\mathfrak{a}_{r1},\dots,\mathfrak{a}_{rl_r}$ satisfy the hypotheses of Theorem 3, and let $V > 0$ be such that $K \subset D_V$. Let $F : H^v(D_V, D) \to H(D_V)$ be a continuous operator such that, for every polynomial $p = p(s)$, the set $(F^{-1}\{p\}) \cap (S_V^d \times H^{v_1}(D))$ is non-empty. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Then the assertion of Theorem 4 is true.*

REFERENCES

1. Janulis K. Remarks on the joint universality of Dirichlet L-functions and Hurwitz zeta-functions // Šiauliai Math. Seminar. 2014. V. 9(17). P. 61-70.

2. Janulis K., Laurinčikas A. Joint universality of Dirichlet L-functions and Hurwitz zeta-functions // Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 2013. Vol. 39. P. 203–214.

3. Janulis K., Laurinčikas A., Macaitienė R., Šiaučiūnas D. Joint universality of Dirichlet L-functions and Hurwitz zeta-functions // Mathematical Modelling and Analysis. 2012. Vol. 17. No 5. P. 673–685.

4. Voronin S. M. Theorem on the "universality"of the Riemann zeta function // Izv. Akad. Nauk SSSR. 1975. Vol. 39. P. 475–486(in Russian).

Vilnius University
Received 13.04.2015

УДК 511.335

О распределении нулей линейных комбинаций $L-$функций Дирихле, лежащих на критической прямой

До Дык Там (Белгород)
doductam140189@gmail.com

В работе рассматривается распределение нулей линейных комбинаций $L-$функций Дирихле, лежащих на критической прямой $\Re s = \frac{1}{2}$. Проведен перенос результатов А. А. Карацубы для дзета-функции Римана на линейные комбинации $L-$ функций Дирихле.

В 1859 г. Б. Риман высказал гипотезу о том, что все нули дзета-функции $\zeta(s)$ лежат на прямой $\Re s = \frac{1}{2}$.

Пусть $N_0(T)-$ число нулей нечетного порядка $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ на промежутке $(0,T]$. В 1921 г. Харди и Литтлвуд [1] доказали следующую теорему: Для любого $\varepsilon > 0$ существуют $T_0 = T_0(\varepsilon)$, $c = c(\varepsilon) > 0$ такие, что при $T > T_0$, $H = T^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ справедливо неравенство:

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq cT.$$

В 1942 г. Сельберг доказал, что: при условиях теоремы Харди и Литтлвуда справедливо неравенство

$$N_0(T+H) - N_0(T) \geq cT \ln T. \tag{1}$$

Сельберг высказал гипотезу о том, что (1) имеет место при меньших H.

В 1984 г. А. А. Карацуба [2] методом тригонометрических сумм доказал оценку (1) для $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon}$, $\varepsilon-$ положительное малое фиксированное число. А. А. Карацуба [3] также доказал, что аналог гипотезы Сельберга справедлив для почти всех промежутков $(T, T+H), H = T^{\varepsilon}$, где ε – сколь угодно малое фиксированное положительное число.

Оценки Сельберга и А. А. Карацубы являются неулучшаемыми по порядку роста при $T \to \infty$.

Пусть теперь

$$\rho(s,\chi) = \varepsilon(\bar{\chi})(k\pi^{-1})^{\frac{1}{2}-s}\frac{\Gamma\left(\frac{1-s+a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right)}; e^{i\theta(t,\chi)} = \left\{\rho\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right\}^{-\frac{1}{2}};$$

$$Z(t,\chi) = e^{i\theta(t,\chi)} L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right), \tag{2}$$

где $\chi-$ примитивный характер по модулю k, $\varepsilon(\chi)-$ функция из функционального уравнения $L-$ функции Дирихле, отвечающей χ [4, с. 23]. Функция $Z(t,\chi)$ принимает вещественные значения при вещественных t и, следовательно, нули

$Z(t,\chi)$ являются нулями $L(s,\chi)$, лежащими на критической прямой $\Re s = \frac{1}{2}$ [5, с. 487]. $Z(t,\chi)$ представляет собой аналог функции Харди [4, гл. 2].

Пусть
$$G(t) = a_1 Z(t,\chi_1) + a_2 Z(t,\chi_1) + \cdots + a_l Z(t,\chi_l),$$
где $a_1, a_2, \cdots, a_l$— произвольные вещественные числа, $\chi_1, \cdots, \chi_l$— примитивные характеры Дирихле. Через $[k_1, k_2, \cdots, k_l]$ будем обозначать наименьшее общее кратное натуральных чисел $k_1, k_2, \cdots, k_l$ и $\varepsilon, \varepsilon_1$— произвольно малые фиксированные положительные числа, не превосходящие $0,01$.

В 1991 году А. А. Карацуба [5] поставил и решил своим методом задачу о нижней оценке числа нулей $G(t)$ на отрезке $[T, T+H]$, $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$. Доказано, что при $K = [k_1, k_2, \cdots, k_l] \geq 3$, $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$, $\varepsilon > 0$— любое и $H = T^{\frac{27}{82}+\varepsilon_1}$:
$$N_0(T+H,\chi) - N_0(T,\chi) \geq cH\left(\ln T\right)^{\beta-\varepsilon},$$
где $N_0(T,\chi)$ число нулей нечетного порядка функции $G(t)$, лежащих в промежутке $(0,T)$, $\beta = \frac{1}{\varphi(K)}$.

Используя методы и средства из работ [3] и [5], удалось доказать следующие теоремы о распределении нулей функции $G(t)$:

Теорема 1. *Пусть* $K = [k_1, k_2, \cdots, k_l] \geqslant 3$, $\beta = \frac{1}{\varphi(K)}$, $X \geqslant X_0(\varepsilon, \varepsilon_1)$, $\varepsilon > 0$— *любое и* $H = X^{\varepsilon_1}$, $X \leqslant T \leqslant 2X$. *Если* E_1— *множество тех* T *из промежутка* $[X, 2X]$, *для которых не выполняется неравенство*
$$N_0(T+H,\chi) - N_0(T,\chi) \geq c_1 H\left(\ln T\right)^{\beta-\varepsilon}, \tag{3}$$
то для меры множества E_1 *справедлива оценка* $\mu(E_1) \ll X^{1-0.5\varepsilon_1}$.

Теорема 2. *Пусть* $K = [k_1, k_2, \cdots, k_l] \geqslant 3$, $X \geqslant X_0(\varepsilon, \varepsilon_1)$, $\varepsilon > 0$— *любое и* $H = X^{\varepsilon_1}$, $M = [XH^{-1}]$. *При* $m = M+1, M+2, \cdots, 2M$ *рассмотрим интервалы вида* $[mH, mH+H]$. *Тогда в каждом из указанных интервалов, за исключением не более* $M^{1-0.5\varepsilon_1}$ *из них, содержится более чем* $c_2 H(\ln X)^{\beta-\varepsilon}$ *нулей нечетного порядка функции* $G(t)$.

Список цитированной литературы

1. Hardy G. H., Littlewood J. E. The zeros of Rieman's zeta - function on the critical line // Math. Zs. 1921. Vol. 10. P. 283–317.

2. Карацуба А. А. О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой // Изв. АН СССР. Серия Математическая. 1984. Т. 48, вып. 3. С. 569–584.

3. Карацуба А. А. Распределение нулей функции $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ // Изв. АН СССР. Серия Математическая. 1984. Т. 48, вып. 6. С. 1214–1224.

4. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994. 376 с.

5. Карацуба А. А. О нулях специального вида функций, связанных с рядами Дирихле // Изв. АН СССР. Серия Математическая. 1991. Т. 55, вып. 3. С. 483–514.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет
Получено 22.03.2015

УДК 511

О взвешенном числе целых чисел на многомерных гиперболоидах специального вида

Р. А. Дохов (Нальчик)
urusbi@rambler.ru

Вопрос о распределении целых точек на квадратичных поверхностях издавна привлекает внимание многих исследователей. В более общей постановке рассматривают также задачу о взвешенном количестве целых точек на таких поверхностях. (см. [1]).

Мы рассматриваем многомерную гиперболическую поверхность

$$\sum_{i=1}^{s}\Big\{Q_i^{(1)}(x_i,y_i)-Q_i^{(2)}(z_i,t_i)\Big\}=h, \tag{1}$$

определяемую прямой суммой неопределенных кватернарных квадратичных форм, где $Q_i^{(1)}(x_i,y_i)$, $Q_i^{(2)}(z_i,t_i)$ – положительные целочисленные бинарные квадратичные формы дискриминанта $d; h\neq 0$ – целое число.

Обозначим для удобства левую часть уравнения (1) через $p(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{t})$, где $\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{t}$ – S-мерные векторы от соответствующих координат точек поверхности (1).

С уравнением (1) мы связываем функцию

$$J_h(n,s)=\sum_{p(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{t})=h} e^{-\frac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{s}Q_i^1(x_i,y_i)-Q_i^2(z_i,t_i)\right)},$$

называемую взвешенным числом целых точек на поверхности (1), взятых с весом

$$e^{-\frac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{s}Q_i^1(x_i,y_i)-Q_i^2(z_i,t_i)\right)},$$

где $n\to\infty$ – вещественный параметр.

Более полные сведения о первоначальных результатах по данному вопросу изложены в работе А. В. Малышева [1], где получена асимптотическая формула с остаточным членом для взвешенного числа целых точек на поверхностях второго порядка, но в случае диагональных квадратичных форм.

В дальнейшем результат из [1] перенесен В. В. Головизиным [2] на случай произвольных квадратичных форм.

В последнее время в случае 4х-мерных гиперболических поверхностей в работе Л. Н. Куртова [3] используется несколько упрощенный подход, основанный на точных значениях двойных сумм Гаусса.

Пользуясь этим подходом с помощью кругового метода получаем следующий асимптотический результат о величине $J_h(n,s)$.

Теорема 1. *Пусть δ_F– дискриминант мнимого квадратичного поля $F = Q\sqrt{d}$, где $d<0$– бесквадратное число.*

Тогда справедлива асимптотическая формула

$$J_h(n,s)=\frac{2\pi^{2s}\Gamma(2s-1)n^{2s-1}\gamma(n)}{\Gamma^2(s)|\delta_F|^s}\cdot$$

$$\cdot\sum_{q=1}^{\infty}q^{-4s}\sum_{l=0}^{q-1}e^{-2\pi i\frac{lh}{q}}\prod_{i=1}^{s}G_1^{(i)}(g,l,\overline{o})G_2^{(i)}(q,-l,\overline{o})+O(n^{s-\frac14+\varepsilon}),$$

где $\gamma(n)=e^{-\frac{h}{n}(1+\frac{1}{n})}$, $\Gamma(s)$ – гамма функция, $\varepsilon>0$ – сколь угодно малое число; постоянная входящая в символ O, зависит от δ_F и s; $G_k^{(i)}(q,\pm l,\overline{o})$ – однородные двойные суммы Гаусса.

Полученная асимптотическая формула обобщает основной результат [3] о взвешенном числе целых точек на четырехмерном числе целых точек на четырехмерном гиперболоиде на многомерный случай, а именно при результат из [3].

Кроме того, наш результат в случае постоянных коэффициентов уравнения гиперболоида также обобщает результат [1] на случай некоторых недиагональных форм, а в сравнении с результатом [2] особый ряд в рассматриваемой задаче нами получен в явном виде, а в [2] он выражен через некоторый комплексный интеграл $W(n)$, которого дана только оценка сверху.

В дальнейшем наш результат об асимптотике $J_h(n,s)$ может быть применен к выводу асимптотических формул для числа целых точек, лежащих в областях специального вида на многомерных гиперболоидах.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю У. М. Пачеву за многочисленные советы и помощь в работе.

Список цитированной литературы

1. Малышев А. В. О взвешенном числе целых точек лежащих на поверхности второго порядка // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1966. Т. 1. С.6–83.

2. Головизин В. В. О распределении целых точек на гиперболических поверхностях второго порядка // Зап. научн. семин. ЛОМИ 1981. Т. 106. С. 52–69.

3. Куртова Л. Н. Об одной бинарной аддитивной задаче с квадратичными формами // Вестник Самарского госуниверситета. Естественно-научная серия. Математика. 2007. №7 (57). С.107–121. JSBN 810-5378.

Кабардино-Балкарский госуниверситет им. Бербекова
Получено 13.04.2015

УДК 511.3

Об аналоге одной задачи Ю. В. Линника с полупростыми числами из "виноградовских" промежутков

Н. А. Зинченко (Белгород)
zinchenko@bsu.edu.ru

В 1930 году Э. Титчмарш в [1] поставил задачу о получении асимптотики для суммы вида

$$\sum_{0<p-l<n} \tau(p-l),$$

где p — простые, l и n — натуральные числа.

Асимптотика для этой суммы была получена Титчмаршем условно в предположении справедливости расширенной гипотезы Римана. Сама задача о получении асимптотической формулы для числа решений в целых числах диофантова уравнения вида $p-l=xy$ получила название проблемы Титчмарша. Для $l=1$ эта проблема была решена безусловно Ю.В. Линником с помощью разработанного им дисперсионного метода [2]. Проблема Титчмарша относится к бинарным аддитивным задачам с простыми числами.

Заметим, что после появления в 1965 году теоремы Бомбьери–Виноградова (см. [3] и [4]) для решения многих аддитивных задач вместо дисперсионного метода стала применяться эта теорема.

После работы 1940 года И. М. Виноградова [5] стали рассматриваться аддитивные задачи с простыми числами из промежутков вида

$$[(2m)^c, (2m+1)^c), \tag{1}$$

где $m \in \mathbb{N}$, и $c \in (1,2]$. Такие промежутки принято называть короткими или «виноградовскими». Аддитивные задачи из промежутков (1), являющиеся тернарными, или решающимися по схеме тернарной задачи, рассматривались, например, в работах С.А. Гриценко (см. [6], [7]), А. Балога и Дж. Фридлендера [8].

Однако, бинарные аддитивные задачи с простыми числами из промежутков (1), к которым относится и проблема Титчмарша, в настоящее время не поддаются решению. Это связано с отсутствием аналогов классической теоремы Бомбьери-Виноградова, равных ей по силе, для простых чисел из коротких промежутков. Пока удается решать некоторые бинарные аддитивные задачи с "полупростыми"числами из (1).

В работе [9] был рассмотрен аналог проблемы Титчмарша с числами вида p_1p_2 из (1), где простые числа p_1 и p_2 удовлетворяют дополнительным условиям.

В работе [10] Ю.В. Линника рассматривались аддитивные задачи с полупростыми числами вида $p_1p_2^a$, где $a \geqslant 2$. Заметим, что последовательность таких чисел является достаточно "редкой"(при больших a она «близка» к последовательности простых чисел). Поэтому интересно рассмотреть аналог проблемы делителей Титчмарша с полупростыми числами подобного вида. В докладе будет представлена схема вывода асимптотической формулы для числа решений уравнения $p_1p_2^a - xy = 1$, где $p_1p_2^a \leqslant n$, $a \geqslant 2$ — натуральное число и простые числа p_1, p_2 удовлетворяют дополнительным условиям: $p_1 \in A_1$, $p_2 \in A_2$, где $A_1 = [1, n\exp(-\sqrt{\ln n})]$, $A_2 = [1, \exp(\frac{1}{a}\sqrt{\ln n})]$.

Доказывается, что, если

$$G(n) = \sum_{p_1 \in A_1} \sum_{\substack{p_2 \in A_2 \\ p_1p_2^a - xy = 1}} \sum_{x,y} 1$$

и

$$G_1(n) = \sum_{p_1 \in A_1} \sum_{\substack{p_2 \in A_2 \\ p_1p_2^a - xy = 1 \\ \{\frac{1}{2}(p_1p_2^a)^{\frac{1}{c}}\} < \frac{1}{2}}} \sum_{x,y} 1,$$

то справедлива формула:

$$G_1(n) = \frac{1}{2} G(n)(1 + O(Q^{-\eta})),$$

где

$$Q = \exp(\sqrt{\ln n})$$

и

$$G(n) = c_0 \mathrm{Li}(\frac{n}{Q}) \pi(Q^{\frac{1}{a}}) \ln n \ (1 + O(\frac{1}{\sqrt{\ln n}})),$$

$\eta > 0$ — абсолютная постоянная,

$$c_0 = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)d}.$$

Доказательство проводится методом тригонометрических сумм И. М. Виноградова.

Список цитированной литературы

1. Titchmarsh E. C. A divisor problem // Rend. Circ. Mat. Palermo, 1930. № 54, P. 414–429.

2. Линник Ю. В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1961. 208 с.

3. Виноградов А.И. О плотностной гипотезе для L-рядов Дирихле. //Изв. АН СССР, сер. Матем.,1965. Т. 29, № 4, С. 903–934

4. Bombieri E. On the large sieve. //Mathematica, 1965. № 12, P. 201–225.

5. Виноградов И. М. Некоторое общее свойство распределения простых чисел. // Мат. сб., 1940, № 7, С. 365–372.

6. Гриценко С. А. Тернарная проблема Гольдбаха и проблема Гольдбаха–Варинга с простыми числами, лежащими в промежутках специального вида // УМН, 1988. Т. 43., вып. 4 (262), С. 203–204.

7. Гриценко С. А. Три аддитивные задачи. // Изв. РАН. Сер. мат., Т. 56, № 6, 1992, С. 1198 - 1216.

8. A. Balog, K. J. Friedlander. A hybrid of theorems of Vinogradov and Piatetski-Shapiro // Pacific. J. Math. 156 (1992), P. 45-62.

9. Зинченко Н. А. Бинарная аддитивная задача с полупростыми числами специального вида. // Чебышевский сборник, 2005, Т. VI, вып. 2 (14), С. 145–162.

10. Линник Ю. В. О некоторых аддитивных задачах. // Мат. сб., 1960, Т. 51, вып.2, С. 129-154.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет
Получено 22.03.2015

УДК 511.3

Об одном следствии теоремы о распределении простых чисел в многочленах второй степени с целыми коэффициентами

И. И. Ильясов (Актобе, Казахстан)
ilyasov_isatay@mail.ru

Эйлер, Лежандр соответственно отметили, наряду с другими многочленами, что $x^2 - x + 41$ принимают простые значения для $x = 1, \ldots, 40$, $2x^2 + 29$ для $x = 0, 1, \ldots, 28$ [1]. Сколько простых в каждом из вышеуказанных многочленов остается неизвестным. И до нашего времени неизвестно способа установления числа простых для конкретного многочлена, кроме вычислительно-проверочных исследований, о чем свидетельствует высказывание В. Серпинского [2] "подсчитано, что для $x \leqslant 10000$ 842 простых вида $x^2 + 1$; для $x \leqslant 100000$ 6656 таких чисел, для $x \leqslant 180000$ их 11223. Высказано предположение, что для каждого натурального числа k существует бесконечно много простых чисел вида $x^2 + k$, где x — натуральное число" .

Однако, существование замечательных многочленов n-й степени от n переменных ($n \geqslant 2$) с рациональными коэффициентами, пробегающих весь натуральный ряд без повторения для целых точек первого квадранта, позволяет получить нетривиальные утверждения о числе простых в многочленах n-ой степени с целыми коэффициентами [6], [7]. Например, при $n = 2$, используя многочлен $f(x, y) = \frac{1}{2}\left((x+y)^2 - x - 3y + 2\right)$, обладающего вышеуказанным свойством, удалось доказать теорему:

Теорема 1. *[6]. Для любого натурального N существует многочлен второй степени с целыми коэффициентами со старшим коэффициентом равным двум, содержащий более N простых.*

В данной работе доказывается

Теорема 2 (основная). *Для любой возрастающей последовательности натуральных чисел $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ существует последовательность многочленов $f_1(y)$, $f_2(y)$, $\ldots$, $f_n(y)$, $\ldots$ второй степени с целыми коэффициентами со старшими коэффициентами равными двум, что $f_n(y)$ содержит более M_n простых, $n = 1, 2, \ldots$, причем, указанные многочлены не имеют общих значений для $y = 1, 2, \ldots$.*

Доказательство. Полностью опирается на теорему [6]: (приведем её формулировку)

Теорема 3. *При каждом натуральном $A > A'$ существует более $\frac{A}{5 \ln A}$ многочленов второй степени с целыми коэффициентами, старшие коэффициенты которых равны двум, каждый из которых содержит более $\frac{A}{2 \ln^{1+\varepsilon} A}$ простых. ($\varepsilon > 0$ постоянная).*

Доказательство основной теоремы. Пусть $N \geqslant 3$ — постоянная.

Первый шаг. Выберем $A_1 > A'$, так чтобы

$$\begin{cases} \frac{A_1}{5 \ln A_1} > A_0 + N \\ \frac{A_1}{2 \ln^{1+\varepsilon} A_1} > M_1, \end{cases} \quad (A_0 = A),$$

тогда по теореме 3 в интервале $1 \leqslant x \leqslant A_1$ более $\frac{A_1}{5\ln A_1}$ целых значений x, для каждого из которых многочлен от y_1 $f(x, 2y_1 - r)$, где $r = 0$ или $r = 1$, содержит более $\frac{A_1}{2\ln^{1+\varepsilon} A_1}$ простых. Так как число этих x-ов, попадающих в интервале $1 \leqslant x \leqslant A$ не более A, то в интервале $A_0 < x \leqslant A_1$ попадает более $\frac{A_1}{5\ln A_1} - A > N$ рассматриваемых x. А для таких x $f(x, 2y_1 - r)$, где $r = 0$ или $r = 1$, содержит более

$$\frac{A_1}{2\ln^{1+\varepsilon} A_1} > M_1$$

простых. В качестве первого многочлена возьмём $f(x_1, 2y_1 - r)$, где $r = 0$ или $r = 1$, где x_1 — одно из вышеуказанных x-ов.

Второй шаг. Теперь выберем $A_2 > A'$, так, чтобы

$$\begin{cases} \frac{A_2}{5\ln A_2} > A_1 + N \\ \frac{A_2}{2\ln^{1+\varepsilon} A_2} > M_2. \end{cases}$$

Повторяя предыдущие рассуждения при x_2 целом $A_1 < x \leqslant A_2$ находим многочлен от y_1 $f(x_2, 2y_1 - r)$, где $r = 0$ или $r = 1$, содержащий более

$$\frac{A_2}{2\ln^{1+\varepsilon} A_2} > M_2$$

простых.

n-ый шаг. Продолжая эти рассуждения для целого x_n, $A_{n-1} < x_n \leqslant A_n$ находим многочлен от y_1 $f(x_n, 2y_1 - r)$, где $r = 0$ или $r = 1$, содержащий более

$$\frac{A_n}{2\ln^{1+\varepsilon} A_n} > M_n$$

простых.

Полученная последовательность многочленов от y_1 попарно не имеют общих значений, что следует из свойства многочлена $f(x, y)$. Обозначая $f_n(y_1) = f(x_n, 2y_1 - r)$, где $r = 0$ или $r = 1$, получаем утверждение теоремы.

В связи с рассмотренными вопросами отметим также, что Чебышев доказал теорему:

$P(x)|x \to \infty$ при $x \to \infty$, где $P(x)$ — наибольший простой делитель $\prod\limits_{n \leqslant x}(n^2+1)$ [3],

и результат Пойа:

если $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b^2 - 4ac \neq 0$, то $\prod(ax^2 + bx + c) \to \infty$ при $x \to \infty$, где $\prod(m)$ — наибольший простой делитель m,

здесь же содержится доказательство предположения Гаусса: $\prod(x^2 + c^2) \to \infty$ при $x \to \infty$, где x — натуральные, c — фиксированное целое отличное от нуля [4], [5].

Список цитированной литературы

1. L. E. Dickson History of the theory of numbers volume I. New York. 1952. p. 432.

2. В. Серпинский Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. М.: Гос. изд. Физ-мат литературы. 1963. 33 с.

3. К. Хооли Применения методов решета в теории чисел. М.: Наука. 1987. С. 32–52.

4. G. Polya Zur arithmetischen Untersuchungen des Polynome // Math. Z. 1918. p. 143–148.

5. Н. И. Фельдман Приближения алгебраических чисел. М.: Изд. Московского университета. 1981. стр. 86–87.

6. И. И. Ильясов К распределению простых чисел в многочленах второй степени с целыми коэффициентами // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 1. С. 72–76.

7. И. И. Ильясов К распределению простых чисел в многочленах третьей степени с целыми коэффициентами //Алгебра и теория чисел: Современные проблемы и приложения. Материалы XII международный конференции, посвященной 80-летию профессора Виктора Николаевича Латышева. Тула. 2014. С. 231–233.

Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова
Получено 14.04.2015

УДК 511.325

Распределение дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала

С. Н. Исматов (Душанбе, Таджикистан)
saifullo@mail.ru

И. М. Виноградов с помощью своего метода оценок тригонометрических сумм с простыми числами, основу которого составляют метод сглаживания двойных сумм, теорема о среднем для сумм Г. Вейля и решето Виноградова, решил проблему распределения дробных частей многочлена $f(p) = \alpha_n p^n + \ldots + \alpha_1 p$ при условии, что p принимает значения последовательных простых чисел, не превосходящих P [1]. В проблеме распределения дробных частей $\{\alpha p\}$ он [2, 3] получил намного более точную оценку остаточного члена в асимптотической формуле, чем в общем случае. Он доказал: *пусть* α *– вещественное,* $\alpha = a/q + \theta/q^2$, $(a,q) = 1$, $0 < q < N$, *тогда при любом* σ *с условием* $0 < \sigma \leqslant 1$ *число* $F_\alpha(x,\sigma)$ *значений* $\{\alpha p\}$, $p \leqslant x$ *подчинённых условию* $\{\alpha p\} < \sigma$, *выразится формулой*

$$F_\alpha(x,\sigma) = \sigma\pi(x) + R_\sigma(x), \quad R_\sigma(x) \ll x^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{x}} + x^{-0,2}\right).$$

В частности, если α – иррациональное число с ограниченными неполными частными, то можно выбрать q таким, чтобы оно было порядка $\sqrt{x}$. В этом случае в проблеме распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из интервала малой длины, то есть для $F_\alpha(x,y,\sigma)$ – количество членов последовательности $\{\alpha p\}$ таких, что $x - y < p \leq x$ и $\{\alpha p\} < \sigma$, имея в виду, что $F_\alpha(x,y,\sigma) = F_\alpha(x,\sigma) - F_\alpha(x-y,\sigma)$, справедлива асимптотическая формула

$$F_\alpha(x,y,\sigma) = \sigma(\pi(x) - \pi(x-y)) + O\left(x^{4/5+\varepsilon}\right),$$

являющаяся нетривиальной при $y \gg x^{\frac{4}{5}+\varepsilon}$.

Полученная в работах [4, 5] нетривиальная оценка $V_K(x,y)$ – сумм коротких линейных тригонометрических сумм с простыми числами, позволила доказать теорему о законе распределения дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала $(x-y,\, x]$ для более коротких интервалов и для всех иррациональных α и рациональных α с большими знаменателями.

Теорема 1. *Пусть* x, y *и* q *– натуральные числа,* $A \geqslant 3$ *– абсолютная постоянная,* $\mathscr{L} = \ln xq$, α *– вещественное и*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a,q) = 1, \quad |\theta| \leqslant 1, \quad \mathscr{L}^{4A+20} \leqslant q \leqslant \frac{y^2}{x}\mathscr{L}^{-4A-20}.$$

Тогда для $F_\alpha(x,y,\sigma)$ *– количество членов последовательности* $\{\alpha p\}$ *таких, что* $x - y < p \leq x$ *и* $\{\alpha p\} < \sigma$, *при* $y \gg x^{\frac{2}{3}}\mathscr{L}^{4A+16}$ *справедлива следующая асимптотическая формула*

$$F_\alpha(x,y,\sigma) = \sigma(\pi(x) - \pi(x-y)) + O\left(\frac{y}{\mathscr{L}^A}\right).$$

Список цитированной литературы

1. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — М.: Наука, 1980.

2. Виноградов И. М., Карацуба А. А. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Труды МИАН СССР. 1984. Т. 168. С. 4–30.

3. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1976, 120 с.

4. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З., Исматов С.Н. Оценка сумм коротких тригонометрических сумм с простыми числами. — ДАН РТ, 2013, Т. 56, № 12, С. 937–945.

5. Исматов С.Н. О распределении дробных частей $\{\alpha p\}$, аргумент которого пробегает простые числа из короткого интервала. — ДАН РТ, 2014, Т. 57, № 1, С. 937–945.

Институт математики Академии наук Республики Таджикистан
Получено 14.04.2015

УДК 511.3

К задаче аналитического продолжения L-функций Дирихле числовых полей

В. Н. Кузнецов, Т. А. Кузнецова, О. А. Матвеева (Саратов)
kuznetsovvn@info.sgu.ru, kuznetsovata@info.sgu.ru, olga.matveeva.0@gmail.com

В докладе наряду с известными подходами Гекке [1] и Тейта [2], которые являются обобщением подхода Римана [3] в задаче аналитического продолжения L-функций Дирихле числовых полей, рассматриваются иные подходы, в основе которых лежит изучение взаимосвязи аналитических свойств рядов Дирихле и граничных свойств соответствующих степенных рядов, а также возможность применения принципа симметрии Шварца в случае L-функций Дирихле.

Список цитированной литературы

1. Lang S. Algebraic Number Theory. New York: Columbia University, 1970.

2. Ланг С. Алгебраические числа. М.: Мир. 1966.

3. Riemann B. Gesammelte Mathematische Werke. Leipzig: B. G. Teubner, 1876.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
Получено 14.04.2015

УДК 511.3

Об одном численном алгоритме определения нулей L-функций числовых полей

В. А. Матвеев (Саратов)
vladimir.matweev@gmail.com

Пусть $\mathbb{K}$ — числовое поле, $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = n$, χ — характер Дирихле поля $\mathbb{K}$, заданный на полугруппе идеалов кольца целых элементов этого поля.

Рассмотрим L-функцию Дирихле поля $\mathbb{K}$:

$$L(s, \chi, \mathbb{K}) = \prod_{\wp} \left(1 - \frac{\chi(\wp)}{N(\wp)^s}\right)^{-1} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}, \quad s = \sigma + it. \tag{1}$$

В данном докладе предлагается алгоритм определения нулей L-функции Дирихле (1), в основе которого лежит приближение в критической полосе L-функции (1) полиномами Дирихле.

Автором доказан следующий результат.

Теорема 1. *Существует последовательность полиномов Дирихле $Q_{n^m}(s)$, где m — некоторое натуральное число, такая, что в любом прямоугольнике $D_T : 0 < \sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1 < 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T$, имеет место оценка*

$$||L(s, \chi, k) - Q_{n^m}(s)|| \leqslant \frac{C}{\rho}, \quad s = \sigma + it,$$

где $\rho > 1$, а константа C имеет вид $C = me^T T^{m-1}$.

Теоретические рассуждения, проведенные на основании теоремы 1, позволяют утверждать, что при $n \geqslant \frac{T}{\ln \rho}$ нули полиномов $Q_{n^m}(s)$ в прямоугольнике D_T будут совпадать с нулями L-функции (1).

Результаты численного эксперимента показали, что при небольших значениях величины $N(\mathfrak{m})$, где $\mathfrak{m}$ — модуль характера χ, и при условии, что степенной ряд $g(z)$, отвечающий ряду Дирихле (1), определяет функцию, имеющую радиальные производные любого порядка в точке $z = -1$, при соотношении $n \geqslant 4T$ в качестве полиномов Дирихле $Q_{n^m}(s)$ можно брать полиномы Дирихле, определяемые алгебраическими полиномами $P_{n^m}(s)$, которые являются частичными суммами порядка n^m разложения функции $g(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ в ряд по полиномама Чебышева. При этом $m = [L : \mathbb{Q}]$, где L — такое абелево расширение Галуа поля $\mathbb{K}$, что характер χ согласуется с одним из характеров группы Галуа этого расширения.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
Получено 14.04.2015

УДК 511.3

Об одном подходе получения плотностных теорем для нулей L-функций Дирихле числовых полей

В. А. Матвеев, О. А. Матвеева (Саратов)
vladimir.matweev@gmail.com, olga.matveeva.0@gmail.com

Пусть $\mathbb{K}$ — числовое поле, $[\mathbb{K}:\mathbb{Q}] = n$, χ — характер Дирихле, заданный на полугруппе идеалов кольца целых элементов поля $\mathbb{K}$, L — абелево расширение Галуа поля $\mathbb{K}$, для которого характер χ согласован с некоторым характером группы Галуа этого расширения.

Рассмотрим L-функцию Дирихле поля $\mathbb{K}$.

$$L(s,\chi,\mathbb{K}) = \prod_{\wp}\left(1 - \frac{\chi(\wp)}{N(\wp)^s}\right)^{-1} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \tag{1}$$

где

$$a_n = \sum_{\substack{\mathfrak{a},\\ N(\mathfrak{a})=n}} \chi(\mathfrak{a}), \quad s = \sigma + it.$$

Обозначим через $N(T)$ число нулей (с учетом их кратности) L-функции (1), лежащих в области $D_T : 0 < \sigma < 1,\ 0 < t < T$; через $N_{\sigma_0}(T)$, где $\frac{1}{2} < \sigma_0 < 1$, — число нулей, лежащих в области $\sigma_0 < \sigma < 1,\ 0 < t < T$. В докладе обсуждаются вопросы, связанные с асимптотическими оценками величин $N(T)$ и $N_{\sigma_0}(T)$.

Известно [1], что нули L-функции являются частью нулей $Z_L(s)$ — дзета-функции Дедекинда поля L. Обозначим через L_a максимальное абелево подрасширение расширения $\mathbb{Q} \subset L$. Показано, что нули $Z_L(s)$, лежащие в области D_T совпадают с нулями $Z_{L_a}(s)$, но их кратность увеличивается в l раз, где $l = [L : L_a]$.

Этот факт позволяет получить оценку вида

$$N_{\sigma_0}(T) = O(T). \tag{2}$$

В случае норменного характера χ, то есть такого характера поля $\mathbb{K}$, для которого существует такой числовой характер χ_1, что для любого простого идеала $\wp$

$$\chi(\wp) = \chi_1(N(\wp)),$$

доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Главный член в асимптотической формуле для $N(T)$ имеет следующий вид: $\frac{nT\ln T}{2\pi}$, где $n = [\mathbb{K}:\mathbb{Q}]$, т.е.*

$$N(T) \sim \frac{nT\ln T}{2\pi}.$$

Предполагается, что такой же результат имеет место для любого характера χ.

Список цитированной литературы

1. Хейльбронн Х. ζ-функции и L-функции// Алгебраическая теория чисел. Под редакцией Дж. Касселса и А. Фрёлиха. М.: Мир, 1969. С. 310–347.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
Получено 14.04.2015

UDK 511.335

Modification of the universality inequality

Laimonas Meška (Vilnius, Lithuania)
laimonas.meska@mif.vu.lt

Let $s = \sigma + it$ be a complex variable, and $\zeta(s)$ denote the Riemmann zeta-function. In [5] S. M. Voronin proved the universality of $\zeta(s)$ on the approximation of analytic functions by shifts $\zeta(s+i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Let $D = \{\mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$, $\mathcal{K}$ denote the class of compact subsets of D with connected complements, and let $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, be the class of continuous non-vanishing functions on K which are analytic in the interior of K. Moreover, we denote by *meas* A the Lebesgue measure of a measurable set $A \subset \mathbb{R}$. Then, we have the following theorem, see, for example, [2].

Theorem 1. *Suppose that $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas \left\{ \tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

The inequality of the theorem is called the universality inequality, and shows that the set of shifts $\zeta(s+i\tau)$ approximating a given analytic function has a positive lower density.

A problem arises to replace $\liminf\limits_{T\to\infty}$ in Theorem 1 by $\lim\limits_{T\to\infty}$. It turns out that this can be done for "almost all $\varepsilon > 0$". More precisely, we have the statement [3].

Theorem 2. *Suppose that $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$. Then the limit*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas \left\{ \tau \in [0;T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

Theorem 2 admits a generalization for composite functions $F(\zeta(s))$. Let $H(G)$ denote the space of analytic functions on G, and $S = \{g \in H(D) : g(s) \neq 0 \, or \, g(s) \equiv 0\}$. Moreover, let $H(K)$, $K \in \mathcal{K}$, be the class of continuous functions on K which are analytic in the interior of K. Then, for example, we have

Theorem 3. *Suppose that $F : H(D) \to H(D)$ is a continuous operator such that, for every open set $G \subset H(D)$, the set $F^{-1}G \cap S$ is non-empty. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Then the limit*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas \left\{ \tau \in [0;T] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau)) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

Theorems 1-3 are of the so-called continuous type, τ in the shifts $\zeta(s+i\tau)$ can take arbitrary real values. Also, a discrete version of the universality for the function $\zeta(s)$ is known. In this case, analytic functions are approximated by shifts $\zeta(s+ikh)$ with a fixed $h>0$ and non-negative integers k. A discrete analogue of Theorem 1 is of the form [1].

Theorem 4. *Suppose that $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$, and that $h > 0$ is an arbitrary fixed number. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \le k \le N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+ikh) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Analogically to Theorem 2, we have [4]

Theorem 5. *Suppose that $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$, and that $h > 0$ is an arbitrary fixed number. Then the limit*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \le k \le N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+ikh) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

A discrete universality theorem completely analogical to Theorem 3 is also true. We state some other universality theorems for composite functions from [4]

Theorem 6. *Suppose that $F : H(D) \to H(D)$ is a continuous operator such that, for every polynomial $p = p(s)$, the set $F^{-1}\{p\} \cap S$ is non-empty, and that $h > 0$ is an arbitrary fixed number. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Then the limit*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \le k \le N : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+ikh)) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.

The non-vanishing of polynomials in a bounded region can be controlled by their constant terms. Therefore, it is more convenient in place of D to consider, for $V > 0$, the rectangle $D_V = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1, |t| < V\}$. Let $S_V = \{g \in H(D_V) : g(s) \neq 0 \textit{ or } g(s) \equiv 0\}$.

Theorem 7. *Suppose that $K \in \mathcal{K}$, $f(s) \in H(K)$, $V > 0$ are such that $K \subset D_V$, and that $h > 0$ is an arbitrary fixed number. If $F : H(D_V) \to H(D_V)$ is a continuous operator such that, for every polynomial $p = p(s)$, the set $(F^{-1}\{p\}) \cap S_V$ is non-empty, then the assertion of Theorem 6 is true.*

We take, for example, $F(g) = c_1 g' + ... + c_r g^{(r)}$, $g \in H(D_V)$, $c_1, ...c_r \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Now, for $F : H(D) \to H(D)$ and $a_1, ..., a_r \in \mathbb{C}$, let

$$H_{F;a_1,...,a_r}(D) = \left\{ g \in H(D) : \ (g(s) - a_j)^{-1} \in H(D), \ j = 1, ..., r \right\} \cup \left\{ F(0) \right\}.$$

Theorem 8. *Suppose that $F : H(D) \to H(D)$ is a continuous operator such that $F(S) \supset H_{F;a_1,\dots,a_r}(D)$, and that $h > 0$ is an arbitrary fixed number. For $r = 1$, let $K \in \mathcal{K}$, and $f(s) \in H(K)$ and $f(s) \neq a_1$ on K. For $r \geq 2$, let K be an arbitrary compact subset of D, and $f(s) \in H_{F;a_1,\dots,a_r}(D)$. Then the assertion of Theorem 6 is true.*

For example, we can take $F(g) = \cos g$ and $a_1 = 1$, $a_2 = -1$.
Similar results are also valid for the Hurwitz zeta-function.

REFERENCES

1. Bagchi B. The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series, Ph. D. Thesis, Indian Statistical Institute, Calcutta, 1981.

2. Laurinčikas A. Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function, Kluwer, Dordrecht, 1996.

3. Laurinčikas A., Meška L. Improvement of the universality inequality // Math. Notes. 2014. Vol. 96, No 6. P. 971–978.

4. Meška L. A modification of the universality inequality // Šiauliai Math. Semin. 2014. Vol. 9(17) p. 71–81.

5. Voronin S. M. Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function // Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. matem. 1975. Vol. 39, No 3. P. 475–486 (in Russian).

Vilniaus universitetas
Received 14.04.2015

УДК 511.335

Распределение значений характеров Дирихле по модулю свободных от кубов в последовательности сдвинутых простых чисел

Ш. Х. Мирзорахимов (Душанбе, Таджикистан)
smirzorakhimov@mail.ru

Теорема 1. *Пусть q – достаточно большое натуральное число свободных от кубов, χ_q – примитивный характер по модулю q, $(l, q) = 1$, ε — положительное сколь угодно малое постоянное число, $x \geqslant q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. Тогда имеем*

$$T(\chi_q) = \sum_{p \leqslant x} \chi_q(p - l) \ll x \exp\left(-\sqrt{\ln q}\right).$$

Полученная оценка для модулей свободных от кубов является уточнением результатов работ Дж.Б.Фридландера, К.Гонга, И.Е.Шпарлинского [1], и З.Х. Рахмонова [2], в которых получены нетривиальные оценки соответственно при $x \geqslant q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ и $x \geqslant q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$.

Список цитированной литературы

1. Дж. Б. Фридландера, К. Гонг, И. Е. Шпарлинский Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах // Мат. заметки. 2010. Т. 88, вып. 4. С. 605 – 619.

2. Рахмонов З. Х. Суммы характеров с простыми числами // Чебышевский сборник. 2014. Т. 15, вып. 2. С. 73 – 100.

Институт математики Академии наук Республики Таджикистан
Получено 15.04.2015

УДК 511.524

Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля пятой степени

Н. Н. Назрублоев, А. З. Азамов (Душанбе, Таджикистан)
nasrullo_86@bk.ru, asliddinkhon@mail.ru

Г. Вейль построил метод, с помощью которого, им впервые была получена нетривиальная оценка тригонометрических сумм вида

$$T(\alpha; x) = \sum_{n \leqslant x} e\left(\alpha n^m\right),$$

которые в его честь И. М. Виноградов [1] назвал суммами Вейля. Хуа Ло–кен [2] для средних значений сумм Вейля доказал оценку

$$\int_0^1 |T(\alpha; x)|^{2^k} \ll x^{2^k - k + \varepsilon}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m.$$

Доклад посвящен обобщению оценки Хуа Ло–кена для коротких тригонометрических сумм Вейля пятой степени вида

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y<m<x} e(\alpha m^5),$$

и оценке таких сумм в множестве точек второго класса.

Теорема 1. *Пусть x и y — натуральные числа, $\sqrt{x} < y \leq 0,01x$, тогда имеет место оценка*

$$\int_0^1 |T(\alpha; x, y)|^{2^k} d\alpha \ll y^{2^k-k+\varepsilon}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant 5.$$

Теорема 2. *Пусть $x \geqslant x_0 > 0$, $y_0 < y \leqslant 0,01x$, α – вещественное число,*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}, \qquad (a, q) = 1.$$

Тогда справедлива оценка

$$|T(\alpha; x, y)| \ll y^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y^4} + \frac{q}{y^5}\right)^{\frac{1}{16}}.$$

Список цитированной литературы

1. Виноградов И. М. Избранные труды — М.: Изд-во АН СССР. 1952.

2. Р. Вон Метод Харди–Литтлвуда —М.: Мир, 1985, 184 с.

Институт математики имени А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан
Получено 15.04.2015

УДК 511.512

Эргодическая теорема для потоков целых точек на изотропных гиперболоидах

У. М. Пачев (Нальчик)
urusbi@rambler.ru

Мы рассматриваем эргодическую теорему с остаточным членом для потоков целых точек на изотропных гиперболоидах $f(x_1, x_2, x_3) = m$, где $f(x_1, x_2, x_3)$– изотропная тернарная квадратичная форма (по поводу используемых эргодических понятий см. напр. [1,2]). Правда, остаток в эргодической теореме зависит от неэлементарной функции

$$l(m) = -\frac{\log L(1, x)}{\log |m|},$$

где $L(s,\chi) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(k)}{k^s}$, $Res > 1$, есть L–функция Дирихле, соответствующая вещественному характеру Дирихле $\chi(k) = (-\frac{m}{k})$, при этом $(-\frac{m}{k})$–символ Кронекера. Как известно, (см. [3]) для изотропной неопределенной тернарной квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3)$ выполняется соотношение

$$\delta f(x_1,x_2,x_3) = f_0(\sum_{i=1}^{3} c_{1i}x_i, \sum_{i=1}^{3} c_{2i}x_i, \sum_{i=1}^{3} c_{3i}x_i),$$

где δ – бесквадратное число; c_{ij} – целое число, при этом обозначим $det(c_{ij}) = w$, $w \geq 1$. Оно позволяет свести построение потока целых точек на изотропном гиперболоиде $f(x_1,x_2,x_3) = m$ общего вида к соответствующему потоку целых точек на простейшем гиперболоиде $f_0 = \widetilde{x}_1\widetilde{x}_3 - \widetilde{x}_2^2 = \delta m$ посредством отображения

$$W_t : (x_1, x_2, x_3) \to (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3),$$

где $\widetilde{x}_i = c_{i1}^{(t)}x_1 + c_{2i}^{(t)}x_2 + c_{i3}^{(t)}x_3$; $t = 1, ..., h$, при этом h – число классов в роде G_f формы f.

Тем самым поток $\aleph_s(\delta m; q; u)$ на простейшем гиперболоиде (его построение основано на преобразованиях подобия вектор-матриц второго порядка) однозначно индуцирует поток $\aleph_s(m, G_f, q, u)$ на роде G_f, состоящий из цепочек вида

$$(x^{(1)}, f_{t_1}) \to (x^{(2)}, f_{t_2}) \to \cdots \to (x^{(s)}, f_{t_s}),$$

где $f_{t_j}(x^{(j)}) = m$, $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, x_3^{(j)})$.

Для так построенного потока $\aleph_s(m, G_f, q, u)$ справедлива

Теорема 1 (эргодическая). *Пусть $w \geq 1$ – нечетное число и G_f – род примитивной изотропной тернарной квадратичной формы f.*

Пусть $g > 0$ – целое число; b_1, b_2, b_3 – целые числа, для которых

$$f(b_1, b_2, b_3) \equiv m(mod 8\frac{w}{\delta}q), \ \text{НОД}(b_1, b_2, b_3, 2) = 1.$$

Пусть $\Lambda_{f,m}$ — f-выпуклая область на поверхности гиперболоида

$$f(x_1, x_2, x_3) = m$$

с f-гиперболическим телесным углом

$$\lambda = \lambda(\Lambda_{f,m}) > 0.$$

Тогда цепочки потока

$$(x^{(k,1)}, f_{t_1^{(k)}}) \to \cdots \to (x^{(k,s)}, f_{t_s^{(k)}}) \ (k = 1, ..., r')$$

длины $s >> |\delta m|$ можно разбить на две категории:

(а) "хорошие" цепочки, обладающие свойством эргодичности: для таких k

$$r_k = \sharp\Big\{j/j = 1, ..., s,\ f_{t_j^{(k)}} = f,\ x^{(k,j)} \in \Lambda_{f,m},\ x^{(k,j)} \equiv (b_1, b_2, b_3)(modg)\Big\} =$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} \cdot \frac{1}{\rho(g; \delta f, m)} s(1 + O(\gamma(m)));$$

(б) "плохие" цепочки, которых мало с общим количеством

$$<< \frac{1}{\log^l |m|} \cdot r',\ l \geq 2,$$

где $\rho(g, \delta f, \delta m)$ *– число решений сравнения* $\delta f(x_1, x_2, x_3) \equiv \delta m(modg)$*;* λ_0 *– полный* f *– телесный гиперболический угол;*

$$\gamma(m) = \frac{g\sqrt{\log(g+1)}}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{\frac{\log \eta(m)}{\eta(m)}},$$

$\eta(m) \to \infty$ *при* $|m| \to \infty$*;*

$$\eta(m) = o\Big(\frac{\log |m|}{\log \log |m|}\Big).$$

Эта теорема обобщает и уточняет результаты работ [1,2]; а также уточняет результаты самого автора [4,5].

Из нее в свою очередь могут быть выведены соответствующие теоремы перемешивания и равномерного распределения целых точек на изотропных гиперболоидах.

Список цитированной литературы

1. Линник Ю. В. Эргодические свойства алгебраических полей. Л. 1967.

2. Малышев А. В. О применении дискретного эргодического метода в аналитической арифметике неопределенных тернарных квадратичных форм // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1980. Т. 93. С. 5–24.

3. Касселс Дж. Рациональные квадратичные формы. М.: Мир. 1982.

4. Пачев У. М. Эргодические теоремы и теоремы перемешивания для потоков целых точек на некоторых изотропных гиперболоидах // в кН. "Актуальные проблемы теории чисел". МГУ. 2002. С. 133–151.

5. Пачев У. М. Представление целых чисел изотропными тернарными квадратичными формами // Изв. РАН. 2006. Сер. мат. Т. 70. №3. С. 167–184.

Кабардино-Балкарский госуниверситет им. Бербекова
Получено 20.04.2015

УДК 511.35

Применение метода сглаживания для получения асимптотических формул для числа целых точек в областях

Е. В. Подсыпанин (Санкт-Петербург)
podsypanin@mail.ru

В работе дается простой способ для получения нетривиальных оценок остаточного члена для числа целых точек в областях.

Известный метод сглаживания функций для улучшения сходимости рядов Фурье этих функций допускает простое многомерное обобщение (см., например, [1]). В частности, этот метод позволяет выводить асимптотические формулы для числа целых точек в многомерных областях. Идею этого метода рассмотрим на примере так называемой "проблемы круга Гаусса" .

Пусть $R(a)$ обозначает число точек $(u;v)$ целочисленной решётки, лежащих в круге $u^2+v^2 \leqslant a^2$. Известно, что $R(a) = \pi a^2 + O(a^\alpha)$, при $a \to +\infty$. Гаусс вывел эту формулу с показателем $\alpha = 1$. В. Серпинский [2], опираясь на формулы своего научного руководителя Г. Ф. Вороного [3] в проблеме делителей, довольно сложно доказал эту формулу с показателем $\alpha = \frac{2}{3}$. Хаксли [4] доказал в 2000 г., что можно взять $\alpha = \frac{131}{208}$. С другой стороны, известно, что $\alpha > \frac{1}{2}$.

Проблема круга состоит в нахождении истинного порядка величины

$$R(a) - \pi a^2.$$

Теорема 1. *(В. Серпинский). В данных обозначениях справедлива формула*

$$R(a) = \pi a^2 + O\left(a^{\frac{2}{3}}\right), \text{ при } a \to +\infty.$$

Мы дадим простое доказательство теоремы В. Серпинского, используя рассматриваемый метод.

С помощью разложения характеристической функции $\chi_a(x;y)$ для круга радиуса a с центром в начале координат в двукратный ряд Фурье и, последующего суммирования, получим формулу Вороного

$$\sum_{\nu \leqslant a^2}^{*} r_2(\nu) = R^*(a) = \pi a^2 + a \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{r_2(\nu)}{\sqrt{\nu}} J_1\left(2\pi a\sqrt{\nu}\right),$$

где $r_2(\nu)$ — число представлений целого числа ν в виде суммы квадратов целых чисел $\nu = n^2 + m^2$, а звёздочка в символах суммирования и $R^*(a)$ означает, что в сумме по ν слагаемое, соответствующее $\nu = a^2$ берётся с коэффициентом $0,5$. Полученное тождество впервые было получено Г. Ф. Вороным, с помощью формулы обращения тета-ряда и строго доказано Ландау без использования свойств кратных рядов Фурье. Здесь $J_1(t)$ — функция Бесселя первого порядка.

Осуществим сглаживание функции $\chi_a(x;y)$ с помощью использования свёртки. Выберем число $\delta > 0$ и произведем свертку $\chi_\delta(x;y) * \chi_a(x;y)$. Тогда получим неравенство

$$\sigma^{(-)} \leqslant R(a) \leqslant \sigma^{(+)},$$

где

$$\sigma^{(\pm)} = \pi(a \pm \delta)^2 + \frac{a \pm \delta}{\pi\delta} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{r_2(\nu)}{\nu} J_1\left(2\pi(a \pm \delta)\sqrt{\nu}\right) J_1\left(2\pi\delta\sqrt{\nu}\right).$$

Используем известные оценки сверху значений функции Бесселя. Во-первых, при малых положительных значениях аргумента $t > 0$ справедливо неравенство $J_1(t) \ll t$, а при больших положительных значениях $t > 0$ справедливо неравенство $J_1(t) \ll t^{-\frac{1}{2}}$. Отсюда,

$$\sigma^{(+)} = \pi a^2 + O\left(a\delta + \frac{\sqrt{a}}{\delta} \sum_{\nu \leqslant \delta^{-2}} \frac{r_2(\nu)\delta}{\nu^{\frac{3}{4}}} + \frac{\sqrt{a}}{\delta} \sum_{\nu > \delta^{-2}} \frac{r_2(\nu)}{\sqrt{\delta}\nu^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Избавляясь от множителя $r_2(\nu)$ частным суммированием Абеля и пользуясь оценками

$$\sum_{\nu \leqslant n} r_2(\nu) \ll n, \quad \sum_{\nu \leqslant \delta^{-2}} \frac{1}{\nu^{\frac{3}{4}}} \ll \delta^{-\frac{1}{2}}, \quad \sum_{\nu > \delta^{-2}} \frac{2}{\nu^{\frac{3}{2}}} \ll \delta$$

получим $\sigma^{(+)} = \pi a^2 + O\left(a\delta + \sqrt{\frac{a}{\delta}}\right)$.

Полагая теперь $\delta = a^{\frac{1}{3}}$, получим, что $\sigma^{(+)} = \pi a^2 + O\left(a^{\frac{2}{3}}\right)$.

Аналогично доказывается, что $\sigma^{(-)} = \pi a^2 + O\left(a^{\frac{2}{3}}\right)$.

Откуда и следует формула В. Серпинского.

Тем самым мы видим, что Г. Ф. Вороной был очень близок к настоящему доказательству.

Если рассматривать круги радиуса a со сдвинутым центром, то легко доказать, что, в среднем, справедлива асимптотическая формула с не улучшаемым остатком $\alpha = \frac{1}{2}$.

Этот метод применим к проблеме шара (трехмерный аналог проблемы круга) и многим другим аналогичным задачам теории чисел.

Список цитированной литературы

1. Подсыпанин Е. В. Количество целых точек в эллиптической области // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1979. Т. 82. С. 100–102.

2. Sierpinskii W. Sur on probléme du calcul des fonctions asymptotiques // Prace mat.-fiz. 1906. Vol. 17. P. 77–118.

3. Voronoi G. Sur on probléme du calcul des fonctions asymptotiques // J. für die riene und angew. Math. 1903, Vol. 126. P. 241–282.

4. Huxley M. N. Integer points, exponential sums and the Riemann zeta function // Number theory for the millennium, 2000, Vol. II. P. 275–290.

Санкт-Петербургский политехнический университет.
Получено 14.04.2015

УДК 511.325

Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля в множестве точек первого класса

А. О. Рахимов, Н. Н. Назрублоев (Душанбе, Таджикистан)
alisher.1987@rambler.ru, nasrullo_86@bk.ru

Р. Вон [1], изучая суммы Г.Вейля вида

$$T(\alpha, x) = \sum_{m \leqslant x} e\left(\alpha m^n\right), \quad \alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad q \leqslant \tau, \quad (a, q) = 1, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau},$$

в множестве точек первого класса, методом Ван дер Корпута доказал:

$$T(\alpha, x) = \frac{S(a,q)}{q} \int_0^x e\left(\lambda t^n\right) dt + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\left(1 + x^n|\lambda|\right)^{\frac{1}{2}}\right), \quad S(a,q) = S_0(a,q),$$

а при выполнении условия

$$|\lambda| \leq \frac{1}{2nqx^{n-1}},$$

он также доказал:

$$T(\alpha, x) = \frac{x\ S(a,q)}{q} \int_0^1 e\left(\lambda t^n\right) dt + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

Короткие тригонометрические суммы Г.Вейля вида

$$T(\alpha, x, y) = \sum_{x-y<m\leq x} e(\alpha m^n), \qquad \sqrt{x} \leqslant y < \frac{x}{\ln x},$$

получающиеся из $T(\alpha, x)$ заменой условия $m \leqslant x$ на условие $x - y < m \leq x$, в множестве точек первого класса при $n = 2, 3, 4$ были исследованы в работах [2, 3].

Доклад посвящен упрощению доказательства и уточнение основной теоремы работы [3].

Теорема 1. *Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$ и $\lambda \geqslant 0$, тогда при $\{n\lambda x^{n-1}\} \leqslant \frac{1}{2q}$, имеет место формула*

$$T(\alpha, x, y) = \frac{S(a,q)}{q} T(\lambda; x, y) + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad S(a,q) = \sum_{m=1}^{q} e\left(\frac{am^n}{q}\right),$$

а при $\{n\lambda x^{n-1}\} > \frac{1}{2q}$ имеет место оценка

$$|T(\alpha, x, y)| \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min_{2 \leqslant k \leqslant n} (yq^{-\frac{1}{n}}, \lambda^{-\frac{1}{k}} x^{1-\frac{n}{k}} q^{-\frac{1}{n}}).$$

Следствие 1. *Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $|\lambda| \leqslant \frac{1}{2nqx^{n-1}}$, тогда имеет место соотношение*

$$T(\alpha, x, y) = \frac{y}{q} S(a,q) \int_{-0,5}^{0,5} e\left(\lambda \left(x - \frac{y}{2} + yu\right)^n\right) du + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

Следствие 2. *Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $\frac{1}{2nqx^{n-1}} < |\lambda| \leqslant \frac{1}{q\tau}$, тогда имеет место оценка*

$$T(\alpha, x, y) \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min_{2 \leqslant k \leqslant n} \left(yq^{-\frac{1}{n}}, x^{1-\frac{1}{k}} q^{\frac{1}{k}-\frac{1}{n}}\right).$$

Список цитированной литературы

1. Vaughan R. C. Some remarks in Weyl sums // Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 34. Topics in classical number theory, Budapest, 1981, North Holland (1984), pp. 1585 – 1602.

2. Рахмонов З. Х., Озодбекова Н. Б. Оценка коротких тригонометрических сумм Г. Вейля // Доклады Академии наук Республики Таджикистан, 2011, т. 54, № 4. С. 257 – 264.

3. Рахмонов З. Х. Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля // Ученые записки Орловского университета, серия естественные, технические и медицинские науки, 2013, № 6, часть 2. С. 194 – 203.

Институт математики Академии наук Республики Таджикистан
Получено 14.04.2015

UDK 519.14

On universality of the periodic zeta-function

D. Šiaučiūnas (Šiauliai, Lithuania)
siauciunas@fm.su.lt

In [1], S. M. Voronin proved a very interesting universality property of the Riemann zeta-function $\zeta(s)$, $s=\sigma+it$. Roughly speaking, the universality of $\zeta(s)$ means that a wide class of analytic functions in a certain region can be approximated by shifts $\zeta(s+i\tau)$, $\tau\in\mathbb{R}$. More precisely, the Voronin theorem is stated as follows. Let $0<r<\frac{1}{4}$, the function $f(s)$ be non-vanishing and continuous in the disc $|s|\le r$ and analytic in the interior of this disc. Then, for every $\varepsilon>0$, there exists a $\tau=\tau(\varepsilon)\in\mathbb{R}$ such that

$$\max_{|s|\le r}\left|\zeta\left(s+\tfrac{3}{4}+i\tau\right)-f(s)\right|<\varepsilon.$$

The above theorem can be rewritten in a more general form.

Let $D=\left\{s\in\mathbb{C}:\ \frac{1}{2}<\sigma<1\right\}$. Denote by $\mathcal{K}$ be the class of compact subsets of the strip D with connected complements, and by $H_0(K)$, $K\in\mathcal{K}$, the class of continuous non-vanishing functions on K which are analytic in the interior of K. Moreover, let meas$A$ stand for the Lebesgue measure of a measurable set $A\subset\mathbb{R}$. Suppose that $K\in\mathcal{K}$ and $f(s)\in H_0(K)$. Then, for every $\varepsilon>0$,

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau)-f(s)|<\varepsilon\right\}>0.$$

It is known that some other zeta-functions also are universal in the above sense. We briefly discuss the universality of the periodic zeta-function. Let $\mathfrak{a}=\{a_m: m\in\mathbb{N}\}$ be a periodic sequence of complex numbers with minimal period $k\in\mathbb{N}$. The periodic zeta-function $\zeta(s;\mathfrak{a})$ is defined, for $\sigma>1$, by the series

$$\zeta(s;\mathfrak{a})=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m^s}.$$

Denote by $\zeta(s;\alpha)$ the Hurwitz zeta-function with parameter α, $0<\alpha\le 1$. Then the periodicity of $\mathfrak{a}$ implies the equality

$$\zeta(s;\mathfrak{a})=\frac{1}{k^s}\sum_{l=1}^{k}a_l\zeta\left(s,\tfrac{l}{k}\right),$$

and this gives a meromorphic continuation for $\zeta(s;\mathfrak{a})$ to the whole complex plane.

The first universality result for the function $\zeta(s;\mathfrak{a})$ was obtained in [2]. Denote by by $H(K)$, $K\in\mathcal{K}$, the class of continuous functions on K which are analytic in the interior of K.

Theorem 1 ([2]). *Suppose that $k>2$, a_m is not a multiple of Dirichlet character modulo k, and $a_m=0$ for $(m,k)>1$. Let $K\in\mathcal{K}$ and $f(s)\in H(K)$. Then, for every $\varepsilon>0$,*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau;\mathfrak{a})-f(s)|<\varepsilon\right\}>0.$$

Clearly, if $a_m \equiv a$ or $a_m = a\chi(m)$, where χ is a Dirichlet character modulo k, then the assertion of Theorem 1 is true with $f(s) \in H_0(K)$.

In [3], the case of a multiplicative sequence $\mathfrak{a}$ was considered. We recall that $\mathfrak{a}$ is multiplicative if $a_1 = 1$ and $a_{mn} = a_m a_n$ for all $m, n \in \mathbb{N}$, $(m, n) = 1$.

Theorem 2 ([3]). *Suppose that the sequence $\mathfrak{a}$ is multiplicative, and that*

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{|a_{p^\alpha}|}{p^{\frac{\alpha}{2}}} \leq c < 1$$

holds for all prime p. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$. Then the assertion of Theorem 1 is true.

In general case, the function $\zeta(s; \mathfrak{a})$ is not universal in the sense of Theorem 2. This shows an example from [4]. Let $k = 2$, $a_1 = 1$ and $a_2 = 2^{\frac{3}{4}} + 1$. Then the function

$$\zeta(s; \mathfrak{a}) = \left(1 + 2^{\frac{3}{4} - s}\right) \zeta(s)$$

is not universal. However, the following restricted universality property was obtained in [4].

Theorem 3 ([4]). *Suppose that $\mathfrak{a}$ is any periodic sequence of complex numbers. Then there exists a positive constant $c_0 = c_0(a)$ such that, for every $K \in \mathcal{K}$ with $\max\limits_{s \in K} \mathrm{Im} s - \min\limits_{s \in K} \mathrm{Im} s \leq c_0$, $f(s) \in H_0(K)$ and $\varepsilon > 0$, the assertion of Theorem 1 is true.*

We consider the sequence $\mathfrak{a}$ with prime period k such that

$$a_k = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{m=1}^{k-1} a_m, \tag{1}$$

where $\varphi(k)$ is the Euler function. Moreover, for a Dirichlet character χ modulo k, let $b(k, \chi) = \sum_{m=1}^{k-1} a_m \chi(m)$.

Theorem 4. *Suppose that k is a prime number, and that the sequence $\mathfrak{a}$ satisfies equality* (1).

1° *Suppose that the sequence satisfies at least one of hypotheses:*

i) $a_m \equiv a$ for all $m \in \mathbb{N}$;

ii) a_m is a multiple of a Dirichlet character modulo k;

iii) $k = 2$;

iv) only one number $b(q, \chi) \neq 0$.

Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$. Then the assertion of Theorem 1 is true.

2° *Suppose that at least two numbers $b(q, \chi) \neq 0$. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H(K)$. Then the assertion of Theorem 1 is true.*

Proof of Theorem 4 is given in [5].

REFERENCES

1. Voronin S.M. Theorem on the "universality"of the Riemann zeta-function// Izv. Akad. Nauk SSSR. 1975. V. 39. P. 475–486 (in Russian) ≡ Math. USSR Izv. 1975. V. 9. P. 443–453.

2. Steuding J. Value-Distribution of L-functions. Lecture Notes in Math. Vol. 1877. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007.

3. Laurinčikas A., Šiaučiūnas D. Remarks on the universality of the periodic zeta-functions // Matem. Zametki. 2006. V. 80, No. 4. P. 561–568 (in Russian) ≡ Math. Notes. 2006. V. 80, No. 4. P. 532–538.

4. Kaczorowski J. Some remarks on the universality of periodic L-functions. New Directions in Value-Distribution Theory of Zeta and L-functions. R. Steuding and J. Steuding (Eds). Aachen: Shaker Verlag. 2009. P. 113–120.

5. Stoncelis M., Šiaučiūnas D. On the periodic zeta-function // Chebyshevskii Sb. 2014. V. 15, No. 4. P. 134–142.

Siauliai University
Received 09.04.2015

УДК 511.335

О распределении целочисленных случайных величин, связанных одним арифметическим неравенством

Г. В. Федоров [1] (Москва)
glebonyat@mail.ru

Пусть $p_k(n)$ обозначает количество неупорядоченных разбиений натурального числа n ровно на k натуральных слагаемых, или, что тоже самое, количество разбиений с наибольшим слагаемым k. Обозначим $p(n)$ общее количество разбиений натурального числа n на неупорядоченные натуральные слагаемые.

В 1941 г. П. Эрдёш и Д. Ленер [1] доказали, что "нормальное" число слагаемых k для разбиений числа n при $n \to \infty$ асимптотически равно величине $k \sim c^{-1} n^{1/2} \log n$, причем $c = \pi\sqrt{2/3}$. Более точно, они доказали, что при $k = c^{-1} n^{1/2} \log n + x n^{1/2}$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_k(n)}{p(n)} = \exp\left(-\frac{2}{c} e^{-\frac{cx}{2}}\right), \qquad \text{где} \quad P_k(n) = \sum_{m=1}^{k} p_k(n),$$

[1]Грант РФФИ № 13-01-12402 ОФИ-М2

причем правая часть последнего равенства представляет собой функцию распределения вероятностей. В 1946 г. П. Эрдёш [2] нашел, что максимальное значение $p_k(n)$ достигается при

$$k = k_{\mathrm{cr}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6n}{\pi^2}}\,(\ln n) + a\sqrt{n} + o(\sqrt{n}), \qquad \text{где} \quad a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{\pi^2}}\,\ln\frac{\pi^2}{6}. \tag{1}$$

Точки максимума функции $p_k(n)$ представляют интерес для критических состояний в модели бозе-конденсата В. П. Маслова [5]. Если параметр k отвечает числу частиц бозе-газа, а n (с точностью до некоторго множителя) — его энергии, то задача о разбиении принимает вид

$$\sum_{i\geqslant 0} k_i = k, \qquad \sum_{i\geqslant 0} ik_i = n,$$

где k_i — количество частиц на i-ом уровне энергии. Требуется определить, при каком значении $k = k_{\mathrm{cr}}(n)$, число решений системы (интерпретируемое в задаче с бозе-конденсатом в терминах энтропии Хартли) будет максимальной, то есть, наиболее вероятное распределение частиц при заданной энергии. В данном случае соотношение (1) дает ответ на этот вопрос.

Автором рассмотрено обобщение задачи, рассмотренной В. П. Масловым и В. Е. Назайкинским в серии работ [3, 4].

Пусть G — свободный моноид с образующими $\omega_1, \ldots, \omega_t$. Всякому целочисленному вектору $\overline{\nu} \in \mathbb{Z}_+^{kt}$ вида $\overline{\nu} = \big((\nu_{1,1}, \ldots, \nu_{t,1}), \ldots, (\nu_{1,k}, \ldots, \nu_{t,k})\big)$ сопоставляется целое число $n = n_{\theta_1\ldots\theta_k}$ с условием $0 \leqslant n \leqslant R_\beta$, где

$$\beta = \theta_1 \ldots \theta_k, \qquad \theta_j = \omega_1^{\nu_{1,j}} \ldots \omega_t^{\nu_{t,j}}, \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Далее, пусть $n_\beta = \sum\limits_{\beta = \theta_1\ldots\theta_k} n_{\theta_1\ldots\theta_k}$, и пусть $\Omega(\beta)$ — аналог арифметической функции $\Omega(m)$, равной числу простых делителей m, взятых с учётом кратности. Для некоторого целого $Q \geqslant 1$ положим $N_Q = \sum\limits_{\Omega(\beta)\leqslant Q} n_\beta$. Пусть $\mathcal{N}(M,Q)$ — количество всевозможных наборов $\{n_{\theta_1\ldots\theta_k}\}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{\Omega(\beta)\leqslant Q} \Omega(\beta) n_\beta \leqslant M.$$

Наконец, для чисел N и Δ определим число $\mathcal{N}(M,Q,N,\Delta)$ наборов $\{n_{\theta_1\ldots\theta_k}\}$ таких, что

$$|N_Q - N| > \Delta, \qquad \sum_{\Omega(\beta)\leqslant Q} \Omega(\beta) n_\beta \leqslant M.$$

Наша цель состоит в том, чтобы при различных условиях на число Q (например, $Q = Q(M) \to +\infty$ при $M \to +\infty$) определить такое число $N = N(M;Q)$

(если оно существует), для которого найдется $\Delta = \Delta(M,Q,N) = o(N)$ такое, что при $M \to +\infty$ вероятность

$$\mathbf{P}(M,Q,N,\Delta) = \frac{\mathcal{N}(M,Q,N,\Delta)}{\mathcal{N}(M,Q)}$$

стремится к нулю. В частности, при $t = 1$ и $Q = M$ мы получаем задачу, рассмотренную в статье [3].

Пусть $R_\beta = +\infty$ при $\Omega(\beta) \leqslant Q$, и пусть по заданному M числа b и N определяются равенствами

$$M = \sum_{\Omega(\beta)\leqslant Q} \frac{\Omega(\beta)\tau_k(\beta)}{e^{b\Omega(\beta)}-1}, \quad N = \sum_{\Omega(\beta)\leqslant Q} \frac{\tau_k(\beta)}{e^{b\Omega(\beta)}-1},$$

где $\tau_k(\beta)$ - очевидное обобщение арифметической функции делителей. Тогда имеет место

Теорема 1. *Для любых фиксированных чисел $h > 0$ и $0 < \varepsilon < 0.5$ существует постоянная $c_h(\varepsilon) > 0$ такая, что*

$$\mathbf{P}(M,Q,N,\Delta) \leqslant \frac{c_h(\varepsilon)}{N^h}$$

при $\Delta = O\big(N^{0.5+\varepsilon}\big)$.

Допустим теперь, что на величину N_Q наложено условие $N_Q = L$, причём $N = o(L)$, $L < M$. Тогда для подавляющего большинства вариантов имеет место скопление “аномально” большого числа частиц на самом нижнем уровне энергии, в то время как числа частиц на остальных уровнях близки к распределению бозе-газа. В этом случае говорят, что для данной модели имеет место явление, известное как *бозе-конденсат.*

Для асимптотического значения энтропии верна

Теорема 2. *Пусть $S = \ln\mathcal{N}(M,Q)$, и пусть $R_\beta \leqslant +\infty$ при $\Omega(\beta) \leqslant Q$. Тогда справедлива следующая асмптотическая формула:*

$$S = bM + \sum_{\omega(\beta)\leqslant Q} \tau_k(\beta) \ln \frac{1-e^{-b\Omega(\beta)(R_\beta+1)}}{1-e^{-b\Omega(\beta)}} + O(\ln b).$$

При доказательстве теорем используется тождество

$$\sum_{\Omega(\beta)=Q} \tau_k(\beta) = \binom{Q+kt-1}{kt-1}.$$

Рассмотрим частный случай, когда $R_\beta = +\infty$ для всех β, и параметры k, t и Q удовлетворяют условию $\binom{Q+kt}{kt} = o\left(\frac{M}{Q}\right)$. Тогда уравнение на параметр b принимает вид

$$M = \sum_{m\leqslant Q} \frac{m}{e^{bm}-1}\binom{m+kt-1}{kt-1} = \frac{1}{b}\binom{Q+kt}{kt}\big(1+O(bQ)\big).$$

Следовательно,

$$b = \frac{1}{M}\binom{Q+kt}{kt}\left(1+O\left(\frac{Q}{M}\binom{Q+kt}{kt}\right)\right) = o\left(\frac{1}{Q}\right),$$

$$S = \binom{Q+kt}{kt}\left(\ln M - \ln\binom{Q+kt}{kt} + O(\ln Q)\right).$$

Список цитированной литературы

1. Erdós P., Lehner J., The distribution of the number of summands in the partitions of a positive integer, // Duke Math. J. 1941. **8**. P. 335–345.

2. Erdós P., On some asymptotic formulas in the theory of partitions, // Bull. Am. Math. Soc. 52, 185-188 (1946).

3. Маслов В. П., Назайкинский В. Е., О распределении целочисленных случайных величин, связанных одним линейным неравенством. I, // Матем. заметки, 83:2 (2008), 232-263.

4. Маслов В. П., Назайкинский В. Е., О распределении целочисленных случайных величин, связанных одним линейным неравенством. II, // Матем. заметки, 83:3 (2008), 381-401.

5. Маслов В. П., Математическое разрешение парадокса Гиббса, // Матем. заметки, 89:2 (2011), 272-284.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова.
Научно-исследовательский институт системных исследований (НИИСИ) РАН
Получено 15.04.2015

УДК 511.524

О расстояние между соседними нулями производной первого порядка функции Харди

Ш. А. Хайруллоев[1] (Душанбе, Таджикистан)
shamsullo@rambler.ru

[1]Институт математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан

Функция Харди $Z(t)$ задается равенством

$$Z(t) = e^{i\theta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right), \quad e^{i\theta(t)} = \pi^{-\frac{it}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\right|^{-1},$$

принимает вещественные значение при вещественных значениях t и вещественные нули $Z(t)$ являются нулями $\zeta(s)$, лежащими на критической прямой.

Первым результатом о нулях дзета – функции Римана $\zeta(s)$ на критической прямой является теорема Г.Харди [1]. В 1914 г. он доказал, что $\zeta(1/2+it)$ *имеет бесконечно много вещественных нулей.* Затем Харди и Литтлвуд [2] в 1921 г. доказали, что промежуток $(T, T+H)$ при $H \geqslant T^{1/4+\varepsilon}$ содержит нуль нечетного порядка $\zeta(1/2+it)$. Ян Мозер [3] в 1976 г. доказал, что это утверждение имеет место при $H \geqslant T^{1/6}\ln^2 T$. В 1981 г. А.А. Карацуба [4] доказал теорему Харди–Литтлвуда уже при $H \geqslant T^{5/32}\ln^2 T$.

А.А.Карацуба [4] вместе с задачей о соседних нулях функции $Z(t)$ также изучил задачу о соседних точках экстремума или точках перегиба функции $Z(t)$ или в более общей подстановке – о соседних нулях функции $Z^{(j)}(t)$, $j \geqslant 1$. Он показал, что с увеличением j длина промежутка, на котором заведомо лежит нуль $Z^{(j)}(t)$, уменьшается и доказал: *промежуток $(T, T+H)$ содержит нуль нечетного порядка функции $Z^{(j)}(t)$ при $T \geqslant T_0(j) > 0$, $H \geqslant cT^{1/(6j+6)}\ln^{2/(j+1)} T$, $c = c(j) > 0$.*

В работе [5] задача о величине промежутка $(T, T+H)$ критической прямой, в которой заведомо лежит нуль нечетного порядка функции $Z^{(j)}(t)$ $(j \geq 1)$ сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар для оценки тригонометрических сумм, то есть:

Теорема 1. *Пусть (k,l) – произвольная экспоненциальная пара, j– натуральное число,*

$$\theta_j(k;l) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2-\delta_j^{-1}(k;l)}\right), \qquad \delta_j(k;l) = \frac{l+j}{0,5-k+j}.$$

Тогда при $H \gg T^{\theta_j(k;l)}(\ln T)^{\frac{2}{j+1}}$, $T \geq T_0(j) > 0$ промежуток $(T, T+H)$ содержит нуль нечетного порядка функции $Z^{(j)}(t)$.

Заметим, что $\theta_j\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6j+6}$, то есть теорема А.А.Карацубы является следствием теоремы 1, при $(k,l) = \left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)$.

Доклад посвящен нахождению нижней грани длины промежутка критической прямой, в которой содержится нуль нечетного порядка производной первого порядка функции Харди.

Теорема 2. *Пусть P_1 множество всех экспоненциальных пар (k,l), тогда*

$$\inf_{(k,l)\in P_1}\delta_1(k;l) = \delta_1\left(\frac{13}{106},\frac{75}{106}\right) = 1\frac{35}{146} = 1,239726...,$$

где

$$\left(\frac{13}{106}, \frac{75}{106}\right) = ABA^2BA^2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Теорема 2 является уточнением теоремы Карацуба при $j = 1$, так как

$$\frac{35}{432} = \frac{1}{12} - \frac{6}{2592},$$

и ее доказательство проводится методом оптимизации экспоненциальных пар.

Список цитированной литературы

1. Hardy G. H. Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann // Compt. Rend. Acad. Sci – 1914.– Vol. 158. – P. 1012–1014.

2. Hardy G. H., Littlewood J. E. The zeros of Riemann's zeta–function on the critical line // Math. Z. – 1921. – Bd. 10. – S. 283–317.

3. Мозер Я. Об одной сумме в теории дзета-функции Римана // — Acta arith., 1976. Vol. 31. S. 31–43.

4. Карацуба А. А. О расстоянии между соседними нулями дзета–функции Римана, лежащими на критической прямой // Труды МИАН. 1981. – Т. 157. С. 49–63.

5. Хайруллоев Ш. А. Расстояние между соседними нулями функции $Z^{(j)}(t)$, $j \geqslant 1$ // ДАН РТ. 2006. Т. 49, № 9. С. 803 – 809.

Институт математики имени А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан
Получено 15.04.2015

УДК 511.218

О множестве совместных представителей вычетов по двум модулям

Ю. Н. Штейников (Москва)
yuriisht@yandex.ru

Для натурального q через $\mathbb{Z}_q$ мы будем обозначать кольцо вычетов по модулю q. Рассмотрим такую задачу. Пусть p_1, p_2 - достаточно большие натуральные числа, $p_1 < p_2, A := p_2/p_1$. Пусть также имеются множества

$$G_1 \subseteq \mathbb{Z}_{p_1}, G_2 \subseteq \mathbb{Z}_{p_2}.$$

По определению положим

$$\overline{G_1} := \{n \in \mathbb{N} : n \in G_1 \pmod{p_1}\}; \overline{G_2} := \{n \in \mathbb{N} : n \in G_2 \pmod{p_2}\}.$$

Пусть также дано натуральное z и мы хотим нетривиально оценить

$$|[1, p_1 z] \bigcap \overline{G_1} \bigcap \overline{G_2}|.$$

Для целого k обозначим через $f_1(k)$ число решений сравнения относительно $x_1, x_2 \in G_1$

$$x_1 - x_2 \equiv kp_2 \pmod{p_1}.$$

Введем по определению

$$N_1 := \sum_{0 \le k \le \frac{z}{A}} f_1(k).$$

Аналогично через $f_2(k)$ обозначим число решений сравнения относительно $x_1, x_2 \in G_2$

$$x_1 - x_2 \equiv kp_1 \pmod{p_2}.$$

И

$$N_2 := \sum_{0 \le k \le z} f_2(k).$$

Оценка $|[1, p_1 z] \bigcap \overline{G_1} \bigcap \overline{G_2}|$ в случае когда $p_1 = q_1^2, p_2 = q_2^2$ и q_1, q_2 являются простыми числами, а G_1, G_2 являются мультипликативными подгруппами групп $\mathbb{Z}_{q_1}^*$ и $\mathbb{Z}_{q_2}^*$ размеров $q_1 - 1$ и $q_2 - 1$ соответственно, рассматривался в работе [1]. Оценка размера $[1, p_1 z] \bigcap \overline{G_1} \bigcap \overline{G_2}$ в работе [1] выражалась через величины N_1, N_2 и была нужна для задачи об оценке первого натурального a, не обладающего свойством делимости частного Ферма на простое число.

Получена неулучшаемая по порядку оценка исходной величины через N_1, N_2. А именно, верна следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим даны числа p_1, p_2, A, z, $p_1 < p_2$, множества G_1, G_2 и соответственно заданы величины N_1, N_2. Тогда справедлива оценка:*

$$|[1, p_1 z] \bigcap \overline{G_1} \bigcap \overline{G_2}| \ll (N_1 N_2)^{1/2}.$$

Список цитированной литературы

1. Bourgain J., Ford K., Konyagin S. , Shparlinski I. On the divisibility of Fermat Quotients // Michigan J. Math. 2010. Vol. 59, № 2. P. 313—328.

Математический институт имени В. А. Стеклова РАН,
Научно-исследовательский институт системных исследований
Получено 30.03.2015

6. Диофантовы приближения и теория трансцендентных чисел

В докладах данной секции представлены последние достижения по алгебраическим, трансцендентным и p-адическим числам.

УДК 511.2

Системы счисления в диофантовых равенствах

В. В. Агафонцев (Псков)
fon-valery-ag@yandex.ru

Как известно, в общественной жизни наибольшее распространение получила десятичная система счисления, во многих случаях заменив римскую непозиционную систему. С появлением компьютеров и развитием информационных технологий в их технической составляющей стала использоваться двоичная система счисления, а в программной составляющей — восьмеричная и шестнадцатеричная системы. В принципе для записи различных количественных соотношений могут использоваться позиционные системы счисления с *произвольным* основанием. [1]

Рассмотрим их применение при исследовании диофантовых равенств вида:

$$A^x + B^y = C^z, \text{ где } A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N};\ x, y, z \geq 2.$$

В частности, целью данного доклада является доказательство утверждения, основанного на использовании позиционных систем счисления с *произвольным* основанием:

Теорема 1. *Равенство*

$$A^x + B^y = C^z, \tag{1}$$

где $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}; x, y, z > 2$, *выполнимо только при составных числах* A, B, C.

Доказательство этого утверждения включает три этапа.

Этап 1. Доказательство леммы:

Лемма 1. *Необходимое и достаточное условие выполнения равенства*

$$A^x + B^y = C^z, \tag{2}$$

[1]Представление натурального числа n в позиционной системе счисления с основанием C имеет вид: $\sum_{\nu=0}^{h} n_\nu C^\nu$, где $n_\nu \in A(C) = \{0, 1, \ldots, C-1\}$.

в котором $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}; x, y, z \geq 2; (A, B, C) = 1$, *представимо триадой равенств:*

$$A^x = a_{z-1} \cdot C^{z-1} + a_{z-2} \cdot C^{z-2} + \ldots + a_1 \cdot C + a_0 \tag{3}$$

$$B^y = b_{z-1} \cdot C^{z-1} + b_{z-2} \cdot C^{z-2} + \ldots + b_1 \cdot C + b_0 \tag{4}$$

$$C = a_0 + b_0 = a_i + b_i + 1, \tag{5}$$

где $i \in [1; z-1]$*;* $a_i, b_i, a_0, b_0 \in A(C); a_0, b_0 \neq 0$.

Этап 2. Доказательство теоремы 2:

Теорема 2**.** *Равенство*

$$A^x + B^y = C^z, \tag{6}$$

где $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$, *выполнимое при* $x, y > 2, z = 2$ *и* $(A, B, C) = 1$, *выполнимо при* $x, y, z > 2$ *и составных натуральных числах* A^*, B^*, C^*.

Этап 3. Доказательство теоремы 3:

Теорема 3**.** *Равенство*

$$A^x + B^y = C^z, \tag{7}$$

где $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N}$, *невыполнимо при* $x, y, z > 2$ *и* $(A, B, C) = 1$.

Из сопоставления заключения теорем 2 и 3 следует истинность утверждения об условии выполнимости равенства (1).

Кратко представим главные шаги каждого этапа.

На этапе 1: *шаг 1* — выполняется запись правой и левой части (2) в C-ричной позиционной системе счисления.

$$(A^x)_c + (B^y)_c = (10\ldots0)_c, \quad \text{где число нулей равно } z. \tag{8}$$

Очевидно, запись каждого из слагаемых левой части (8) не может содержать больше, чем **z** C-ричных разрядов, поэтому эти слагаемые представимы так:

$$(A^x)_c = (a_{z-1}a_{z-2}\ldots a_1a_0)_c; \quad (B^y)_c = (b_{z-1}b_{z-2}\ldots b_1b_0)_c \tag{9}$$

Здесь $a_i, b_i \in N, i \in [0; z-1]; a_i, b_i \leq C-1$.

Шаг 2: выполняется запись чисел A^x и B^y их количественным эквивалентом:

$$A^x = a_{z-1} \cdot C^{z-1} + a_{z-2} \cdot C^{z-2} + \ldots + a_1 \cdot C + a_0,$$

$$B^y = b_{z-1} \cdot C^{z-1} + b_{z-2} \cdot C^{z-2} + \ldots + b_1 \cdot C + b_0.$$

Шаг 3: учитывая тождество

$$C^z = (C-1) \cdot C^{z-1} + (C-1) \cdot C^{z-2} + \ldots + (C-1) \cdot C + C,$$

получаем необходимое и достаточное условие выполнения равенства (2), выражаемое соотношениями (3), (4), (5).

Убеждаемся в том, что этому условию удовлетворяют *любые* пифагоровы тройки чисел (случай $x = y = z = 2$), а также тройки ненулевых целых чисел, для которых $x \neq y$; $x, y > 2$; $z = 2$. В этом случае необходимое и достаточное условие выполнения равенства (2) в соответствии с (3), (4), (5) запишется так:

$$A^x = a_1 \cdot C + a_0; \quad B^y = b_1 \cdot C + b_0; \quad C = a_1 + b_1 + 1 = a_0 + b_0$$

Пример: тройки чисел $(2, 1, 3)$ и $(6, 5, 29)$, для которых $2^3 + 1^k = 3^2$, где k — любое натуральное число, и $6^3 + 5^4 = 29^2$. Так, для тройки $(6, 5, 29)$:

$$A^x = 6^3 = 7 \cdot 29 + 13; a_1 = 7, a_0 = 13; \quad B^y = 5^4 = 21 \cdot 29 + 16; b_1 = 21, b_0 = 16;$$

$$C = a_1 + b_1 + 1 = 7 + 21 + 1 = a_0 + b_0 = 13 + 16 = 29.$$

На этапе 2: *шаг 1* — левая и правая часть (6) умножается на число $C^{x \cdot y \cdot z}$; при $z = 2$ получим: $(A \cdot C^{2 \cdot y})^x + (B \cdot C^{2 \cdot x})^y = (C^2)^{1 + x \cdot y}$.

Шаг 2: обозначим $A^* = A \cdot C^{2 \cdot y}; B^* = B \cdot C^{2 \cdot x}; C^* = C^2; z = 1 + x \cdot y$.

С учётом этих обозначений равенство (6) запишется так:

$$(A^*)^x + (B^*)^y = (C^*)^z. \tag{10}$$

Равенство (10) соответствует заключению теоремы 2, так как $x, y, z > 2$ и числа A^*, B^*, C^* являются ***составными*** *натуральными числами.*

На этапе 3: *шаг 1* — предполагается выполнение диофантова равенства (7) и, следовательно, по лемме должны выполняться равенства (3), (4), (5). Исходя из (5), должно выполняться такое равенство:

$$(a_2 + b_2) \cdot C^2 + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 = C^3. \tag{11}$$

Шаг 2: из *факта* отсутствия ненулевых целочисленных решений для уравнения Ферма третьей степени (см. [1,§3], [2, гл.2, пп.2.1, 2.2], [3]), на основании невыполнения для этого случая *трёх* равенств (3), (4), (5) доказывается справедливость неравенства

$$(a_2 + b_2) \cdot C^2 + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 \neq C^3. \tag{12}$$

В этом видится противоречие, позволяющее доказать теорему 3.

Список цитированной литературы

1. Постников М. М. Теорема Ферма. Введение в теорию алгебраических чисел. М.: Наука, 1978. 130 с.

2. Эдвардс Г. Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел. М.: Мир, 1980. 485 с.

3. Мачис Ю. Ю. О предпологаемом доказательстве Эйлера // Мат. заметки. 2007. Том. 3. № 82. С. 395–400.

Псковский государственный университет
Получено 23.03.2015

УДК 511.42

Распределение алгебраических точек в областях малой меры и вблизи поверхностей

В. И. Берник, А. Г. Гусакова (Минск, Беларусь), А. В. Устинов (Хабаровск)

bernik.vasili@mail.ru gusakova.anna.0@gmail.com ustinov.alexey@gmail.com

Пусть задано некоторое $Q > 1$ и цилиндр $T = I \times K$, где $I \subset \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ - интервал длины $|I| = c_1 Q^{-\gamma}$, $K \subset B(0,1)$ - круг радиуса $c_2 Q^{-\gamma}$ в комплексной плоскости, $0 < \gamma \leq 1$. Также считаем, что $T \cap \{|\Im\, z| \leq \delta\} = \varnothing$, где δ - некоторая малая величина. Рассмотрим неприводимый многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ с условием НОД$(a_1, \ldots, a_n) = 1$ степени $\deg P = n$ и высоты $H(P) \leq Q$. Корни такого многочлена α являются алгебраическими числами степени $\deg \alpha = \deg P = n$ и высоты $H(\alpha) = H(P) \leq Q$. Многочлен $P(x)$ называется минимальным многочленом алгебраического числа α.

Здесь и далее $c_i, i = 1, 2, ...$ являются величинами, зависящими только от степени многочлена.

Точку (α, β), $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ будем называть алгебраической, если α и β корни одного многочлена $P \in \mathbb{Z}[x]$.

Можно доказать, что алгебраические точки всюду плотны в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$, однако, если воспользоваться методом Шмидта [4], то меры цилиндров T окажутся значительно больше, чем $c_3 Q^{-3}$. В [5] доказано, что действительные алгебраические числа обязательно попадают в интервалы длины $c_4 Q^{-1}$ при достаточно большой величине c_4.

Нами доказано несколько теорем о распределении алгебраических точек в $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$.

Теорема 1. *Для любых натуральных Q и $n \geqslant 3$ существует цилиндр T объема $\mu T = c_5 Q^{-3}$, внутри которого нет алгебраических точек (α, β) степени $\deg \alpha = \deg \beta \leq n$ и высоты $H(\alpha) = H(\beta) \leq Q$.*

Введем класс многочленов

$$\mathcal{P}_3(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x], \deg P = 3, H(P) \leq Q\}.$$

Следующая теорема 2 позволяет связать количество алгебраических точек третьей степени и высоты, не превосходящей Q с объемом цилиндра T.

Теорема 2. *При достаточно большом $Q > Q_0$ и достаточно больших величинах c_8 и c_9 любой цилиндр $T = I \times K$, где $\mu I \geqslant c_8 Q^{-\gamma}$, $\mu K \geqslant c_9 Q^{-2\gamma}$, $0 < \gamma \leq \frac{1}{3}$, содержит не менее, чем $c_{10} Q^4 \mu T$ алгебраических точек (α, β) степени $\deg \alpha = \deg \beta = 3$ и высоты $H(\alpha) = H(\beta) \leq Q$.*

Другим интересным вопросом является вопрос о количестве алгебраических точек возле некоторой поверхности. В данном случае можно рассматривать полосу, шириной порядка Q^{-1}. Из теоремы 2 следует, что мы не можем оценить количество алгебраических точек в цидиндрах T, объем которых имеет порядок $Q^{-3\gamma}$, $\frac{1}{3} < \gamma \leq 1$, однако, доля таких цилиндров мала. Данный факт позволяет нам доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $y = f(z)$, $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$ - некоторая непрерывная функция, заданная на области $D \subset \mathbb{C}$. Определим множество $L(Q, \lambda)$ следующим образом*

$$L(Q, \lambda) = \{(x, z), z \in \mathbb{C}, y \in \mathbb{R}, |y - f(z)| < c_{17} Q^{-\lambda}\},$$

при $0 \leq \lambda \leq 1$. Тогда количество алгебраических точек (α, β) степени $\deg \alpha = \deg \beta = 3$ и высоты $H(\alpha) = H(\beta) \leq Q$, принадлежащих $L(Q, \lambda)$, не меньше, чем $c_{18}(f, D) Q^{4-\lambda}$.

Список цитированной литературы

1. Спринджук В.Г. Проблема Малера в метрической теории чисел, В.Г. Минск, Наука и техника, 1967.

2. Берник В.И. Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений // Acta Arith., 1983. V. 42, № 3. P. 219–253.

3. Фельдман Н.И. // Изв. АН СССР. 1951. Т. 15, N 1. С. 53–74.

4. Schmidt W. T-numbers do exist, Symposia Mathematica, IV (INDAM, Rome, 1968/1969), 1970. P. 3–26.

5. Бударина Н.В., Берник В.И., О'Доннелл Х. Действительные алгебраические числа третьей степени в коротких интервалах // Докл. НАН Беларуси, 2012. Т. 57, № 4. С. 23–26.

Институт математики НАН Беларуси.
Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН.
Получено 17.04.2015

UDK 511.36

Estimating polynomials over $\mathbb{Z}_p$ at points from $\mathbb{C}_p$

Peter Bundschuh(Köln, Germany), Vladimir G. Chirskii(Moscow)
pb@math.uni-koeln.de, vgchirskii@yandex.ru

Let $\mathbb{Q}_p$ denote the field of p-adic numbers, and let $\mathbb{C}_p$ be the completion of the algebraic closure of $\mathbb{Q}_p$ with respect to the p-adic metric extended from $\mathbb{Q}_p$. Keeping our notation from [1, 2, 3], let $\mathbb{Z}_p := \{\beta \in \mathbb{Q}_p : |\beta|_p \leqslant 1\}$ be the ring of p-adic integers, and $U_p := \{\beta \in \mathbb{Q}_p : |\beta|_p = 1\}$ the unit group of $\mathbb{Q}_p$. As in our previous papers [2, 3], we consider here series of the shape

$$\alpha_i := \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,i} p^{r_{n,i}} \qquad (i = 1, \dots, m) \tag{1}$$

with all $a_{n,i} \in U_p$ and all m *exponent sequences* $(r_{n,i})_{n=1,2,\dots} \in \mathbb{Q}_+^{\mathbb{N}}$ $(i = 1, \dots, m)$ strictly increasing and unbounded; here $\mathbb{Q}_+ := \{r \in \mathbb{Q} \colon r > 0\}$.

Note that Lampert [5] used p-adic series of type (1) to answer two questions of Koblitz [4, p. 75] about the transcendence degrees of $\mathbb{C}_p$ over K, and of K over $\mathbb{Q}_p$ for a certain intermediate field K of the extension $\mathbb{C}_p \,|\, \mathbb{Q}_p$. But whereas our $a_{n,i}$'s belong to U_p, Lampert's were certain roots of unity in $\mathbb{C}_p$.

The aim of our present note is to give a quantitative version of the algebraic independence over $\mathbb{Q}_p$ of elements $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}_p$ of type (1). For this, two hypotheses on the exponent sequences $(r_{n,i})$ are required, namely:

- For any $d \in \mathbb{N}$, there exists $N_1 = N_1(d) \in \mathbb{N}$ such that, for any rational integer $N \geqslant N_1$, one cannot have $\sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{m} D_{n,i} r_{n,i} \in \mathbb{Z}$ with all $D_{n,i} \in \mathbb{Z}$, $\sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{m} |D_{n,i}| \leqslant 2d$, and $\sum_{i=1}^{m} |D_{N,i}| > 0$.
- For any $(d, h) \in \mathbb{N}^2$, there exists $N_2 = N_2(d, h) \in \mathbb{N}$ such that
$$r_{N+1,i} > h + d r_{N,j} \tag{2}$$
holds for any $(i, j) \in \{1, \dots, m\}^2$ as soon as $N \geqslant N_2$.

On denoting $r_n := \max\{r_{n,1}, \dots, r_{n,m}\}$ for any $n \in \mathbb{N}$ we establish the following

Theorem 1. *If $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}_p$ from (1) satisfy the preceding hypotheses, then, for every $P \in \mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_m] \setminus \{0\}$ with (total) $\deg P = d$ and all nonzero coefficients A having $\mathrm{ord}_p A \leqslant h$, the inequality*

$$|P(\alpha_1, \dots, \alpha_m)|_p \geqslant p^{-h - d r_{N_0}} \tag{3}$$

holds with $N_0 := \max(N_1, N_2)$.

Remark 1. *To assess the quality of the lower bound in (3) we give the following simple example. If r_1 is defined as above and $j \in \{1,\dots,m\}$ satisfies $r_{1,j} = r_1$, then $P(x_1,\dots,x_m) := p^h x_j^d$ has total degree d, only one non-zero coefficient A with* $\mathrm{ord}_p A = h$ *and satisfies*

$$|P(\alpha_1,\dots,\alpha_m)|_p = p^{-h-dr_1}.$$

Remark 2. *In the case $d = 0$ of nonzero constant $P = A_0$, we have*

$$|P|_p = |A_0|_p = p^{-\mathrm{ord}_p A_0} \geqslant p^{-h}$$

without any further hypothesis. Thus, for the subsequent proof of our theorem, we may assume $d \in \mathbb{N}$.

We also construct an example of m sequences $(r_{n,i})_n$ having all properties required above.

REFERENCES

1. Bundschuh P. and Chirskii V. G., Algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$ // I, *Arch. Math. (Basel)* **79** 2002. P.345–352.
2. Bundschuh P. and Chirskii V. G., Algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$ // II, *Acta Arith.* **113** 2004. P.309–326.
3. Chirskii V. G., Values of analytic functions at points of $\mathbb{C}_p$ // *Russ.J. Math. Phys.* **20** 2013. P.149–154.
4. Koblitz N., *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions*, 2nd ed., Springer, New York 1984.
5. Lampert D., Algebraic p-adic expansions // *J. Number Theory* **23** 1986. P.279–284.

Mathematisches Institut Universität zu Köln Weyertal 86-90
Moscow State University
Received 12.04.2015

УДК 517.5

Экстремальная задача Бомана для преобразования Данкля

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов [1] (Тула)
dvgmail@mail.ru, ivaleryi@mail.ru

[1]Грант РФФИ № 13-01-00045, госзадания Министерства образования и науки РФ № 5414ГЗ, № 1.1333.2014К и грант Фонда Дмитрия Зимина «Династия»

Доклад посвящен экстремальной задаче Бомана для преобразования Данкля в пространстве $\mathbb{R}^d$.

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^d$ — d-мерное действительное евклидово пространство со стандартным скалярным произведением (x, y) и нормой $|x| = \sqrt{(x,x)}$, $v_k(x) = \prod_{\alpha\in R_+} |(\alpha, x)|^{2k(\alpha)}$ — обобщенный степенной вес или вес Данкля, определяемый положительной подсистемой R_+ системы корней $R \subset \mathbb{R}^d$ и функцией $k(\alpha)\colon R \to \mathbb{R}_+$, инвариантной относительно группы отражений $G(R)$, порожденной R, c_k — нормировочная константа Макдональда – Мета – Сельберга, $d\mu_k(x) = c_k v_k(x)\,dx$, $L_1(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ — пространство комплексных измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^d$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{1,k} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\,d\mu_k(x),$$

$e_k(x, y)$ — обобщенная экспонента, определяемая дифференциально-разностными операторами Данкля, многие свойства которой аналогичны свойствам экспоненты $e^{i(x,y)}$.

Гармонический анализ в пространствах с весом Данкля осуществляется с помощью преобразования Данкля

$$F_k(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{e_k(x,y)}\,d\mu_k(x).$$

Основные факты из теории Данкля можно найти в [1]. В безвесовом случае $(k(\alpha) \equiv 0)$ получаем классическое преобразование Фурье с коэффициентом $(2\pi)^{-d/2}$, для которого будем использовать обозначение $F(f)$.

Пусть $V \subset \mathbb{R}^d$ — евклидов шар $B^d = \{x \in \mathbb{R}^d\colon |x| \leqslant 1\}$ или параллелепипед $\Pi_a = \prod_{j=1}^d [-a_j, a_j]^d$, $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$, $a_j > 0$, $\tau > 0$, $\mathcal{E}_k(\tau V)$ — класс неотрицательных непрерывных функций f, для которых

$$|x|^2 f \in L_1(\mathbb{R}^d, d\mu_k), \quad \operatorname{supp} F_k(f) \subset \tau V, \quad F_k(f)(0) = 1.$$

Задача Бомана для преобразования Данкля состоит в вычислении величины

$$\mathrm{B}_k(\tau V) = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 f(x)\,d\mu_k(x)\colon f \in \mathcal{E}_k(\tau V)\right\}. \tag{1}$$

В силу однородности задачи Бомана $\mathrm{B}_k(\tau V) = \tau^{-2}\mathrm{B}_k(V)$, поэтому в дальнейшем полагаем $\tau = 1$. В безвесовом случае будем писать $\mathrm{B}(V)$.

Задача Бомана допускает вероятностную интерпретацию. Функцию $f \in \mathcal{E}_k(V)$ можно рассматривать как плотность распределения случайного вектора $X = (X_1, \ldots, X_d)$, для которого $\varphi(x) = F_k(f)(x)$ — характеристическая функция, $E|X|^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 f(x)\,d\mu_k(x) = -\Delta_k\varphi(0)$ — второй момент распределения. Здесь Δ_k — лапласиан Данкля. Таким образом, в задаче Бомана необходимо в классе $\mathcal{E}_k(V)$ найти плотность распределения случайного вектора с минимальным вторым моментом.

В одномерном случае задачу (1) поставил и решил Х. Боман [2]. Он доказал, что

$$\mathrm{B}([-1,1]) = -(F(f_1))''(0) = \pi^2,$$

где

$$f_1(x) = (2/\pi)^{5/2}\left(\frac{\cos(x/2)}{1-(x/\pi)^2}\right)^2.$$

Функция $F(f_1)$ является генератором известного положительного метода приближения Бомана – Коровкина.

Пусть $\Gamma(t)$ — гамма-функция, $J_\lambda(t)$ — функция Бесселя порядка $\lambda \geqslant -1/2$, $j_\lambda(t) = 2^\lambda\Gamma(\lambda+1)\,J_\lambda(t)/t^\lambda$ — нормированная функция Бесселя, q_λ — наименьший положительный нуль $J_\lambda(t)$.

В многомерном случае задачу Бомана (1) решили В. Эм, Т. Гнейтинг и Д. Ричардс [3]. Они доказали, что

$$\mathrm{B}(B^d) = -\Delta F(f_d)(0) = 4q_{d/2-1}^2,$$

где Δ — оператор Лапласа и

$$f_d(x) = \frac{2^{2-3d/2}}{\Gamma(d/2)q_{d/2-1}^2}\left(\frac{j_{d/2-1}(|x|/2)}{1-(|x|/(2q_{d/2-1}))^2}\right)^2.$$

Мы доказываем следующие результаты.

Теорема 1. *Если $v_k(x)$ — произвольный вес Данкля,*

$$\lambda_k = d/2 - 1 + \sum_{\alpha\in R_+} k(\alpha),$$

то

$$\mathrm{B}_k(B^d) = -\Delta_k F_k(f_k)(0) = 4q_{\lambda_k}^2$$

и радиальная экстремальная функция имеет вид

$$f_k(x) = \frac{2^{-3\lambda_k-1}}{\Gamma(\lambda_k+1)q_{\lambda_k}^2}\left(\frac{j_{\lambda_k}(|x|/2)}{1-(|x|/(2q_{\lambda_k}))^2}\right)^2.$$

Теорема 2. *Если вес $v_k = \prod_{j=1}^d |x_j|^{2\lambda_j+1}$, $\lambda_j \geqslant -1/2$, $a = (a_1,\ldots,a_d)$, $a_j > 0$, $b_a = (2q_{\lambda_1}/a_1,\ldots,2q_{\lambda_d}/a_d)$, то*

$$\mathrm{B}_k(\Pi_a) = -\Delta_k F_k(f_k)(0) = |b_a|^2$$

и экстремальная функция имеет вид

$$f_k(x) = \prod_{j=1}^d \frac{2^{-3\lambda_j-1}a_j^{2\lambda_j+2}}{\Gamma(\lambda_j+1)q_{\lambda_j}^2}\left(\frac{j_{\lambda_j}(a_jt/2)}{1-(a_jt/(2q_{\lambda_j}))^2}\right)^2.$$

При доказательстве теоремы 1 используется инвариантность задачи Бомана относительно группы ортогональных преобразований $O(d)$ и одномерная квадратурная формула по нулям функции Бесселя, при доказательстве теоремы 2 — многомерная квадратурная формула по нулям функций Бесселя.

Список цитированной литературы

1. Rösler M. Dunkl Operators: Theory and Applications. Lecture Notes in Math. Vol. 1817. Berlin: Springer, 2003. P. 93–135.

2. Bohman H. Approximate Fourier analysis of distribution functions // Ark. Mat. 1960. Vol. 4. P. 99–157.

3. Ehm W., Gneiting T., Richards D. Convolution roots of radial positive definite functions with compact support // Trans. Amer. Math. Soc. 2004. Vol. 356. P. 4655–4685.

Тульский государственный университет
Получено 15.04.2015

УДК 511.335

Трехмерные статистики Гаусса-Кузьмина

О. А. Горкуша[1] (Хабаровск)
o_garok@rambler.ru

Рассматривается задача нахождения решеток, соответствующих заданным каноническим диаграммам графа Минковского.

Хабаровское отделение Института Прикладной математики ДВО РАН.
Получено 7.05.2015

УДК 511.361

О совместных приближениях

П. Л. Иванков (Москва)

ivankovpl@mail.ru

В докладе будет рассказано об эффективных конструкциях совместных приближений для функций вида

$$F_{kl_kj}(z) = \frac{\partial^j}{\partial z^j}\frac{\partial^{\,l_k}}{\partial \lambda^{l_k}}\sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \prod_{x=1}^{\nu}\frac{a(x)}{b(x)}\prod_{x=1}^{\nu}(x+\lambda_k)^\sigma\,,$$

где $a(x)$ и $b(x)$ — многочлены, $\sigma = \pm 1$; прочие параметры изменяются в естественных границах. Такие конструкции могут использоваться для получения различных результатов об арифметической природе значений функций $F_{kl_kj}(z)$ в том числе и для случая, когда среди корней многочленов $a(x)$ и $b(x)$ имеются

[1]Грант № 14-01-90002 Бел-а

иррациональные. В некоторых частных случаях допускается также иррациональность параметра λ_k.

МГТУ им. Н. Э. Баумана
Получено 30.04.2015

УДК 511.361

О дифференцировании по параметру

П. Л. Иванков (Москва)

ivankovpl@mail.ru

Пусть

$$\omega(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!(\lambda+\nu)}\,, \quad \phi_\lambda(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda+x}\,.$$

Равенство (см., например, [1, с. 195])

$$\omega(z) = \frac{1}{\lambda} e^z \phi_\lambda(-z)$$

позволяет построить аппроксимации Паде для функции $\phi_\lambda(z)$ и ее производных по параметру λ способом, отличным от предложенного в [2].

Список цитированной литературы

1. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.

2. Иванков П.Л. О дифференцировании гипергеометрической функции по параметру // Фундаментальная и прикладная математика. Т. 16, вып. 6. 2010. С. 91–94.

МГТУ им. Н. Э. Баумана
Получено 30.04.2015

УДК 511.42

Эффективные метрические теоремы о малых значениях квадратичных форм

Д. В. Коледа (Минск), Н. В. Сакович (Могилёв, Беларусь), Н. В. Шамукова (Минск, Беларусь)

koleda@rambler.ru sakovichnv@tut.by shamukova_n@mail.ru

Диофантовы приближения берут своё начало с теоремы Дирихле, который доказал, что для любого $Q \in \mathbb{N}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ всегда найдётся рациональное число p/q, $1 \leqslant q \leqslant Q$ такое, что

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{Q}. \tag{1}$$

В настоящее время к диофантовым приближениям относят проблемы совместных покоординатных приближений векторов точками с рациональными, алгебраическими координатами [1], [2]. Значительный прогресс в последнее время достигнут в метрической теории диофантовых приближений [3], [4], [5]. Эти результаты представляют собой обобщение классической теоремы Хинчина, которую мы приведём в виде теоремы, называемой теоремой Хинчина—Грошева.

Расстояние до ближайшего к x целого числа будем обозначать через $\|x\| := \min(x - \lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil - x)$.

Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, μB — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, $\psi(s)$ — монотонно убывающая функция, определённая для $s > 0$.

Теорема 1 (Хинчин–Грошев). *Обозначим через $\mathcal{L}_n(\psi)$ множество точек некоторого параллелепипеда $T \subset \mathbb{R}^n$, для которых неравенство*

$$\|a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \cdots + a_1 x_1\| < \psi(H) \tag{2}$$

имеет бесконечно много решений в $\mathbf{a}$, где $H = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_j|$. Тогда

$$\mu \mathcal{L}_n(\psi) = \begin{cases} 0, & \sum_{H=1}^{\infty} H^{n-1}\psi(H) < \infty, \\ \mu T, & \sum_{H=1}^{\infty} H^{n-1}\psi(H) = \infty. \end{cases} \tag{3}$$

Результат (3) обобщён на приближения на невырожденных кривых и многообразиях. Так, в работах [4], [5] и [6] были доказаны случаи сходимости и расходимости теоремы типа Хинчина–Грошева. Недавно было замечено, что результаты вида (3) могут быть полезны в ряде прикладных задач, например, при проектировании мобильных телесистем [7]. Обобщённо такие задачи можно описать следующим образом. Имеется пространство n вещественных параметров. В данном пространстве есть «плохое» множество, которое определяется как множество наборов параметров $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ для которых некоторое неравенство, подобное (2), имеет решение в целых числах, ограниченных по абсолютной величине фиксированным большим числом Q. При этом возникает естественный вопрос: как именно зависит мера такого множества от n и Q.

В данной работе оценки такого рода получены в двух теоремах. В первой из них для квадратичных форм получена оценка с приемлемым порядком по n, однако порядок по Q не достигает уровня, который можно ожидать из принципа Дирихле. Во второй теореме при $n = 2$ оценка по Q близка по порядку к оценке Дирихле.

Пусть $\mathbf{x} \in [0,1)^n$ и $F(\mathbf{x})$ — квадратичная форма от n переменных, пусть $H(F)$ — максимум абсолютных величин коэффициентов $F(\mathbf{x})$. При $\epsilon > 0$ обозначим через $S_n(Q,\epsilon)$ множество точек $\mathbf{x} \in [0,1)^n$, для которых неравенство

$$\|F(\mathbf{x})\| < \epsilon \tag{4}$$

имеет хотя бы одно решение в квадратичных формах $F(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$ с условием $H(F) \leqslant Q$.

Теорема 2. *Для меры $\mu S_n(Q,\epsilon)$ справедливо неравенство*

$$\mu S_n(Q,\epsilon) < 2^{\frac{n(n+1)}{2}+2}\epsilon^{1/2}Q^{l+1/2}. \tag{5}$$

Для малых размерностей можно доказать эффективный результат с порядком, неулучшаемым по степени Q.

Теорема 3. *Пусть $\epsilon > 0$ — достаточно малое число, $Q > 0$ — фиксированное большое число. Пусть $S_2(Q,\epsilon)$ есть множество таких $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in [0,1)^2$, для которых неравенство*

$$\left\|a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2\right\| \leqslant \epsilon$$

имеет решение в целых числах a_{ij} с условием $\max_{1\leqslant i,j\leqslant 2}|a_{ij}| \leqslant Q$.

Тогда для меры $S_2(Q,\epsilon)$ справедлива оценка

$$\mu S_2(Q,\epsilon) \leqslant 2^{12}Q^3(\ln Q)\,\epsilon.$$

Список цитированной литературы

1. Beresnevich V. Rational points near manifolds and metric Diophantine approximation // Annals of Mathematics. 2012. Vol. 175, no. 1. P. 187–235.

2. Bernik V., Götze F. and Kukso O. Regular systems of real algebraic numbers of third degree in small intervals // Analitic and probabilistic methods in Number Theory, TEV, Vilnius. 2012. P. 61–68.

3. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. М.: Наука и Техника, 1967.

4. Bernik V. I., Kleinbock D., and Margulis G. A. Khintchine-type theorems on manifolds: the convergence case for standard and multiplicative versions // Internat. Math. Res. Notices. 2001. No. 9. P. 453–486.

5. Beresnevich V. V. A Groshev type theorem for convergence on manifolds // Acta Math. Hungar. 2002. Vol. 94, no. 1–2. P. 99–130.

6. Beresnevich V. V., Bernik V. I., Kleinbock D. Y., Margulis G. A. Metric Diophantine approximation: the Khintchine-Groshev theorem for nondegenerate manifolds // Mosc. Math. J. 2002. Vol. 2, no. 2. P. 203–225.

7. Motahari A. S., Oveis-Gharan S., Maddah-Ali M., and Khandani A. K. Real interference alignment: Exploiting the potential of single-antenna systems // IEEE Transactions on Information Theory. 2014. Vol. 60, no. 8. P. 4799–4810.

Институт математики НАН Беларуси.
Могилёвский государственный университет им. А. А. Кулешова.
Командно-инженерный институт МЧС Республики Беларусь.

Получено 09.04.2015

УДК 511.36

Метрическая теорема о приближении нуля значениями целочисленного многочлена

Э. И. Ковалевская (Минск, Беларусь)
ekovalevsk@mail.ru

Доказано уточнение теоремы [1], состоящее в получении оценки сверху меры множества, где многочлен мал. Оценка зависит от аппроксимирующей функции.

Для фиксированной степени n, $n \geqslant 2$, положим $P = P(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{Z}[t]$, $a_n \neq 0$. Пусть высота $H(P) = \max(|a_n|, \dots, |a_0|)$ растет. Введем монотонно убывающую функцию $\Psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ с условием

$$\sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty.$$

Зафиксируем δ_0, $1 \leqslant \delta_0 < n(n+1)/2$, и рассмотрим в квадрате $\mathbb{E}^2 = [0,1) \times [0,1)$ систему неравенств

$$|P(x)| < H^{-v_1}\Psi(H)^{w_1}, \quad |P(y)| < H^{-v_2}\Psi(H)^{w_2}, \quad \min(|P^{'}(x)|, |P^{'}(y)|) < \delta_0 H, \quad (1)$$

где $v_i \geqslant 0$, $w_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2)$, $v_1 + v_2 = n - 2$, $w_1 + w_2 = 1$. Обозначим через $M_n(H, \delta_0, \Psi)$ множество точек $(x, y) \in \mathbb{E}^2$, для которых система (1) имеет бесконечно много решений в многочленах P. В [1] доказано, что

$$\sum_{H=1}^{\infty} \mu(M_n(H, \delta_0, \Psi)) < \infty,$$

где μ — мера Лебега в $\mathbb{R}^2$. Мы уточняем этот результат. Доказана

Теорема 1. *При $H \geqslant H_0$ имеем*

$$\mu(M_n(H,\delta_0,\Psi)) \leqslant c_n(\Psi(H))^{1/(2n-1)},$$

где c_n — константа, зависящая только от n.

В доказательстве использована следующая лемма В. Г. Спринджука. Пусть $P_n(H)$ — класс неприводимых многочленов P с условием $|a_n| = H$. Пусть $\alpha_1 \ldots, \alpha_n$ — корни многочлена $P \in P_n(H)$. Положим

$$S(\alpha_1) = \{t \in \mathbb{R} : \min_{1\leqslant j\leqslant n} |t-\alpha_j| = |t-\alpha_1|\}.$$

Лемма 1. *Для $P \in P_n(H)$, $t \in S(\alpha_1)$ имеем*

$$|t-\alpha_1| < 2^n|P(t)|(|P^{'}(\alpha_1)|)^{-1}.$$

Отметим, что верхняя граница для параметра δ_0 соответствует тому, что многочлен P рассматривается в квадрате $\mathbb{E}^2$.

Автор выражает благодарность профессору В. И. Бернику за постановку задачи.

Список цитированной литературы

1. Берник, В. И., Борбат, В. Н. Совместное приближение нуля значениями целочисленных многочленов // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1997. Т. 218. С. 58–73.

Белорусский государственный аграрный технический университет.
Получено 27.02.2015

УДК 511.464

Оценки многочленов от некоторых p – адических чисел

Е. С. Крупицын (Москва)
krupitsin@gmail.com

Для каждого простого числа p определено p – адическое нормирование поля рациональных чисел: для любого $a \in \mathbb{Q}$, $a = \dfrac{c}{b}$

$$|a|_p = \begin{cases} p^{\nu_p(b)-\nu_p(c)}, a \neq 0, \\ 0, a = 0, \end{cases}$$

где $\nu_p(x) = k$, такое, что $p^k \mid x$, $p^{k+1} \nmid x$.

Пополнение поля рацональных чисел $\mathbb{Q}$ по норме $| \, |_p$ называется полем p – адических чисел $\mathbb{Q}_p$.

Пусть $g > 2$ – целое число, тогда для любого $a \in \mathbb{Q}$, $a = \frac{r}{s}$ определим псевдо – нормирование поля рациональных чисел:

$$|a|_g = \begin{cases} g^{\nu_g(s)-\nu_g(r)}, a \neq 0, \\ 0, a = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\nu_g(x)$ определяется аналогчно $\nu_p(x)$. Определённая соотношением (1) величина называется g – адическим псевдо – нормированием поля рациональных чисел.

Пополнение поля рацональных чисел $\mathbb{Q}$ по норме $| \, |_g$ называется кольцом g – адических чисел $\mathbb{Q}_g$, которое является прямой суммой p – адических полей $\mathbb{Q}_p$ по всем простым делителям p числа g. Доказательство это утверждения, а также описание свойств g – адического псевдо – нормирования, которые аналогичны свойствам p – адической нормы подробно описаны в [1].

Сформулируем основные результаты.

Пусть p – фиксированное простое число, $a(n), \gamma(n)$ – натуральнозначные функции такие, что $1 \leqslant a(n) < p$, $\gamma(n)$ возрастающая и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\gamma(n+1)}{\gamma(n)} = \infty$. Обозначим $\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a(n)p^{\gamma(n)}$.

Теорема 1. *Для любого натурального числа d найдется постоянная $H_0(d)$ такая, что для каждого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени d и высоты $H \geqslant H_0(d)$ выполняется неравенство*

$$|P(\alpha)|_p \geqslant \left(H \cdot (d+1) \cdot \left(\frac{p^2}{p-1} \right)^d p^{d(\gamma(\gamma^{-1}(\log_p H)+1))} \right)^{-1}.$$

Следующая теорема является частным случаем теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть*

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} p^{n!}.$$

Тогда для любого натурального числа d и любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $H_0 = H_0(\varepsilon, d)$ такая, что для любого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени d и высоты $H \geqslant H_0$ выполняется неравенство

$$|P(\alpha)|_p \geqslant \left(H(d+1) \left(\frac{p}{p-1} \right)^d \right)^{-1} H^{-d(\ln \log_p H)^{1+\varepsilon}}.$$

Пусть $g = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$, $a(n), \gamma(n)$ – натуральнозначные функции такие, что $1 \leqslant a(n) < g$, $\gamma(n)$ возрастающая и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\gamma(n+1)}{\gamma(n)} = \infty$. Обозначим $\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a(n) g^{\gamma(n)}$.

Теорема 3. *Для любого натурального числа d найдется постоянная $H_0(d)$ такая, что для каждого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени d и высоты $H \geqslant H_0(d)$ выполняется неравенство*

$$|P(\alpha)|_g \geqslant \left(H \cdot (d+1) \cdot \left(\frac{g^2}{g-1}\right)^d g^{d(\gamma(\gamma^{-1}(\log_g H)+1))} \right)^{-1}.$$

Список цитированной литературы

1. Mahler K. p – adic numbers and their functions. London: Cambridge University Press, 1981.

Московский педагогический государсивенный университет
Получено 13.04.2015

УДК 511.42

Аналог теоремы Хинчина для случая расходимости в совместных диофантовых приближениях в разных метриках

А. С. Кудин, А. В. Луневич (Минск, Беларусь)
kunixd@gmail.com kifeislife@gmail.com

Основой многих задач метрической теории диофантовых приближений является теорема Хинчина [1], доказанная в 1924 году. Пусть $\Psi(x)$ — монотонно убывающая функция, определенная на $\mathbb{R}_+$, и пусть I — некоторый интервал из $\mathbb{R}$. Обозначим $L_1(\Psi)$ множество всех действительных $x \in I$, удовлетворяющих неравенству

$$|x - p/q| < \Psi(q)/q$$

для бесконечного количества чисел $p, q \in \mathbb{Z}$ с $q \neq 0$.

Теорема 1. *(Хинчина).*

$$\mu\left(L_1(\Psi)\right) = \begin{cases} 0 & \sum_{r=1}^{\infty} \Psi(r) < \infty \\ \mu(I) & \sum_{r=1}^{\infty} \Psi(r) = \infty \end{cases}.$$

Определим $L_n(\Psi)$ как множество точек $x \in \mathbb{R}$, для которых неравенство

$$|P(x)| < H^{-n+1}\,\Psi(H)$$

имеет бесконечно много решений в полиномах $P \in \mathbb{Z}[x]$, где H — это высота полинома P и $\deg P = n$.

В [2] доказано, что теорема Хинчина справедлива для $L_n(\Psi)$ в случае сходимости ряда. Случай расходимости был доказан в [3]. Вскоре после этого аналогичные результаты были получены на полях комплексных и p-адических чисел [4, 5].

Пусть $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ и $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — векторы с действительными координатами, удовлетворяющие условиям $v_i > 0, \lambda_i > 0,\ i = 1, 2, 3$. Определим $\mathcal{L}_{\mathbf{v},\boldsymbol{\lambda}}$ как множество точек внутри параллелепипеда $T = I \times K \times D$, где $I \subset \mathbb{R}$ — интервал, $K \subset \mathbb{C}$ — круг, $D \subset \mathbb{Q}_p$ — цилиндр, для которого система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < H^{-v_1}\,\Psi^{\lambda_1}(H) \\ |P(z)| < H^{-v_2}\,\Psi^{\lambda_2}(H) \\ |P(\omega)|_p < H^{-v_3}\,\Psi^{\lambda_3}(H) \end{cases} \tag{2}$$

имеет бесконечно много решений в полиномах $P \in \mathbb{Z}[x]$, где

$$v_1 + 2v_2 + v_3 = n - 3, \quad \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 1. \tag{3}$$

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия (2). Если*

$$\sum_{r=1}^{\infty} \Psi(r) = \infty,$$

то при всех $n \geqslant 3$ *верно равенство*

$$\mu(\mathcal{L}_{\mathbf{v},\boldsymbol{\lambda}}) = \mu(T),$$

где $\mathbf{v} = (\frac{n-4}{4},\ \frac{n-4}{4},\ \frac{n}{4})$ *и* $\boldsymbol{\lambda} = (\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4})$.

Эта теорема была доказана в [6]

В данной работе доказана следующая теорема

Теорема 3. *Предположим, что условия (2) и (3) выполнены. Если*

$$\sum_{r=1}^{\infty} \Psi(r) = \infty,$$

то при всех $n \geqslant 3$ *верно равенство*

$$\mu(\mathcal{L}_{\mathbf{v},\boldsymbol{\lambda}}) = \mu(T).$$

Доказательство теоремы 3 основано на свойствах регулярной системы векторов с алгебраическими координатами, которая была построена в [6].

Список цитированной литературы

1. Khintchine A. Einige Sätze über Kettenbrüche mit Anwen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen (german). Math. Ann., 1924, Vol. 92, no. 1–2, P. 115–125.

2. Bernik V. On the exact order of approximation of zero by values of integral polynomials. Acta Arithm., 1989, no. 53, P. 17–28.

3. Beresnevich V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers. Acta Arithm, 1999, no. 90, P. 97–112.

4. Берник В. И., Васильев Д. В Теорема Хинчиновского типа для целочисленных полиномов от комплексной переменной // Труды Института математики НАНБ, 1999, № 3, С. 10–20.

5. Ковалевская Э. И. Метрическая теорема о точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов в $\mathbb{Q}_p$ // Доклады НАН Беларуси, 1999, Т. 43, № 5, С. 34–36.

6. Bernik V., Budarina N. and Dickinson D. A divergent Khitchine's theorem in the real, complex and p-adic felds. Lithunian Mathematical Journal, 2008, Vol. 48, no. 2, P. 158–173.

Институт математики НАН Беларуси
Получено 14.04.2015

УДК 511.42

О распределении алгебраических чисел в малых комплексных кругах

М. В. Ламчановская, Н. И. Калоша (Минск, Беларусь),
Н. В. Шамукова (Бобруйск, Беларусь)
lammv@mail.ru, kalosha@im.bas-net.by, shamukova_n@mail.ru

Хорошо известно, что алгебраические числа степени $n \geq 2$ образуют всюду плотное подмножество комплексной плоскости. Авторами в явном виде найдена связь между количеством алгебраических чисел в малом комплексном круге и их высотой. Впервые данная связь была изучена в [1], где было введено понятие регулярной системы.

Определение 1. *Пусть* Γ *— счетное множество действительных чисел, и* $N : \Gamma \mapsto \mathbb{R}$ *— положительная функция. Пара* (N, Γ) *называется регулярной системой, если существует* $c_1 = c_1(N, \Gamma) > 0$ *такое, что для любого интервала* $I \subset \mathbb{R}$ *и всех* $T > T_0$*, где* $T_0 = T_0(N, \Gamma, I)$ *достаточно велико, можно построить последовательность* $\gamma_1, ..., \gamma_t \in I \bigcap \Gamma$ *со следующими свойствами:* $N(\gamma_i) \leq T$, $|\gamma_i - \gamma_j| > T^{-1}$, $t > c_1 \, |I| \, T$.

Авторами построена регулярная система комплексных алгебраических чисел с ненулевой мнимой частью в кругах малого радиуса и найдено явное выражение для T_0. Введем следующие обозначения: $T(0,1) \subset \mathbb{C}$ — единичный круг; $K(z_0, r) \subset T(0,1)$ — комплексный круг с центром в z_0 радиуса r; $c_1, c_2, \ldots$ — константы, зависящие только от n; $\mathcal{P}_n(Q) = \{P\,(z) \in \mathbb{Z}\,[z] : \deg P \leqslant n, H\,(P) \leqslant Q\}$.

Теорема 1. *Через $B_1(Q, \delta_0, K)$ обозначим множество комплексных чисел $z \in K(z_0, r)$ таких, что $|P(z)| < c_1 Q^{-\frac{n-1}{2}}$ и $|P'(z)| < \delta_0 Q$ для некоторого $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$. Для произвольного круга $K(z_0, r)$ радиуса $r > c_2 Q^{-\mu}$, $0 \leq \mu \leq 1$ справедлива оценка $\mu B_1(Q, \delta_0, K) < 1/4\mu K$, где δ_0 достаточно мало, а c_2 — достаточно велико.*

Теорема 2. *Пусть Γ — множество комплексных алгебраических чисел α степени не выше n, и $N\,(\alpha) = c_3 H\,(\alpha)^{\frac{n+1}{2}}$. Тогда (N, Γ) — регулярная система на комплексной плоскости.*

Список цитированной литературы

1. Baker A., Schmidt W. Diophantine approximation and Hausdorff dimension // Proc. Lond. Math. Soc. 1970. Vol. 21. Pp. 1:11.

Институт информационных технологий БГУИР.
Институт математики НАН Беларуси
Получено 05.05.2015

УДК 511.36

Бесконечная алгебраическая независимость некоторых полиадических чисел

В. Ю. Матвеев (Москва)
salomaa@mail.ru

Элементы кольца целых полиадических чисел имеют каноническое представление в виде ряда

$$\mathfrak{a} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n! \tag{1}$$

где $a_n \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Кольцо целых полиадических чисел является прямым произведением колец целых p – адических чисел $\mathbb{Z}_{p_i}$ по всем простым числам p_i, при этом ряд $\mathfrak{a}$ сходится в любом кольце $\mathbb{Z}_{p_i}$.

Таким образом, бесконечный набор элементов $a^{(p_i)} \in \mathbb{Z}_{p_i}$, соответствующих всем простым числам p_i, можно рассматривать, как совокупность координат элемента $\mathfrak{a}$ кольца целых полиадических чисел, представленного в виде вектора. Поэтому для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами полиадическое число $P(\mathfrak{a})$ имеет в кольце $\mathbb{Z}_p$ координату $P\left(a^{(p)}\right)$.

В работе [1] предложена следующая классификация целых полиадических чисел.

Назовем полиадическое число $\mathfrak{a}$ *алгебраическим*, если существует отличный от нуля многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что полиадическое число $P(\mathfrak{a})$ равно нулю, т.е. для любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено равенство $P\left(a^{(p)}\right) = 0$.

Назовем полиадическое число $\mathfrak{a}$ *алгебраическим*, если существует отличный от нуля многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что полиадическое число $P(\mathfrak{a})$ равно нулю, т.е. для любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено равенство $P\left(a^{(p)}\right) = 0$.

Полиадическое число, которое не является алгебраическим, естественно называть *трансцендентным полиадическим числом.* В этом случае для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует хотя бы одно простое число p такое, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P\left(a^{(p)}\right) \neq 0$.

Будем называть полиадическое число *бесконечно трансцендентным*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P\left(a^{(p)}\right) \neq 0$.

Наконец, будем называть полиадическое число *глобально трансцендентным*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P\left(a^{(p)}\right) \neq 0$.

Отметим, что из бесконечной трансцендентности $\mathfrak{a}$ не следует трансцендентность $a^{(p)}$ хотя бы для одного простого числа p.

Рассмотрим полиадические числа вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_i (a_i + b_i) \dots (a_i + (n-1) b_i) = \mathfrak{a}_i, \tag{2}$$

где $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $(a_i, b_i) = 1$, $i = 1, \dots, m$.

$$\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_j}{b_j} \notin \mathbb{Z}, \quad i \neq j$$

Теорема 1. *Полиадические числа $\mathfrak{a}_i$, определенные равенствами (2), бесконечно алгебраически независимы.*

Для доказательства используется модифицированный метод Зигеля-Шидловского для F–рядов [2].

Алгебраическую независимость рядов $f_i(z)$ доказываем по аналогии с теоремой Салихова В. Х. [3].

Список цитированной литературы

1. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады Академии наук, математика. 2014. Т. 439, № 6. С. 677–679.

2. Bertrand D.,Chirskii V.,Yebbou Y.. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse. 2004. Vol. XIII. no. 2. P. 241–260.

3. Салихов В. Х. Об алгебраической независимости значений E– функций удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям первого порядка // Мат. заметки. 1973. Т. 13, № 1. С. 29–40.

Московский институт электромеханики и автоматики.
Получено 14.01.2015

УДК 511.36

О значениях функций в точках из $\mathbb{C}_p$

В. Г. Чирский (Москва)
vgchirskii@yandex.ru

Пусть $\mathbb{Q}_p$ – поле p-адических чисел, $\mathbb{Z}_p$– кольцо целых p-адических чисел, $\overline{\mathbb{Q}}_p$ – алгебраическое замыкание $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{C}_p$ – пополнение $\overline{\mathbb{Q}}_p$ по p-адической метрике, продолженной с $\mathbb{Q}_p$.

Вопросы трансцендентности и алгебраической независимости и алгебраической независимости элементов $\mathbb{Q}_p$ над $\mathbb{Q}$ изучались многоими авторами, однако трансцендентности и алгебраической независимости элементов $\mathbb{C}_p$ над $\mathbb{Q}_p$ посвящено небольшое количество работ. Отметим статьи Амис [1], Эскассо [2], Ламперта [3], Нишиока [4].

В работах П. Бундшу и В. Г. Чирского [5], [6] исследовались арифметические свойства рядов вида $\sum_{k=1}^{\infty} a_k p^{r_k}$, $a_k \in \mathbb{Z}_p$, $r_k \in \mathbb{Q}$ и значений аналитических функций от рядов такого вида.

Цель настоящей работы – получить обобщения результатов статьи [6].

Теорема 1. *Пусть*

$$f(z) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} c_\gamma z^\gamma \in \mathbb{Z}_p[[z]],$$

причем $c_\gamma \neq 0$ *хотя бы для одного* $\gamma \in \mathbb{N}$ *и пусть* $l_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, m$ *и*

$$\alpha_{i,j} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,j,k} p^{r_{i,k}}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, l_i, \tag{1}$$

где $a_{i,j,k} \in \mathbb{Z}_p$, $|a_{i,j,k}|_p = 1$, $r_{i,k} \in \mathbb{Q}$ *и для любого* $i, \ldots, m$ *и любого* $k \in \mathbb{N}$ *выполняются неравенства*

$$0 < r_{i,k} < r_{i,k+1}. \tag{2}$$

Пусть для любого $i = 1, \ldots, m$ *и любого* $n \in \mathbb{N}$ *число* $r_{i,n+1}$ *не является линейной комбинацией с целыми коэффицентами чисел* $1, r_{i,1}, \ldots, r_{i,n}$ *и чисел* $r_{j,1}, \ldots, r_{j,n}, r_{j,n+1}$ *при всех* $j = 1, \ldots, m, j \neq i$

Пусть для любого $i = 1, \ldots, m$ *и любого* $N_1 \in \mathbb{N}$ *существуют числа* $N_2, \ldots$ $\ldots, N_{l_i} \in \mathbb{N}$, $N_1 < N_2 < \ldots < N_{l_i}$, *такие, что*

$$\Delta_{i,N_1,\ldots,N_{l_i}} = \begin{vmatrix} a_{i,1,N_1} & a_{i,1,N_{l_i}} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{i,l_i,1} & a_{i,l_i,N_{l_i}} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3}$$

Пусть для всех $i = 1, \ldots, m$ *и любого набора чисел* $N_1, N_2, \ldots, N_{l_i}$, *для которого выполнено неравенство (3), также имеет место неравенство*

$$ord_p \, \Delta_{i,N_1,\ldots,N_{l_i}} \leqslant \delta(N_1), \tag{4}$$

где $\delta(x)$- *возрастающая функция от* x. *Пусть для всех* $i, j = 1, \ldots, m$ *при* $n \to +\infty$

$$2\, r_{i,n+1} - r_{j,n+1} - \delta(n+1) \to +\infty \tag{5}$$

Тогда числа $f(\alpha_{i,j})$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, l_i$ *являются элементами* $\mathbb{C}_p$, *алгебраически независимыми над* $\mathbb{Q}_p$.

Теорема 2. *Пусть*

$$f_\lambda(z) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} C_{\lambda,\gamma} z^\gamma \in \mathbb{Z}_p[[z]],\ \lambda = 1, \ldots, k \tag{6}$$

алгебраически независимы над $\mathbb{Q}_p$. *Пусть* $l_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, mn$ *пусть точки* $\alpha_{i,j}$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1. Тогда $f_\lambda(\alpha_{i,j})$, $\lambda = 1, \ldots, k$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, C_i$ являются элементами $\mathbb{C}_p$ алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_p$.

В качестве приложений общей теоремы (2) приведем следующее утверждение.

Рассмотрим обобщенный гипергеометрический ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x_1)_j, \ldots, (x_u)_j}{(\lambda_1)_j, \ldots, (\lambda_v)_j} z^j.$$

В работе В. Х. Салихова [7], например, установлены такие условия, при которых эти ряды алгебраически независимы. Применение теоремы 2 позволяет получить соответствующий результат об алгебраической независимости их значений. Такую формулировку результата опускаем в виду ее громоздкости.

Другой пример q-базисные функции

$$E_q(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(1-q)\dots(1-q^j)},$$

$$L_q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{q^n - z}$$

рассматриваемые в [6]. Применение теоремы 2 к этим функциям позволяет получить более общий, чем в [6], результат.

Список цитированной литературы

1. Amice Y., Les nombers p-adiques, 1975. Paris.

2. Escassut A., Transcendence order over $\mathbb{Q}_p$ in $\mathbb{C}_p$. J. Number Theory// 16. P. 395–402 (1983), (coir.) 19, 451, (1984).

3. Lambert D., Algebraic p- adic expansions// 1986. J. Number Theory 23, P. 279–284.

4. Nishioka K., p-adic transcendental numbers// 1990. Proc. Amer. Math. Soc. 108. P. 39–41.

5. Bundschuh P., Chirskii V. G., Algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$// 2002. I. Arch, Math. 79. P. 345–352.

6. Bundschuh P., Chirskii V. G., Algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$// 2004. II. Acta, Arithm. 113.4. P. 309–326.

7. Салихов В. Х., Алгебраическая независимость значений гипергеометрических E– функций// ДАН СССР, 1989. 307. С. 284–287.

МГУ имени М. В. Ломоносова
Получено 12.04.2015

7. Дискретная геометрия и геометрия чисел

В программе секции представлены с одной стороны достижения владимирской теоретико-числовой школы, основанной В. Г. Журавлевым, с другой стороны, в этой секции представлены результаты по геометрии, дискретной геометрии и геометрии чисел, которые были наиболее близки научным интересам С. С. Рышкова.

УДК 511.335

Множества ограниченного остатка на основе параметрических многогранников

А. А. Абросимова[1] (Владимир)
albina.abrosimowa@yandex.ru

Рассмотрим D-мерный тор $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D/L$, где L — полная решетка размерности D над множеством действительных чисел $\mathbb{R}$. Пусть на торе $\mathbb{T}^D$ задано преобразование S_α — сдвиг тора на вектор $\alpha \in \mathbb{R}^D$. Выберем на торе начальную точку x_0, тогда многократный сдвиг тора S_α^j на вектор α порождает на нем орбиту $Orb_{x_0}(\alpha)$ точки x_0. Кроме того, выберем теперь на торе $\mathbb{T}^D$ некоторую область T.

Определение 1. *Определим считающую функцию $r(i) = \sharp\{j : 0 \leq j < i, S_\alpha^j \in T\}$ как количество попаданий точек орбиты $Orb_{x_0}(\alpha)$ в область $T \in \mathbb{T}^D$.*

Определение 2. *Вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_D)$ иррационален, если его координаты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_D$ и 1 линейно независимы над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$.*

Для иррационального вектора α точки орбиты $Orb_{x_0}(\alpha)$ всюду плотно и равномерно заполняют весь тор [1], то есть для $r(i)$ справедлива ассимптотическая формула

$$r(i) = i \operatorname{Vol}(T) + \delta(i), \tag{1}$$

где $\operatorname{Vol}(T)$ — объем области T, а $\delta(i) = o(i)$ – остаточный член формулы (1) или отклонение считающей функции $r(i)$ от ожидаемой величины $i \operatorname{Vol}(T)$.

Определение 3. *Множество T называется множеством ограниченного остатка или BR-множеством (bounded remainder set), если существует такая константа C, что выполняется неравенство $|\delta(\alpha, i, T)| \leqslant C$ для всех i.*

В 2011 г. автору удалось построить трехпараметрические множества ограниченного остатка на основе перекладывающихся шестиугольных разверток $T^2(c)$ двумерного тора $\mathbb{T}^2$ [2].

[1]Грант РФФИ № 14-01-00360

В этом случае развертка $T^2(c)$ разбивается на три перекладывающиеся области $T_k^2, k=0,12$, являющиеся множествами ограниченного остатка, для которых были получены точные границы и средние значения для отклонений [3].

В 2012 г. автор описал метод построения трехмерных множеств ограниченного остатка [4] на основе произведения торических разверток, впервые определенного в работах В. Г. Журавлева [5]. В данном случае рассматривалось произведение перекладывающихся единичных интервалов $T^1=T_0^1 \cup T_1^1$ и шестиугольных разверток $T^2(c)$. Были получены новые перекладывающаяся развертки размерности $D=3$, геометрически являющиеся шестиугольными призмами Е. С. Федорова. В работе [4] также доказано трехмерное обобщение теоремы Гекке.

Таким образом в двухмерном случае были получены множества ограниченного остатка, которые нельзя получить используя комбинации множеств меньшей размерности, назовем их атомарными множествами ограниченного остатка, по аналогии с атомом (неделимый) в физике. И трехмерные множества ограниченного остатка, которые получены как произведение одномерных и двумерных атомарных множеств.

Возникает вопрос, нельзя ли и в трехмерном случае, построить атомарные множества ограниченного остатка.

Для построения таких множеств каждой точке $c'=(c_1',c_2',c_3')$ из области $C=\{c'=(c_1',c_2',c_3')\in\mathbb{R}^3; c_i\geqslant 0, i=1,2,3,\sigma(c')\leqslant 1\}$, где $\sigma(c')=c_1'+c_2'+c_3'$, поставим в соответсвие выпуклый ромбододекаэдр $T^3(c')$ Е. С. Федорова с координатами вершин $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(0,0,1)$, $(1,1,0)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1+c_1',c_2',c_3')$, $(1+c_1',c_2',1+c_3')$, $(c_1',c_2',1+c_3')$, $(c_1',1+c_2',c_3')$, $(1+c_1',1+c_2',c_3')$, $(1+c_1',1+c_2',1+c_3')$, $(c_1',1+c_2',1+c_3')$. Полученный объект $T^3(c')$ обладает трансляционной симметрией, а значит может быть рассмотрен в качестве развертки трехмерного тора $\mathbb{T}^3$. Для построения разбиения ромбододекаэдра на непересекающиеся множества введем дополнительный параметр $\alpha'=(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3')$, такой что $\alpha'=tc'$, где $0<t\leqslant 1$. Получим семейство разбиений объекта $T^3(c')$ на четыре множества, геометрически представляющие собой три параллелепипеда — назовем их $T_k^3, k=1,2,3$, и ромбододекаэдр — T_0^3. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть задан сдвиг трехмерного тора $\mathbb{T}^3$ на иррациональный вектор $\alpha'=(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3')$ и пусть развертка тора $T^3(c')$ разбита на множества $T_k^3, k=0,1,2,3$. Тогда T_k^3 будут множествами ограниченного остатка и для отклонений δ_k, $k=0,1,2,3$ выполняются следующие точные неравенства*

$$\begin{array}{rll} 0 & \leqslant \delta_0(i)\leqslant & 3-2\sigma(c'); \\ -1 & \leqslant \delta_1(i)\leqslant & 2c_1'; \\ -1 & \leqslant \delta_2(i)\leqslant & 2c_2'; \\ -1 & \leqslant \delta_3(i)\leqslant & 2c_3'. \end{array}$$

Список цитированной литературы

1. Кейперс Л. Нидеррейтор Г. Равномерное распределение последовательностей. М.: Наука, 1985. – 408 с.

2. Абросимова А. А. Множества ограниченного остатка на двумерном торе // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12. Вып. 4(40). С. 15–23.

3. Абросимова А. А. Средние значения отклонений для распределения точек на торе // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. 2012. № 5 (124). Вып. 26. С. 5–11.

4. Абросимова А. А. Произведение торических разверток и построение множеств ограниченного остатка // Ученые записки орловского государственного университета. Серия: естественные, технические и медицинские науки. 2012. № 6. Ч.2. С. 30–37.

5. Журавлев В. Г. Перекладывающиеся торические развертки и множества огранниченного остатка // Записки научных семинаров ПОМИ. 2011. № 392. С. 95–145.

Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Получено 10.04.2015

УДК 511.335

Распределение точек на двумерном цветном торе

А. А. Абросимова, Д. А. Блинов [1] (Владимир)
blinoff33@gmail.ru

Рассмотрим разбиение двумерного тора $\mathbb{T}^2$ на три области

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^2_0 \sqcup \mathbb{T}^2_1 \sqcup \mathbb{T}^2_2. \tag{1}$$

Данное разбиение задается двумя параметрами c и t, где $c = (c_1, c_2)$ принадлежит области

$$C_{con} = \{c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2; c_i \geqslant 0, c_1 + c_2 \leqslant 1\} \qquad (2),$$

и $0 < t \leqslant 1$. В работе [1] было доказано, что, заданные таким образом, множества $\mathbb{T}^2_k, k = 0, 1, 2$ являются множествами ограниченного остатка и для каждого из них получены точные оценки остаточных членов $\delta_k(i), k = 0, 1, 2$

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leqslant \delta_0(i) \leqslant & 2 - c_1 - c_2, \\ -1 & \leqslant \delta_1(i) \leqslant & c_1, \\ -1 & \leqslant \delta_2(i) \leqslant & c_2 \end{array} \tag{3}$$

[1] Грант РФФИ № 14-01-00360

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$

Геометрическая интерпретация неравенств (3) заключается в том, что границы отклонений определяются границами шестиугольника $T^2(c)$, которые в свою очередь зависят от выбора параметра $c = (c_1, c_2)$ из области C_{con}. Для приложений необходимо, чтобы границы всех трех отклонений $\delta_k(i), k = 0, 1, 2$, были как можно меньше. Но если уменьшать границы хотя бы одного из отклонений, то неминуемо будут расширяться границы других отклонений, поэтому для оптимизации границ отклонений $\delta_k(i)$ необходим параметр, связывающий все три отклонения.

Чтобы разрешить эту проблему, будем рассматривать отклонения $\delta_k(i)$ как координаты трехмерного вектора $x = (x_0, x_1, x_2) = (\delta_0, \delta_1, \delta_2)$, а в качестве параметра, связывающего все три отклонения, выберем метрику трехмерного пространства $d_\theta(x)$.Будем рассматривать метрики вида $d_\theta(x) = (|x_0|^\theta + |x_1|^\theta + |x_2|^\theta)^{\frac{1}{\theta}}$, где $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$.

Назовем $\Delta_\theta(c) = \sup_{i \in \mathbb{N}} d_2(\delta(i))$ верхней границей векторного отклонения $\delta(i)$ в метрике $d_\theta(x)$ при фиксированном c. Тогда $\Delta_\theta = \inf_{c \in C_{con}} \Delta_\theta(c)$ — нижняя граница $\Delta_\theta(c)$ по всем c из области C.

Если выбрать $\theta = 2$, то получим естественную евклидову метрику $d_2(x) = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}$. Относительно величины нижней граници $\Delta_2(c)$ в метрике $d_2(x)$ доказана следующая теорема .

Теорема 1. *Пусть отклонения $\delta_k, k = 0, 1, 2$ задают трехмерный вектор x, и пусть его длина $d_2(x)$. Тогда, если $c \in C_{con}$, для Δ_2 справедливо следующее равенство $\Delta_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$.*

Полученное равенство достигается при $c = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Аналогичные результаты доказаны для метрик $d_1(x)$ и $d_\infty(x)$ [2].

Список цитированной литературы

1. Абросимова А. А. Средние значения отклонений для распределения точек на торе // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. г. Белгород: НИУ БелГУ, 2012. №. 5(124).Вып. 26.С. 5–11.

2. Абросимова А. А., Блинов Д. А. Оптимизация границ отклонений для двумерных множеств ограниченного остатка // Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. 2013. № 26(169). Вып. 33. С. 5–13.

Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Получено 10.04.2015

УДК 514.174+511.9+519

О плотности решетчатого покрытия для $n = 17$

М. М. Анзин (Москва)

webregistrator@mail.ru

В настоящей работе улучшена оценка плотности решетчатого покрытия евклидова пространства размерности $n = 17$. Этот результат направлен на решение проблемы, известной в литературе как «*проблема С. С. Рышкова в теории решетчатых покрытий*» [1, 2], и получен на основе полного описания строения L-разбиения классической решетки Коксетера A^6_{17}.

Задача о наименее плотном решетчатом покрытии евклидова пространства равными шарами состоит в отыскании для каждой размерности n такой решетки Γ_n, которая дает наименьшее значение плотности $\vartheta_n(\Gamma)$ решетчатого покрытия евклидова пространства E^n равными шарами.

Мы сводим исследование функции $\vartheta_n(\Gamma)$ к исследованию функции $eta_n(\Gamma)$ — аналога функции Эрмита

$$\eta_n(\Gamma) = \eta_n(f_\Gamma) = \frac{D^2}{\sqrt[n]{\det f_\Gamma}} = \frac{(2R)^2}{\sqrt[n]{\det f_\Gamma}}, \tag{1}$$

где $D = 2R$ — диаметр шара покрытия, $\det f_\Gamma$ — определитель матрицы положительной квадратичной формы f_Γ, отвечающей некоторому основному реперу решетки Γ. Функции $\vartheta_n(\Gamma)$ и $\eta_n(\Gamma)$ связаны соотношением $\eta_n(\Gamma) = 4(\vartheta_n(\Gamma)/\Omega_n)^{2/n}$, где Ω_n — объем n-мерного шара единичного радиуса.

Задача о решетчатых покрытиях была поставлена Кершнером, была решена для $n = 2-5$ (ссылки см. [3]). Для других $n \geqslant 6$ известны только оценки. При всех $n \leqslant 5$ минимум функции плотности $\vartheta_n(\Gamma)$ ($\eta_n(\Gamma)$) достигается на решетке Γ_n, отвечающей «главной форме первого типа Вороного» φ^*_n со значением функции $\eta_n(\Gamma_n) = \vartheta_n(\varphi^*_n)$:

$$\varphi^*_n(x_1, \dots, x_n) = n(x_1^2 + \dots + x_n^2) - 2(x_1x_2 + \dots + x_1x_n + \dots + x_{n-1}x_n),$$

$$\eta_n(\varphi^*_n) = \frac{n(n+2)\sqrt[n]{n+1}}{(3n+3)}.$$

Из асимптотических оценок ряда авторов следовало, что при достаточно больших n существуют решетки, дающие плотность покрытия меньшую, чем решетка φ^*_n. Но в этих работах не было получено никаких оценок такого числа n. Первые результаты в этом направлении были получены Рышковым в работе [4], где для всех четных $n \geqslant 114$ и для всех нечетных $n \geqslant 201$ были построены решетки лучшие, чем решетка φ^*_n.

Кроме этого, в [4] был поставлен ряд вопросов, основным из которых является вопрос о дальнейшем нахождении всех тех n, для которых существуют решетки, дающие плотность покрытия меньшую, чем решетка φ^*_n.

Поставленные в [4] вопросы обозначили проблему, которая в дальнейшем в [1] получила название «*проблема Рышкова в теории решетчатых покрытий*». Там же в [1], для всех $n \geqslant 24$ были найдены примеры решеток, с лучшими, чем у φ_n^*, плотностями покрытия. В целях окончательного решения проблемы Рышкова для $6 \leqslant n \leqslant 23$, в последующих работах были найдены аналогичные примеры для $n = 6,\ 9,\ 11 - 15,\ 22,\ 23$ (ссылки см. [3]). Настоящая работа посвящена аналогичному результату для $n = 17$.

Основная теорема. *Имеет место соотношение*

$$\eta_{17} \leqslant \eta_{17}(A_{17}^6) = \frac{13}{2}\sqrt[17]{2} = 6{,}770\cdots < \eta_{17}(A_{17}^*) = 7{,}090\ldots,$$

где $\eta_n = \inf\limits_{\Gamma\subset E^n} \eta_n(\Gamma) = \min\limits_{\Gamma\subset E^n} \eta_n(\Gamma)$, *для* $n = 17$, A_{17}^6 *— решетка Коксетера* [5].

Утверждение 1. *L-разбиение решетки, отвечающей форме A_{17}^6, образовано многогранниками, конгруэнтными 73 попарно неэквивалентным L-многогранникам. Максимальное значение радиуса шара, описанного вокруг L-многогранника, достигается на многогранниках пяти классов, и для радиуса R решетчатого покрытия выполняется равенство* $8R^2(A_{17}^6) = 6\frac{1}{2}$.

Доказательство утверждения 1 получено нами на основе полного описания строения L-разбиения соответствующей решетки аналогично тому, как это сделано в предыдущих работах автора (ссылки см. [3]), т.е. на основе построения таблицы данных для формулы объемов. Из-за большого объема данных, мы эту таблицу в настоящей работе не приводим.

Доказательство основной теоремы заключается в вычислении значения $\eta_n(\Gamma)$ по формуле (1) для решетки, отвечающей форме A_{17}^6, на основе известного из [5] значения определителя $\det A_{17}^6 = 1/2^{16}$ и значения радиуса покрытия R, известного из утверждения 1 (равного максимальному значению радиуса шара, описанного вокруг L-многогранника): $8R^2(L) = 6\frac{1}{2}$.

Список цитированной литературы

1. Bambah R. P., Sloane N. J.A. On a problem of Ryskov concerning lattice coverings // Acta Arithm. 1982. Vol. 42. P. 107–109.

2. Conway J. H., Sloane N. J. A. Sphere packings, lattices and groups (Third edition) // Springer-Verlag. 1999.

3. Анзин М.М. О проблеме С.С. Рышкова в теории решетчатых покрытий n-мерного евклидова пространства // Материалы VIII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» М.: Изд-во мех.-матем. ф-та МГУ. 2004. С. 374–377.

4. Рышков С.С. Эффектизация одного метода Давенпорта в теории покрытий // ДАН СССР. 1967. Т. 175, № 2. С. 303–305.

5. Coxeter H.S.M. Extreme forms // Canad. J. Math. 1951. Vol.3. P. 391–441.

ОАО "Т-Платформы" , Москва
Получено 30.04.2015

UDC 514.174

Canonical scalings and k-primitive parallelotopes

A. Gavrilyuk (Moscow)
agavrilyuk.research@gmail.com

Study of local canonical scalings consists of two major parts: at first of studying general canonical scalings of tilings (or partial tilings) in $\mathbb{E}^d$, at second, of studying polytopal fans in a tiling. Altogether they provide a powerful toolbox for studying local structure of tilings. It is intensively used in research on Voronoi cojecture and related questions.

We call a *scaling* any function defined on $(d-1)$-faces of a polytopal d-dimensional complex in $\mathbb{E}^d$: $s : \mathcal{F}^{d-1} \to \mathbb{R}$. Thus we can define *torsion* Δ_s about any inner $(d-2)$-face F^{d-2} of the complex. Let $F_1, F_2, \ldots, F_k$ be all facets of the tiling that contain F^{d-2}. On these facets, two opposite cyclic orders are naturally defined by the projection of the facets F_i and of F^{d-2} itself onto the two-dimensional plane complementary to the affine hull $aff(F^{d-2})$. Assume that the numbering of $F_1, F_2, \ldots, F_k$ is defined by one of these two cyclic orders and that unit normals $\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_k$ to these facets are chosen according to the same cyclic order. The torsion Δ_s of the scaling s around a $(d-2)$-face F^{d-2} is the quantity

$$\Delta_s(F^{d-2}) := \sum_{i=0}^{k} s(Fi)\mathbf{n}_i$$

It follows from the definition that the torsion is defined up to sign and, generally speaking, depends on the choice of the cyclic order. However, we are only interested in whether the torsion is equal to zero or not, which does not depend on the cyclic order.

A scaling s (of the facet set $\mathcal{F}^{d-1}$ of a tiling $\mathcal{T}$) is said to be *canonical* if the equality $\Delta_s(F^{d-2}) = 0$ holds for any $(d-2)$-face $F^{d-2} \in \mathcal{T}$. A local canonical scaling $s : \mathcal{S}^{d-1} \to \mathbb{R}$ of a subcomplex $S^{d-1} \in \mathcal{T}$ is a scaling with zero torsion around any $(d-2)$-face $F^{d-2} \in \mathcal{S}^{d-1}$ whose star $St_{\mathcal{T}}(F^{d-2})$ defined by the complex $\mathcal{T}$ also belongs to the subcomplex $\mathcal{S}^{d-1}$.

A *fan* in $\mathbb{E}^d$ is a family $\mathcal{F} = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ of nonempty polyhedral cones, such that, at first, any nonempty face of a cone in $\mathcal{F}$ is also a cone in $\mathcal{F}$ and, at second, the intersection of any two cones in $\mathcal{F}$ is a nonempty face of both. The fan $\mathcal{F}$ is called *complete* if the union of all cones in $\mathcal{F}$ coincides with $\mathbb{E}^d$. From the definition follows that any fan has a minimal (by inclusion) face M contained in all others. We take some point p in relative interior of M and consider the intersection of $\mathcal{F}$ with a ball B_ε of radius $\varepsilon > 0$ centered in p: $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \bigcap B_\varepsilon = \{C_1 \bigcap B_\varepsilon, C_2 \bigcap B_\varepsilon, \ldots, C_n \bigcap B_\varepsilon\}$. We call the resulting set $\mathcal{F}'$ a *local fan.* This modification of fan is more convenient for using with tilings. Easy to see that this construction is defined uniquely up to a homothety.

By a *pseudofan* of a k-face F in a tiling $\mathcal{T}$ we call the set of all faces of $\mathcal{T}$ containing F. We can easily switch from a pseudofan to a real fan: we consider any point p in $relint F$ and such its neighborhood $B_\varepsilon(p)$ that intersects just faces of $\mathcal{T}$ containing F (i.e. just faces from its pseudofan). It is a local fan. Such fan we call an *associated* fan of a face F.

We consider 3 different criteria for a fan to have a canonical scaling. We show how the local canonical scalings defined on associated fans could be used to construct global scalings of an entire tiling. Also we consider obstacles which could arise when applying the technique and we study how do they relate to Voronoi conjecture.

REFERENCES

1. A.A. Gavrilyuk, Geometry of lifts of tilings of euclidean spaces, Geometry, Topology, and Applications, Collected papers. Dedicated to Professor Nikolai Petrovich Dolbilin on the occasion of his 70th birthday, Tr. Mat. Inst. Steklova, 288, MAIK Nauka/Interperiodica, Moscow, 2015, 49–66

2. A. Ordine, Proof of the Voronoi conjecture on parallelotopes in a new special case. Ph.D. thesis, Queen's University, Ontario, 2005.

   http://higeom.math.msu.su/people/garber/Ordine.pdf

3. P. McMullen, Duality, sections and projections of certain Euclidean tiliings, Geom. Dedicata 49 (1994), 183-202

4. K. Rybnikov, Polyhedral Partitions and Stresses. Ph. D. thesis, Queen's University, Ontario, 1999.

5. G. Ziegler, Lectures on Polytopes. Graduate text in Mathematics, Vol. 152, Springer, 1995, revised sixth printing 2006.

Faculty of Computer Science, Higher School of Economics
Center for Optical Neural Technologies, Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences
Received 10.05.2015

UDC 514.174

Five-dimensional Dirichlet-Voronoi parallelohedra

A. Garber (Brownsville, USA)
alexeygarber@gmail.com

In this talk we will report about full classification of combinatorially different five-dimensional Dirichlet-Voronoi parallelohedra of lattices.

The classification of affinely different Delone triangulations (L-type domains) can be done using Voronoi's second reduction theory, see [1] for details. The classification of five-dimensional L-type domains was made by E. Baranovskii and S. Ryshkov in [2]. They found 221 different triangulations, but later P. Engel in [3] found that they missed one triangulation.

In this talk we will show how one can extend the Voronoi's reduction theory to find all affinely non-equivalent lattice Delone decompositions and combinatorially different Dirichlet-Voronoi parallelohedra in arbitrary dimension and present our computational results in dimension 5.

Our main result is the following

Theorem 1. *There are* 110244 *affine types of lattice Delone triangulations and* 110244 *of combinatorial types of Dirichlet-Voronoi parallelohedra in dimension* 5.

This is a joint work with M. Dutour Sikirić, A. Schürmann, and C. Waldmann.

REFERENCES

1. Schürmann A., Computational geometry of positive definite quadratic forms. – Providence, RI: American Mathematical Society, 2009. 147 p.

2. Baranovskii E. P., Ryshkov S. S., Primitive five-dimensional parallelohedra // Soviet Math. Dokl. 1973. Vol. 14, P. 1391–1395.

3. Engel P., New investigations of parallelohedra in $\mathbb{R}^d$ // Voronoi's Impact on Modern Science, Book II (ed. P. Engel et. al.). 1998. Vol. 21 of Proc. Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine. P. 22–60.

The University of Texas at Brownsville.
Received 20.04.2015

УДК 514.175, 515.162

О пополнении неполных неориентируемых гиперболических 3-многообразий

И. С. Гуцул (Кишинев, Молдова)
igutsul@mail.ru

В работе [1] У.Терстон развил теорию пополнения ориентируемых гиперболических 3-многообразий. Но он не рассматривал пополнение неполных неориентируемых гиперболических многообразий, поскольку его метод неприменим в этих условиях. В этом случае гиперболическое пространство необходимо рассматривать с точки зрения синтетической геометрии, т.е. модель Пуанкаре или другие модели гиперболического пространства в этом случае неприменимы.

В данной работе мы рассмотрим пополнение неполных неориентируемых гиперболических 3-многообразий. Сами многообразия некомпактны, но имеют конечный оъём.

Некомпактные неориентируемые гиперболические 3-многообразия конечного объёма могут иметь концы двух видов: ориентируемые и неориентируемые. Ориентируемый рог это множество вида $T^2 \times [0, \infty]$, т.е., это – произведение двумерного тора на луч. Неориентируемый рог это множество вида $K^2 \times [0, \infty]$, т.е., это – произведение бутылки Клейна на луч. Рассмотрим полное неориентируемое некомпактное гиперболическое 3-многообразие M конечного объёма. Тогда, как показано в [2], оно является жестким. Это означает, что два таких многообразия с изоморфными фундаментальными группами будут гомеоморфны. Если же мы начнём деформировать многообразие M, то оно станет неполным, но его можно пополнять.Итак, пусть M– полное неориентируемое некомпактное гиперболическое 3-многообразие конечного объёма. Тогда его можно получить отождествлением граней многогранника R в гиперболическом пространстве, некоторые вершины которого будут бесконечно удаленными, т.е. лежат на абсолюте. Рассмотрим орисферу S с центром в какой-либо бесконечно удалённой вершине A многогранника R, тогда движения, отождествляющие грани этого многогранника и переводящие центр орисферы S в себя, индуцируют на орисфере S дискретную двумерную группу Γ движений. Так как метрика орисферы евклидова и группа, порождённая всеми движениями, отождествляющими грани многогранника R, не содержит элементов конечного порядка, то группа Γ изоморфна фундаментальной группе либо тора, либо бутылке Клейна. Если мы начнём деформировать многогранник, то на орисфере S получим группу подобия Γ^1. Если Γ^1– неориентируемая группа, то пополнение такого конца многообразия M не может привести к многообразию, потому что все неориентируемые двумерные группы подобия, для которых существуют правильные разбиения проколотой плоскости на компактные выпуклые многоугольники, содержат вращения или отражения [3]. Но если Γ^1– ориентируемая группа, то пополнения такого конца многообразия M приводит к счётной серии неориентируемых многообразий M_i. Более того, объёмы этих многообразий сходятся к объёму многообразия M.

В качестве иллюстрации рассмотрим многообразие, получаемое отождествлением граней октаэдра O со всеми вершинами на абсолюте. Обозначим бесконечно удалённые вершины октаэдра O цифрами $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Легко доказывается, что множество таких октаэдров образует шестипараметрическое семейство. Отождествим грани октаэдра движениями по следующей схеме:

$$(1, 2, 5)\,\varphi_1(4, 3, 5); (2, 3, 5)\,\varphi_2(1, 4, 5); (1, 2, 6)\,\varphi_3(4, 1, 6); (3, 4, 6)\,\varphi_4(2, 3, 6).$$

Тогда в результате мы получим неориентируемое многообразие с одним ориентируемым рогом и двумя неориентируемыми рогами. Для того, чтобы провести метрические расчеты, разобьём октаэдр O на четыре симплекса

$$T_1(1,2,3,5), T_2(1,3,4,5); T_3(1,3,4,6); T_4(1,3,2,6).$$

Пусть двугранные углы этих тетраэдров будут

$$T_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1);\ T_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2);\ T_3(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3);\ T_4(\alpha_4, \beta_4, \gamma_4).$$

Тогда отождествления $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ приведут к неполному неориентируемому многообразию M если двугранные углы, указанных симплексов, удолетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \pi, \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = \pi, \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = \pi,\\
&\alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4 = \pi, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\pi,\\
&\sin\beta_1/\sin\gamma_1 \times \sin\beta_2/\sin\gamma_2 = 1\ \ \sin\beta_3/\sin\gamma_3 \times \sin\beta_4/\sin\gamma_4 = 1,\\
&\sin\beta_1/\sin\alpha_1 \times \sin\beta_2/\sin\alpha_2 \times \sin\alpha_3/\sin\gamma_3 \times \sin\alpha_4/\sin\gamma_4 = 1.
\end{aligned}$$

Кроме того, полученное многообразие M имеет ориентируемый рог, который дает вершина 5, неориентируемый рог вершины 6 и неориентируемый рог образованный вершинами 1,2,3,4. Если мы потребуем, чтобы неориентируемые рога были полны (т.е. дискретные группы на соответствующих орисферах являются группами движений), то параметры октаэдра дадут равенства $\alpha_3 = \alpha_4,\ \beta_3 = \beta_4,\ \gamma_3 = \gamma_4$. Тогда получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \pi\,,\ \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = \pi\,,\ \alpha_3 + 2\times\beta_3 = \pi\,,\\
&\alpha_1 + \alpha_2 + 2\times\alpha_3 = 2\pi\,,\ \ \sin\beta_1/\sin\gamma_1 \times \sin\beta_2/\sin\gamma_2 = 1\,,\\
&\sin\beta_1/\sin\alpha_1 \times \sin\beta_2/\sin\alpha_2 \times \sin_3^2/\sin^2\beta_3 = 1.
\end{aligned} \tag{1}$$

Мы получили, что 8 параметров связаны 6 уравнениями. Таким образом, мы имеем два свободных параметра, которые можно использовать для пополнения ориентируемого рога, связанного с вершиной 5. Рассмотрим орисферу S с центром в вершине 5. На ней мы получаем двумерную группу симметрии подобия, которая индуцирована движениями φ_1, φ_2. Чтобы эта группа была дискретной, необходимо, чтобы она порождалась двумя спиральными вращениями f_1 и f_2, которые связаны уравнениями $m \times \psi_1 + n \times \psi_2 = 2\pi;$ и $k_1^m = k_2^n$, где m и n – натуральные взаимно простые и $m + n \geqslant 5$. В этих уравнениях ψ_1, ψ_2 – углы поворотов, а k_1, k_2 – коэффициенты подобия спиральных вращений f_1, f_2. Тогда для пополнения рога необходимо систему уравнений (1) дополнить уравнениями

$$\begin{aligned}
&m(\beta_1 - \beta_2) + n(\gamma_2 - \gamma_1) = 2\pi,\\
&((\sin\gamma_1/\sin\alpha_1) \times (\sin\alpha_2/\sin\gamma_2))^m = ((\sin\alpha_1/\sin\beta_1) \times (\sin\beta_2/\sin\alpha_2)^n,
\end{aligned}$$

где m и n – натуральные взимно простые и $m + n \geqslant 5$. Варьируя числа m и n, мы получим счетную серию неориентируемых некомпактных гиперболических 3-многообразий M_{mn}, причем объёмы этих многообразий ограничены объёмом правильного гиперболического октаэдра со всеми вершинами на абсолюте.

Список цитированной литературы

1. W.P. Thurston. The geometry and topology of 3-manifolds, Mimeographed Lecture Notes, Princeton Univ., 1978.

2. G. Prasad. Strong rigidity of Q-rank 1 lattices, Invent. Math. 1973, V.21, pp. 255-286.

3. Е.А. Заморзаева. Области типов разбиений Дирихле плоскости для групп симметрии подобия. Известия АН МССР, Серия физ.-тех. и матем. наук, 1987, №3, стр.3-8.

Институт математики и информатики Академии Наук Молдовы.
Получено 08.04.2015

УДК 514.172.45

Комбинаторика трёхмерных флаговых простых многогранников

Н. Ю. Ероховец[1] (Москва)
erochovetsn@hotmail.com

Введение. Выпуклый n-мерный многогранник называется *простым*, если в каждой его вершине сходится ровно n гиперграней. *Комбинаторным многогранником* называется класс комбинаторной эквивалентности выпуклых многогранников, где два многогранника *комбинаторно эквивалентны*, если существует взаимно однозначное соответствие между их множествами граней, сохраняющее отношение включения.

Известно, что любой простой трёхмерный многогранник комбинаторно эквивалентен многограннику, который получается из тетраэдра последовательностью срезок вершин, рёбер и пар соседних рёбер.

Пусть $p_k(P)$ – число k-угольных двумерных граней **простого** трёхмерного многогранника P. Известно, что

$$3p_3 + 2p_4 + p_5 = 12 + \sum_{k\geqslant 7}(k-6)p_k. \qquad (*)$$

Теорема 1 (Эберхард, 1891). *Для любого набора неотрицательных целых чисел $\{p_k\colon k \geqslant 3, k \neq 6\}$, удовлетворяющего условию $(*)$, существует простой трёхмерный многогранник P, такой что $p_k = p_k(P)$ для всех $k \neq 6$.*

Определение 1. *Простой многогранник P называется* **флаговым**, *если любой набор его попарно пересекающихся гиперграней $F_{i_1}, \dots, F_{i_k}\colon F_{i_s} \cap F_{i_t} \neq \varnothing$, $\forall s, t$, имеет непустое пересечение $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} \neq \varnothing$.*

[1]Работа частично поддержана грантами Президента РФ МК-600.2014.1 и РФФИ № 14-01-31398-мол-а

Симплекс Δ^n не является флаговым многогранником при $n \geqslant 2$. Известно, что для флагового многогранника P число m его гиперграней не меньше, чем $2n$, причём если $m = 2n$, то P комбинаторно эквивалентен n-мерному кубу I^n.

Трёхмерный простой многогранник $P \neq \Delta^3$ не является флаговым тогда и только тогда, когда у него есть 3-*пояс*, то есть три грани F_i, F_j, F_k, которые попарно пересекаются: $F_i \cap F_i, F_j \cap F_k, F_k \cap F_i \neq \varnothing$, но имеют пустое пересечение $F_i \cap F_j \cap F_k = \varnothing$.

В этом случае проведём через три точки на рёбрах $F_i \cap F_j$, $F_j \cap F_k$ и $F_k \cap F_i$ плоскость, которая разрежет многогранник P на два многогранника P_1' и P_2'. При помощи проективного преобразования сделаем так, чтобы их треугольные грани, возникшие при разрезании, получались срезкой вершин v_1 и v_2 некоторых многогранников P_1 и P_2 соответственно. Говорят, что многогранник P комбинаторно эквивалентен *связной сумме* многогранников P_1 и P_2 вдоль вершин v_1 и v_2. Таким образом, трёхмерный многогранник $P \neq \Delta^3$ является флаговым тогда и только тогда, когда он комбинаторно не эквивалентен связной сумме двух простых многогранников.

В.Д. Володин [2] доказал, что *трёхмерный комбинаторный флаговый* **симплициальный** *многогранник можно привести к октаэдру последовательностью стягиваний рёбер*. Для двойственных простых многогранников этот результат формулируется следующим образом.

Теорема 2 (Володин, 2012). *Трёхмерный простой многогранник является флаговым тогда и только тогда, когда он комбинаторно эквивалентен многограннику, который получается из куба I^3 при помощи последовательности срезок* **одной** *плоскостью s подряд идущих рёбер k-угольных граней для $0 < s < k-2$.*

Фуллереном называется простой трёхмерный многогранник, у которого все грани являются пятиугольниками и шестиугольниками (см. [3]). Из формулы $(*)$ для фуллерена имеем $p_5 = 12$. Известно, что существуют фуллерены с любым числом $p_6 \geqslant 0$, $p_6 \neq 1$.

Основные результаты. Подробные доказательства см. в [1].

Мы доказываем аналог теоремы Эберхарда для флаговых многогранников. Если многогранник является флаговым, то $p_3 = 0$.

Теорема 3. *Для любого набора неотрицательных целых чисел*

$$\{p_k \colon k \geqslant 3, k \neq 6\},$$

удовлетворяющего условиям $(*)$ и $p_3 = 0$, существует простой **флаговый** *трёхмерный многогранник Q, такой что $p_k = p_k(Q)$ для всех $k \neq 6$.*

Для доказательства этого утверждения мы берём многогранник P из теоремы Эберхарда с $p_3 = 0$ и одновременно срезаем **разными** плоскостями все его рёбра. Получается флаговый многогранник Q, у которого $p_k(Q) = p_k(P)$, $k \neq 6$.

Мы усиливаем теорему Володина следующим образом.

Теорема 4. *Трёхмерный простой многогранник является флаговым тогда и только тогда, когда он комбинаторно эквивалентен многограннику, который получается из куба I^3 последовательностью* **срезок рёбер** *и* **срезок пар соседних рёбер у граней с не менее, чем шестью сторонами**.

Наконец, приведём последний основной результат.

Теорема 5. *Любой фуллерен является флаговым многогранником.*

Доказательство основано на изучении наборов чисел рёбер с одной стороны от 3-пояса, не содержащего с одной из сторон других 3-поясов. Этот результат можно переформулировать следующим образом. *Если p-вектор* $(p_3, p_4, p_5, \dots)$ *трёхмерного простого многогранника P имеет вид* $(0, 0, p_5, p_6, 0, \dots)$*, то P является флаговым.* Если немного ослабить требования, то утверждение перестаёт быть верным. Связная сумма двух кубов даёт многогранник с p-вектором $(0, 6, 0, 3, 0, \dots)$, поэтому многогранник только с четырёхугольными, пятиугольными и шестиугольными гранями не обязательно является флаговым. Связная сумма двух додекаэдров даёт многогранник с p-вектором $(0, 0, 18, 0, 0, 3, 0, \dots)$, поэтому отсутствие треугольников и четырёхугольников также не влечёт флаговость многогранника.

Благодарности. Автор благодарит В.М.Бухштабера за постановки задач и внимание к работе и И.Ю.Нетая за высказанную гипотезу о флаговости фуллеренов.

Список цитированной литературы

1. Бухштабер В. М., Ероховец Н. Ю. Усечения простых многогранников и приложения // Труды МИАН им. В.А.Стеклова. 2015. Т. 289.

2. Володин В. Д. Комбинаторика флаговых симплицилальных 3-многогранников // УМН. 2015. Т. 70. № 1. С. 181–182.

3. Деза М., Дютур Сикирич М., Штогрин М. И. Фуллерены и диск-фуллерены. // УМН. 2013. Т. 68. № 4. С. 69–128.

МГУ имени М. В. Ломоносова
Получено 18.04.2015

УДК 511.95

Геометризация систем счисления[1]

А. А. Жукова, А. В. Шутов (Владимир)
georg967@mail.ru

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 14-01-00360-а.

Пусть $\alpha \in (0;1)$ — иррационально и имеет разложение в цепную дробь вида

$$\alpha = \cfrac{1}{q_1(\alpha) + \cfrac{1}{q_2(\alpha) + \cfrac{1}{q_3(\alpha) + \ldots}}},$$

или, более коротко,

$$\alpha = [0; q_1(\alpha), q_2(\alpha), q_3(\alpha), \ldots).$$

Пусть $\{Q_i(\alpha)\}$ – последовательность знаменателей подходящих дробей к α. Хорошо известно [7], что любое натуральное число n может быть представлено в виде

$$n = \sum_{i=0}^{k} z_i(\alpha, n) Q_i(\alpha),$$

где $z_0(\alpha, n) \leqslant q_1(\alpha) - 1$, а $z_i(\alpha, n) \leqslant q_{i+1}(\alpha)$ при $i \geqslant 1$, причем из того, что $z_i(\alpha, n) = q_{i+1}(\alpha)$ следует, что $z_{i-1}(\alpha, n) = 0$. Данное разложение, часто называемое разложением Островского-Цеккендорфа, может быть построено по так называемому жадному алгоритму.

Набор $(z_0, \ldots, z_l)$ будем называть α-допустимым, если $z_0 \leqslant q_1(\alpha) - 1$, $z_i \leqslant q_{i+1}(\alpha)$ при $i \geqslant 1$, причем из $z_i = q_{i+1}(\alpha)$ следует, что $z_{i-1} = 0$. Пусть $(z_0, \ldots, z_l)$ – α-допустимый набор. Определим множество

$$\mathbb{Z}(z_0, \ldots, z_l) = \{n \in \mathbb{Z}, n \geqslant 0, z_0(\alpha, n) = z_0, \ldots, z_l(\alpha, n) = z_l\}.$$

Множества $\mathbb{Z}(z_0, \ldots, z_l)$ в важных частных случаях $\alpha = \tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $\alpha = \tau_g = \frac{\sqrt{g^2+4}-g}{2}$, $g \geqslant 2$ изучались в работах [4] и [5] соответственно. В данных работах было показано, что множество $\mathbb{Z}(z_0, \ldots, z_l)$ допускает достаточно простое геометрическое описание: замыкание образа данного множства под действием отображения $\chi(n) = \{(n+1)\tau\}$ ($\chi(n) = \{(n+1)\tau_g\}$) представляет собой некоторый эффективно вычислимый отрезок. Данный факт был использован для решения ряда аналогов классических теоретико-числовых задач, рассматриваемых в числах из данных множеств.

Целью настоящей работы является обобщение описанного результата на случай произвольного иррационального $\alpha \in (0;1)$. Пусть $\chi(\alpha, n) = \{(n+1)i_0(\alpha)\}$, где $i_0(\alpha) = \max\{\alpha; 1-\alpha\}$. Для произвольного α-допустимого набора $(z_0, \ldots, z_l)$ определим множество

$$\mathbb{X}(z_0, \ldots, z_l) = \overline{\{\chi(\alpha, n) : n \in \mathbb{Z}(z_0, \ldots, z_l)\}}.$$

Справедлива следующая теорема о геометризации систем счисления.

Теорема 1. *Для произвольного α-допустимого набора $(z_0, \ldots, z_l)$ множество $\mathbb{X}(z_0, \ldots, z_l)$ представляет собой отрезок вида $[\{a\alpha\}; \{b\alpha\}]$ с эффективно вычислимыми $a, b \in \mathbb{Z}$.*

Пусть $I \subset [0;1]$ – некоторый отрезок, $\mathbb{N}(\alpha, I) = \{n \in \mathbb{N} : \{n\alpha\} \in I\}$. Сформулированная выше теорема показывает, что множества вида $\mathbb{Z}(z_0, \ldots, z_l)$ фактически являются частными случаями множеств $\mathbb{N}(\alpha, I)$.

Отметим, что в работе [6] была решена линейная аддитивная задача для чисел из множеств $\mathbb{N}(\alpha, I)$. Далее в работах [1]–[3] в случае квадратичной иррациональности α для чисел из $\mathbb{N}(\alpha, I)$ были решены аналоги проблем Гольдбаха и Хуа-Локена, а также получен аналог теоремы Лагранжа о четырех квадратах. Таким образом, полученная характеризация может быть использована для решения ряда задач теории чисел в числах, принадлежащих множествам $\mathbb{Z}(z_0, \ldots, z_l)$.

Список цитированной литературы

1. Гриценко С. А., Мотькина Н. Н., Задача Хуа–Локена с простыми числами специального вида // ДАН республики Таджикистан. 2009. Т. 52. № 7. С. 497–500.

2. Гриценко С. А., Мотькина Н. Н., О некоторых аддитивных задачах теории чисел // Научные ведомости БелГУ. Серия Математика. Физика 2010. Т. 55(76) № 18. С. 83–87.

3. Гриценко С. А., Мотькина Н. Н., Об одном варианте тернарной проблемы Гольдбаха // ДАН республики Таджикистан. 2009. Т. 52. № 6. С.413-417.

4. Давлетярова Е. П., Жукова А. А., Шутов А. В., Геометризация системы счисления Фибоначчи и ее приложения к теории чисел // Алгебра и анализ. 2013. Т. 25. № 6. С. 1–23.

5. Давлетярова Е. П., Жукова А. А., Шутов А. В., Геометризация обобщенных систем счисления Фибоначчи и ее приложения к теории чисел // Алгебра и анализ, (в печати).

6. Шутов А. В., Об одной аддитивной задаче с дробными долями // Научные ведомости БелГУ. Серия Математика. Физика. 2013. Т. 5(148). № 30. С. 111–120.

7. Ostrowski A. Bemerkugen zur Theorie der Diophantischen Approximationen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1922. Vol. 1. P. 77–98.

Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации Владимирский филиал
Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Получено 20.01.2015

УДК 511.95

Многоцветные множества ограниченного остатка

В. Г. Журавлев [1] (Владимир)
vzhuravlev@mail.ru

Пусть $r(i, X^1)$ — количество точек орбиты длины i относительно вращения $S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \bmod 1$ окружности единичной длины $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ на угол α, попавших в X^1. Обозначим через

$$\delta(i, X^1) = r(i, X^1) - i|X^1|$$

отклонение функции распределения $r(i, X^1)$ от ее среднего значения $i|X^1|$, где $|X^1|$ означает длину X^1. В 1921 г. Э. Гекке доказал теорему [1]: если X^1 имеет длину $|X^1| = h\alpha + b$, где $h \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$, то для отклонения $\delta(i, X^1)$ выполняется неравенство

$$|\delta(i, X^1)| \leqslant h \tag{1}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$

Орен [2] перенес результат Гекке на конечные объединения интервалов X^1 и для таких множеств получил оценку

$$\delta(i, X^1) = O(1) \quad \text{при} \quad i \to \infty \tag{2}$$

Отметим, что интервалы из множества X^1 сами в отдельности могут и не обладать свойством (2).

В общем случае, если X^d принадлежит d-мерному тору $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ и для него выполняется условие (2), то X^d называется множеством ограниченного остатка.

Глобальный подход к поиску множеств ограниченного остатка предложен в [3], где вместо отдельных множеств X_k^d на торе $\mathbb{T}^d$ стали рассматриваться полные разбиения торов $\mathbb{T}_{c,\lambda}^d = X_0^d \sqcup X_1^d \sqcup \ldots \sqcup X_s^d$ с некоторыми параметрами c, λ. Основная идея состояла в том, чтобы определить подъем тора $\mathbb{T}^d$ в накрывающее пространство $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{R}^d & \xrightarrow{S_v} & \mathbb{R}^d & \\ \pi & \downarrow & & \downarrow & \pi \\ & \mathbb{T}^d & \xrightarrow{S_\alpha} & \mathbb{T}^d & \end{array}, \tag{3}$$

при котором повороту тора S_α отвечает перекладывание S_v некоторых множеств $X'_0, X'_1, \ldots, X'_s$ из $\mathbb{R}^d$. Если число таких множеств X'_k окажется $s+1 \leqslant d+1$, то каждый из образов $X_k^d = \pi(X'_k)$ на торе $\mathbb{T}^d$ будет BR-множеством, а соответствующее объединение $T_{c,\lambda}^d = X'_0 \sqcup X'_1 \sqcup \ldots \sqcup X'_s$ из $\mathbb{R}^d$ — торической разверткой

[1] Грант РФФИ № 14-01-00360

для $\mathbb{T}^d$, т.е. фундаментальной областью в пространстве $\mathbb{R}^d$ относительно трансляций кубической решеткой $\mathbb{Z}^d$. Такие развертки T^d были сконструированы в [4] с помощью перекладывающихся параллелоэдров — многогранников, трансляционно разбивающих пространство $\mathbb{R}^d$. Указанные параллелоэдры получаются сложением по Минковскому d-мерного единичного куба C^d и отрезков.

В [5] по схеме (3) были построены простейшие многомерные множества ограниченного остатка $X^d = P^d$, являющиеся d-мерными многогранниками: параллелепипедами или выпуклыми параллелоэдрами с числом вершин $\sharp V(P^d) = 2^{d+1} - 2$. Для размерностей $d = 1$ и 2 это будут соответственно множества, содержащие отрезки Гекке и шестиугольники с попарно параллельными равными сторонами, а для $d = 3, 4$ — параллелоэдры Вороного, среди которых содержится, например, ромбический додекаэдр Федорова. Для указанных многогранников ограниченного остатка $X^d = P^d$ в [5] доказано неравенство

$$|\delta(i, X^d)| \leqslant dh, \tag{4}$$

являющееся многомерным аналогом теоремы Гекке (1). Здесь в неравенстве (4) отклонения $\delta(i, X^d)$ рассматриваются для сдвига тора S_β на вектор $\beta = \frac{1}{h}(\alpha+l)$, где h — любое натуральное число и l — произвольный вектор из кубической решетки $\mathbb{Z}^d$.

Следующим шагом исследования общих многомерных множеств ограниченного остатка может служить задача о построении более сложные множества X^d, отличных от вытянутых кубов $X^d = P^d$ и их малых деформаций. Основная идея состоит в том, чтобы использовать многоцветные разбиения

$$\mathbb{T}^d_{A,c,\lambda} = X^d_0 \sqcup X^d_1 \sqcup \ldots \sqcup X^d_D$$

тора $\mathbb{T}^d$ с числом областей $D + 1 > d + 1$, получающиеся как сечения соответствующих перекладывающихся разбиений

$$\mathbb{T}^D_{A,c,\lambda} = X^D_0 \sqcup X^D_1 \sqcup \ldots \sqcup X^D_D$$

тора $\mathbb{T}^D$ бóльшей размерности $D > d$. При таком подходе возникают множества ограниченного остатка X^d, представляющие собою конечные объединения d-мерных многогранников, каждый из которых является сечением некоторого D-мерного многогранника из разбиения $\mathbb{T}^D_{A,c,\lambda}$, т.е. некоторого отмеченного выше параллелепипеда или выпуклого параллелоэдра P^D. Доказывается, что отклонения $\delta(i, X^d)$ для таких многоцветных множеств ограниченного остатка X^d снова удовлетворяют неравенству (4).

Список цитированной литературы

1. Hecke E. Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins // Math. Sem. Hamburg. Univ. 1921. Vol. 1. P. 54–76.

2. Oren I. Admissible functionswithmultiple discontinuities // Univ. Nac. Autónoma México, Mexico City. 1981. Vol. V. I. P. 217—230.

3. Журавлев В. Г. Многомерная теорема Гекке о распределении дробных долей // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 1. С. 95–130.

4. Журавлев В. Г. Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2011. Т. 392. С. 95—145.

5. Журавлев В. Г. Многогранники ограниченного остатка. Математика и информатика, 1 — К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы. — Совр. пробл. матем. Москва: МИАН, 2012. 128 с.

Владимирский государственный университет
Получено 09.04.2015

УДК 514.174.5

О новых диэдрических разбиениях для 4 серий групп движений сферы

Е. А. Заморзаева (Кишинев, Молдова)
zamorzaeva@yahoo.com

Разбиение сферы на диски называется диэдрическим, если каждый диск разбиения конгруэнтен одному из двух фиксированных дисков.

Диэдрическое ребро-в-ребро разбиение сферы на геодезические многоугольники называется складывающимся (в оригинале folding), если все вершины разбиения имеют четные кратности и сумма углов через один вокруг каждой вершины равна π.

Португальские математики A. M. d'Azevedo Breda, A. F. Santos и др. нашли и описали диэдрические складывающиеся разбиения на треугольники и сферические параллелограммы [1], а также с некоторыми парами треугольников. Диэдрические разбиения сферы без свойства складывания были получены канадскими математиками R. J. Dawson, B. Doyle для некоторых треугольников.

Я подхожу к нахождению диэдрических разбиений сферы с другой стороны, через исследование разбиений сферы со свойствами транзитивности.

Пусть W – разбиение сферы на диски и G – дискретная группа движений сферы. Разбиение W сферы называется k-изоэдрическим относительно группы G, если G отображает разбиение W на себя и все диски разбиения можно распределить по k непустым классам транзитивности относительно действия группы.

Две пары (W, G) и (W', G') принадлежат одному сорту Делоне, если существует такое гомеоморфное преобразование φ сферы, отображающее разбиение W на разбиение W', что выполняется соотношение $G = \varphi^{-1} G' \varphi$.

При моем подходе существенно то, что диски разбиения не обязательно являются геодезическими многоугольниками. Элементы разбиения определяются следующим образом. Вершина (ребро) раззбиения сферы на диски есть связная компонента пересечения двух или более различных дисков, которая является (соответственно не является) единственной точкой.

В настоящем сообщении мы рассматриваем основные сорта Делоне, в которых группа G действует один раз транзитивно на совокупности дисков каждого класса разбиения W.

Любое диэдрическое разбиение сферы на диски является k-изоэдрическим относительно некоторой группы G движений сферы при некотором значении k. Этот факт теоретически можно использовать следующим образом: сначала найти k-изоэдрические разбиения для разных значений k, а потом среди них выбрать разбиения с двумя классами конгруэнтности дисков.

Дискретные группы движений сферы распределяются по 7 бесконечным сериям и 7 отдельным группам. Полная классификация изоэдрических ($k = 1$) разбиений сферы приведена в [2]. В [3] автором была предложена процедура расщепления дисков, позволяющая из основных k-изоэдрических разбиений получать все возможные основные $(k+1)$-изоэдрические разбиения. В [4] указаны полученные этим методом основные 2-изоэдрические разбиения сферы, причем для всех разбиений, удовлетворяющих условию нормальности по [2], приведены рисунки представителей серии.

В работе [4] для групп движений сферы я придерживалась обозначений работы [2]. Более удобным является символ орбифолда, предложенный J. H. Conway. В этой символике для всех нижеприведенных серий групп орбифолдом является сфера, "$*$"соответствует компоненте границы, "n"и "2"соответствуют поворотным центрам n-го и 2-го порядков.

Для 4 бесконечных серий дискретных групп движений сферы с символами орбифолда $*nn$, nn, $*22n$ и $n*$ с помощью той же процедуры расщепления дисков из основных 2-изоэдрических разбиений сферы на диски были получены все 3-изоэдрические разбиения сферы на диски.

Среди известных 3-изоэдрических разбиений сферы сначала были выбраны те сорта Делоне, которые содержат по 2 класса дисков с одинаковым количеством сторон. Потом среди выбранных разбиений были определены, с помощью сферической геометрии, те разбиения, в которых диски из этих двух классов могут быть конгруэнтны. В результате были получены диэдрические разбиения сферы на диски. Для каждого полученного диэдрического разбиения сферы было проверено, удовлетворяет ли оно условиям складывания или нет.

Для серии групп движений $*nn$ имеются 7 бесконечных серий диэдрических разбиений сферы на диски, из которых 2 серии удовлетворяют условиям складывания.

Для серии групп движений nn имеются 9 бесконечных серий диэдрических разбиений сферы на диски, из которых 1 серия удовлетворяет условиям складывания.

Для серии групп движений $*22n$ имеются 18 бесконечных серий диэдрических разбиений сферы на диски и 4 отдельных диэдрических разбиения. Из них 5 бесконечных серий и 3 отдельных разбиения удовлетворяют условиям складывания.

Для серии групп движений $n*$ имеются 22 бесконечные серии диэдрических разбиений сферы на диски и 1 отдельное диэдрическое разбиение. Из них 2 бесконечные серии разбиений при четном n удовлетворяют условиям складывания.

Список цитированной литературы

1. d'Azevedo Breda A. M., Santos, Altino F. Symmetry groups of a class of spherical folding tilings // Applied Mathematics and Information Sciences. 2009. Vol. 3, no. 2. P. 123—134.

2. Grünbaum, Branko, Shephard, G. C. Spherical tilings with transitivity properties // The geometric Vein. The Coxeter Festschrift, Springer, New York–Berlin, 1981. P. 65–98.

3. Заморзаева Е. А. О сортах двумерных мультиправильных разбиений // Известия АН РМ. Математика. 1992. № 1. С. 59–66.

4. Заморзаева Е. А. Класификация 2-изоэдрических разбиений сферы // Известия АН РМ. Математика. 1997. № 3. С. 74–85.

Молдавский государственный университет
Получено 14.04.2015

УДК 514+531.8

Об определителе матрицы напряжений

М. Д. Ковалёв (Москва)
mdkovalev@mtu-net.ru

Строение шарнирной конструкции, составленной из рычагов — прямолинейных стержней, соединённых на концах между собой шарнирами, описывается некоторым графом — структурной схемой. Составляя её мы будет рычагам конструкции сопоставлять рёбра структурной схемы, а шарнирам — её вершины. *Шарнирной структурной схемой (ШСС)* [1] называем абстрактный связный граф $G(V, E)$ (см. Рис.1) без петель и кратных рёбер с рёбрами, отвечающими рычагам конструкции, и вершинами двух сортов: кружочками, отвечающими свободным (незакрепленным) шарнирам, и крестиками, отвечающими закреплённым шарнирам. Пусть $V_1 = \{v_1, \ldots, v_m\}$ непустое множество кружочков, а $V_2 = \{v_{m+1}, \ldots, v_{m+n}\}$ —возможно и пустое множество крестиков, и $V = V_1 \cup V_2$. При этом должны быть выполнены следующие условия: подграф $G_1(V_1, E_1)$ графа $G(V, E)$, порождённый кружочками, связен, и нет рёбер, соединяющих крестик с крестиком. Если множество крестиков пусто, то ШСС будем называть незакреплённой, в противном случае — закреплённой.

При исследовании статических свойств шарнирных конструкций важное значение имеет матрица напряжений Ω [2, 3, 4]. Её вид однозначно определяется ШСС. Объясним как она выписывается. Как известно, силы в идеальной шарнирной конструкции действуют лишь вдоль её рычагов. Пусть $p_i p_j$ рычаг с концевыми шарнирами, оси которых находятся в точках $p_i,\ p_j \in R^2$. Силу f_{ij}, с которой этот рычаг действует на шарнир p_i, принято записывать как $\omega_{ij}(p_i - p_j)$, где скаляр ω_{ij} называется *внутренним напряжением рычага* $p_i p_j$. К шарниру p_j этот рычаг прилагает силу $f_{ji} = \omega_{ji}(p_j - p_i)$. Так как действие равно противодействию, то $\omega_{ij} = \omega_{ji}$. Величины напряжений ω_{ij} указывают меру напряженности рычагов: если $\omega_{ij} < 0$, то рычаг $p_i p_j$ растянут, если же $\omega_{ij} > 0$, то он сжат. Пусть $\omega = \{\omega_{ij}\}$ набор внутренних напряжений всех рычагов для заданной ШСС.

Матрица напряжений $\Omega(\omega)$ является симметрической и зависит от внутренних напряжений ω_{ij} рычагов следующим образом. Элемент Ω_{ii} равен сумме $\sum \omega_{ij}$ напряжений по всем рычагам, смежным в ШСС i-ому шарниру. А при $i \neq j$ элемент $\Omega_{ij} = -\omega_{ij}$, если j-ый шарнир смежен i-му, и $\Omega_{ij} = 0$ в противном случае. Если ШСС незакреплённая, то сумма всех строк матрицы $\Omega(\omega)$ равна нулевой строке, и определитель $\det \Omega(\omega) \equiv 0$.

В случае закреплённой ШСС определитель $\det \Omega(\omega)$ является многочленом от внутренних напряжений рычагов не равным нулю тождественно. Как оказалось, он обладает рядом замечательных свойств. Далее нам будет удобно обозначать напряжение рычага смежного закреплённому шарниру v_j как ω_i^j.

Теорема 1. *Определитель* $\det \Omega(\omega)$ *матрицы напряжений для закрепленной ШСС является линейным по каждому своему аргументу однородным многочленом степени, равной порядку m матрицы, и зависит от напряжения каждого из рычагов. Каждый его одночлен содержит хотя бы один множитель вида* ω_i^j*, и коэффициенты при всех одночленах равны 1 или 0.*

Важным свойством определителя матрицы напряжений является его неприводимость над полем действительных чисел. Рассмотрим примеры.

Матрица напряжений для ШСС с двумя свободными шарнирами $v_1,\ v_2$, двумя закреплёнными шарнирам $v_3,\ v_4$ и рычагами $v_1v_2,\ v_1v_4,\ v_2v_3$ (шарнирный четырёхзвенник (Рис. 1 а)) имеет вид

$$\begin{bmatrix} \omega_1^4 + \omega_{12} & -\omega_{12} \\ -\omega_{12} & \omega_2^3 + \omega_{12} \end{bmatrix}.$$

Её определитель $\omega_{12}(\omega_1^4 + \omega_2^3) + \omega_1^4\omega_2^3$ является, как легко понять, неприводимым многочленом. С другой стороны, для ШСС Рис. 1 б) определитель матрицы

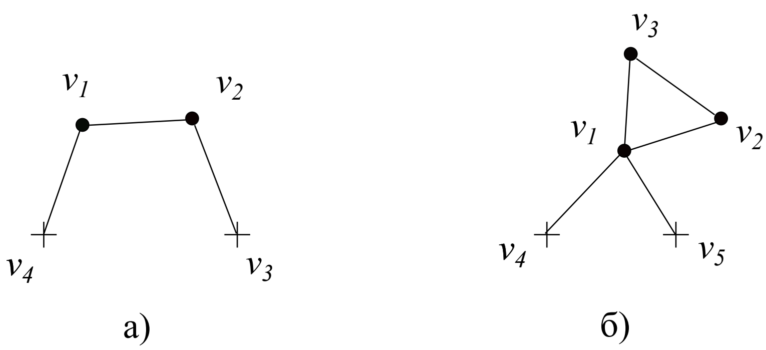


Рис. 1

напряжений

$$\begin{vmatrix} \omega_1^4+\omega_1^5+\omega_{12}+\omega_{13} & -\omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & \omega_{12}+\omega_{23} & -\omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & \omega_{13}+\omega_{23} \end{vmatrix} = (\omega_1^4+\omega_1^5) \begin{vmatrix} \omega_{12}+\omega_{23} & -\omega_{23} \\ -\omega_{23} & \omega_{13}+\omega_{23} \end{vmatrix},$$

приводим.

Получено необходимое и достаточное условие неприводимости определителя матрицы напряжений. Вершину графа называем *разделяющей*[1], если при её удалении (вместе со смежными рёбрами) получается несвязный граф. Сопоставим закреплённой ШСС $G(V,E)$ граф G^* с одной закреплённой вершиной, полученный отождествлением всех закреплённых вершин графа $G(V,E)$.

Теорема 2. *Определитель матрицы напряжений, отвечающей закрепленной ШСС G, неприводим тогда и только тогда, когда соответствующий граф G^* не имеет разделяющей вершины.*

Список цитированной литературы

1. М. Д. Ковалев Геометрическая теория шарнирных устройств // Изв. РАН Сер. матем. 1994. Т. 58, № 1. С. 45–70.
2. Connelly R. Rigidity and Energy // Invent. Math. 1982. Vol. 66, № 1. P. 11–33.
3. Connelly R. Rigidity. Chapter 1.7 in Handbook of Convex Geometry, Volume A, Edited by P.M.Gruber and J.M. Wills, Elsevier, 1993.
4. М. Д. Ковалев О восстановимости шарнирников по внутренним напряжениям // Изв. РАН Сер. матем. 1997. Т. 61, № 4. С. 37–66.
5. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир. 1973. 300 с.

[1]В книге Харари [5] такая вершина называется точкой сочленения.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Получено 06.04.2015.

УДК 511.335

Подстановка Якоби – Перрона и множества ограниченного остатка

Д. В. Кузнецова, А. В. Шутов (Владимир)
WolvShatakeruk@hotmail.com, a1981@mail.ru

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}^d$ – вектор, координаты которого линейно независимы вместе с единицей над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Определим отображение сдвига

$$S_\alpha : x \to x + \alpha \bmod \mathbb{Z}^d.$$

Отображение S_α переводит $d-$мерный тор $\mathbb{T}^d$ в себя.

Множество $X \subset \mathbb{T}^d$ будем называть множеством ограниченного остатка, если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$|r(\alpha, X, n)| \leq C$$

для всех n, где

$$r(\alpha, X, n) = \sharp\{k : 0 \leq k < n, S_\alpha^k(0) \in X\} - n|X|$$

– остаточный член проблемы распределения дробных долей.

Множества ограниченного остатка впервые были введены Гекке [1] и рассматривались в работах Кестена, Журавлева, Шутова, Абросимовой [2] – [5] и т.д. В настоящее время множества ограниченного остатка полностью изучены в размерности один. В размерности два и выше описание таких множеств остается неизвестным.

Нами предложен новый подход, позволяющий находить множества ограниченного остатка и давать эффективную оценку остаточного члена для них. Подход основан на теории геометрических подстановок из книги [6].

В докладе будет рассмотрено две модификации подстановки Якоби – Перрона, которые на множестве символов определяются следующим образом:

$$\sigma_{(a,0)} = \begin{array}{lcl} 1 & \to & \overbrace{11\ldots12}^{a\ \text{раз}} \\ 2 & \to & 3 \\ 3 & \to & 1 \end{array}, \quad \sigma_{(a,1)} = \begin{array}{lcl} 1 & \to & \overbrace{11\ldots13}^{a\ \text{раз}} \\ 2 & \to & 1 \\ 3 & \to & 2 \end{array}.$$

Определение подстановки Якоби – Перрона переносится на множество Λ, состоящем из так называемых базисных квадратов

$$(x, i^*) = \{x + \lambda e_j + \mu e_j : 0 \leq \lambda, \mu < 1\},$$

где $i = 1, 2, 3, x \in \mathbb{Z}^3$ и $e_1 = (1, 0, 0)^t, e_2 = (0, 1, 0)^t, e_3 = (0, 0, 1)^t$.

Теперь рассмотрим матрицы данных подстановок:

$$M_{\sigma_{(a,0)}} = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad M_{\sigma_{(a,1)}} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $f_i^{(N)}$ $i-$ый вектор-столбец матриц $M_{\sigma_{(a,0)}}^{-(N+1)}$ и $M_{\sigma_{(a,1)}}^{-(N+1)}$. Тогда подстановки Якоби – Перрона Θ будут определяться следующим образом:

$$\Theta_{(a,0)}: \begin{array}{l} (0, 1^*) \to (0, 3^*) + \sum_{1 \le k \leqslant a}((e_1 - ke_3), 1^*) \\ (0, 2^*) \to (0, 1^*) \\ (0, 3^*) \to (0, 2^*) \end{array},$$

$$\Theta_{(a,1)}: \begin{array}{l} (0, 1^*) \to (0, 3^*) + \sum_{1 \le k \leqslant a}((e_1 - ke_2), 1^*) \\ (0, 2^*) \to (0, 3^*) \\ (0, 3^*) \to (0, 1^*) \end{array}.$$

$$\Theta(x, i^*) = M^{-1}x + \Theta(0, i^*),$$

$$\Theta(\coprod_{\lambda \in \Lambda} \lambda) = \coprod_{\lambda \in \Lambda} \Theta(\lambda).$$

Пусть теперь

$$D_N^{(i)} = \Theta^N(0, i^*), D_N = \coprod_{i=1}^{3} D_N^{(i)}.$$

Далее, пусть ζ – единственный действительный корень уравнения

$$x^3 - ax^2 = 1.$$

Обозначим через π проекцию из $\mathbb{R}^3$ вдоль вектора $(1, \zeta, \zeta^2)^t$ на плоскость P, задаваемую уравнением $x_1 + \zeta^{-2}x_2 + \zeta^{-1}x_3 = 0$. Пусть

$$T_N^{(i)} = \pi(D_N^{(i)}), T_N = \pi(D_N).$$

Можно показать, что множество T_N представляет собой фундаментальную область решетки L_N с базисом $\pi(f_1^{(N)}) - \pi(f_2^{(N)}), \pi(f_1^{(N)}) - \pi(f_3^{(N)})$. При этом на множестве T_N определено отображение перекладывания областей $T_N^{(i)}$. Данное отображение изоморфно сдвигу тора $\mathbb{R}^N/L_N$ на вектор $f_1^{(N)}$, которое, в свою очередь, изоморфно сдавигу единичного тора $\mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N$ на вектор (ζ^{-1}, ζ^{-2}). При этом образы единичных квадратов из Λ под действием проекции π порождают разбиение Til_n множества T_N, а следовательно и тора $\mathbb{R}^N/L_N$ на параллелограммы трех типов.

Теорема 1. *Разбиение Til_N представляет собой разбиение тора на множества ограниченного остатка. Оценка остатка эффективно вычислима и не зависит от N.*

Доказательство теоремы 1 проводится с помощью теоремы о перекладывании доказанной в работе [7]. Отметим также, что в работе [7] был доказан аналог теоремы 1 для другой подстановки, известной как подстановка Рози.

Список цитированной литературы

1. Hecke E. Eber Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins // Math. Sem. Hamburg Univ. 1921. Vol. 5. P. 54–76.
2. Kesten H. On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod 1 // Acta Arithmetica. 1966. Vol. 12. P. 193–212.
3. Журавлев В. Г. Многогранники ограниченного остатка // Современные проблемы математики. 2012. Вып. 16. С. 82–102.
4. Шутов А. В. Об одном семействе двумерных множеств ограниченного остатка // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12. Вып. 4. С. 264–271.
5. Абросимова А. А. Множества ограниченного остатка на двумерном торе // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12. Вып. 4. С. 15–23.
6. Pytheas Fogg N. Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics. Springer. 2001. 402 p.
7. Кузнецова Д. В., Шутов А. В. Перекладывающиеся разбиения тора, подстановка Рози и множества ограниченного остатка // Математические заметки. (в печати).

Владимирский государственный университет им. Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Получено 12.04.2015

УДК 515.162

Компактные линзы и гиперболические многообразия

В. С. Макаров (Москва), Ф. Л. Дамиан (Кишинев, Молдова), П. В. Макаров (Москва)
vsmak@mail.ru, fl_damian@yahoo.com, pmakaroff@mail.ru

Изучение геометрии гиперболического пространства 120-гранника $\mathcal{D}^4$ (многообразие Дависа) [1–3] привело к открытию некоторых интересных гиперболических 3-многообразий. Отметим, что группы симметрии этих многообразий содержат в качестве точечных подгрупп группу, идентичную группе собственных движений правильного икосаэдра I^3. Условимся называть их многообразиями с икосаэдрической симметрией [4]. Хорошо известными примерами таких многообразий служат пространство гиперболического додекаэдра Зейферта-Вебера [5] и пространство сферического додекаэдра (сферическое пространство Пуанкаре, см., например, [6]).

Напомним, что многообразие $\mathcal{D}^4$ получается факторизацией пространства Лобачевского (гипнрбодического пространства) H^4 по группе Г, порожденной сдвигами, отождествляющими противоположные грани правильного 120-гранника [2, 3], разбивающего пространство дуальным способом. При таком отождествлении отражения в гиперплоскостях симметрии фундаментального многогранника D^4 содержатся в нормализаторе фундаметальной группы Г. В этом случае факторизация этих гиперплоскостей приводит к симметрическим 3-подмногообразиям многообразия $\mathcal{D}^4$. Любое из этих подмногообразий можно получить тривиальным удвоением гиперболического многообразия с геодезическом краем, построенного из ортогонально усеченного ромбического триаконтаэдра с углом $2\pi/5$ при отождествлении сдвигами противоположных шестиугольных граней [4]. Отметим, что при указанном отождествлении край многообразия есть Платонова поверхность рода 4 с картой $\{5, 5\}$.

Аналогично ортогонально усеченный икосаэдр tI^3 с двугранным углом между смежными шестиугольными гранями равным $2\pi/5$, при подходящем отождествлении граней, приводит к многообразию с метрически тем же геодезическим краем [4] (и той же правильной картой).

Отметим, что поверхность $\{5, 5\}$ рода 4 погружена локально геодезически в многообразие Зейферта-Вебера. Кроме того она является комбинаторной реализацией схемы инциденций граней правильного большого звездного додекаедра $\{5, 5/2\}$ (см., например, [7]).

В сообщении предлагается промежуточный способ задания гиперболического многообразия с помощью многогранника построенного над, в данном случае Платоновой, поверхностью, которая являлась геодезическим краем исходного многообразия. В дальнейшем мы такго типа многогранники будем называть компактными линзовыми многогранникоми [8] (компактными линзами). Отметим что бесконечные линзовые многогранники и разбиения ими пространства Лобачевского были введены и изучены первым автором (см., например, [9]). Такая перестройка трехмерного фундаментального многогранника в некотором смысле подобна перестройке фундаментальной области в двумерном случае. Одна из целей предлагаемой пререстройки – дать возможность использования симметрии базы линзового многогранника для получения новых гиперболических многообразий с топологически той же линзой.

Такой подход в следующей размерности представляется достаточно перспективным. Так же, как в многобразие Зейферта–Вебера погружено 2-многообразие $\{5, 5\}$ рода 4 из 12 пятиугольников, в многобразие Девиса локально геодезически погружено 3-многообразие с картой $\{5, 3, 5\}$, состоящей из 120 додекаедров [7]. Как и на размерность ниже, это многообразие аналогичным образом задается схемой инциденций 3-граней звездного многогранника $\{5, 3, 5/2\}$. Это многообразие порождается сдвигами и является 120 листным накрытием многобразия Зейферта-Вебера, аналогично тому, как трехмерная сфера 120 листно накрывает пространство Пуанкаре сферическое додекаедра. О некотрых компактных четырехмерных линзовых многогранниках докладывалось на геометрической конференции в Ярославле [10], но сложность их описания и восприятия побудила авторов в данном докладе ограничится лишь трехмерным случаем, но с более подробным описанием примеров.

Список цитированной литературы

1. Coxeter H. S M. Regular polytopes. N.-Y., 1963. 321 p.

2. Davis M. W. A hyperbolic 4–manifold // Proceeding of the American Mathematical Sosiety. 1985. Vol. 93, no. 2. P. 325–328.

3. Дамиан Ф. Л. К построению гиперболических четырехмерных многообразий // Геометрия дискретных групп. Математические исследования. Вып. 119. Кишинев: Штиинца, 1990, С. 79–84.

4. Дамиан Ф. Л., Макаров В. С. О трехмерных гиперболических многообразия с икосаэдрической симметрией // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. 1995. № 1(77). P. 82–89.

5. Seeifert H., Weber C. Die beiden Dodekaederräume // Math. Ztschr. 1933. Bd. 35, P. 237—253.

6. Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. М.Л.: ГТТЛ, 1938. 400 с.

7. Damian F. L., Makarov V. S. Star polytopes and hyperbolic three-manifolds // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. 1998. № 2(27). P. 102–108.

8. Makarov V. S. Geometric methods of construction of discrete groups of motions of a Lobachevskii space. Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Probl. Geom., VINITI, Moscow. Vol.15, 1983. P. 3–59.

9. Damian F. L., Makarov V. S. On lens polytopes // International Seminar on Discrete Geometry. 2002. State Univ. Moldova, Chisinau. P. 32–35.

10. Damian F., Makarov V. S., Makarov P. V. Star complexes over the regular maps // Int. Conf. "Geometry, Topology, and Applications Yaroslavl, Russia. 2013. P. 27–32.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Государственный университет Молдовы

Московский государственный горный университет

Получено 15.04.2015

УДК 519.852

Сложность задач дискретной оптимизации в терминах решеток граней ассоциированных многогранников

А. Н. Максименко[1] (Ярославль)
maximenko.a.n@gmail.com

Пусть X — конечное множество в $\mathbb{Z}^d$. *Задачей* X будем называть задачу оптимизации линейной функции $f(x) = c^T x$ на X, где $c \in \mathbb{Z}^d$ — вектор входных данных. Так, например, во многих задачах комбинаторной оптимизации (коммивояжер, рюкзак, задача о паросочетаниях и т. п.) множество допустимых решений X представляют в виде подмножества вершин единичного куба $\{0,1\}^d$. Интерес к такой постановке задачи дискретной оптимизации обусловлен тем, что она тесно связана с задачей линейного программирования $\max\limits_{x \in P} c^T x$, где $P = \operatorname{conv} X$.

Вполне естественно попытаться оценить вычислительную сложность задачи X в терминах каких-нибудь комбинаторных характеристик многогранника P. В частности, очевидно, что размерность $\dim P$ является нижней оценкой сложности задачи X, тогда как числа вершин и фасет многогранника P могут служить верхними оценками. Более интересными примерами являются диаметр графа многогранника P (нижняя оценка числа шагов симплекс метода), кликовое число графа многогранника [1], а также число прямоугольного покрытия (rectangle covering number) матрицы инциденций вершин-гиперграней многогранника. Последняя (из упомянутых) характеристика была введена М. Яннакакисом [4], а интерес к ней в последнее время возрос благодаря работам [2] и [3].

Для каждой из указанных характеристик имеются примеры задач, реальная вычислительная сложность которых существенно отличается от значений соответствующих характеристик. Поэтому естественно задать следующий вопрос. Верно ли, что для любой комбинаторной характеристики сложности многогранника $P = \operatorname{conv} X$ существует задача X, реальная вычислительная сложность которой существенно отличается от значения этой характеристики?

Обозначим через $\mathcal{L}(P)$ решетку граней многогранника P. Рассмотрим произвольную целочисленную функцию $g = g(\mathcal{L}(P))$, определенную на множестве

[1]При поддержке проекта № 477 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ

решеток граней выпуклых многогранников (и выражающую некоторую комбинаторную характеристику сложности соответствующего многогранника P). Далее мы ограничиваемся рассмотрением только *монотонных* функций. А именно, предполагаем, что $g(\mathcal{L}(P)) \leqslant g(\mathcal{L}(Q))$, если решетка $\mathcal{L}(P)$ вложима в $\mathcal{L}(Q)$.

Кроме того, будем предполагать, что сложность задачи $X \subseteq \mathbb{Z}^d$ зависит от длины кодировки $\mathrm{S}(X) = \log_2 (\max_{x\in X} \|x\|_\infty)$. (Далее мы ограничимся рассмотрением тех случаев, когда длина кодировки вектора входных данных c не превосходит $\mathrm{S}(X)$.) Целочисленную функцию $f(X) = f(\mathcal{L}(\operatorname{conv} X), \mathrm{S}(X))$ будем называть *монотонной комбинаторной характеристикой сложности* задачи X, если она монотонна (точнее, не убывает) по $\mathcal{L}(\operatorname{conv} X)$ и $\mathrm{S}(X)$.

Теорема 1 ([5]). *Существует задача $X \subseteq \mathbb{Z}^d$, вычислительная сложность которой экспоненциальна по d, $\log |X|$ и $\mathrm{S}(X)$, и полиномиально разрешимая (в тех же терминах) задача $Y \subseteq \mathbb{Z}^{2d}$, $|Y| = |X|$, такие, что $f(X) \leqslant f(Y)$ для любой монотонной комбинаторной характеристики сложности f.*

Список цитированной литературы

1. Бондаренко В.А. Полиэдральные графы и сложность в комбинаторной оптимизации. Ярославль: ЯрГУ, 1995.

2. Fiorini S., Kaibel V., Pashkovich K., Theis D. O. Combinatorial Bounds on Nonnegative Rank and Extended Formulations // Discrete Math. 2013. V. 313, No 1. P. 67–83.

3. Rothvoss T. The matching polytope has exponential extension complexity // STOC. 2014. P. 263–272.

4. Yannakakis M. Expressing combinatorial optimization problems by linear programs // J. Comput. System Sci. 1991. V. 43, No 3. P. 441–466.

5. Maksimenko A. Complexity of LP in Terms of the Face Lattice, arXiv:1410.7082.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Получено 16.03.2015

УДК 512.532+519.142+517.43

Комбинаторные конфигурации и однородные триангуляции торов

Ф. М. Малышев (Москва)
malyshevfm@mi.ras.ru

В докладе даётся обзор результатов по трём существенно различным направлениям. Одно относится к рекуррентным последовательностям, другое к комбинаторным конфигурациям и последнее к инвариантным дифференциалам высших порядков нескольких функций одной переменной. В каждой из этих тем рассматриваемые вопросы связаны с комбинаторными конфигурациями в виде конечных плоскостей из v точек, в которых в качестве "прямых" выделяются b подмножеств одинаковой мощности k так, что каждая точка принадлежит ровно r "прямым" , $vr = bk$. Так, для нахождения всех однородных инвариантных дифференциалов порядка $k+r$ от гладких вещественных функций $f_1(x)$, ... , $f_k(x)$ требуется решать систему линейных уравнений с $v = \binom{k+r-1}{r}$ неизвестными и $b = \binom{k+r-1}{k}$ уравнениями, в каждом уравнении k неизвестных, каждое неизвестное участвует в r уравнениях. Приводимые в обзоре результаты по этим направлениям получены благодаря однотипным представлениям точек соответствующих конфигураций точками локально евклидовых многообразий.

1. Базисы рекуррентных последовательностей. Для рекуррентных последовательностей $x_i \in X$, $i \in \mathbb{Z}$, $x_{i+m} = f\left(x_i, x_{i+s_1}, ..., x_{i+s_{k-2}}\right)$, $k \geqslant 3$, $0 < s_1 < ... < s_{k-2} < m$, НОД$(s_1, ..., s_{k-2}, m) = 1$, периода v для многих приложений оказывается полезным равномерное вложение вычетов $\mathbb{Z}_v = \mathbb{Z}/\langle v\rangle$ в $(k-1)$-мерный тор, обеспечиваемое эпиморфизмом

$$\varphi : \mathbb{Z}^{k-1} \to \mathbb{Z}_v, \quad \varphi(z_0, z_1, ..., z_{k-2}) = (mz_0 + s_1z_1 + ... + s_{k-2}z_{k-2}) \pmod v,$$

при котором $\mathbb{Z}_v \cong \mathbb{Z}^{k-1}/\ker\varphi \subset \mathbb{R}^{k-1}/\ker\varphi$. Для возникающей на торе конфигурации с $b = v$ "прямыми" $\{i, i+s_1, ..., i+s_{k-2}, i+m\}$ имеем $r = k$. Данная конструкция позволила в [1,2] определить строение всех возможных минимальных подмножеств элементов последовательности, по которым все остальные знаки могут быть получены за конечное число применений рекуррентного соотношения. Они называются базисами.

Теорема 1. *При $k = 3$ мощностью базиса может быть любое целое из отрезка $[m, \psi(m)]$, в котором двоичное представление $\psi(m)$ получается из фибоначчиева представления m переносом одного нуля из каждой их серии между двумя единицами в область младших разрядов.*

При k = 3 данная конструкция устанавливает связь между известным разбиением на фундаментальные области верхней комплексной полуплоскости при действии модулярной группой и приёмом максимального пустого шара Делоне — Сандаковой. С этой же конструкцией связаны теоремы о распределении в левой зоне числа единиц в булевых аналогах треугольников Паскаля [3], распространённые в настоящее время и на правую зону.

2. Комбинаторные конфигурации. В работах [4–7] рассматриваются конечные плоскости с $b = v$ "прямыми" (когда $r = k$), для которых матрица инцидентности невырождена, причём обратная (над $GF(2)$) матрица отвечает аналогичной плоскости с другими, вообще говоря, $r_1 = k_1$. Такие пары конфигураций называем (v, k, k_1)-конфигурациями и (v, k)-конфигурациями при $k_1 = k$.

Построение (v, k)-конфигураций привлекает известные (v, k, λ)-конфигурации, матрицы Адамара, конечные проективные плоскости, совершенные разностные множества, теоретико-числовые конструкции, графы с различными свойствами симметрии, паркетирования торов, связанные с рекуррентными последовательностями. Реализация "плоскостей" в виде смежных классов подмножества в группе приводит к понятию (v, k)-группы.

Теорема 2. *Каждая связная $(v, 3)$-конфигурация реализуется на группе $\mathbb{Z}_v$ "прямыми" $\{i, i+1, i+1+v/2\}$, $i \in \mathbb{Z}_v$, при чётном v, и триангуляцией листа Мёбиуса при $v = 5$.*

3. Инвариантные дифференциалы. Известно, что дифференциал

$$f_1^{(1+i_1)}(x)...f_k^{(1+i_k)}(x)(dx)^{k+r}, \quad r = i_1 + ... + i_k,$$

является инвариантным относительно замен переменной $x = x(t)$ только при $r = 0$. Инвариантными при $r > 0$ будут линейные комбинации таких произведений с коэффициентами $c_{i_1,...,i_k}$ [8]. Необходимые и достаточные условия на эти коэффициенты в [9] сформулированы на языке уравнений в частных производных от многочленов. Приписывание в [10] коэффициентов к точкам $(i_1, ..., i_k) \in \mathbb{N}_0^k \subset \mathbb{R}^k$ высветило природу требований на них в виде специальной системы линейных уравнений. Одним из следствий при этом явилась следующая теорема.

Теорема 3. *Вронскиан det $\left\| f_j^{(i)} \right\|_{i,j=1,...,k} (dx)^{\frac{k(k+1)}{2}}$ является инвариантным дифференциалом самого высокого возможного порядка.*

Естественная здесь $(k-1)$-мерная структура на номерах неизвестных $c_{i_1,...,i_k}$ инициировала позже полезную для приложений $(k-1)$-мерную структуру на множестве номеров $\mathbb{Z}$ знаков рекуррентной последовательности, обычно представляемом одномерным.

Список цитированной литературы

1. Малышев Ф. М. Порождающие наборы элементов рекуррентных последовательностей. // Труды по дискретной математике. 2008. Т. 11, № 2. С. 86–111.

2. Малышев Ф. М. Базисные множества целых чисел относительно многоместных операций сдвига. // Математические вопросы криптографии. 2011. Т. 2, № 1. С. 29–74.

3. Wolfram S. Cellular Automaton Supercomputing. // In High-Speed Computing. University of Illinois Press. 1988. P. 40–48.

4. Малышев Ф. М., Тараканов В. Е. О (v, k)-конфигурациях. // Математический сборник. 2001. Т. 192, № 9. С. 85–108.

5. Тришин А. Е. Классификация циркулянтных $(v, 5)$-матриц. // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2004. Т. 11, № 2. С. 258–259.

6. Фролов А. А. Классификация неразложимых абелевых $(v, 5)$-групп. // Дискретная математика. 2008. Т. 20, № 1. С. 94–108.

7. Малышев Ф. М. Четыре бесконечные серии k-конфигураций. // Математические вопросы криптографии. 2013. Т. 4, № 4. С. 65–75.

8. Veblen O. Differential invariants and geometry. // Atti del Congr., Int. Mat., Bologna. 1928.

9. Кириллов А. А. Естественные дифференциальные операции над тензорными полями. // Препринт ИПМ АН СССР, № 56, 1979.

10. Малышев Ф. М. Симплициальные системы линейных уравнений. // Алгебра: Сб. статей. Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова. 1980.
С. 53–56.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН.
Получено 19.04.2015

УДК 514.172.45

О нецелочисленных вершинах релаксаций булева квадратичного многогранника

А. В. Николаев[1] (Ярославль)
werdan.nik@gmail.com

Рассматривается булев квадратичный многогранник BQP_n, определенный как выпуклая оболочка точек

$$x_i + x_j - x_{i,j} \leq 1, \tag{1}$$
$$x_{i,j} \leq x_i, \tag{2}$$
$$x_{i,j} \leq x_j, \tag{3}$$
$$x_{i,j} \geq 0, \tag{4}$$
$$x_i, x_{i,j} \in \{0, 1\}, \tag{5}$$

для всех $i, j :\ 1 \leq i < j \leq n$.

Задача булева квадратичного программирования:

$$Q(x) = x^T Q x \to \max,$$

[1]При поддержке гранта РФФИ № 14-01-00333 и гранта Президента Российской Федерации МК-5400.2015.1

где $x \in \{0, 1\}^n$ и матрица Q верхнетреугольная, сводится к задаче целочисленного программирования на BQP_n [1].

Если исключить из системы (1)-(5) условие целочисленности переменных (5), то оставшиеся ограничения описывают релаксационный многогранник M_n, известный как корневой полуметрический [2].

Свойства корневого полуметрического многогранника M_n подробно изучены [1]. В частности, имеет место

Предложение 1. *Все вершины многогранника M_n являются полуцелыми, их координаты принадлежат множеству $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$.*

Определим последовательность $M_{n,k}$ вложенных релаксаций булева квадратичного многогранника:

$$BQP_n = M_{n,n} \subseteq M_{n,n-1} \subseteq \ldots \subseteq M_{n,k} \subseteq \ldots \subseteq M_{n,3} \subseteq M_{n,2} = M_{n,1} = M_n,$$

где многогранник $M_{n,k}$ получается дополнением системы (1)-(4) ограничениями булева квадратичного многогранника BQP_k.

Первой отличной от корневого полуметрического многогранника релаксацией BQP_n является многогранник $M_{n,3}$, известный как метрический [2]. Он задается системой (1)-(4) и дополнительными ограничениями вида «неравенств треугольника», порождаемых фасетами BQP_3.

Известно, что в отличие от корневого полуметрического многогранника M_n знаменатели координат метрического многогранника $M_{n,3}$ могут принимать как угодно большие значения. Так для специального класса «графических вершин» знаменатели растут линейно по n [3]. Устанавливается, что для нецелочисленных вершин метрического многогранника знаменатели координат растут значительно быстрее линейной оценки.

Теорема 1. *Пусть величина $d(M_{n,3})$ равна максимальному знаменателю координат вершин многогранника $M_{n,3}$, тогда $\forall n \geq 4$:*

$$d(M_{n,3}) \geq 3 \cdot 2^{\left\lfloor \frac{n-4}{3} \right\rfloor}.$$

Свойства нецелочисленных вершин метрического многогранника представляют интерес в рамках исследования задачи распознавания целочисленности, отвечающей на вопрос: «есть ли среди вершин многогранника, на которых линейная целевая функция достигает своего максимума, хотя бы одна целая?». Известно [4], что

Предложение 2. *Задача распознавания целочисленности на корневом полуметрическом многограннике M_n полиномиально разрешима.*

Алгоритм решения задачи распознавания целочисленности на M_n опирается на следующий факт.

Предложение 3. *Неравенства треугольника многогранника $M_{n,3}$ отсекают все грани корневого полуметрического многогранника M_n, содержащие только нецелочисленного вершины.*

На метрическом многограннике $M_{n,3}$ задача распознавания целочисленности NP-полна. При этом, если некоторая релаксация $M_{n,k}$ отсекает полностью нецелочисленные грани $M_{n,3}$, то задачу можно вновь решить за полиномиальное время с помощью линейного программирования [5]. Устанавливается, что ограничений многогранников $M_{n,4}$ и $M_{n,5}$ не достаточно, так как они не отсекают даже нецелочисленных вершин метрического многогранника.

Теорема 2. *Многогранники $M_{n,3}$ и $M_{n,4}$ не имеют общих нецелочисленных вершин для любого $n \leq 7$. Начиная с $n = 8$ многогранники $M_{n,3}$ и $M_{n,4}$ обладают совместными нецелочисленными вершинами.*

Соответствующая вершина $M_{8,3}$ и $M_{8,4}$ имеет вид

$$\tfrac{1}{6}(3,2,3,2,1,2,1,1,2,2,1,1,2,1,1,4,2,2,3,1,1,\\ 3,1,2,2,2,2,1,1,0,4,2,1,2,1,2).$$

Теорема 3. *Многогранники $M_{n,3}$, $M_{n,4}$ и $M_{n,5}$ имеют общие нецелочисленные вершины для всех $n \geq 11$.*

Совместная вершина $M_{11,3}$ и $M_{11,5}$ имеет вид

$$\tfrac{1}{6}(4,2,3,1,2,1,1,2,1,1,2,2,1,0,1,0,0,1,1,0,2,4,2,2,1,1,2,1,1,2,\\ 2,1,1,0,1,0,1,1,4,2,2,1,1,1,3,2,1,0,0,1,1,2,0,1,1,1,2,0,0,1,2,1,2,2,1,4).$$

Список цитированной литературы

1. Padberg, M. V. The boolean quadric polytope: some characteristics, facets and relatives // Mathematical Programming. 1989. Vol. 45, pp. 139–172.

2. Деза М. М., Лоран М. Геометрия разрезов и метрик. М.: МЦНМО, 2001. 736 с.

3. Laurent, M. Graphic vertices of the metric polytope // Discrete Mathematics. 1996. Vol. 151, Iss. 1–3, pp. 131–153.

4. Бондаренко В. А., Урываев Б. В. Об одной задаче целочисленной оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2007. № 6, С. 18–23.

5. Бондаренко В. А., Николаев А. В., Сыманович М. Э., Шемякин Р. О. Об одной задаче распознавания на релаксациях разрезного многогранника // Автоматика и телемеханика. 2014. № 9, С. 108—121.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Получено 02.04.2015

УДК 511.335

О выпуклых многограниках с паркетными гранями

Е. С. Отмахова (Красноярск)
nasait123@mail.ru

Несколько лет назад были найдены все выпуклые правильногранники, [1]. Напомним, что многогранник, каждая грань которого составлена из правильных многоугольников так, что каждая вершина многоугольника является и вершиной многогранника, называется правильногранником. Кроме правильных граней правильногранник может обладать еще пятью гранями, изображенными на рис. 1 работы [2]. Уже в первой половине 1970-х годов были известны все несоставные тела, т.е. выпуклые правильногранники, нерассекаемые никакой плоскостью на правильногранники. Кроме призм и антипризм к ним относятся многоранники Залгаллера $M_1, M_2, \ldots, M_{28}$, Иванова $Q_1, Q_2 \ldots, Q_5$ и Пряхина Q_6. Несколько лет назад выяснено, как соединяя эти тела, получить каждый выпуклый правильногранник.

40 лет назад Ю. А. Пряхин [3] изложил схему доказательства теоремы, классифицирующей с точностью до комбинаторной эквивалентности выпуклые многогранники с равноугольными и паркетными гранями. Напомним, выпуклый многоугольник называем паркетным, если он может быть составлен из конечного числа равноугольных многоугольников. Однако до сих пор неизвестно даже количество несоставных многогранников с паркетными и правильными гранями, отличных от четырех бесконечных серий таких тел. В работе [2] выяснено каковы все несоставные правильногранники, допускающие рассечение плоскостью на многогранники с паркетными гранями. В частности, такими являются правильногранная пирамида ${}^2M_3$ с пятиугольным основанием и ребрами длины 2, архимедово тело M_{19} с вершинами типа [5,6,6]. Пирамида ${}^2M_3$ рассекается на пирамиду M_3 с единичными ребрами и усеченную пирамиду M_{3a} (рис. 1). Усеченный икосаэдр M_{19} можно рассечь на несоставные части двумя или тремя плоскостями. Две параллельные плоскости отсекают от M_{19} усеченные пирамиды M_{3a}, а оставшуюся часть будем обозначать M_{19a}(рис. 2). Если отсекать три такие усеченные пирамиды M_{3a}, то останется фигура которую будем обозначать M_{19b}(рис. 3).

Предложение 1. *Существуют только следующие выпуклые соединения не более трех многогранников*

$$M_3, M_{3a}, M_{19a}, M_{19b} \tag{1}$$

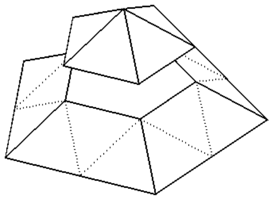


Рис. 1: M_3 и M_{3a}

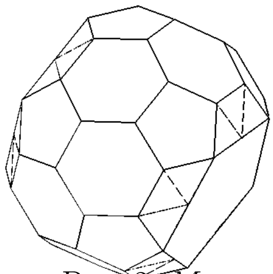


Рис. 2: M_{19a}

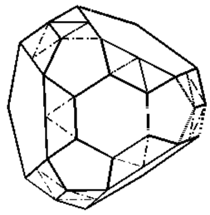


Рис. 3: M_{19b}

при условии, что любые два ребра каждого соединения либо равны, либо одно вдвое короче другого, а число соединяемых тел для каждого соединения минимально:

$$\begin{array}{l} M_3+M_3, M_3+M_{3a}, M_3+M_{19a}, M_3+M_{19b}, M_3+M'_{19b}, \\ M_3+M''_{19b}, M_{3a}+M_{3a}, M_{3a}+M_{19a}, M_{3a}+M_{19b}; \end{array} \tag{2}$$

$$\begin{array}{l} Q_{2,2}+M_{3a}, Q_{2,2}+M_{19a}, Q_{2,2}+M_{19b}, Q_{2,3}+M_3, Q_{2,3}+M'_3, \\ Q_{2,3}+M''_3, Q_{2,3}+M_{3a}, Q_{2,3}+M'_{3a}, Q_{2,4}+M_3, Q_{2,4}+M'_3, \\ Q_{2,4}+M''_3, Q_{2,4}+M'''_3, Q_{2,4}+M_3^{(4)}, Q_{2,4}+M_{3a}, Q_{2,4}+M'_{3a}, \\ Q_{2,5}+M_3, Q_{2,5}+M'_3, Q_{2,5}+M''_3, Q_{2,5}+M_{3a}, Q_{2,5}+M'_{3a}, \\ Q_{2,6}+M_3, Q_{2,6}+M'_3, Q_{2,6}+M''_3, Q_{2,6}+M_{3a}, Q_{2,6}+M'_{3a}, \\ Q_{2,7}+M_3, Q_{2,8}+M_3, Q_{2,8}+M'_3, Q_{2,8}+M''_3, Q_{2,8}+M_{3a}, \\ Q_{2,9}+M_3, Q_{2,9}+M'_3, Q_{2,9}+M''_3, Q_{2,9}+M'''_3, Q_{2,9}+M_3^{(4)}, \\ Q_{2,9}+M_3^{(5)}, Q_{2,9}+M_3^{(6)}. \end{array} \tag{3}$$

Предложение демонстрирует начало работы алгоритма, приводящего к списку всех тел посылки предложения в которой требование “не более трех” будет снято.

Список цитированной литературы

1. Тимофеенко, А. В. К перечню выпуклых правильногранников // Современные проблемы математики и механики. Издат. Московского университета — Москва. 2011. — Т. VI, Математика. — Вып. 3 (К 100-летию со дня рождения Н. В. Ефимова). С. 155–170.

2. Тимофеенко А. В. О выпуклых многограниках с равноугольными и паркетными гранями // Чебышевский сб. 2011.Т. 12,выпуск 2. С. 118-–126.

3. Пряхин Ю. А. Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1974. Т. 45. С. 111–112.

Красноярский государственный педагогический университет им. В. П. Астафьева
Получено 15.04.2015

УДК 511.335

Новые методы исследования изотропных векторов

А. Н. Попа (Кишинёв, Молдова)
alpopa@gmail.com

Определения.

Определение 1. *Рассмотрим n–мерное векторное пространство $\mathbb{R}^n$ с определённым в нём произведением векторов ($m + d < n$):*

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i - \sum_{i=m+1}^{n-d} x_i y_i$$

Линейное пространство с метрикой определённой этим соотношением называется полуевклидовым *пространством ${}^d\mathbb{E}_n^m$ размерности n с положительным индексом инерции m и дефектом d. В частности, если $d = 0$ пространство называется* псевдоевклидовым $\mathbb{E}^{m,n-m}$ *с сигнатурой $(m, n-m)$ [1].*

Определение 2. *Ненулевой вектор* изотропен*, если:*

$$|x|^2 = x \cdot x = 0$$

Это определение обычно трактуют либо как то, что изотропный вектор ортогонален самому себе, либо как то, что он имеет нулевую меру. В некотором смысле, оба эти утверждения не верны.

Векторы разложения изотропных векторов.

Рассмотрим изотропный вектор $x \in {}^d\mathbb{E}_n^m$. Построим векторы:

$$a = \{x_1, ..., x_m, 0, ..., 0, x_{n-d+1}, ..., x_n\}, b = \{0, ..., 0, x_{m+1}, ..., x_{n-d}, 0, ..., 0\}.$$

Определение 3. *Пару векторов a, b назовём* векторами разложения *вектора x [2].*

Свойства. Векторы разложения обладают следующими свойствами:

1. Векторы a, b неизотропны: $|a|^2 = \sum_i a_i^2 > 0,\ |b|^2 = -\sum_j b_j^2 < 0$;
2. Векторы a, b имеют одинаковую по модулю меру: $|x|^2 = |a|^2 + |b|^2 = 0 \Rightarrow |a| = i|b|$;
3. Векторы a и b ортогональны: $a \cdot b = \sum_i a_i \cdot 0 - \sum_j 0 \cdot b_j = 0$;
4. Векторы разложения не ортогональны изотропному вектору:

$$a \cdot x = a \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b = |a|^2 \neq 0,$$
$$b \cdot x = b \cdot (a + b) = b \cdot a + b \cdot b = |b|^2 \neq 0.$$

Замечание 1. *Разложение изотропного вектора зависит от системы координат и следовательно неоднозначно.*

Ортогонализация изотропных векторов.

Так как векторы разложения неизотропны, ими удобно пользоваться для различных целей.

Лемма 1. *Пусть два вектора, изотропный $x \in {}^d\mathbb{E}_n^m$ с векторами разложения $x = a + b$ и неизотропный $y \in {}^d\mathbb{E}_n^m$, ортогональны: $x \cdot y = 0$. Тогда существует неизотропный вектор $z = \alpha x + y$, который ортогонален изотропному вектору $x \cdot z = 0$ и каждому из его векторов разложения $a \cdot z = b \cdot z = 0$.*

Лемма 2. *Пусть два изотропных вектора $x, y \in {}^d\mathbb{E}_n^m$, с векторами разложения $x = a + b, y = c + d$, ортогональны: $x \cdot y = 0$. Тогда существует изотропный вектор $z = \alpha x + y$ с векторами разложения $z = f + g$, который ортогонален вектору $x \cdot z = 0$ и все их векторы разложений попарно ортогональны $a \cdot f = a \cdot g = b \cdot f = b \cdot g = 0$.*

Если в ортогональном семействе векторов в условиях леммы 1 или 2 заменить y на z, ортогональность семейства не нарушится, так как если оба вектора x, y ортогональны всем остальным, то вектор z, являясь их линейной комбинацией, тоже ортогонален всем остальным векторам. Таким образом, в процессе ортогонализации семейства векторов всегда можно добиться попарной ортогональности всех векторов разложения.

Ортогонализируя изотропный вектор таким способом с самим собой, получим нулевой вектор, как и в случае неизотропных векторов.

Замечание 2. *Так как векторы разложения зависят от выбора системы координат, такая ортогонализация неоднозначна.*

Мера изотропного вектора.

Для определения меры изотропного вектора построим движение вдоль него, совмещающее начало в концом. Параметр движения может служить определением его меры. И так как это движение нетривиально, то такая мера изотропного вектора тоже не равна нулю.

Лемма 3. *Величина меры изотропного вектора* $x \in {}^d\mathbb{E}_n^m$ *равна величине меры его векторов разложения* a *или* b*:*

$$|x| = |a| = i|b|$$

Замечание 3. *Мера изотропного вектора зависит от выбора системы координат и* не является *инвариантом пространства.*

Мера изотропного вектора подобна наклонению двух параллельных прямых пространства Лобачевского, которое тоже зависит от системы координат и качественно отличается и от расстояний и от углов. Формально верное утверждение что мера изотропного вектора равна нулю так же лишено содержания как и (верные) утверждения что угол и расстояние между двумя параллельными прямыми пространства Лобачевского равны нулю.

Список цитированной литературы

1. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1979. С. 262–270.

2. Попа А. Н. Аналитическая геометрия однородных пространств. // Монография. 2014. С. 65–71. http://sourceforge.net/projects/geomspace/files/Theory/-Homogeneous-2014.04.12-ru.pdf/download

Институт математики и информатики АН Молдовы
Получено 29.03.2015

УДК 514.133

Классификация тетраэдров трехмерного гиперболического пространства положительной кривизны

Л. Н. Ромакина (Саратов)
romakinaln@mail.ru

Трехмерное гиперболическое пространство $\widehat{H}^3$ *положительной кривизны* рассматриваем в проективной модели Кэли – Клейна на идеальной области пространства Лобачевского Λ^3, т. е. на внешней относительно овальной гиперквадрики γ области проективного пространства P_3. Пространства $\widehat{H}^3$ и Λ^3 в объединении с гиперквадрикой γ образуют *расширенное гиперболическое пространство* H^3 [1].

Овальную гиперквадрику γ называют *абсолютом* каждого из пространств $\widehat{H}^3$, Λ^3 и H^3. Группу G проективных автоморфизмов овальной гиперквадрики γ — *фундаментальной группой* пространств $\widehat{H}^3$, Λ^3 и H^3.

Прямая пространства H^3 в зависимости от расположения по отношению к абсолюту может быть одного из трех типов. *Гиперболические* (*эллиптические*) прямые пересекают абсолютную гиперквадрику в двух вещественных (мнимо сопряженных точках); *параболические* прямые касаются абсолютной гиперквадрики.

Эллиптические прямые пространства H^3 принадлежат полностью пространству $\widehat{H}^3$, их называют *эллиптическими прямыми* пространства $\widehat{H}^3$. Гиперболические прямые пространства H^3 разделены абсолютом на две части. Внешнюю относительно абсолюта часть гиперболической прямой пространства H^3 называют *гиперболической прямой* пространства $\widehat{H}^3$. Каждая гиперболическая прямая пространства $\widehat{H}^3$ имеет две бесконечно удаленные точки. Собственные для $\widehat{H}^3$ части параболических прямых пространства H^3 называют *параболическими прямыми* пространства $\widehat{H}^3$. Как и евклидова прямая каждая параболическая прямая пространства $\widehat{H}^3$ имеет одну бесконечно удаленную точку.

Каждая плоскость пространства P_3 пересекает овальную гиперквадрику по линии второго порядка, которая может быть невырожденной (овальной или нулевой), или вырожденной. Овальная гиперквадрика пространства P_3 не содержит вещественных прямых, поэтому вырожденной линией второго порядка пересечения плоскости с овальной гиперквадрикой в P_3 может быть только пара мнимо сопряженных прямых.

Тип плоскости пространства $\widehat{H}^3$ определен типом линии второго порядка, по которой данная плоскость пересекает абсолютную гиперквадрику. Плоскости пространства $\widehat{H}^3$, пересекающие абсолют по нулевой (овальной) линии, называют *эллиптическими* (*гиперболическими плоскостями положительной кривизны*, или плоскостями типа $\widehat{H}$), касательные к абсолюту плоскости — *коевклидовыми* плоскостями.

Эллиптические, гиперболические положительной кривизны и коевклидовы плоскости пространства $\widehat{H}^3$ условимся обозначать символом E, H и C соответственно.

На коевклидовой плоскости существуют углы трех типов [2], на гиперболической плоскости положительной кривизны — углы пятнадцати типов [3]. На плоскости эллиптической все углы одного типа. В зависимости от расположения по отношению к абсолюту в пространстве $\widehat{H}^3$ существуют пятнадцать типов двугранных углов. Тип прямой, тип плоскости, тип плоского угла, тип двугранного угла — инварианты преобразований группы G.

Определение многранника в пространстве $\widehat{H}^3$ даем по аналогии с определением многогранника в копсевдоевклидовом пространстве [4].

Классификацию многогранников пространства $\widehat{H}^3$ проводим по типу их расположения относительно абсолюта.

По типу плоскостей, содержащих грани тетраэдра, в пространстве $\widehat{H}^3$ получаем пятнадцать типов тетраэдров. Условимся их обозначать соответственно типам плоскостей, содержащим грани:

$$EEEE,\ EEEH,\ EEEC,\ EEHH,\ EEHC,\ EECC,\ EHHH,$$
$$ECCC,\ EHCC,\ EHHC,\ HHHH,\ CCCC,\ HHCC,\ HHHC,\ HCCC.$$

В дальнейшей классификации тетраэдров пространства $\widehat{H}^3$ учитываем типы двугранных углов и типы граней тетраэдров.

В качестве примера рассмотрим тетраэдры типа $EEEE$.

С каждой точкой пространства $\widehat{H}^3$ свяжем конус, образованный всеми касательными к абсолюту, проведенными через данную точку. Назовем такой конус *световым* или *изотропным* конусом данной точки, учитывая, что все касательные к абсолюту прямые являются изотропными на $\widehat{H}^3$. Световой конус собственной (несобственной) для пространства $\widehat{H}^3$ точки является вещественным (мнимым). Световой конус точки абсолюта вырождается в вещественную плоскость, коевклидову плоскость пространства $\widehat{H}^3$.

Световой линией грани тетраэдра назовем линию пересечения плоскости, содержащей данную грань, со световым конусом противоположной к данной грани вершины тетраэдра.

Грань тетраэдра типа $EEEE$ пространства $\widehat{H}^3$ назовем *α-гранью*, если она содержит свою световую линию.

Теорема 1. *Совокупность граней тетраэдра типа $EEEE$ либо не содержит α-граней, либо содержит одну α-грань, либо все ее элементы являются α-гранями данного тетраэдра.*

Согласно теореме 1 по количеству α-граней в пространстве $\widehat{H}^3$ можно выделить три класса тетраэдров типа $EEEE$. Класс тетраэдра типа $EEEE$ обозначим $EEEE(I)$, $EEEE(II)$, $EEEE(III)$, если количество его α-граней равно соответственно 0, 1, 4.

Тетраэдр класса $EEEE(I)$ ($EEEE(II)$) содержит четыре (три) двугранных эллиптических угла и два (три) двугранных эллиптических псевдоугла. Каждый двугранный угол тетраэдра класса $EEEE(III)$ является эллиптическим двугранным псевдоуглом.

Полная классификация тетраэдров пространства $\widehat{H}^3$ будет представлена в докладе.

Список цитированной литературы

1. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969. 548 с.

2. Ромакина Л. Н. Геометрии коевклидовой и копсевдоевклидовой плоскостей. Саратов: Изд-во «Научная книга», 2008. 279 с.

3. Ромакина Л. Н. Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны: в 4-х частях. Часть 1: Тригонометрия. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2013. 244 с.

4. Ромакина Л. Н. О параболических многогранниках копсевдоевклидового пространства // Вестник КГПУ им. В. П. Астафьева. 2013. № 1. С. 201–206.

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
Получено 31.03.2015

УДК 514.113.5

Многогранники с n-кратно изолированными симметричными гранями

В. И. Субботин (Новочеркасск)
geometry@mail.ru

Поясом P несимметричных граней выпуклого многогранника в трёхмерном евклидовом пространстве называется такая последовательность несимметричных граней, что каждые две соседние грани имеют только одно общее ребро - соединительное; последняя грань пояса также имеет только одно общее ребро с первой гранью. Помимо соединительных рёбер имеются две несвязные компоненты множества рёбер пояса P. Первая компонента - рёбра, которые предполагаются образующими стороны некоторой грани G. Это множество - внутренняя граница пояса. Вторая компонента - множество рёбер, не являющихся ни соединительными, ни внутренними; рёбра второй компоненты образуют внешнюю границу пояса, которую будем предполагать плоским многоугольником.

Грань G многогранника при этом называется изолированной поясом P граней.

Если внутренняя граница пояса P является внешней границей другого пояса Q, и внутренняя граница Q образует рёбра грани G, то грань G называется двукратно изолированной. Продолжая этот процесс, получим n-кратно изолированную грань G.

Совокупность грани G и n её изолирующих поясов называется островом. Звездой острова S называется остров S вместе со всеми островами, имеющими некоторые вершины общими с вершинами S.

Теорема 1. *Всякий выпуклый многогранник, каждая грань G которого n-кратно изолирована и через G проходит локальная ось симметрии звезды острова, может быть получен из одного из сильно симметричных относительно вращения многогранников [1] путём последовательного надстраивания над каждой гранью серии усечённых осесимметричных пирамид.*

Теорема 2. *Исключая многогранники с главной осью вращения, при фиксированном n существует многогранник с n-кратно изолированными гранями с наибольшим числом f граней: $f = 360n + 62$.*

Список цитированной литературы

1. Субботин В. И. О многогранниках, сильно симметричных относительно вращения // Чебышевский сборник. 2006. Т. VII, №2(18). С. 168–171.

ЮРГПУ(НПИ)
Получено 14.04.2015

УДК 514.172.45

Алгебраическое моделирование правильногранников

А. В. Тимофеенко (Красноярск)
a.v.timofeenko62@mail.ru

Напомним, [1], выпуклый многоугольник называется паркетным, если он может быть составлен из конечного числа равноугольных многоугольников. Каковы с точностью до комбинаторной эквивалентности все выпуклые многогранники с паркетными гранями? В процитированной заметке излагается схема ответа на этот вопрос, построенная на завершенной за семь лет до этого классификации выпуклых многогранников с правильными гранями, [2]. Основой этой классификации служит теорема о том, что за исключением бесконечных серий призм и антипризм, существует ровно 28 простых тел, т.е. нерассекаемых никакой плоскостью на правильногранные тела выпуклых многогранников с правильными гранями. Доказательство теоремы потребовало многолетних усилий коллектива исследователей, занимает более двухсот страниц и зависит от большого объема вычислений. Его анализ, а именно продолжение рассуждений в случаях, когда соединяемые ребрами грани попадали в одну плоскость, привело в начале 1970 годов к появлению ещё шести простых тел, у которых кроме правильных граней есть составленные из правильных многоугольников грани, причём вершины этих многоугольников служат и вершинами многогранников. Несколько лет назад путём нахождения выпуклых соединений простых тел было выяснено, что существует ровно 186 отличных от призм и антипризм выпуклых многогранников, каждая грань которых составлена из правильных многоугольников так, что вершина многоугольника есть и вершина многогранника, [3].

Простых многогранников с паркетными гранями кроме известных четырёх бесконечных серий существует с точностью до комбинаторной эквивалентности лишь конечное число, пока неизвестное. Препятствием к нахождению этого числа и самих многогранников является большой объем вычислений и необходимость передоказывать при более слабых посылках теорему о простых многогранниках. Алгебраическое моделирование, на основе которого применяются системы компьютеной алгебры и графики, позволяет надеяться на преодоление этого барьера. Подтверждением тому служат результаты семинара “Группы и правильногранники"[1], которые будут представлены в докладе. В частности, следующие алгебраические модели созданы при участии А. А. Васениной и Ю. А. Разумовой.

Определение 1. *Рассмотрим антипризму A_n, параллельными основаниями которой служат правильные n-угольники, а боковыми гранями $2n$ правильных треугольников. Двумя параллельными основаниям плоскостями рассечем A на три части. Полученная так средняя часть называется C-антипризмой. Будем её обозначать CA_n. Части, прилегающие к основаниям, называются B-антипризмами. B-антипризму, полученную сечением антипризмы A_n по средним линиям боковых граней, будем обозначать BA_n.*

Предложение 1. *Для каждого $n = 3, 4, \dots$ множество вершин тела CA_n с ребрами длин 1 и 2 совпадает с орбитой точки $\begin{pmatrix} R\left(2\cos\frac{3\pi}{2n} + \cos\frac{5\pi}{2n}\right) \\ R\left(2\sin\frac{3\pi}{2n} + \sin\frac{5\pi}{2n}\right) \\ \frac{\sqrt{3-4R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}}{4} \end{pmatrix}$, $R = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}$, при действии группы, порожденной поворотами $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & \sin\frac{2\pi}{n} & 0 \\ -\sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и отражением $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{n} & \sin\frac{\pi}{n} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{n} & -\cos\frac{\pi}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

Утверждение 1. *Пусть*

$$v_i = \begin{pmatrix} 2R\cos\frac{(2i+1)\pi}{2n} \\ 2R\sin\frac{(2i+1)\pi}{2n} \\ \frac{(-1)^{i+1}\sqrt{3-4R^2(1-\cos\frac{\pi}{n})^2}}{2} \end{pmatrix}, i = 1, 2, \dots, 2n,\ R = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}},$$

для каждого $n = 3, 4, \dots$. Тогда носителем алгебраической модели B-антипризмы BA_n с ребрами длин 1 и 2 служит упорядоченное множество

$$\left\{\frac{v_{2k-1} + v_{2k}}{2},\ v_{2k},\ \frac{v_{2k} + v_{(2k+1)mod(2n)}}{2}\ \middle|\ k = 1, 2, \dots, n\right\},$$

каждый элемент которого интерпретируется как вершина с соответствующим номером, а отношениями модели являются следующие тройки, четверки, n-ки и $2n$-ки номеров вершин: $[3k-2, 3k-1, 3k]$,

$$[3k-1, (3k+2)mod(3n), (3k+1)mod(3n), 3k],\ k = 1, 2, \dots, n;$$

$$[1, 3, 4, 6, 7, \dots, 3n-2, 3n], [1, 3n-1, 3n-4, \dots, 5].$$

[1]https://icm.krasn.ru/seminar.php?id=reghedra

Список цитированной литературы

1. Пряхин Ю. А. Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1974. Т. 45. С. 111–112.

2. Залгаллер В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1967. Т. 2. С. 5–221.

3. Тимофеенко, А. В. К перечню выпуклых правильногранников // Современные проблемы математики и механики. Издат. Московского университета — Москва. 2011. — Т. VI, Математика. — Вып. 3 (К 100-летию со дня рождения Н. В. Ефимова). С. 155–170.

Красноярский госпедуниверситет им. В. П. Астафьева.
Сибирский федеральный университет.
Получено 15.04.2015

УДК 511.335

Локальные отклонения в проблеме распределения дробных долей линейной функции

А. В. Шутов[1] (Владимир)
a1981@mail.ru

Хорошо известно, что для любого иррационального α последовательность дробных долей $\{k\alpha\}$ равномерно распределена по модулю 1. Иными словами, справедлива асимтотическая формула

$$N(\alpha, n, I) \sim n|I|,$$

где

$$N(\alpha, n, I) = \sharp\{k : 0 \leq k < n\{k\alpha\} \in I\}$$

– число точек последовательности $\{k\alpha\}$, $0 \leq k < n$, попавших в некоторый фиксированный интервал $I \subseteq [0; 1)$.

Данная теорема была независимо доказана в 1909-1910 годах Болем, Серпинским и Г.Вейлем [1]–[3] и послужила одним из стимулов к созданию общей теории равномерного распределения.

С точки зрения аналитической теории чисел естественно задать вопрос об остаточном члене

$$r(\alpha, n, I) = |N(\alpha, n, I) - n|I||$$

[1]Грант РНФ № 14-11-00433

приведенной асимптотической формулы. Функция $r(\alpha, n, I)$ называется остаточным членом или локальным отклонением проблемы распределения дробных долей линейной функции.

Часто рассматривают также глобальное отклонение

$$\Delta(\alpha, n) = \sup_I r(\alpha, n, I).$$

В настоящее время для глобального отклонения $\Delta(\alpha, n)$ получено огромное количество результатов, включая правильные по порядку оценки роста. Подробности и библиографию можно найти, например, в [4].

Локальные отклонения $r(\alpha, n, I)$ изучены значительно хуже. С одной стороны, Гекке [5] открыл существование интервалов ограниченного остатка с $|I| \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, для которых

$$r(\alpha, n, I) = O(1).$$

С другой стороны, согласно В.Т.Шош [6] для почти всех интервалов I

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{r(\alpha, n, I)}{\ln n} > 0.$$

При этом если конкретный интервал I не является интервалом ограниченного остатка, то какаие-либо оценки для локального отклонения $r(\alpha, n, I)$, не являющиеся следствиями общих оценок для $\Delta(\alpha, n)$ до настоящего времени удавалось получить только в очень частном случае $I = (0; \frac{1}{2})$. В частности, было неизвестно, существуют ли локальные отклонения, стремящиеся к бесконечности, но медленнее, чем $\Delta(\alpha, n)$.

Теорема 1. *Пусть α – квадратичная иррациональности, $\varphi(x)$ – монотонно возрастающая функция, причем $\varphi(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Тогда существует $\beta \in (0; 1)$ такое, что*

$$\limsup_{n\to\infty} r(\alpha, n, [0; \beta)) = \infty,$$

но

$$r(\alpha, n, [0; \beta)) = o(\varphi(n)).$$

Данная теорема показывает, что в случае квадратичных иррациональностей существуют интервалы со сколь угодно медленно растущими локальными отклонениями. В основе доказательства теоремы лежит подход, предложенный в [7] и связывающий локальные отклонения со скоростью роста наилучших неоднородных диофантовых приближений. Также доказательство использует явное построения числа β с заданной скоростью роста наилучших левосторонних α-приближений. Требуемая иррациональность строится в виде $\beta = \sum_{k\geq 1} ||Q_{m_k}(\alpha)\alpha||$. Здесь $Q_k(\alpha)$ – знаменатели подходящих дробей к α, а $\{m_k\}$ – достаточно быстро растущая последовательность четныхз чисел. При этом для того, чтобы показать, что $\limsup_{n\to\infty} r(\alpha, n, [0; \beta)) = \infty$ используется обратная к упоминавшейся выше теореме Гекке теорема Кестена, описывающая все возможные интервалы ограниченного остатка и теорема Туэ-Зигеля-Рота, доказывающая трансцендентность построенного числа β.

Отметим, что полученное доказательство годится для произвольной алгебраической иррациональности с ограничеными неполными частными разложения в цепную дробь. К сожлению, в настоящее время неизвестно, обладает ли этим свойством хотя бы одна алгебраическая иррациональность степень ≥ 3.

Список цитированной литературы

1. Bohl P. Über ein in der Theorie der säkutaren Störungen vorkommendes Problem, // J. Reine Angew. Math. 1909. Vol. 135. P. 189—283.

2. Sierpinski W. Sur la valeur asymptotique d'une certaine somme // Bull Intl. Acad. Polonmaise des Sci. et des Lettres (Cracovie) series A. 1910. P. 9—11.

3. Weyl H. Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphnomene // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1910. Vol. 330. P. 377—407.

4. Drmota M., Tichy R. F. Sequences, discrepancies and applications. Berlin: Springer. 1997.

5. Hecke E. Eber Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins // Math.Sem.Hamburg Univ. 1921. Vol. 5. P. 54–76.

6. Sos V. T. On strong irregularities of the distribution of $\{n\alpha\}$ sequences // Studies in pure mathematics. Basel: Birkhauser. 1983. P. 685–700.

7. Шутов А. В. Неоднородные диофантовы приближения и распределение дробных долей // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Т. 16, № 6. С. 189–202.

Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Получено 23.02.2015

УДК 511.32

Тригонометрические интегралы над квазирешетками

А. В. Шутов[1] (Владимир)
a1981@mail.ru

[1]Грант РНФ № 14-11-00433

Пусть $\alpha \in (0;1)$ – иррациональное число, $\{\cdot\}$ – дробная доля. В качестве одномерной квазирешетки коразмерности один $L = L(\alpha, l_1, l_2)$ рассмотрим множество точек $\{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, определяемое условиями

$$x_{-1} = 0;$$
$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + l_1, & \{n\alpha\} < 1 - \alpha \\ x_n + l_2, & \{n\alpha\} \geqslant 1 - \alpha \end{cases}. \tag{1}$$

В работе [1] были рассмотрены тригонометрические суммы над квазирешетками $L(\alpha, l_1, l_2)$, то есть суммы

$$T_n(\lambda, \alpha, l_1, l_2) = \sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i \lambda x_n},$$

где x_n – пробегает множество точек квазирешетки $L(\alpha, l_1, l_2)$. Для данных тригонометрических сумм были получены нетривиальные оценки, зависящие от диофантовых свойств α и λ.

Рассмотрим тригонометрический интеграл

$$I_n(l_1, l_2) = \int_0^1 \int_0^1 |T_n(\lambda, \alpha, l_1, l_2)| d\lambda d\alpha.$$

Нами получена нетривиальная оценка для тригонометрического интеграла $I_n(l_1, l_2)$.

Теорема 1. *Пусть $\varphi(x)$ – монотонно возрастающая функция и ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi(k)}$$

– сходится. Тогда справедлива оценка

$$I_n(l_1, l_2) = O(\ln^2 n \varphi(\ln \ln n)).$$

Аналогичные результаты (с заменой $\ln^2 n$ на более высокие степени логарифма) получены и для одномерных квазирешеток произвольной коразмерности, рассматривавшихся в [2].

Список цитированной литературы

1. Шутов А.В. Тригонометрические суммы над квазирешетками // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13. Вып. 2. С. 136–148.

2. Шутов А.В. Тригонометрические суммы над квазирешетками произвольной коразмерности// Математические заметки. 2015. Т. 97. Вып. 5. С. 781–793.

Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Получено 15.03.2015

8. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе

В программе секции представлены достижения тульской теоретико-числовой школы, основанной В. Д. Подсыпаниным в 1949 году. Все доклады относятся к современному развитию теоретико-числового метода в приближенном анализе. Данный метод был основан и разработан в 1957-1963 годах в трудах участников семинара Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР под руководством Н. С. Бахвалова, Н. М. Коробова и Н. Н. Ченцова.

УДК 681.3

Разработка вычислительного модуля в рамках ПОИВС по теории чисел

Ю. А. Басалов, А. Н. Басалова (Тула)
basalov_yurij@mail.ru

Одним из важнейших модулей Проблемно-Ориентированной Информационно-Вычислительной системы является вычислительный модуль. Планируется, что он будет охватывать следующие математические алгоритмы:

- Нахождение диофантовых приближений (В данный момент функционирует) различными способами. Как его составная часть:
- Разложение чисел и векторов в цепные дроби, с последующей визуализацией этого процесса;
- Многомерное интегрирование различными способами, в том числе методом Коробова;
- Решение диофантовых уравнений (в том числе высших степеней и многих переменных);
- Система компьютерной алгебры для проверки корректности доказательства формул, тождеств и теорем.

В конечном итоге вычислительный модуль планируется реализовать в трех видах:

- Приложение для ПК, не требующее доступа в интернет. Вычисления проходят локально. Эту версию вычислительного модуля будет возможно встраивать как составную часть других приложений. Программная реализация будет проводиться на языке C/C++ для обеспечения кроссплатформенности и высокопроизводительности.

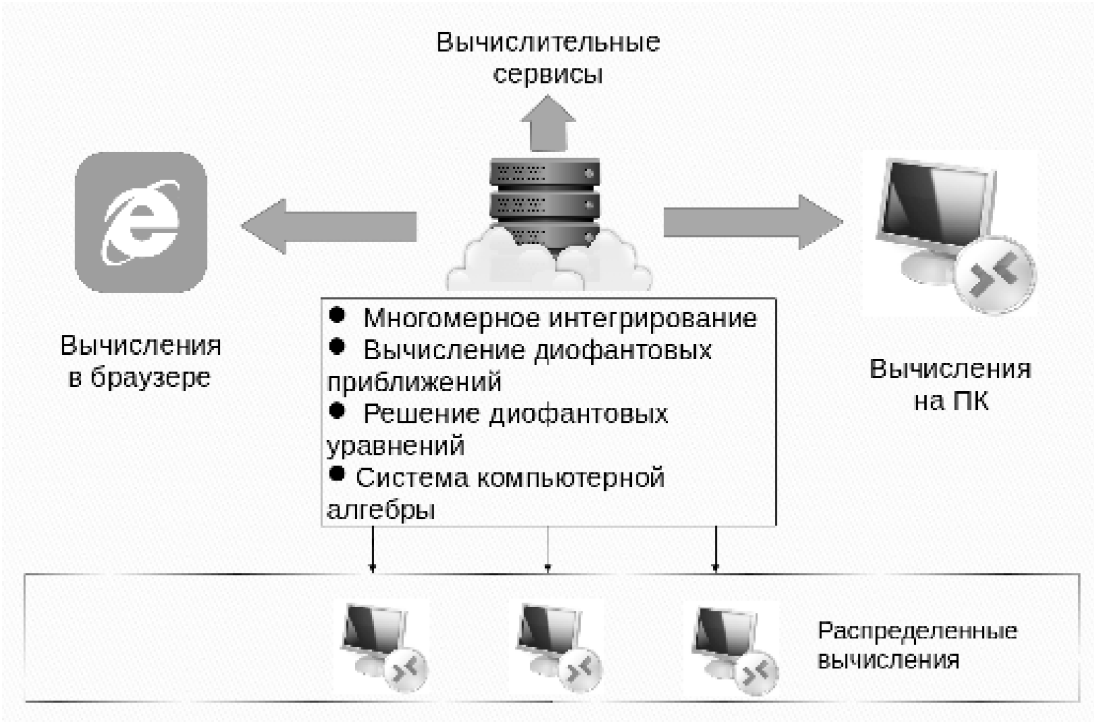


Рис. 4: Схема вычислительного модуля

- Online-сервис, с возможностью выбора места вычислений – на ПК пользователя в браузере или на сервере ПОИВС. Эта версия удобна для нечастого использования. В случае браузера будет использоваться все тот же C/C++ портированный на JavaScript с помощью Mozilla Emscripten. Серверный вариант, как и в большинстве случаев будет использовать C/C++.
- Сервис распределенных вычислений. Необходим для решения объемных задач исследовательского класса. Центральный сервер ПОИВС будет общаться с установленными на ПК пользователей приложениями и совместно решать большие вычислительные задачи.

Благодаря всему этому, вычислительный модуль будет представлять широкие возможности для исследователей различных областей и скорее всего завоюет популярность среди своих пользователей.

Список цитированной литературы

1. Арнольд В. И. Цепные дроби. – М.: Изд-во МЦНМО. 2001 – 40 с.
2. Басалов Ю. А., Басалова А. Н., ПОИВС: Архитектура и этапы создания // Чебышевский сборник, 14:4(48) (2013), 13–25

3. Быковский В. А. Относительные минимумы решеток и вершины многогранников Клейна // Функц. анализ и его прил. 2006. 40:1. С. 69-71.

4. Быковский В. А., О. А. Горкуша. Смежные минимумы решеток. // Матем. сб., 192:2 (2001), 57–66

5. Данилов В. Л., Иванова А. Н., Исакова Е. К. Математический анализ. Функции, пределы, ряды, цепные дроби.. - Москва: Физматгиз, 1961.

6. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. – М. Наука 1965.

7. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. – М. ИИЛ, 1961 – 212 с.

8. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел. – М.: Мир, 1965.

9. Мощевитин Н. Г. Многомерные диофантовы приближения и динамические системы // Регулярная и хаотическая динамика. 1997. №1. Т.2. С. 82-95.

10. Хинчин А. Я. Цепные дроби. 2-е изд. – М.: ГИТТЛ, 1949 – 115 с.

11. Adams W. W. The best two-dimensional diophanite approximation constant for cubic irrationals // Pacific journal of mathematics. 1980. Vol. 91. №1. p. 29-30.

12. Carmichael R. D. Diophanite analysis. 1915.

13. Cusick J. W. The two dimensional diophanite approximation constant // Pacific journal of mathematics. 1983. Vol. 105. №1. p. 53-67.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Получено 5.05.2015

УДК 511.3

Оптимальные коэффициенты и сложные эконометрические модели [1]

Л. П. Добровольская (Тула)
lbocharova6565@mail.ru

Одно из возможных практических применений оптимальных коэффициентов связано со сложными эконометрическими моделями. Такие модели возникают в самом простой ситуации, когда берется линейная комбинация нескольких моделей, при этом применение метода наименьших квадратов сразу приводит к сложной задаче либо решения трансцендентной системы уравнений,

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ, № 15-01-01540а.

либо поиска минимума функции многих переменных. В обоих случаях простой эффективный алгоритм поиска приближенного решения может опираться на псевдо-случайный поиск.

В работе [1] построен общий алгоритм вычисления оптимальных коэффициентов для любого модуля N такой, что для обобщенной логарифмической меры качества $T_{N,A}(a_1,\ldots,a_s)$ выполнено неравенство

$$T_{N,A}(a_1,\ldots,a_s) \leqslant T_{N,A}. \tag{1}$$

Теорема 1. *Для $T_{N,A}$ — среднего арифметического обобщенной логарифмической меры качества с константой A наборов коэффициентов по модулю N справедливо равенство*

$$T_{N,A} = A^s \cdot (N-1) + \sum_{p|N} \sum_{\nu=1}^{\nu_p} \left(1 - \frac{1}{p}\right) p^\nu \left(\left(A - \frac{2p\ln p}{(p-1)p^\nu}\right)^s - A^s \right).$$

Далее дается определение допустимой последовательности простых и специального модуля, для которых на основе общего алгоритма для $N = p_1 p_2 \ldots p_k$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — допустимая последовательность простых чисел, строится алгоритм вычисления за $O(N)$ арифметических операций значений $a_1,\ldots,a_s$ из приведенной системы вычетов по модулю N таких, что выполнено неравенство (1).

Пусть p — фиксированное нечетное простое число большее 3, например, любое нечетное простое число большее 3 и непревосходящее 100. Будем говорить, что монотонно возрастающая последовательность $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — допустимая последовательность простых чисел длины k для простого p, если для этой последовательности простых чисел выполнены условия

$$p_1 = p, \quad \frac{6p_1\ldots p_{j-1}}{6^{j-1}} < p_j < \frac{12p_1\ldots p_{j-1}}{6^{j-1}} \quad (2 \leqslant j \leqslant k).$$

Из постулата Бертрана легко следует, что для любого простого нечетного $p > 3$ существует допустимая последовательность простых чисел произвольной длины k.

Непосредственными вычислениями, используя таблицу простых, нетрудно проверить, что для простого $p = 5$ допустимой последовательностью простых длиной 6 будет последовательность $5, 7, 11, 17, 53, 307$, которая определяет модуль $N = 106493695$.

Для заданного фиксированного простого p, вообще говоря, существует несколько допустимых последовательностей простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$ первого типа длины k. Среди них можно выделить одну минимальную допустимую последовательность $p_1^{'}, p_2^{'}, \ldots, p_k^{'}$ и одну максимальную $p_1^{''}, p_2^{''}, \ldots, p_k^{''}$, которые обладают свойством

$$p_j^{'} < p_j < p_j^{''} \quad (3 \leqslant j \leqslant k)$$

для любой допустимой последовательности $p_1, p_2, \ldots, p_k$ с одним и тем же p. Тем самым определяется минимальный модуль $N'_{p,k} = p'_1 \cdot p'_2 \cdot \ldots \cdot p'_k$ и максимальный $N''_{p,k} = p''_1 \cdot p''_2 \cdot \ldots \cdot p''_k$.

Например, для $p = 5$ минимальной допустимой последовательностью длины 6 будет последовательность $5, 11, 43, 919$, а максимальной — $5, 7, 11, 19,\ 67, 751$. Соответственно, $N'_{5,6} = 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 89 = 10245235$ и $N''_{5,6} = 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 67 \cdot 751 = 368068855$.

Будем предполагать, что заранее перед выполнением алгоритма затабулирована таблица функции $\ln\left(2\sin\left(\pi\left\{\frac{k}{N}\right\}\right)\right)$ для $k = 1, 2, \ldots, N-1$, что потребует разового выполнения $C \cdot N$ машинных операций. Также будем предполагать, что имеется массив всех делителей числа $N = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$, в котором 2^k различных элементов, а также массивы значений функции Мёбиуса и функции Эйлера для каждого из этих делителей. Вычисление этих массивов потребует не более $O(\sqrt{N})$ элементарных арифметических операций, а для хранения — не более $O(\sqrt{N})$ байтов объема оперативной памяти.

Теорема 2. *Пусть $K^*(N)$ — количество элементарных операций необходимых для вычисления величин $a_1, \ldots, a_s$ оптимальных коэффициентов по специальному модулю N индекса s, тогда справедливо неравенство*

$$K^*(N) \leqslant s^2 C \cdot N \cdot \left(\frac{7}{2} \cdot p + 32\frac{2}{5}\right) = 5 \cdot C \cdot s^2 \cdot N \cdot \left(\frac{7}{10} \cdot p + 6\frac{12}{25}\right),$$

где C — максимальное количество элементарных операций для вычисления и использования одного множителя вида A–$2\ln\left(2\sin\left(\pi\left\{\frac{z_{j\nu}t}{p_\nu}\right\}\right)\right)$, а специальные модули N принадлежат показателю 0 с константой $\frac{7}{10} \cdot p + 6\frac{12}{25}$.

В заключении отметим, что как указывал Н.М.Коробов трудоемкость вычисления оптимальных коэффициентов за $O(N)$ элементарных операций сравнима с трудоемкостью вычисления по квадратурной формуле, а поэтому может считаться приемлемой. Далее заметим, что трудоемкость за $O\left(\ln^s N\right)$ при больших s на практике может оказаться лучше чем $O(N)$ только при очень больших значения $N > N_0(s)$, которые не доступны для реальной реализации.

Список цитированной литературы

1. Бочарова (Добровольская) Л. П. Алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2007 Т. 8. Вып. 1(21). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 4 — 109.

Институт экономики и управления
Получено 7.05.2015

УДК 004.02

Гнездовые массивы и рекурсия[1]

Н. М. Добровольский, А. Р. Есаян (Тула)
dobrovol@tspu.tula.ru esayanalbert@mail.ru

В математике рекурсия используется в двух аспектах: прикладном — как специальный способ нахождения решений определенных задач, и сугубо теоретическом — для формализации интуитивного понятия алгоритма. В информатике рекурсия применяется как практически ориентированное знание с изящным и эффективным инструментарием для реальных вычислений. Именно о прикладном аспекте рекурсии, связанном с гнездовыми (вложенными) массивами и пойдет речь ниже. Часто использование рекурсии упрощает решение задачи, а в данном случае рекурсия позволяет линейно по одной и той же схеме осуществлять пробежку по всем элементам каждого уровня любого гнездового массива вне зависимости от его структуры и глубины вложенности. Отметим, что гнездовой массив можно интерпретировать деревом, корнем которого является сам массив, от него идут дуги к массивам-элементам и т. д. Листьями подобного дерева являются скаляры или строки — конечные элементы, не имеющие ссылок на последующие массивы. В докладе предлагаются и обсуждаются рекурсивные программы-функции для решения ряда задач общего характера с гнездовыми массивами. Вот примеры таких задач: подсчитать общее количество листьев массива; сформировать массив из транспонированных на всех уровнях вложенности элементов исходного массива; выяснить, является ли данный объект (скаляр, строка, простой массив, гнездовой массив) элементом данного массива на каком-либо уровне вложенности; подсчитать количество вхождений объекта в массив на всех уровнях вложенности; собрать все листья массива в вектор, заместить листья данного массива элементами какого-либо вектора и т. п. Во всех случаях рекурсивная триада такова: параметр рекурсии — гнездовой массив; декомпозиция — переходы на всех уровнях вложенности от массивов к их элементам и так до листьев; рекурсивная база, то есть тривиальные случаи в рекурсии — листья массивов [1].

Предлагаемые лаконичные рекурсивные программы-функции решения перечисленных и некоторых других задач реализованы на простом и интуитивно понятном языке программирования системы инженерных и научных вычислений *PTC Mathcad Prime* (версия 3.1) [2,3]. Отметим, что в этой системе гнездовые массивы — это вложенные друг в друга матрицы.

На фрагменте 1 представлены рекурсивные функции решения некоторых из перечисленных выше задач и приведены контрольные вычисления по ним. Остановимся, например, на описании функции $mavec$, возвращающей по гнездовому массиву ma вектор из его листьев. Декомпозиция в $mavec$ проводится переходами на всех уровнях вложенности ma от матриц к их элементам и так до

[1]Грант РФФИ № 15-01-01540

Фрагмент 1

Примеры. Рекурсивные программы с гнездовыми массивами

Массивы для расчетов:

$$a:=\begin{bmatrix}1&3&7\\4&6&9\end{bmatrix}\qquad b:=\begin{bmatrix}1&3&7\\7&6&[7\ 5]\end{bmatrix}\qquad c:=\begin{bmatrix}[7\ 9]&3&7\\4&7&\begin{bmatrix}2&\begin{bmatrix}2&\begin{bmatrix}7&2&30\\4&5&[7\ 9]\end{bmatrix}\\ [7\ 9]&7\end{bmatrix}\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

A) Подсчет общего количества листьев гнездового массива

```
num(ma) := ‖ su ← 0
           ‖ for b ∈ ma
           ‖   ‖ su ← su + if(IsArray(b), num(b), 1)
```

$num(a)=6$
$num(b)=7$
$num(c)=18$

B) Вхождение *x* в гнездовой массив *ma* на каком-либо уровне его вложенности

```
in(x, ma) ≡ ‖ su ← if(x = ma, 1, 0)
            ‖ for b ∈ ma
            ‖   ‖ if (su = 1)∨(b = x)
            ‖   ‖   ‖ return 1
            ‖   ‖ else
            ‖   ‖   ‖ su ← if(IsArray(b), in(x, b), 0)
```

$in(6,a)=1$
$in(5,b)=1$
$in(78,c)=0$
$in(c,c)=1$
$in([7\ 5],b)=1$
$in([7\ 9],c)=1$
$in(“5”,b)=0$

$$in\left(\begin{bmatrix}2&\begin{bmatrix}7&2&30\\4&5&[7\ 9]\end{bmatrix}\\ [7\ 9]&7\end{bmatrix},c\right)=1\qquad in\left(\begin{bmatrix}7&2&30\\4&5&[7\ 9]\end{bmatrix},c\right)=1\qquad in\left(\begin{bmatrix}4&5\\6&7\end{bmatrix},c\right)=0$$

C) Транспонирование гнездовых массивов и их подмассивов на каждом их уровне

```
tra(ma) := ‖ ma ← ma^T
           ‖ for i ∈ 0..rows(ma) − 1
           ‖   ‖ for j ∈ 0..cols(ma) − 1
           ‖   ‖   ‖ b ← ma[i,j]
           ‖   ‖   ‖ if IsArray(b)
           ‖   ‖   ‖   ‖ ma[i,j] ← tra(b)
           ‖ ma
```

$$tra(c)=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\9\end{bmatrix}&4\\3&7\\7&\begin{bmatrix}2\\\begin{bmatrix}2&\begin{bmatrix}7\\9\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}7&4\\2&5\\30&\begin{bmatrix}7\\9\end{bmatrix}\end{bmatrix}&7\end{bmatrix}\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

D) Формирование по гнездовому массиву *ma* вектора его листьев

```
mavec(ma) := ‖ ve ← ∞
             ‖ for b ∈ ma
             ‖   ‖ r ← if(IsArray(b), mavec(b), b)
             ‖   ‖ ve ← if(ve = ∞, r, stack(ve, r))
```

$mavec(a)^{T}=[1\ 4\ 3\ 6\ 7\ 9]$

$mavec(b)^{T}=[1\ 7\ 3\ 6\ 7\ 7\ 5]$

$mavec(c)^{T}=[7\ 9\ 4\ 3\ 7\ 7\ 2\ 2\ 7\ 9\ 7\ 4\ 2\ 5\ 30\ 7\ 9\ 7]$

листьев. Обработка каждого листа — это и есть тривиальные случаи в рекурсии. А проводится она в ветви *else* оператора *if* следующим образом. Если вектор ve еще не пополнялся ($ve = \infty$), то он полагается равным текущему листу b, иначе к имеющемуся ve с конца добавляется лист b ($ve = stack(ve, b)$). Декомпозиция осуществляется так. Если очередной элемент b исследуемого массива есть массив, то организуется рекурсивное обращение $r \leftarrow mavec1(b)$ и результат вычислений r или заносится в ve, если вектор ve еще не пополнялся ($ve = \infty$), или добавляется с конца к имеющемуся вектору ve ($ve = stack(ve, r)$).

Список цитированной литературы

1. Есаян А. Р. Обучение алгоритмизации на основе рекурсии. Тула: Изд. ТГПУ, 2001, с. 215

2. Brent Maxfield, P. E. Essential PTC Mathcad Prime 3.0. A Guide for New and Cur-rent Users, New York, Academic Press is an imprint of Elsevier, Nov. 11, 2013, p. 563

3. Hans Wessenlingh and Hans de Waard. Calculate & Communicate with Mathcad Prime 3.0, Delft Academic Press, The Netherlands, First edition 2014

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Получено 31.03.2015

УДК 511.3

Гиперболические параметры сеток и их применения[1]

Н. Н. Добровольский (Тула)
nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Пусть

$$S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots,m_s) = \sum_{k=1}^{N} \rho_k e^{2\pi i[m_1\xi_1(k)+\ldots+m_s\xi_s(k)]}$$

— тригонометрическая сумма сетки с весами, а $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = \frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — нормированная тригонометрическая сумма сетки с весами.

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ № 15-01-01540а

Определение 1. *[1] Дзета-функцией сетки M с весами $\vec\rho$ и параметром $p \geqslant 1$ называется функция $\zeta(\alpha, p|M, \vec\rho)$, заданная в правой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$ $(\sigma > 1)$ рядом Дирихле*[2]

$$\zeta(\alpha, p|M, \vec\rho) = {\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}}' \frac{|S^*_{M,\vec\rho}(\vec m)|^p}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^*(p, M, \vec\rho, n)}{n^\alpha}, \tag{1}$$

где

$$S^*(p, M, \vec\rho, n) = \sum_{\vec m \in N_s(n)} |S^*_{M,\vec\rho}(\vec m)|^p, \quad N_s(n) = \{\vec m | \overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s = n\}. \tag{2}$$

Через дзету-функцию сетки M с весами $\vec\rho$ выражается норма линейного функционала погрешности приближенного интегрирования функций из класса E_s^α и класса $E_s^{\alpha,q}$ с нормой

$$\|f(\vec x)\|_{E_s^{\alpha,q}} = \left(|C(\vec 0)|^q + {\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}}' |C(\vec m)|^q (\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{\frac{q\alpha}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

(см. [1], [3]). Вначале определение гиперболического параметра сетки было таким.

Определение 2. *[1] Гиперболическим параметром сетки M с весами $\rho(\vec x)$ назовем величину*

$$q\left(M, \rho(\vec x)\right) = \min_{\vec m \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\vec 0\}, |S(\vec m)| > 0} \overline{m_1} \ldots \overline{m_s}\,.$$

Но последующие исследования показали, что это понятие требует уточнений.

В работе [1] для любой сетки M с весами $\vec\rho$ на пространстве периодических функций E_s^α рассмотрен линейный оператор $A_{M,\vec\rho}$ взвешенных сеточных средних заданный равенством

$$g(\vec x) = A_{M,\vec\rho} f(\vec x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \rho_k f[x_1 + \xi_1(k), \ldots, x_s + \xi_s(k)]. \tag{3}$$

С точки зрения величины нормированной тригонометрической суммы сетки с весами естественно определить следующие пять подмножеств фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ таким образом:

$$K_0 = K_0(M, \vec\rho) = \{\vec m \in \mathbb{Z}^s \,|\, S^*_{M,\vec\rho}(\vec m) = 0\}, \tag{4}$$
$$K_1 = K_1(M, \vec\rho) = \{\vec m \in \mathbb{Z}^s \,|\, S^*_{M,\vec\rho}(\vec m) = 1\}, \tag{5}$$
$$K_2 = K_2(M, \vec\rho) = \{\vec m \in \mathbb{Z}^s \,|\, S^*_{M,\vec\rho}(\vec m) \neq 1,\, |S_{M,\vec\rho}(\vec m)| = 1\}, \tag{6}$$
$$K_3 = K_3(M, \vec\rho) = \{\vec m \in \mathbb{Z}^s \,|\, 0 < |S^*_{M,\vec\rho}(\vec m)| < 1\}, \tag{7}$$
$$K_4 = K_4(M, \vec\rho) = \{\vec m \in \mathbb{Z}^s \,|\, |S^*_{M,\vec\rho}(\vec m)| > 1\}. \tag{8}$$

[2]Для любого вещественного m полагается $\overline{m} = \max\{1, |m|\}$

Ясно что $\mathbb{Z}^s = K_0 \bigcup K_1 \bigcup K_2 \bigcup K_3 \bigcup K_4$. Такое разбиение называется разбиением Коробова. Оно фактически возникало в его работах, когда он проводил оценки погрешности приближенного интегрирования.

В работе [1] было дано определение нормального и несмещенного линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних (см. [1], стр. 195 и 199). Нормальный оператор не увеличивает норму любой функции, то есть $K_4 = \varnothing$, а для несмещенного оператора имеем: $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) = 1$.

Определение 3. *Для произвольного подмножества K фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ гиперболическим параметром $q(K)$ называется величина*

$$q(K) = \min_{\vec{m} \in K} \overline{m_1} \dots \overline{m_s}. \tag{9}$$

Для пустого множества K полагается $q(K) = \infty$.

Определение 4. *Для произвольной сетки M с весами $\vec{\rho}$ такими, что соответствующий линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, первый, второй и третий гиперболические параметры сетки M с весами $\vec{\rho}$ задаются равенствами*

$$q_\nu\left(M, \rho(\vec{x})\right) = q(K_\nu\left(M, \rho(\vec{x})\right)) \quad (\nu = 1, 2, 3). \tag{10}$$

Пусть сетка M — рациональная со знаменателем p, то есть в s-мерном кубе $G_s = \{\vec{x} \,|\, 0 \leqslant x_i < 1 \, (i = 1, \dots, s)\}$ имеется N рациональных точек вида

$$\left(\frac{x_1^{(k)}}{p}, \dots, \frac{x_s^{(k)}}{p}\right) \qquad k = 1, \dots, N, \tag{11}$$

$x_i^{(k)}$ — целые, $0 \leqslant x_i^{(k)} \leqslant p - 1$, p — натуральное.

Теорема 1. *Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с весами $\vec{\rho}$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, справедливо соотношение*

$$p \cdot \mathbb{Z}^s \subset K_1\left(M, \rho(\vec{x})\right),$$

кроме того тригонометрические суммы $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ с весами $\vec{\rho}$ принимают конечное число различных значений, не превосходящее p^s.

Теорема 2. *Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с положительными весами $\vec{\rho}$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, множество $K_1(M, \vec{\rho})$ является целочисленной решеткой.*

Теорема 3. *Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с положительными весами $\vec{\rho}$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, множество $K_1(M, \vec{\rho}) \bigcup K_2(M, \vec{\rho})$ является целочисленной решеткой.*

Определение 5. *Будем говорить, что сетка M с весами $\vec{\rho}$, для которой линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, имеет тип $\Delta(N,s)<1$, если для любого $\vec{m}\in K_3(M,\vec{\rho})$ выполняется оценка*

$$|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|\leqslant\Delta(N,s).$$

Теорема 4. **(Обобщенная теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функци решеток)***Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с положительными весами $\vec{\rho}$ типа $\Delta(N,s)<1$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, справедлива оценка*

$$\zeta(\alpha,p|M,\vec{\rho})\leqslant 2^{(\alpha+1)s+1}\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s\frac{(\ln q(\Lambda)+1)^{s-1}}{q^\alpha(\Lambda)}+$$
$$+\Delta^p(N,s)\frac{1}{t^{\alpha-1}}\left(\frac{\ln^{s-1}t}{(\alpha-1)(s-1)!}+\right.$$
$$\left.+\sum_{m=0}^{s-2}\frac{\ln^m t}{m!}\left(\sum_{k=m}^{s-2}\zeta(\alpha)^{s-2-k}C_k^m\frac{\alpha-1+\zeta(\alpha)}{\alpha-1}+\frac{C_{s-1}^m}{\alpha-1}\right)\right), \qquad (12)$$

где решетка $\Lambda=K_1(M,\vec{\rho})\bigcup K_2(M,\vec{\rho})$ и $t=q_3\left(M,\rho(\vec{x})\right)$.

Таким образом, мы видим, что при оценки дзета-функции сетки с весами необходимо использовать все три гиперболических параметра сетки.

Список цитированной литературы

1. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник. 2008. Т. 9, вып. 1(25). С. 185 — 223.

2. Добровольский Н. Н. ПОИВС ТМК: Гиперболический параметр сеток с весами // Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии: материалы международной научно-практической конференции. Тула, 3-7 октября 2011. Тула: изд-во ТГПУ им Л. Н. Толстого. С. 266 — 267.

3. Добровольский Н. Н. О гиперболическом параметре сетки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2013. Вып. 2, ч. 1. С. 6 — 18.

4. Добровольский Н. Н. Гиперболический параметр сеток с весами и его применение: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ имени М. В. Ломоносова. 2014.

МБОУ СОШ №56 г. Тула
Получено 11.04.2015

УДК 511.3

Об отклонении плоских сеток[1]

Н. Н. Добровольский, Г. Т. Вронская (Тула)
nikolai.dobrovolsky@gmail.com vronskaya63@gmail.com

Рассмотрим двумерную простейшую декартову сетку

$$M(\nu_1,\nu_2)=\left\{\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\frac{k_2}{2^{\nu_2}}\right)\middle|\, 0\leqslant k_1\leqslant 2^{\nu_1}-1,\, 0\leqslant k_2\leqslant 2^{\nu_2}-1\right\} \tag{1}$$

из $2^{\nu_1+\nu_2}$ точек, которая также называется обобщенной равномерной сеткой.

Сетка Смоляка $Sm(q)=Sm(q,2)$ с параметром $q\geqslant 3$ определяется как объединение всех обобщенных равномерных сеток $M(\nu_1,\nu_2)$ с $q-1\leqslant\nu_1+\nu_2\leqslant q$, таким образом

$$Sm(q,2)=\left\{\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\frac{k_2}{2^{\nu_2}}\right)\middle|\,\begin{array}{c}0\leqslant k_1\leqslant 2^{\nu_1}-1,\ 0\leqslant k_2\leqslant 2^{\nu_2}-1,\\ \nu_1,\nu_2\geqslant 1,\quad q-1\leqslant\nu_1+\nu_2\leqslant q\end{array}\right\}. \tag{2}$$

Двумерные сетки Смоляка $Sm(q)$ являются частным случаем s–мерных сеток $Sm(q,s)$, которые использовались в работе [3] для построения квадратурных и интерполяционных формул с весами и на них были получены результаты на различных классах функций, сравнимые с наилучшими из известных.

Естественно изучить величину отклонения этих сеток как меры равномерности распределения их точек в s–мерном единичном кубе. Здесь возможно три различных подхода: с учетом кратности точек в объединении, без их учета и, наконец, с весами из квадратурной формулы. В работе [4] для первых двух случаев сформулированы следующие четыре результата, из которых два последних парадоксальны.

Теорема 1. *Для количества $N^{(1)}_{q,s}$ точек сетки $Sm(q,s)$ с учетом кратности точек справедливы соотношения*

$$N^{(1)}_{q,s}=\sum_{k=0}^{s-1}2^{q-k}C^{s-1}_{q-k-1},\quad \frac{q^{s-1}2^q}{2^{s-1}(s-1)!}\leqslant N^{(1)}_{q,s}\leqslant\frac{q^{s-1}2^q}{(s-1)!}\ \text{при } q\geqslant 4s.$$

Теорема 2. *Для количества $N^{(2)}_{q,s}$ точек сетки $Sm(q,s)$ без учета кратности точек справедливо соотношение*

$$N^{(2)}_{q,s}=O(q^{s-1}2^q).$$

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ № 15-01-01540а

Теорема 3. *Для отклонения $D^{(1)}_{q,s}$ сетки $Sm(q,s)$ с учетом кратности точек справедливо соотношение*

$$D^{(1)}_{q,s} = O\left(\frac{N^{(1)}_{q,s}}{\ln N^{(1)}_{q,s}}\right).$$

Теорема 4. *Для отклонения $D^{(2)}_{q,s}$ сетки $Sm(q,s)$ без учета кратности точек справедливо соотношение*

$$D^{(2)}_{q,s} = O\left(\frac{N^{(2)}_{q,s}}{\ln N^{(2)}_{q,s}}\right).$$

Для двумерных сеток справедливы следующие результаты:

Теорема 5. *Если $N^{(1)}_q$ — число узлов сетки $Sm(q)$ с учетом кратности, то при $q \geqslant 2$ выполняются соотношения:*

$$N^{(1)}_q = \frac{3q-4}{2}2^q, \quad q = O\left(\ln N^{(1)}_q\right), \quad 2^q = O\left(\frac{N^{(1)}_q}{\ln N^{(1)}_q}\right)$$

Теорема 6. *Если $N^{(2)}_q$ — число узлов сетки $Sm(q)$ без учета кратности, то при $q \geqslant 3$ выполняются соотношения:*

$$N^{(2)}_q = q2^{q-1}, \quad q = O\left(\ln N^{(2)}_q\right), \quad 2^q = O\left(\frac{N^{(2)}_q}{\ln N^{(2)}_q}\right).$$

Рассмотрим произвольную сетку X из $N = |X|$ точек в единичном квадрате $G_2 = [0;1)^2$, где

$$X = \{\vec{x}_0, \ldots, \vec{x}_{N-1}\} \subset G_2, \tag{3}$$

и локальное отклонение

$$D(X,\vec{t}) = \sum_{k=0}^{N-1} \chi(\vec{x}_k,\vec{t}) - Nt_1t_2, \quad \vec{t} \in [0;1]^2, \tag{4}$$

где

$$\chi(\vec{x},\vec{t}) = \prod_{j=1}^{2} \chi(x_j,t_j)$$

— характеристическая функция прямоугольника $\prod\limits_{j=1}^{2}[0;t_j)$, а

$$\chi(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 \leqslant x < t, \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [0;t) \end{cases} \tag{5}$$

— характеристическая функция промежутка $[0; t)$.

Для каждой сетки X рассмотрим следующую характеристику:

$$D(X) = \sup_{\vec{t} \in [0;1]^s} |D(X, \vec{t})| \tag{6}$$

— отклонение.

Теорема 7. *Для отклонения $D^{(1)}_{q,2}$ двумерной сетки Смоляка $Sm(q)$ с учетом кратности узлов при $q > 3$ справедливо равенство*

$$D^{(1)}_{q,2} = D^{(1)}_{q,2}\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) = 27 \cdot 2^{q-4} + 2q - 11 = O\left(\frac{N^{(1)}_{q,2}}{\ln N^{(1)}_{q,2}}\right).$$

Список цитированной литературы

1. Добровольский Н. Н. Отклонение двумерных сеток Смоляка // Чебышевский сборник 2007. Т. 8, вып. 1(21). С. 110 — 152.

2. Г. Т. Вронская, Н. Н. Добровольский Отклонения плоских сеток / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2012. 193 с.

3. Смоляк С. А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // ДАН СССР Т. 148, № 5, С. 1042 — 1045 (1963)

4. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Яфаева Р. Р. О сетках С. А. Смоляка // Современные проблемы математики, механики, информатики: Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. Тула: ТулГу 2002. С. 18-20.

МБОУ СОШ №56 г. Тула
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Получено 10.04.2015

УДК 004.02

Векторизация и гнездовые массивы

А. Р. Есаян[1], А. В. Якушин (Тула)
esayanalbert@mail.ru, yakushin@tspu.tula.ru

[1]Грант РФФИ № 15-01-01540

В *PTC Mathcad*, да и в прежних версиях *Mathcad*, для числовых и символьных вычислений предложен специальный оператор векторизации, с помощью которого можно выполнять многие встроенные и некоторые пользовательские функции одной переменной над каждым скалярным или строковым элементом простых или гнездовых (вложенных) массивов. Этот оператор выглядит в виде направленной слева направо стрелки над выражением. Операцию векторизации можно применять и к встроенным функциям нескольких переменных, но только над простыми массивами со скалярными или строковыми элементами. Итак, для встроенных функций от одной или нескольких переменных операция векторизации в случае гнездовых массивов может быть реализована далеко не всегда, а для пользовательских функций она, как правило, не реализуется даже для простых массивов.

В докладе рассказывается о возможности снятия всех упомянутых ограничений, то есть создания аналогов оператора векторизации для любых встроенных или пользовательских функций g от n переменных ($n = 1, 2, 3, \dots$) при простых или гнездовых массивах. Такими аналогами могут быть рекурсивные функции. Рассмотрено два подхода к решению данной задачи. При первом подходе для конкретных n строятся отдельные рекурсивные программы-функции $F1$, $F2$, $F3, \dots$, выполняющие роль операторов векторизации. При втором подходе для функции g создается единая при любых n программа-функция F, реализующая векторизацию. Предлагаемые для этой цели, а также для решения ряда вспомогательных задач, лаконичные рекурсивные программы-функции написаны на простом и интуитивно понятном языке программирования системы инженерных и научных вычислений *PTC Mathcad Prime* (версия 3.1) [2,3]. Отметим, что в этой системе гнездовые массивы — это вложенные друг в друга матрицы. На фрагменте 1 кроме функций векторизации F и hei приведены также функции генерирования случайных гнездовых массивов $tree$ и $rtree$.

Опишем аргументы функций:

$hei(ma)$ — вычисления высоты массива и $F(ma, g)$ — векторизации ma функцией n переменных g:

a) если g — пользовательская функция n переменных, то она должна определяться как $g(v) := g(v_0, v_1, ..., v_{n-1})$, то есть, как функция компонентов вектора v:;

b) если $g(x, y, ...)$ — встроенная функция n переменных, то ее определение необходимо подправить, переписав его в виде: $func(v) := g(v_0, v_1, ..., v_{n-1})$, где $func$ — новое имя функции. Например, встроенная функция трех переменных $substr(st, n, m)$ должна быть записана, например, так $qwe(v) := substr(v_0, v_1, v_2)$;

c) в матрице ma на ее предпоследних уровнях (перед листьями) должны располагаться векторы длины n, компоненты которых являются последовательными значениями аргументов функции g.

A. Векторизация встроенной или пользовательской функции g n-переменных над гнездовыми массивами $ma1$, $ma2$, ... (единая программа для n=1, 2, ...)

```
hei(ma) := | h ← 0
           | if IsArray(ma)
           |   | for b ∈ ma
           |   |   | h ← max(h, 1 + hei(b))
```

подсчет максимальной высоты (глубины вложенности) гнездоваго массива ma

```
F(ma, g) := | B ← ma
            | for i ∈ 0..rows(ma) − 1
            |   | for j ∈ 0..cols(ma) − 1
            |   |   | b ← ma[i,j]
            |   |   | B[i,j] ← if(hei(b) = 1, g(b), F(b, g))
            | B
```

1)

$$ma := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix}45\\90\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}81\\9\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}18\\4\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}45\\90\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}45\\90\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}45\\90\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}20\\90\end{bmatrix}\end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$mgcd(v) := \gcd\left(v_0, v_1\right)$$

$$F(ma, mgcd) = \begin{bmatrix} 45 & 9 & 2 \\ 45 & 45 & \begin{bmatrix}45 & 10\end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

2)

$$w := \begin{bmatrix} \begin{bmatrix}\text{“вишня”}\\0\\2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\text{“яблоко”}\\1\\3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\text{“груша”}\\2\\6\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}\text{“слива”}\\0\\3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\text{“персик”}\\0\\3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{“апельсин”}\\3\\2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\text{“мандарин”}\\4\\2\end{bmatrix}\end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$mysubstr(v) := \mathrm{substr}\left(v_0, v_1, v_2\right) \quad F(w, mysubstr) = \begin{bmatrix} \text{“ви”} & \text{“бло”} & \text{“уша”} \\ \text{“сли”} & \text{“пер”} & \begin{bmatrix}\text{“ль”} & \text{“ар”}\end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

B. Генерирование случайного гнездового массива высоты не более 5

```
rtree(p) := | [n  m] ← [floor(rnd(3))  floor(rnd(3))]
            | for i ∈ 0..n
            |   | for j ∈ 0..m
            |   |   | B[i,j] ← if(rnd(1) < p, rtree(p), floor(rnd(9)))
            | B
```

$p := 0.3$

$y := \mathrm{Seed}(119867118)$

```
tree(p) := | try
           |   | B ← rtree(p)
           |   | while hei(B) > 5
           |   |   | B ← rtree(p)
           | on error
           |   | tree(p)
```

$$tree(p) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & \begin{bmatrix} 4 & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\end{bmatrix} & 1 & 0\end{bmatrix} & 6 \\ 8 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} & 7 \\ 2 & 2 & \begin{bmatrix} 5 & \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}\\0\end{bmatrix} & 8 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Выполняется функция $F(ma, g)$ так. Создается матрица B такой же структуры, что и ma, и в двойном цикле for для каждого элемента верхнего уровня $b = ma_{i,j} \in ma$ реализуются следующие действия. Если высота b равна 1, то есть b состоит только из листьев, то элемент $B_{i,j}$ полагается равным $g(b)$, иначе — рекурсивному обращению $F(b, g)$. Во втором случае F таким же способом начинает выполняться для найденного подмассива b и т. д. Все это и обеспечивает правильное формирование выводимой матрицы B.

Список цитированной литературы

1. Есаян А. Р. Обучение алгоритмизации на основе рекурсии. Тула: Изд. ТГПУ, 2001, с. 215
2. Brent Maxfield, P. E. Essential PTC Mathcad Prime 3.0. A Guide for New and Cur-rent Users, New York, Academic Press is an imprint of Elsevier, Nov. 11, 2013, p. 563
3. Hans Wessenlingh and Hans de Waard. Calculate & Communicate with Mathcad Prime 3.0, Delft Academic Press, The Netherlands, First edition 2014

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Получено 31.03.2015

УДК 511.3

Символьные вычисления и биквадратичные поля

Е. В. Зеленцова, Д. О. Родионов, А. В. Титов (Тула)
lena_tric@km.ru dm.rodionov86@yandex.ru titovav.semestr@gmail.com

Рассмотрим многочлен

$$P_4(x) = x^4 - 10x^2 + 1 = (x^2 - 1 - 2x\sqrt{2})(x^2 - 1 + 2x\sqrt{2}) =$$
$$= (x - \sqrt{2} - \sqrt{3})(x - \sqrt{2} + \sqrt{3})(x + \sqrt{2} - \sqrt{3})(x + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \qquad (1)$$

с целыми рациональными коэффициентами, неприводимый над полем рациональных чисел, имеющим четыре действительных корня:

$\Theta_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\Theta_2 = \sqrt{2} - \sqrt{3}$, $\Theta_3 = -\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\Theta_4 = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$.

Вектором $\vec{a}$ целочисленных коэффициентов многочлена $P_4(x)$ является $\vec{a} = (1, 0, -10, 0)$. Матрицей $T = T(\vec{a})$ степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 — корней многочлена $P_4(x)$, является:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2}+\sqrt{3} & \sqrt{2}-\sqrt{3} & \sqrt{3}-\sqrt{2} & -\sqrt{2}-\sqrt{3} \\ 2\sqrt{6}+5 & 5-2\sqrt{6} & 5-2\sqrt{6} & 2\sqrt{6}+5 \\ 11\sqrt{2}+9\sqrt{3} & 11\sqrt{2}-9\sqrt{3} & 9\sqrt{3}-11\sqrt{2} & -11\sqrt{2}-9\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Легко находим:

$$\lambda_1(\vec{a}) = \|T(\vec{a})\|_1 = \max_{0\leqslant k\leqslant 3} |\Theta_1|^k + |\Theta_2|^k + |\Theta_3|^k + |\Theta_4|^k =$$
$$= \max(4, 4\sqrt{3}, 20, 36\sqrt{3}) = 36\sqrt{3},$$
$$\lambda_2(\vec{a}) = \|T(\vec{a})\|_2 = \max_{\nu=1,\ldots,4}(1 + |\Theta_\nu| + |\Theta_\nu^2| + |\Theta_\nu^3|) = \|T^\top(\vec{a})\|_1 =$$
$$= 1 + |\Theta_1| + |\Theta_1^2| + |\Theta_1^3| = 6 + 12\sqrt{2} + 10\sqrt{3} + 2\sqrt{6}.$$

Рассмотрим четыре биквадратичных поля $\mathbb{F}_{\vec{a}}^{(\nu)} = \mathbb{Q}(\Theta_\nu)$ — алгебраическое расширение степени 4 поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ ($\nu = 1, \ldots, 4$). Нетрудно видеть, что эти поля совпадают:

$$\mathbb{F}_{\vec{a}}^{(1)} = \mathbb{F}_{\vec{a}}^{(2)} = \mathbb{F}_{\vec{a}}^{(3)} = \mathbb{F}_{\vec{a}}^{(4)} = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}).$$

Такие поля, порожденные присоединением квадратных корней из натуральных чисел, называются полями Дирихле. Общим случаем биквадратичного поля Дирихле является поле вида

$$\mathbb{Q}(\sqrt{p} + \sqrt{q}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) = \left\{a + b\sqrt{p} + c\sqrt{q} + d\sqrt{pq} \,|\, a, b, c, d \in \mathbb{Q}\right\},$$

где $(p, q) = 1$, $1 < p < q$ — натуральные числа, свободные от квадратов. Минимальным многочленом для примитивного элемента $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ является многочлен

$$P_{\vec{a}}(x) = x^4 - 2(p+q)x^2 + (p-q)^2 =$$
$$= (x^2 - (q-p) - 2x\sqrt{p})(x^2 - (q-p) + 2x\sqrt{p}) =$$
$$= (x - \sqrt{p} - \sqrt{q})(x - \sqrt{p} + \sqrt{q})(x + \sqrt{p} - \sqrt{q})(x + \sqrt{p} + \sqrt{q}) \qquad (2)$$

с целыми рациональными коэффициентами, неприводимый над полем рациональных чисел, имеющим четыре действительных корня:

$\Theta_1 = \sqrt{p} + \sqrt{q}$, $\Theta_2 = \sqrt{p} - \sqrt{q}$, $\Theta_3 = -\sqrt{p} + \sqrt{q}$, $\Theta_4 = -\sqrt{p} - \sqrt{q}$.

Вектором $\vec{a}$ целочисленных коэффициентов многочлена $P_{\vec{a}}(x)$ является $\vec{a} = ((p-q)^2, 0, -2(p+q), 0)$. Матрицей $T = T(\vec{a})$ степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$, является:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{p} + \sqrt{q} & \sqrt{p} - \sqrt{q} & \sqrt{q} - \sqrt{p} & -\sqrt{p} - \sqrt{q} \\ 2\sqrt{pq} + p + q & p + q - 2\sqrt{pq} & p + q - 2\sqrt{pq} & 2\sqrt{pq} + p + q \\ p_1\sqrt{p} + q_1\sqrt{q} & p_1\sqrt{p} - q_1\sqrt{q} & q_1\sqrt{q} - p_1\sqrt{p} & -p_1\sqrt{p} - q_1\sqrt{q} \end{pmatrix},$$

где $p_1 = 3q + p$, $q_1 = 3p + q$.

И, наконец,

$$\lambda_1(\vec{a}) = \|T(\vec{a})\|_1 = \max_{0\leqslant k\leqslant 3} |\Theta_1|^k + |\Theta_2|^k + |\Theta_3|^k + |\Theta_4|^k =$$
$$= \max(4, 4\sqrt{q}, 4(p+q), 4(3p+q)\sqrt{q}) = 4(3p+q)\sqrt{q} = 4q_1\sqrt{q},$$
$$\lambda_2(\vec{a}) = \|T(\vec{a})\|_2 = \max_{\nu=1,\ldots,4}(1 + |\Theta_\nu| + |\Theta_\nu^2| + |\Theta_\nu^3|) = \|T^\top(\vec{a})\|_1 =$$
$$= 1 + |\Theta_1| + |\Theta_1^2| + |\Theta_1^3| = 1 + p + q + (1 + p_1)\sqrt{p} + (1 + q_1)\sqrt{q} + 2\sqrt{pq}.$$

Так как $T1 = \frac{1}{2\lambda_1(\vec{a})}T$, то символьные вычисления, выполненные в Mathcad, дают

$$T1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{q}}{8q_1q} & \frac{\sqrt{q}}{8q_1q} & \frac{\sqrt{q}}{8q_1q} & \frac{\sqrt{q}}{8q_1q} \\ \frac{\sqrt{pq}}{8q_1q} + \frac{1}{8q_1} & \frac{\sqrt{pq}}{8q_1q} - \frac{1}{8q_1} & \frac{1}{8q_1} - \frac{\sqrt{pq}}{8q_1q} & -\frac{\sqrt{pq}}{8q_1q} - \frac{1}{8q_1} \\ \frac{\sqrt{p}}{4q_1} + \frac{(p+q)\sqrt{q}}{8q_1q} & \frac{(p+q)\sqrt{q}}{8q_1q} - \frac{\sqrt{p}}{4q_1} & \frac{(p+q)\sqrt{q}}{8q_1q} - \frac{\sqrt{p}}{4q_1} & \frac{\sqrt{p}}{4q_1} + \frac{(p+q)\sqrt{q}}{8q_1q} \\ \frac{p_1\sqrt{pq}}{8q_1q} + \frac{1}{8} & \frac{p_1\sqrt{pq}}{8q_1q} - \frac{1}{8} & \frac{1}{8} - \frac{p_1\sqrt{pq}}{8q_1q} & -\frac{p_1\sqrt{pq}}{8q_1q} - \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

В частности, при $p = 2$, $q = 3$ имеем $p_1 = 11$, $q_1 = 9$ и для биквадратичного поля Дирихле $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ получаем $T1 = \frac{1}{72\sqrt{3}} \cdot T$, что совпадает со значением матрицы $T1 = (t_{\nu,\mu})_{1\leqslant\nu,\mu\leqslant4}$ из работы [1], имеющей следующий явный вид:

$$T1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{216} & \frac{\sqrt{3}}{216} & \frac{\sqrt{3}}{216} & \frac{\sqrt{3}}{216} \\ \frac{\sqrt{6}}{216} + \frac{1}{72} & \frac{\sqrt{6}}{216} - \frac{1}{72} & \frac{1}{72} - \frac{\sqrt{6}}{216} & -\frac{\sqrt{6}}{216} - \frac{1}{72} \\ \frac{\sqrt{2}}{36} + \frac{5\sqrt{3}}{216} & \frac{5\sqrt{3}}{216} - \frac{\sqrt{2}}{36} & \frac{5\sqrt{3}}{216} - \frac{\sqrt{2}}{36} & \frac{\sqrt{2}}{36} + \frac{5\sqrt{3}}{216} \\ \frac{11\sqrt{6}}{216} + \frac{1}{8} & \frac{11\sqrt{6}}{216} - \frac{1}{8} & \frac{1}{8} - \frac{11\sqrt{6}}{216} & -\frac{11\sqrt{6}}{216} - \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Для обратной матрицы, аналогично выполняя символьные вычисления в системе Mathcad, в общем виде получим

$$T1^{-1} = \begin{pmatrix} 2q_1\sqrt{q} - \frac{q_1(p+q)\sqrt{p}}{p} & \frac{q_1p_1}{q-p} - \frac{q_1^2\sqrt{pq}}{p(q-p)} & \frac{q_1\sqrt{p}}{p} & \frac{q_1\sqrt{pq}}{p(q-p)} - \frac{q_1}{q-p} \\ 2q_1\sqrt{q} + \frac{q_1(p+q)\sqrt{p}}{p} & -\frac{q_1p_1}{q-p} - \frac{q_1^2\sqrt{pq}}{p(q-p)} & -\frac{q_1\sqrt{p}}{p} & \frac{q_1\sqrt{pq}}{p(q-p)} + \frac{q_1}{q-p} \\ 2q_1\sqrt{q} + \frac{q_1(p+q)\sqrt{p}}{p} & \frac{q_1p_1}{q-p} + \frac{q_1^2\sqrt{pq}}{p(q-p)} & -\frac{q_1\sqrt{p}}{p} & -\frac{q_1\sqrt{pq}}{p(q-p)} - \frac{q_1}{q-p} \\ 2q_1\sqrt{q} - \frac{q_1(p+q)\sqrt{p}}{p} & -\frac{q_1p_1}{q-p} + \frac{q_1^2\sqrt{pq}}{p(q-p)} & \frac{q_1\sqrt{p}}{p} & -\frac{q_1\sqrt{pq}}{p(q-p)} + \frac{q_1}{q-p} \end{pmatrix},$$

что совпадает при $p = 2$, $q = 3$ с матрицей $T1^{-1}$ из работы [1]:

$$T1^{-1} = \begin{pmatrix} 18\sqrt{3} - \frac{45\sqrt{2}}{2} & 99 - \frac{81\sqrt{6}}{2} & \frac{9\sqrt{2}}{2} & \frac{9\sqrt{6}}{2} - 9 \\ 18\sqrt{3} + \frac{45\sqrt{2}}{2} & -99 - \frac{81\sqrt{6}}{2} & -\frac{9\sqrt{2}}{2} & \frac{9\sqrt{6}}{2} + 9 \\ 18\sqrt{3} + \frac{45\sqrt{2}}{2} & 99 + \frac{81\sqrt{6}}{2} & -\frac{9\sqrt{2}}{2} & -\frac{9\sqrt{6}}{2} - 9 \\ 18\sqrt{3} - \frac{45\sqrt{2}}{2} & -99 + \frac{81\sqrt{6}}{2} & \frac{9\sqrt{2}}{2} & -\frac{9\sqrt{6}}{2} + 9 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в случае $s = 4$, используя произвольное биквадратичное поле Дирихле $\mathbb{Q}(\sqrt{p} + \sqrt{q}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ и выполняя символьные вычисления в Mathcad, получаем явный вид матрицы $T1^{-1}$, и всё необходимое для вычисления четырехкратных интегралов по методу Фролова у нас имеется.

Список цитированной литературы

1. Герцог, А. С. Численное вычисление четырехкратных интегралов по методу Фролова с использованием алгебраических сеток биквадратичного поля Дирихле $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. Вып. 3. — Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. — С. 22–30.

Московский педагогический государственный университет
Институт экономики и управления
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Получено 8.05.20

УДК 511.3

О модифицированных сетках Смоляка[1]

О. В. Киселёва (Тула)
olga_zam@list.ru

Задача об оценки отклонения сеток Смоляка была поставлена профессором Н. М. Коробовым в 1969 году и решена Н. М. Добровольским в 1970 году в его курсовой работе. В научном архиве профессора Н. М. Коробова сохранилась рукопись этой курсовой работы Н. М. Добровольского, которую он выполнял под руководством Н. М. Коробова на третьем курсе механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

Рассмотрим s – мерную простейшую декартову сетку

$$M(\nu_1,\ldots,\nu_s)=\left\{\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\ldots,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)\middle|\, 0\leqslant k_j\leqslant 2^{\nu_j}-1\,(j=1,\ldots,s)\right\}$$

из $2^{\nu_1+\ldots+\nu_s}$ точек, которая является декартовым произведением одномерных равномерных сеток, вообще говоря, с различным количеством узлов:

$$M(\nu_1,\ldots,\nu_s)=M(\nu_1)\times\ldots\times M(\nu_s).$$

В случае, когда величины $\nu_1,\ldots,\nu_s$ равны, сетку $M(\nu_1,\ldots,\nu_s)$ называют равномерной, в противном случае — обобщенной равномерной сеткой.

Модифицированной обобщенной равномерной сеткой $M(\nu_1,\ldots,\nu_s;\vec{\beta})$ будем называть сетку

$$M(\nu_1,\ldots,\nu_s;\vec{\beta})=\left\{\left(\left\{\frac{k_1}{2^{\nu_1}}+\beta_1\right\},\ldots,\left\{\frac{k_s}{2^{\nu_s}}+\beta_s\right\}\right)\middle|\,\begin{matrix}0\leqslant k_j\leqslant 2^{\nu_j}-1\\ (j=1,\ldots,s)\end{matrix}\right\},$$

полученную в результате сдвига по модулю 1 на вектор $\vec{\beta}$. Ясно, что различные сетки будут получаться, когда $\vec{\beta}$ пробегает полуоткрытый $s-$мерный прямоугольный параллелепипед $\left[0,\frac{1}{2^{\nu_1}}\right)\times\ldots\times\left[0,\frac{1}{2^{\nu_s}}\right)$.

Заметим, что модифицированная равномерная сетка $M(\nu_1,\ldots,\nu_s;\vec{\beta})$ совпадает с произведением равномерной сетки $M(\nu_1,\ldots,\nu_s)$ и одноточечной сетки $M=\{\vec{\beta}\}$: $M(\nu_1,\ldots,\nu_s;\vec{\beta})=M(\nu_1,\ldots,\nu_s)\cdot M$. Напомним, что произведение двух сеток M_1 и M_2 задается равенством

$$M_1\cdot M_2=\{\{\vec{x}+\vec{y}\}|\,\vec{x}\in M_1,\vec{y}\in M_2\}$$

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ № 15-01-01540а

и для любого вектора $\vec{z} = (z_1, \ldots, z_s)$ его дробная часть задается равенством

$$\{\vec{z}\} = (\{z_1\}, \ldots, \{z_s\})\,.$$

Кроме этого имеет место разложение модифицированной равномерной сетки в декартово произведение одномерных модифицированных равномерных сеток:

$$M(\nu_1, \ldots, \nu_s; \vec{\beta}) = M(\nu_1; \beta_1) \times \ldots \times M(\nu_s; \beta_s).$$

В определении обобщенной равномерной сетки для каждой координаты все точки сетки имеют один и тот же знаменатель. Для дальнейшего полезно разбить одномерную сетку на непересекающиеся подсетки, у которых точки представлены несократимыми дробями с равными знаменателями. Положим

$$M^*(\nu) = \begin{cases} \{0\} & \text{при } \nu = 0, \\ \left\{ \frac{2k+1}{2^\nu} \,\middle|\, 0 \leqslant k \leqslant 2^{\nu-1} - 1 \right\} & \text{при } \nu \geqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} \{0\} & \text{при } \nu = 0, \\ M\left(\nu - 1; \frac{1}{2^\nu}\right) & \text{при } \nu \geqslant 1, \end{cases}$$

тогда

$$M(\nu) = \bigcup_{\lambda=0}^{\nu} M^*(\lambda), \quad 2^\nu = |M(\nu)| = \sum_{\lambda=0}^{\nu} |M^*(\lambda)| = \sum_{\lambda=0}^{\nu} 2^{\overline{\lambda}-1},$$

где для любого вещественного x полагаем $\overline{x} = \max(1, |x|)$, а для любого конечного множества A через $|A|$ обозначается количество его элементов.

Переходя к многомерному случаю и полагая $M^*(\vec{\nu}) = M^*(\nu_1) \times \ldots \times M^*(\nu_s)$, получим

$$M(\vec{\nu}) = \bigcup_{\vec{0} \leqslant \vec{\lambda} \leqslant \vec{\nu}} M^*(\vec{\lambda}), \quad |M^*(\vec{\lambda})| = 2^{\overline{\lambda}_1 + \ldots + \overline{\lambda}_s - s},$$

где $\vec{0} = (0, \ldots, 0)$.

Нетрудно видеть, что за исключением особого случая, когда

$$(\beta_1 - \beta_2) 2^{\max(\nu_1, \nu_2)} \in \mathbb{Z},$$

две модифицированные равномерные сетки $M(\nu_1; \beta_1)$ и $M(\nu_2; \beta_2)$ не имеют общих точек. Очевидно, что и при $\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_2$ общего положения модифицированные равномерные сетки $M(\vec{\nu}_1; \vec{\beta}_1)$ и $M(\vec{\nu}_2; \vec{\beta}_2)$ не имеют общих точек.

Введем обозначение: для натурального $q \geqslant s$

$$A_s(q) = \{\vec{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_s) \in \mathbb{N}^s \mid \nu_1 + \ldots + \nu_s \leqslant q,\ \nu_j \geqslant 1\,(j = 1, \ldots, s)\}\,,$$
$$B_s(q) = \mathbb{N}^s \setminus A(q) = \left\{ \vec{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_s) \in \mathbb{N}^s \,\middle|\, \begin{array}{c} \nu_1 + \ldots + \nu_s > q, \\ \nu_j \geqslant 1\,(j = 1, \ldots, s) \end{array} \right\},$$
$$C_s(q) = \{\vec{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_s) \in \mathbb{N}^s \,|\, \nu_1 + \ldots + \nu_s = q,\ \nu_j \geqslant 1\,(j = 1, \ldots, s)\}.$$

Сетка Смоляка $Sm(q, s)$ с параметром $q \geqslant s$ определяется как объединение всех простейших декартовых сеток $M(\nu_1, \ldots, \nu_s)$ с

$$\max(q - s + 1, s) \leqslant \nu_1 + \ldots + \nu_s \leqslant q, \quad \nu_1, \ldots, \nu_s \geqslant 1.$$

Таким образом

$$Sm(q,s)=\left\{\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\ldots,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)\middle|\begin{array}{c}0\leqslant k_j\leqslant 2^{\nu_j}-1\ (j=1,\ldots,s),\ \nu_1,\ldots,\nu_s\geqslant 1,\\ \max(s,q-s+1)\leqslant \nu_1+\ldots+\nu_s\leqslant q\end{array}\right\}=$$

$$=\left\{\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\ldots,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)\middle|\,0\leqslant k_j\leqslant 2^{\nu_j}-1\,(j=1,\ldots,s),\vec{\nu}\in\bigcup_{k=0}^{\min(q-s,s-1)}C_s(q-k)\right\}.$$

В работе [4] сетки $Sm(q,s)$ использовались для построения квадратурных и интерполяционных формул с весами, и для них на различных классах функций были получены результаты сравнимые с наилучшими из известных.

Модифицированной сеткой Смоляка будем называть сетку

$$Sm(q,s,\vec{\beta}_{\vec{\nu}}|\vec{\nu}\in A_s^*(q)),$$

полученную объеденением всех модифицированных обобщенных равномерных сеток $M(\vec{\nu};\vec{\beta}_{\vec{\nu}})$ по $\vec{\nu}\in A_s^*(q)$, где $A_s^*(q)=A_s(q)\setminus A_s(\max(s-1,q-s))$.

Естественно изучить величину отклонения этих сеток, как меры равномерности распределения их точек в s–мерном единичном кубе.

В отличии от общего случая модифицированной сетки Смоляка для сетки Смоляка входящие в объединение обобщенные равномерные сетки имеют непустое пересечение. Поэтому этот случай требует особого рассмотрения. Здесь возможно три различных подхода: с учетом кратности точек в объединении или без учета, или с весами из квадратурных формул. В первых двух случаях получаются пародоксальные результаты, согласно которым точки сеток Смоляка раномерно распределены, но величина отклонения у них порядка $O(N\ln^{-1}N)$, где N — количество точек сетки. Этот результат свидетельствует об особой роли весов в квадратурных и интерполяционных формулах, построенных по методу Смоляка.

Список цитированной литературы

1. Н. Н. Добровольский Отклонение двумерных сеток Смоляка // Чебышевский сборник 2007. Т. 8, вып. 1(21). С. 110 — 152.

2. Г. Т. Вронская, Н. Н. Добровольский Отклонения плоских сеток / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л.Н. Толстого, 2012. 193 с.

3. О. В. Киселёва О задаче Коробова для модифицированных сеток Смоляка // Чебышевский сборник 2007. Т. 8, вып. 4(24). С. 50 — 104.

4. Смоляк С. А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // ДАН СССР 1963. Т. 148, № 5, С. 1042 — 1045.

5. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Яфаева Р. Р. О сетках С. А. Смоляка // Современные проблемы математики, механики, информатики: Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. Тула: ТулГу 2002. С. 18–20.

Московский педагогический государственный университет
Получено 10.04.2015

УДК 511.3

Алгебраические сетки и их приложение к численному решению линейных интегральных уравнений[1]

М. И. Лямин (Тула)
rarova82@mail.ru

Определение 1. *Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.*

Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1;1)^s$.

Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество $M'(\Lambda) = \{\vec{x} \,|\, \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda)\}$.

Определение 2. *Весовой функцией порядка r с константой B называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=-1}^{0} \rho(\vec{x} + (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)) = 1 \text{ при } \vec{x} \in G_s, \tag{1}$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \text{при} \quad \vec{x} \notin (-1;1)^s, \tag{2}$$

$$\left| \int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i(\vec{\sigma},\vec{x})} d\vec{x} \right| \leqslant B(\overline{\sigma}_1 \ldots \overline{\sigma}_s)^{-r} \quad \text{для любого} \quad \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^s. \tag{3}$$

Если выполнены условия (1) и (2), то говорим просто о весовой функции $\rho(\vec{x})$.

Определение 3. *Квадратурной формулой с обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ называется формула вида*

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = (\det \Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x} \in M'(\Lambda)} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda)}[f],$$

$$\text{где} \quad \rho_{\vec{x}} = \sum_{\vec{y} \in M_1(\Lambda), \{\vec{y}\} = \vec{x}} \rho(\vec{y}), \quad N'(\Lambda) = |M'(\Lambda)|,$$

$R_{N'(\Lambda)}[f]$ — погрешность квадратурной формулы.

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ № 15-01-01540а

Для погрешности квадратурной формулы с обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода на классе E_s^α справедлива оценка

$$R_{N'(\Lambda)}[E_s^\alpha(C)] = \sup_{f\in E_s^\alpha(C)} |R_{N'(\Lambda)}[f]| \leqslant CB \cdot c_1(\alpha)^s \zeta_H(\Lambda|\alpha),$$

$$\text{где} \quad c_1(\alpha) = 2^{\alpha+1}\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right), \quad \zeta_H(\Lambda|\alpha) = {\sum_{\vec{x}\in\Lambda}}'(\overline{x}_1\ldots\overline{x}_s)^{-\alpha}.$$

Пусть $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{s-1})$ — целочисленный вектор такой, что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s \tag{4}$$

неприводим над полем рациональных чисел и все корни Θ_ν $(\nu = 1, \ldots, s)$ многочлена (4) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1,\ldots,\Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \Theta_1 & \ldots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \ldots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1, \ldots, \Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Для любого $t > 0$ решётка $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t\cdot T(\vec{a})) = \left\{\vec{x} = \left(t\sum_{\nu=1}^{s}\Theta_1^{\nu-1}m_\nu, \ldots, t\sum_{\nu=1}^{s}\Theta_s^{\nu-1}m_\nu\right) = t\cdot\vec{m}\cdot T(\vec{a}) \,\middle|\, \vec{m}\in\mathbb{Z}^s\right\}.$$

Совокупность $M \subset G_s$ точек $M_k = (\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k))$ $\quad (k = 1\ldots N)$ называется *сеткой* M из N узлов, а сами точки — *узлами квадратурной формулы*. Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы.

Рассмотрим уравнение Фредгольма второго рода, то есть уравнение вида

$$\varphi\left(\vec{t}\right) = \lambda \iint\limits_{G_s} K_s\left(\vec{t}, \vec{u}\right)\varphi\left(\vec{u}\right)d\vec{u} + f\left(\vec{t}\right), \tag{6}$$

где $G_s = [0;1)^s$. Мы будем исследовать уравнение (6) для случая периодических функций, когда свободный член $f\left(\vec{t}\right)$ и ядро $K_s\left(\vec{t}, \vec{u}\right)$ этого уравнения принадлежат, соответственно, классам $E_s^\alpha(C_1)$ и $E_{2s}^\alpha(C_2)$ [2]. Ясно, что и решение $\varphi\left(\vec{t}\right)$ будет являться периодической функцией.

[2]Определение классов см. [1] стр. 48 — 49.

Теорема 1. *Пусть $q < 1$ и*

$$|\lambda| \leqslant \frac{q}{\|K_s\left(\vec{t}, \vec{u}\right)\|_{E_s^\alpha}(1+2\zeta(2\alpha))^s}. \tag{7}$$

Тогда уравнение Фредгольма (6) имеет единственное решение и для него справедливо представление в виде ряда Неймана

$$\varphi\left(\vec{t}\right) = f\left(\vec{t}\right) + \sum_{\vec{k}=1}^{\infty} \lambda^k \iint\limits_{G_{sk}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \ldots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \ldots d\vec{u}_k$$

и справедливо соотношение

$$\varphi\left(\vec{t}\right) = f\left(\vec{t}\right) + \sum_{k=1}^{n} \lambda^k \iint\limits_{G_{sk}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \ldots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \ldots d\vec{u}_k +$$
$$+ \frac{q^{n+1} \cdot \Theta \cdot \|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha}}{1-q}, \quad \text{где} \quad |\Theta| \leqslant (1+2\zeta(2\alpha))^s.$$

Доказательство. См. [2].

Теперь для вычисления кратных интегралов можно применить квадратурные формулы с алгебраическими сетками. Здесь возможно два разных подхода.

Первый подход основан на том, что для каждой размерности sk, где $k = 1, 2, \ldots, n$, выбирается свой неприводимый полином

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{sk-1} a_\nu x^\nu + x^{sk}, \tag{8}$$

у которого все корни действительные. В качестве такого многочлена можно взять многочлен

$$P_k(x) = x(x-2)(x-4)\ldots(x-2sk+2) - 1.$$

Второй подход связан с использованием башни полей Дирихле:

$$\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right), \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right), \ldots, \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{p_m}\right),$$

где p_m — m-ое простое число и $2^{m-1} < sn \leqslant 2^m$.

Список цитированной литературы

1. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. 2 изд. М.: МЦНМО, 2004. 288 с.

2. Ребров Е. Д., Селиванов С. В. О приближенном решении интегрального уравнения Фредгольма II рода // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. Вып. 2. — Тула: Изд-во ТулГУ, 2012. С. 83 - 92.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Получено 8.05.2015

УДК 511.2

Многочлены Туэ для квадратичных иррациональностей[1]

Е. А. Морозова (г. Тула)

1. Введение

Многочлены Туэ были введены в работе [5] и использовались А. Туэ для оценки снизу скорости приближения иррационального числа α рациональными дробями $\frac{p}{q}$. В работах [1] и [3] строилась систематическая теория многочленов Туэ и были построены основные многочлены Туэ для кубических и биквадратичных иррациональностей. В стороне остался вопрос о нахождении основных многочленов Туэ для квадратичных иррациональностей.

Цель настоящей работы — найти явный вид основных многочленов Туэ произвольного порядка для вещественных квадратичных иррациональностей.

2. Определения и необходимые сведения

Прежде всего напомним некоторые определения.

Определение 1. *Многочленами Туэ n-го порядка для иррациональности α называются многочлены $T_n(t)$, обладающие свойствами:*

1. $T_n(t) = A_n(t) - \alpha B_n(t)$, *где* $A_n(t)$ *и* $B_n(t)$ *— многочлены с рациональными коэффициентами;*
2. $T_n(t)$ *делится на* $(t-\alpha)^n$, $\quad T_n(t) = V_n(t)(t-\alpha)^n$;
3. $T_n(t)$ *не делится на* $(t-\alpha)^{n+1}$, $\quad V_n(\alpha) \neq 0$.

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ, №-15-01-01540

Ясно, что существуют многочлены Туэ любого порядка. Действительно, если иррациональное число α является корнем минимального многочлена с целыми коэффициентами $f(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, то многочлен $f(x)$ является неприводимым, примитивным многочленом. Поэтому любой многочлен $A_n(t)$ или $B_n(t)$, который в точности делится на $(t-\alpha)^n$, будет иметь вид $f^n(t)g(t)$ и $(f(t), g(t)) = 1$, $g(t) \in \mathbb{Q}[t]$.

Таким образом, многочлены $T_{n,1}(t) = f^n(t)$ и $T_{n,2}(t) = -\alpha f^n(t)$ — тривиальные многочлены Туэ порядка n.

В работе [1] М. Н. Добровольский доказал следующие важные свойства многочленов Туэ.

Теорема 1. *Для любого порядка n существуют два основных многочлена Туэ $T_{n,1}(t)$ и $T_{n,2}(t)$ таких, что любой многочлен Туэ k-го порядка с $k \geqslant n$ имеет вид:*

$$T_k(t) = M_{k,n}(t)T_{n,1}(t) + N_{k,n}(t)T_{n,2}(t),$$

где $M_{k,n}(t)$ и $N_{k,n}(t)$ — многочлены с рациональными коэффициентами.

Теорема 2. *Если для полиномов $T_{j_1,1}(t,\alpha) = P_{j_1,1}(t) - \alpha Q_{j_1,1}(t)$, $T_{j_2,2}(t,\alpha) = P_{j_2,2}(t) - \alpha Q_{j_2,2}(t)$ порядка не ниже n имеет место*

$$P_{j_1,1}(t)Q_{j_2,2}(t) - P_{j_2,2}(t)Q_{j_1,1}(t) = f^n(t)c_n,$$

где c_n — рациональное число не равное нулю, то полиномы $T_{j_1,1}(t,\alpha)$, $T_{j_2,2}(t,\alpha)$ являются основными для порядка n.

Пользуясь этими свойствами, В. Д. Подсыпанин в работе [3] дает следующие определения.

Определение 2. *Если $T_{n,1}(t)$ и $T_{n,2}(t)$ — основные многочлены Туэ порядка n, а $T_{n+1,1}(t)$ и $T_{n+1,2}(t)$ — основные многочлены Туэ порядка $n+1$, то формулы*

$$\begin{cases} T_{n+1,1}(t) = & Q_{n,1}(t)T_{n,1}(t) + P_{n,1}(t)T_{n,2}(t) \\ T_{n+1,2}(t) = & Q_{n,2}(t)T_{n,1}(t) + P_{n,2}(t)T_{n,2}(t) \end{cases} \tag{1}$$

называются формулами перехода от многочленов n-го порядка к многочленам $n+1$-го.

Многочлены Q_{n_1}, Q_{n_2}, P_{n_1}, P_{n_2} называются многочленами перехода. Матрица

$$\begin{pmatrix} Q_{n,1}(t) & Q_{n,2}(t) \\ P_{n,1}(t) & P_{n,2}(t) \end{pmatrix}$$

— матрицей перехода, её определитель — определителем перехода.

Числа $\tilde{\alpha}_{n,1} = \dfrac{P_{n,1}(\alpha)}{V_{n,1}(\alpha)}$ и $\tilde{\alpha}_{n,2} = \dfrac{P_{n,2}(\alpha)}{V_{n,1}(\alpha)}$ — множителями перехода.

В этой же работе В. Д. Подсыпанин доказывает следующую теорему.

Теорема 3. *Если многочлены $T_{n+1,1}(t)$ и $T_{n+1,2}(t)$, получаемые по формуле (1), являются основными, то*

$$Q_{n,1}(t)P_{n,2}(t) - P_{n,1}(t)Q_{n,2}(t) = K_n f(t),$$

где $K_n \neq 0$ и не зависит от t.

И обратно.

Как отмечал В. Д. Подсыпанин в работе [3] "Общих методов для нахождения этих последовательностей неизвестно. Сам Туэ нашёл многочлены, носящие его имя, только для $\alpha = \sqrt[m]{a}$. Путём некоторых преобразований к этому виду были приведены многочлены Туэ для иррационалностей третьей степени Зигелем [4], а для иррациональностей четвертой степени с равным нулю кубическим инвариантом Кречмером [2]."

Список цитированной литературы

1. Добровольский М. Н. О разложении иррациональностей третьей степени в непрерывные дроби // Чебышевский сборник. Т. XI, вып. 4(36). С. 4 — 24.

2. В. А. Кречмар О верхнем пределе числа представлений целого числа некоторыми бинарными формами четвертой степени // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1939. Т. 3, вып. 3. С. 289–302.

3. Подсыпанин В. Д. О многочленах Туэ и разложении иррациональностей четвертой степени в непрерывную дробь // Чебышевский сборник. Т. XI, вып. 4(36). С. 25 — 69.

4. Siegel C. L. Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen // Abhandlungen der Preuss. Akad. d. Wissensch., 1929, Phys.-Math. Klasse. PP. 1–70.

5. Thue A. Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen // J. reine ang. Math. 1910. Vol. 135. PP. 284–305.

УДК 511.3

Тригонометрические суммы алгебраических сеток[1]

Е. М. Рарова (Тула)
rarova82@mail.ru

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ № 15-01-01540а

В 1976 году вышла работа [8] К. К. Фролова, в которой впервые появились алгебраические сетки. Полное авторское изложение метода Фролова представлено в [9]. Позднее в работах [1] — [3] Н. М. Добровольский предложил модификацию метода Фролова с использованием специальных весовых функций. Будем использовать обозначения и определения из работы [5].

Определение 1. *Для произвольной решетки* Λ *обобщенной параллелепипедальной сеткой* $M(\Lambda)$ *называется множество* $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.

Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1;1)^s$.

Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ *называется множество* $M'(\Lambda) = \{\vec{x} \,|\, \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda)\}$.

Определение 2. *Весовой функцией порядка* r *с константой* B *называется гладкая функция* $\rho(\vec{x})$, *удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_s=-1}^{0} \rho(\vec{x} + (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)) = 1 \text{ при } \vec{x} \in G_s, \tag{1}$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \text{при} \quad \vec{x} \notin (-1;1)^s, \tag{2}$$

$$\left| \int_{-1}^{1} \ldots \int_{-1}^{1} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i (\vec{\sigma}, \vec{x})} d\vec{x} \right| \leqslant B(\overline{\sigma}_1 \ldots \overline{\sigma}_s)^{-r} \quad \text{для любого} \quad \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^s. \tag{3}$$

Если выполнены условия (1) и (2), то говорим просто о весовой функции $\rho(\vec{x})$.

Пусть $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{s-1})$ — целочисленный вектор такой, что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s \tag{4}$$

неприводим над полем рациональных чисел и все корни Θ_ν $(\nu = 1, \ldots, s)$ многочлена (4) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1, \ldots, \Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \Theta_1 & \ldots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \ldots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1, \ldots, \Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Для любого $t > 0$ решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t \cdot T(\vec{a})) = \left\{ \vec{x} = \left(t \sum_{\nu=1}^{s} \Theta_1^{\nu-1} m_\nu, \ldots, t \sum_{\nu=1}^{s} \Theta_s^{\nu-1} m_\nu \right) = t \cdot \vec{m} \cdot T(\vec{a}) \,\middle|\, \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \right\}.$$

Для произвольных целых $m_1, \ldots, m_s$ суммы $S_{M,\vec{\rho}}(m_1, \ldots, m_s)$, определённые равенством

$$S_{M,\vec{\rho}}(m_1, \ldots, m_s) = \sum_{k=1}^{N} \rho_k e^{2\pi i [m_1 \xi_1(k) + \ldots + m_s \xi_s(k)]}, \tag{6}$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами.*

Пусть матрица $T = T(\vec{a})$ и $t > 0$. Рассмотрим алгебраическую сетку $M(t) = M'(t \cdot \Lambda(T))$ из $N'(t \cdot \Lambda(T))$ узлов $\vec{x}_k$ $(k = 1, \ldots, N'(t \cdot \Lambda(T)))$ с весами

$$\rho_k = \rho_{\vec{x}_k} = (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\{\vec{y}\} = \vec{x}_k,\, \vec{y} \in M_1(t \cdot \Lambda(T))} \rho(\vec{y})$$

и её тригонометрическую сумму с весами

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\vec{x} \in M(t)} \left(\sum_{\{\vec{y}\} = \vec{x},\, \vec{y} \in M_1(t \cdot \Lambda(T))} \rho(\vec{y}) \right) e^{2\pi i (\vec{m}, \vec{x})}.$$

В работе [6] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Для произвольной решётки Λ и произвольной весовой функции $\rho(\vec{x})$ справедливо равенство*[2]

$$S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = \delta(\vec{m}) + {\sum_{\vec{x} \in \Lambda}}' \int_{-1}^{1} \ldots \int_{-1}^{1} \rho(\vec{y}) e^{2\pi i (\vec{y}, \vec{m} - \vec{x})} d\vec{y}, \tag{7}$$

где

$$\delta(\vec{m}) = \begin{cases} 1, & \text{при } \vec{m} = \vec{0}; \\ 0, & \text{при } \vec{m} \neq \vec{0},\ \vec{m} \in \mathbb{Z}^s. \end{cases}$$

Теорема 1 и определение весовой функции $\rho(\vec{x})$ порядка r с константой B позволяет получить оценку для тригонометрической суммы обобщенной параллелепипедальной сетки с весовой функцией

$$|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) - \delta(\vec{m})| \leqslant B {\sum_{\vec{x} \in \Lambda}}' (\overline{m_1 - x_1} \ldots \overline{m_s - x_s})^{-r}.$$

Для случая целочисленных решеток в работе [7] получено следующее уточнение теоремы 1.

[2]Здесь и далее символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключена нулевая точка.

Теорема 2. *Для произвольной целочисленной решётки* Λ *и произвольной весовой функции* $\rho(\vec{x})$ *справедливо равенство*

$$S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = \delta_\Lambda(\vec{m}), \tag{8}$$

где $\delta_\Lambda(\vec{m}) = \begin{cases} 1, & \text{при } \vec{m} \in \Lambda; \\ 0, & \text{при } \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \Lambda \end{cases}$ *— обобщенный символ Коробова.*

В [4] сформулирована и обсуждается **Проблема значений тригонометрических сумм сеток**, в которой особое место занимает вопрос об изучении тригонометрических сумм алгебраических сеток.

Список цитированной литературы

1. Добровольский Н. М. Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6089–84.

2. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6090–84.

3. Добровольский Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6091–84.

4. Добровольский Н. М. О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник 2015. Т. 16, вып. 1(53). С. 176 — 190.

5. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. 2 изд. М.: МЦНМО, 2004. 288 с.

6. Е. М. Рарова Разложение тригонометрической суммы сетки с весами в ряд по точкам решетки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. Вып. 1. Часть 1. С. 37–49.

7. Е. М. Рарова Тригонометрические суммы сетки с весами для целочисленной решётки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. № 3. С. 34–39.

8. Фролов К. К. , Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 1976. Т. 231, № 4. С. 818–821.

9. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Получено 10.04.2015

УДК 511.3

О численном интегрировании с правилом остановки по теоретико-числовым сеткам[1]

Е. Д. Ребров (Тула)
rebrov.evgeny@gmail.com

Парадоксальная ситуация с проблемой оценки погрешности приближенного интегрирования функций многих переменных отмечалась ещё в 2007 году в работе [1]: "...результаты о величине погрешности этих формул выражаются в терминах норм линейного функционала погрешности на некотором функциональном пространстве и нормы функции, определенной на нем. А, как правило, норма функции неизвестна и ее вычисление более сложная задача, чем вычисление интеграла."

Удовлетворительное решение этой проблемы было дано в работе [2], в которой были введены алгоритмы численного интегрирования с правилом остановки. Там же было введено понятие мультипликативной дискретной дисперсии и показано, что её величина может использоваться как правило остановки при реализации концентрических алгоритмов интегрирования.

Оценки мультипликативной дискретной дисперсии погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле с различными типами сеток даны в следующих теоремах:

Теорема 1. *Для $D^*_{M_s(N_k),\vec{1}}[f(\vec{x})]$ — мультипликативной дискретной дисперсии погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле с равномерной сеткой $M_s(N_k)$ произвольной функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ справедлива оценка*

$$D^*_{M_s(N_k),\vec{1}}[f(\vec{x})] = O\left(\frac{1}{N_{k-1}^{2\alpha}}\right) = O\left(\frac{1}{|M_s(N_{k-1})|^{\frac{2\alpha}{s}}}\right).$$

Теорема 2. *Для $D^*_{M_s((p_1,\ldots,p_k)),\vec{1}}[f(\vec{x})]$ — мультипликативной дискретной дисперсии погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле с обобщенной неравномерной сеткой $M_s((p_1,\ldots,p_k))$ произвольной функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ справедлива оценка*

$$D^*_{M_s((p_1,\ldots,p_k)),\vec{1}}[f(\vec{x})] = O\left(\frac{1}{N_{k-1}}\right).$$

Далее рассматривается алгоритм Добровольской вычисления оптимальных коэффициентов. Алгоритм вычисления величин a_{sk}, ..., a_{11} проводится последовательно, исходя из соотношений:

$$\begin{cases} 1 \leqslant a_{sk} \leqslant p_k - 1, \\ T^{(sk)}_{N,A}(a_{sk}) = \min\limits_{1\leqslant z\leqslant p_k-1} T^{(sk)}_{N,A}(z). \end{cases} \qquad (1)$$

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ № 15-01-01540а

Если $a_{sk}, a_{s-1k}, \ldots, a_{(j\nu)'}$ уже определены, то $a_{j\nu}$ находится из условий

$$\begin{cases} 1 \leqslant a_{j\nu} \leqslant p_\nu - 1, \\ T_{N,A}^{(j\nu)}(a_{j\nu}) = \min\limits_{1 \leqslant z \leqslant p_\nu - 1} T_{N,A}^{(j\nu)}(z). \end{cases} \quad (2)$$

Так как минимальное значение не больше среднего арифметического, непосредственно из определения величин $a_{sk}, a_{s-1k}, \ldots, a_{11}$ вытекает цепочка неравенств

$$T_N^{(11)}(a_{11}) \leqslant T_{N,A}^{(12)}(a_{12}) \leqslant \ldots \leqslant T_{N,A}^{(sk)}(a_{sk}) \leqslant T_{N,A}. \quad (3)$$

Для всех функций $T_{N,A}^{(j\nu)}(z)$ и величины $T_{N,A}$ в работе [21] получены явные формулы, которые пригодны для программной реализации.

Пусть целые $a_{sk}, \ldots, a_{11}$ найдены по алгоритму, заданному формулами (1), (2). Обозначим через $a_1, \ldots, a_s$ величины, заданные по формулам

$$a_j = N \left\{ \frac{a_{j1}}{p_1} + \ldots + \frac{a_{jk}}{p_k} \right\}, \quad (j = 1, \ldots, s). \quad (4)$$

Доказывается следующий основной результат.

Теорема 3. *Если величины $a_1, \ldots, a_s$ заданны формулами (1, 2, 4), то они являются оптимальными коэффициентами по модулю N индекса s и для мультипликативной дискретной дисперсии $D_M^*[f(\vec{x})]$ параллелепипедальной сетки $M = M_N(a_1, \ldots, a_s)$ справедливы оценки*

$$0 \leqslant D_M^*[f(\vec{x})] = \|f\|_{E_s^\alpha}^2 \left(\frac{\ln^{s\alpha} N_{k-1}}{N_{k-1}^\alpha} \right),$$

где

$$N_1 = p_k, \quad N_2 = p_k p_{k-1}, \quad \ldots, N_{k-1} = p_k \cdot \ldots \cdot p_2, \quad N = N_k = p_k \cdot \ldots \cdot p_1.$$

Эти и ряд других результатов получены в работах [3] — [8].

В заключении отметим, что перенос полученных результатов на другие классы сеток представляет определенную проблему и требует дополнительных соображений.

Список цитированной литературы

1. Бочарова Л. П., Добровольский Н. М., Реброва И. Ю. Пятьдесят лет теоретко-числовому методу в приближенном анализе: проблемы и достижения // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8, вып. 4(24). С. 4 — 49.

2. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник. 2008 Т. 9, вып. 1(25). С. 185 — 223.

3. Н. К. Огородничук, Е. Д. Ребров ПОИВС ТМК: Алгоритмы интегрирования с правилами остановки // Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии: материалы международной научно-практической конференции, посвященной 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2011. С. 254 — 258.

4. Ребров Е. Д., Селиванов С. В. О приближенном решении интегрального уравнения Фредгольма II рода // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2012. Вып. 2. С. 83 - 92.

5. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Ученые записки Орловского государственного университета. № 6. Ч. 2.: Труды X международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" Волгоград: Изд-во ВГСПУ "Перемена 2012. С. 90 - 98.

6. Герцог А. С., Ребров Е. Д., Триколич Е. В. О методе К. К. Фролова в теории квадратурных формул // Чебышевский сборник. 2009. Т. X, вып. 2(30). С. 10 - 54.

7. Ребров Е. Д. Алгоритм Добровольской и численное интегрирование с правилом остановки // Чебышевский сборник. 2009. Т. 10, вып. 1(29). С. 65 - 77.

8. Ребров Е. Д. Квадратурные формулы с модифицированными алгебраическими сетками // Чебышевский сборник. 2010. Т. 13, вып. 3(43). С. 53 - 90.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Получено 10.04.2015

УДК 511.3

История развития теоретико-числового метода в приближенном анализе[1]

И. Ю. Реброва (Тула)
i_rebrova@mail.ru

Вопросам истории создания "Теоретико-числового метода в приближенном анализе" посвящено несколько работ. Прежде всего необходимо отметить работу основателя метода, профессора Н. М. Коробова [16]. В работе [1] вопросы истории создания и развития метода рассмотрены более подробно.

Анализируя отечественную историю развития теоретико-числового метода в приближенном анализе, можно выделить несколько этапов этого развития.

Во-первых, это начальный этап 1956 — 1967гг. Достаточно полное фактическое представление об этом этапе можно получить по работам [14], [23] и [15].

Первый (начальный) этап истории развития теоретико-числового метода в приближенном анализе естественно отсчитывать от 1957 года, когда вышла первая работа Н. М. Коробова [13], до 1963 года, когда вышла его монография [14].

Можно констатировать, что уже на этом первом этапе определились следующие пять основных направлений исследования:

- Построение многомерных теоретико-числовых квадратурных формул для периодических функций и методы периодизации задач численного интегрирования.

- Построение многомерных интерполяционных формул периодических функций.

- Построение теоретико-числовых методов решения интегральных уравнений.

- Построение теоретико-числовых методов решения некоторых классов уравнений в частных производных.

- Построение различных многомерных теоретико-числовых сеток и оценка их отклонения.

Следующий этап развития теоретико-числового метода можно отнести к 1976 — 1980гг. Этот этап прежде всего связан с работами К. К. Фролова [21], [22]. На этом этапе было сравнительно немного работ, но работы К. К. Фролова внесли принципиальный вклад в теорию, так как были построены оптимальные квадратурные формулы на классе E_s^α.

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ № 15-01-01540а

О тульском этапе развития теоретико-числового метода в приближенном анализе можно получить достаточно полное представление по работам [2] — [12], [18] — [20].

Несомненно, изучение истории развития теоретико-числового метода в приближенном анализе в настоящее время находится в стадии становления и требует дальнейших систематических исследований.

Список цитированной литературы

1. Бочарова Л. П., Добровольский Н. М., Реброва И. Ю. Пятьдесят лет теоретко-числовому методу в приближенном анализе: проблемы и достижения // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8, вып. 4(24). С. 4 — 49.

2. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М. Гиперболические дзета-функции сеток и решеток, диофантовы приближения, их приложения к многомерным квадратурным формулам и экономическая эффективность фундаментальных исследований // Актуальные вопросы управления социально-экономическими системами: международная научно-практическая конференция. Тула: АНО ВПО "Институт экономики и управления". 2013. С. 127– 140.

3. Добровольский М. Н. Ряды Дирихле с периодическими коэффициентами и функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток. // Чебышевский сборник. 2006. Т. 3, вып. 2(4). С. 43 — 59.

4. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток. // ДАН. 2007. Т. 412, № 3, Январь. С. 302 — 304.

5. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. № 3. С. 18 — 23.

6. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005. — 195с.

7. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, № 6090–84.

8. Добровольский Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, № 6091–84.

9. Добровольский Н. М. О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник 2015. Т. 16, вып. 1(53). С. 176 — 190.

10. Добровольский Н. М., Ванькова В. С., Козлова С. Л. Гиперболическая дзета–функция алгебраических решёток. Деп. в ВИНИТИ 12.04.90, № 2327–В90.

11. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О непрерывности гиперболической дзета-функции решёток // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 1996. Т. 2, вып. 1. С. 77–87.

12. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток // Мат. заметки. 1998. Т. 63, вып. 4. С. 522–526.

13. Коробов Н. М. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел // ДАН СССР. 1957. 115. № 6. С. 1062 — 1065.

14. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

15. Коробов Н. М. О некоторых вопросах теории диофантовых приближений // УМН. 1967. Т. 22, 3 (135). С. 83–118.

16. Коробов Н. М. О теоретико-числовых методах приближенного интегрирования // Историко-матем. исследования. СПб., 1994. Вып. XXXV. С. 285–301.

17. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. 2 изд. М.: МЦНМО, 2004.

18. Реброва И. Ю. Непрерывность обобщенной гиперболической дзета-функции решёток и ее аналитическое продолжение // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. 1998. Т. 4, вып.3. С. 99–108.

19. Реброва И. Ю. Пространство решёток и функции на нем. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. МПГУ, 1999.

20. Рощеня А. Л. Аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решёток. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. МПГУ, 1998.

21. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 1976. Т. 231. № 4. С. 818–821.

22. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.

23. Шарыгин И. Ф. Оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций // Журн. вычисл. математики и математической физики. 1963. Т. 7. № 4. С. 784–802.

24. Hua Loo Keng. Applications of Number Theory to Numerical Analysis, – Springer–Verlag Berlin, 1981.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Получено 10.04.2015

УДК 511.3

Метод Н. М. Коробова приближенного решения задачи Дирихле

А. В. Родионов (Тула)
rodionovalexandr@mail.ru

Введем в рассмотрение новый класс функций $E_s^\alpha(Q)$, где

$$Q = Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \ldots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1,\ldots,j_s} \frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}} \ldots \frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}}$$

— дифференциальный оператор порядка $n = n_1 + \ldots + n_s$.

Определение 1. *Периодическая функция $\varphi(x_1, \ldots, x_s)$ с периодом 1 по каждой переменной принадлежит классу $E_s^\alpha(Q)$, если*

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} c_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}$$

и для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$|c_{\vec{m}}| \leqslant \frac{\|\varphi\|_{E_s^\alpha(Q)}}{(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^\alpha \cdot \overline{Q(\vec{m})}}. \tag{1}$$

Величина

$$\|\varphi\|_{E_s^\alpha(Q)} = \sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} |c_{\vec{m}} \cdot (\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^\alpha \cdot \overline{Q(\vec{m})}| < \infty, \tag{2}$$

$$Q(\vec{m}) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \ldots \sum_{j_s=0}^{n_s} a_{j_1,\ldots,j_s} (2\pi i)^{j_1+\ldots+j_s} m_1^{j_1} \ldots m_s^{j_s}. \tag{3}$$

является нормой на пространстве $E_s^\alpha(Q)$, относительно которой оно является несепарабельным банаховым пространством.

Теорема 1. *Для пространства $E_s^\alpha(Q)$ общим решением дифференциального уравнения*

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)u(\vec{x}) = f(\vec{x}),$$
$$-\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1,\ldots,s),$$
$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s}{}' b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}, \quad f(\vec{x}) \in E_s^{+\alpha}(Q) \tag{4}$$

является периодическая функция

$$u(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s}{}' \frac{b_{\vec{m}}}{Q(\vec{m})} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} + c, \quad u(\vec{x}) \in E_s^\alpha(Q),^1 \tag{5}$$

где c — произвольное число и ряды в правых частях (4) и (5) абсолютно сходятся.

Обозначим через $J_{s,t}^*$ множество всех целочисленных векторов $\vec{j}_{s,t} = (j_1,\ldots,j_s)$, каждый из которых имеет координаты, образующие перестановку чисел 1, 2, …, s такую, что $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_t \leqslant s$, $1 \leqslant j_{t+1} < \ldots < j_s \leqslant s$. Таким образом $|J_{s,t}^*| = C_s^t$ и $J_{s,0}^* = J_{s,s}^* = \{(1,2,\ldots,s)\}$.

$$J_{s,s-1}^* = \{(2,\ldots,s,1),(1,3,\ldots,s,2),\ldots,(1,\ldots,s-2,s,s-1),(1,\ldots,s)\},$$
$$|J_{s,s-1}^*| = s.$$

Теорема 2. *Для пространства $E_s^\alpha(Q)$ задача Дирихле для дифференциального уравнения*

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_s}\right)u(\vec{x}) = f(\vec{x}),$$
$$-\infty < x_\nu < \infty \quad (\nu = 1,\ldots,s),$$
$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s}{}' b_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} \tag{6}$$

с граничным условием

$$u(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}) \quad \left(\vec{x} \in \partial\overline{G_s}\right), \quad \varphi(\vec{x}) \in E_s^\alpha, \tag{7}$$

где периодическая функция $\varphi(\vec{x})$ имеет вид

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} d_{\vec{m}} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} \tag{8}$$

разрешима тогда и только тогда, когда найдётся c_0*, для которого для любого* $\vec{j}_{s,s-1} \in J^*_{s,s-1}$ *и* $(m_{j_1}, \ldots \ldots, m_{j_{s-1}}) \in \mathbb{Z}^s\left(\vec{j}_{s,s-1}\right)$ *выполняются соотношения*

$$\sum_{\substack{\vec{n}\in\mathbb{Z}^s,\\ (n_{j_1},\ldots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})}} \frac{b_{\vec{n}}}{Q(\vec{n})} = \sum_{\substack{\vec{n}\in\mathbb{Z}^s,\\ (n_{j_1},\ldots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})}} d_{\vec{n}},$$
$$m_{j_1}^2 + \ldots + m_{j_{s-1}}^2 \neq 0, \tag{9}$$

$$\sum_{\substack{\vec{n}\in\mathbb{Z}^s,\\ (n_{j_1},\ldots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})}} d_{\vec{n}} + \sideset{}{'}\sum_{\substack{\vec{n}\in\mathbb{Z}^s,\\ (n_{j_1},\ldots,n_{j_{s-1}})=(m_{j_1},\ldots,m_{j_{s-1}})}} \frac{b_{\vec{n}}}{Q(\vec{n})} = c_0,$$
$$m_{j_1}^2 + \ldots + m_{j_{s-1}}^2 = 0. \tag{10}$$

Решением задачи Дирихле (6) — (8) является периодическая функция

$$u(\vec{x}) = \sideset{}{'}\sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} \frac{b_{\vec{m}}}{Q(\vec{m})} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} + c_0, \tag{11}$$

Теорема 3. *Для произвольной целочисленной решетки* Λ *для решения (11) задачи Дирихле (6) — (7) справедливо неравенство*

$$\|u(\vec{x}) - u_\Lambda(\vec{x})\|_C \leqslant \frac{2\|\varphi(\vec{x})\|_{E_s^\alpha(Q)}}{q_3(\Lambda)^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1} q_3(\Lambda)}{(s-1)!(\alpha-1)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=0}^{s-2} \frac{\ln^m q_3(\Lambda)}{m!} \sum_{k=m}^{s-1} \frac{C_k^m}{\zeta(\alpha)^k} \left(\sum_{j=k+2}^{s} C_s^j 2^j \zeta(\alpha)^{j-2} + \sum_{j=k+1}^{s} C_s^j 2^j \frac{\zeta(\alpha)^{j-1}}{\alpha-1} \right) \right). \tag{12}$$

МБОУ СОШ №56 г. Тула
Получено 8.05.20

УДК 511.3

Эффект асимметрии распределения точек целочисленной решетки, лежащих в гиперболическом кресте

А. Л. Рощеня (Тула)
roshenya@rambler.ru

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ — произвольная целочисленная решётка, тогда квадрат $[0; \det\Lambda)^2$ является основным параллелепипедом решётки $\Lambda_1 = \det\Lambda \cdot \mathbb{Z}^2$, поэтому множество $M^*(\Lambda) = \Lambda \bigcap [0; \det\Lambda)^2$ точек решётки Λ, попавших в квадрат $[0; \det\Lambda)^2$, является полной системой вычетов решётки Λ по подрешётки Λ_1. Таким образом

$$\Lambda = \bigcup_{\vec{x}\in M^*(\Lambda)} \Lambda_1(\vec{x}), \quad \Lambda_1(\vec{x}) = \vec{x} + \Lambda_1.$$

Гиперболическим крестом называется область[1] $K(T) = \{\vec{x} \,|\, \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \leqslant T\}$, а гиперболической областью $\Gamma(T) = \{\vec{x} \,|\, x > 0, y > 0, xy \leqslant T$. Ясно, что $K^+(T) = \{\vec{x} \,|\, x > 0, y > 0, \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \leqslant T\} \subset \Gamma(T)$. Рассмотрим при $0 < a, b \leqslant 1$ величины

$$D(N, a, b) = \sum_{x \geqslant 0,\, y \geqslant 0,\, (x+a)(y+b) \leqslant N} 1$$

— число точек сдвинутой фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^2 + (a, b)$ в гиперболической области $\Gamma(N)$ и

$$D^*(N, a, b) = \sum_{x \geqslant 0,\, y \geqslant 0,\, \overline{x+a} \cdot \overline{y+b} \leqslant N} 1$$

— число точек $\mathbb{Z}^2 + (a, b)$ в четверти гиперболического креста $K^+(N)$.

Через γ_a обозначим величину

$$\gamma_a = \frac{a^2 - 3a + 1}{2} + \int_1^\infty \frac{\{x - a\} - \{x - a\}^2}{x^3} dx,$$

тогда справедливо асимптотическое равенство

$$\sum_{x=1}^{[\sqrt{N} - a]} \frac{N}{x + a} = \frac{1}{2} N \ln N + \gamma_a N + \left(\frac{1}{2} - \left\{\sqrt{N} - a\right\}\right) \sqrt{N} + \Theta(a, N),$$

где $|\Theta(a, N)| < \frac{1}{8}$.

Теорема 1. *Для произвольных a и b, где $0 < a, b \leqslant 1$, справедливы асимптотические формулы*

$$D(N, a, b) = N \ln N + \left(\gamma_a + \gamma_b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - 1\right) N + O\left(\sqrt{N}\right),$$
$$D^*(N, a, b) = N \ln N + (\gamma_a + \gamma_b + 2) N + O\left(\sqrt{N}\right).$$

Для обсуждения эффекта асимметрии распределения по классам точек решётки, лежащих в гиперболическом кресте, потребуются дополнительные обозначения. Положим $M_0^*(\Lambda) = \{\vec{x} \in M^*(\Lambda) \,|\, x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\}$, $M_1^*(\Lambda) = \{(x_1, 0) \in M^*(\Lambda) \,|\, x_1 \neq 0\}$, $M_2^*(\Lambda) = \{(0, x_2) \in M^*(\Lambda) \,|\, x_2 \neq 0\}$. Справедливо разбиение

$$M^*(\Lambda) = \{\vec{0}\} \bigcup M_0^*(\Lambda) \bigcup M_1^*(\Lambda) \bigcup M_2^*(\Lambda).$$

При $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1, 1\}^2$ положим

$$K(T, \vec{\varepsilon}) = \{\vec{x} \,|\, \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \leqslant T,\ \varepsilon_1 x_1 > 0,\ \varepsilon_2 x_2 > 0\},$$
$$D(T \,|\, \Lambda, \vec{x}, \vec{\varepsilon}) = \left|\Lambda_1(\vec{x}) \bigcap K(T, \vec{\varepsilon})\right| \quad (\vec{\varepsilon} \in \{-1, 1\}^2).$$

[1]Для любого вещественного x полагаем $\overline{x} = \max(1, |x|)$.

Теорема 2. *При $\vec{x} = \vec{0}$ справедливо асимптотическое равенство*

$$D(T|\Lambda, \vec{0}, \vec{\varepsilon}) = \frac{T\ln T}{D^2} + \frac{T}{D^2}(2\gamma_1 - 1 - 2\ln D) + \theta_{\vec{\varepsilon}} \cdot \left(\frac{\sqrt{T}}{D} + \frac{1}{4}\right), \quad |\theta_{\vec{\varepsilon}}| \leqslant 1.$$

Теорема 3. *При $\vec{x} \in M^*_\nu(\Lambda)$, $z = \frac{1-\varepsilon_\nu}{2} + \frac{\varepsilon_\nu x_\nu}{D}$ $(\nu = 1, 2)$ справедливо асимптотическое равенство*

$$D(T|\Lambda, \vec{x}, \vec{\varepsilon}) = \frac{T\ln T}{D^2} + \frac{T}{D^2}(\gamma_1 + \gamma_z - 1 - 2\ln D) + \theta_{\vec{x},\vec{\varepsilon}} \cdot \left(\frac{\sqrt{T}}{D} + \frac{5}{4}\right), \quad |\theta_{\vec{x},\vec{\varepsilon}}| \leqslant 1.$$

Теорема 4. *При $\vec{x} \in M^*_0(\Lambda)$, $z_\nu = \frac{1-\varepsilon_\nu}{2} + \frac{\varepsilon_\nu x_\nu}{D}$, $\nu = 1, 2$ справедливо асимптотическое равенство*

$$D(T|\Lambda, \vec{x}, \vec{\varepsilon}) = \frac{T\ln T}{D^2} + \frac{T}{D^2}(\gamma_{z_1} + \gamma_{z_2} - 1 - 2\ln D) + \theta_{\vec{\varepsilon}} \cdot \left(\frac{\sqrt{T}}{D} + \frac{1}{4}\right), \quad |\theta_{\vec{\varepsilon}}| \leqslant 1.$$

Из теорем 2, 3 и 4 мы видим, что имеет место эффект асимметрии во втором члене асимптотической формулы распределения точек целочисленной решётки, лежащих в гиперболическом кресте, по классам, так как второй член асимптотической формулы зависит от класса решетки Λ относительно подрешётки Λ_1.

Список цитированной литературы

1. А. Л. Рощеня Обобщение теоремы Дирихле о числе точек сдвинутой решётки под гиперболой $xy = N$. Деп. в ВИНИТИ 1996. № 2743-В-96.

2. А. Л. Рощеня Обобщение теоремы Дирихле о числе точек целочисленной решётки в гиперболическом кресте. Деп. в ВИНИТИ 1997. № 2087-В-97.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Получено 8.05.20

УДК 511.3

Применение количественной меры качества оптимальных коэффициентов[1]

Н. К. Серегина (Тула)
nadj_nadj@mail.ru

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ № 15-01-01540а

В 1959 году профессор Н. М. Коробов предложил новый класс теоретико-числовых сеток — параллелепипедальные сетки:

$$M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \ldots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

и соответствующие квадратурные формулы с равными весами

$$\int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 f(\vec{x})\, d\vec{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \ldots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) - R_N[f],$$

где $R_N[f]$ – погрешность квадратурной формулы.

На классе E_s^α периодических функций с быстро сходящимися рядами Фурье были получены наилучшие результаты

$$|R_N[f]| << \frac{\ln^{\alpha(s-1)} N}{N^\alpha} \quad \text{(Н. С. Бахвалов [1], Н. М. Коробов [6]).}$$

Особое место параллелепипедальных сеток с оптимальными коэффициентами объясняется тем фактом, что квадратурные формулы с этими сетками задают ненасыщаемые алгоритмы численного интегрирования на классах E_s^α $(\alpha > 1)$.

Количественной мерой качества набора коэффициентов $a_1,\ldots,\ a_s$ параллелепипедальной сетки называется величина

$$H(p, \vec{a}) = \frac{3^s}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \prod_{j=1}^{s} \left(1 - 2 \cdot \left\{ \frac{a_j \cdot k}{p} \right\} \right)^2, \tag{1}$$

которая равна приближенному значению интеграла от периодической функции

$$h(\vec{x}) = \frac{3^s}{p} \prod_{j=1}^{s} (1 - 2\{x_j\})^2$$

по квадратурной формуле с параллелепипедальной сеткой

$$1 = \int_0^1 \ldots \int_0^1 h(\vec{x}) d\vec{x} = \frac{3^s}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \prod_{j=1}^{s} \left(1 - 2 \cdot \left\{ \frac{a_j \cdot k}{p} \right\} \right)^2 - R_p[h],$$

где $R_p[h]$ — погрешность приближенного интегрирования.

Выбор функции $h(\vec{x})$ и величины $H(p, \vec{a})$ связан с тем, что функция $h(\vec{x})$ является граничной функцией класса $E_s^\alpha\left(\cdot, \frac{\pi^2}{6}\right)$ (подробности см. [7]).

Количественная мера качества оптимальных коэффициентов играет важную роль в современных исследованиях по теории теоретико-числового метода приближенного анализа (см. [1] — [11]).

Положим $p_1 = \left[\dfrac{p-1}{2}\right]$, $p_2 = \left[\dfrac{p}{2}\right]$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$3\left(1-2\left\{\frac{x}{p}\right\}\right)^2 = 1+\frac{2}{p^2}+\sum_{m=-p_1}^{p_2}{}' \frac{6}{p^2\sin^2\pi\frac{m}{n}}e^{2\pi i\dfrac{mx}{p}}.$$

Из которой вытекает теорема о конечном ряде Фурье для количественной меры качества оптимальных коэффициентов.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$H(p,\vec{a}) = \left(1+\frac{2}{p^2}\right)^s + \sum_{m_1,\ldots,m_s=-p_1}^{p_2}{}' \frac{\delta_p(a_0m_0+\ldots+a_sm_s)}{\psi(m_0)\ldots\psi(m_s)},$$

где

$$\psi(m) = \begin{cases} \dfrac{p^2}{p^2+2}, & \text{при } m=0; \\ \dfrac{p^2\sin^2\pi\frac{m}{p}}{6}, & \text{при } m\neq 0. \end{cases}$$

Нами доказан усиленный вариант теоремы Бахвалова—Коробова для произвольного модуля N.

Теорема 2. *Пусть $q = q(\Lambda(\vec{a},N))$ — гиперболический параметр решетки. Тогда при $q \geqslant 4$ гиперболическая дзета-функция решетки $\zeta_H(\Lambda(\vec{a},N)|\alpha)$ удовлетворяет неравенству*

$$\zeta_H(\Lambda(\vec{a},N)|\alpha) <$$
$$< \frac{s2^\alpha}{(N-1)^\alpha}\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^s + s\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^{s-1}\frac{6^\alpha}{(q-3)^\alpha}+$$
$$+\frac{6}{q^\alpha}\left(2+\frac{1}{\alpha-1}\right)\sum_{r=2}^{s}\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^{s-r}\alpha^{r-1}\left(2+2\ln\frac{q-3}{6}+\frac{\pi^2}{6}\right)^{r-1}. \qquad (2)$$

Из этой теоремы можно получить оценку количественной меры качества оптимальных коэффициентов, которая служит основным критерием для вычисления оптимальных коэффициентов.

Список цитированной литературы

1. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та. 1959. № 4. С. 3–18.

2. Бочарова (Добровольская) Л. П. Алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. 2007 Т. 8, вып. 1(21). С. 4 — 109.

3. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та. 1959. № 4. С. 19 — 25.

4. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207 — 1210.

5. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 1960. Т. 132. № 5. С. 1009—1012.

6. Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55, вып. 2. С. 83 — 90.

7. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. 2 изд. М.: МЦНМО, 2004.

8. Огородничук Н. К, Ребров Е. Д. Об алгоритме численного интегрирования с правилом остановки // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: материалы 7 международной конференции 2010. Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 153 — 158.

9. Огородничук Н. К, Ребров Е. Д. ПОИВС ТМК: Алгоритмы интегрирования с правилом остановки // Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии: материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина. Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2011. С. 153 — 158.

10. Nikolay M. Dobrovolskiy, Larisa P. Dobrovolskaya, Nikolay N. Dobrovolskiy, Nadegda K. Ogorodnichuk, and Evgenii D. Rebrov Algorithms fot computing optimal coefficients // Book of abstracts of the International scientific conference "Computer Algebra and Information Technology" , Odessa, August 20—26, 2012. p. 22 — 24.

11. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 6, часть 2. Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: труды X международной конференции. С. 90 — 98.

Администрация г. Тулы
Получено 7.05.2015

УДК 511.3

О сильной равномерной распределенности системы функций ван дер Корпута — Хэммерсли[1]

О. В. Скорикова (Тула)
olkpv@mail.ru

При фиксированном натуральном $p>1$ рассмотрим следующую функцию

$$p(t)=\sum t_\nu p^{-\nu-1}, \quad t_\nu\in A(p)$$

при любом целом $t=\sum\limits_{\nu=0}^{h-1} t_\nu p^\nu \geq 0$ — функция ван дер Корпута — Хэммерсли, где для произвольного натурального T множество

$$A(T)=\{0,1,...,T-1\}.$$

Для $p=2$ эта функция рассматривалась ван дер Корпутом [12] и использовалась К. Ротом в его основополагающей работе по квадратичному отклонению [15].

В 1960 году Хэммерсли для построения многомерных квадратурных формул ввёл многомерные сетки, которые теперь называются сетками Хэммерсли, вида

$$X(N)=\left\{\left(p_1(n),...,p_s(n),\frac{n}{N}\right)\mid n=0,1,...,N-1\right\},$$

где $p_1,\ldots,p_s$ — различные попарно взаимно простые натуральные числа, большие 1 и $p_j(n)$ — функция ван дер Корпута — Хэммерсли при $p=p_j$ $(j=1,2,\ldots,s)$. Известно (см. [13], [14], [9]), что если $p_1,...,p_s$ — попарно взаимно простые числа, то сетки Хэммерсли равномерно распределены и величина отклонения $D(X(N))$ имеет порядок[2]

$$D(X(N))=O\left(\ln^s N\right). \tag{1}$$

В [8] (стр. 174) дается понятие равномерной распределенности системы функций по модулю 1.

Пусть $s\geq 1$ — фиксированное натуральное число, $\gamma_1,...,\gamma_s$ — произвольные положительные числа, не превосходящие единицы, и $f_1(x),\ldots,f_s(x)$ — функции,

---

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ № 15-01-01540а

[2]Отклонением $D(X)$ произвольной сетки $X=\{\vec{x}_k|1\leqslant k\leqslant N\}$ называется величина

$$D(X)=\sup_{0\leqslant\gamma_1,\ldots,\gamma_s\leqslant 1}|D(X,\vec{\gamma})|, \quad D(X,\vec{\gamma})=N(\vec{\gamma})-N\gamma_1\ldots\gamma_s,$$

где $N(\vec{\gamma})$ — количество точек сетки X, попавших в область $\Pi(\vec{\gamma})=[0;\gamma_1)\times\ldots\times[0;\gamma_s)$, $D(X,\vec{\gamma})$ — локальное отклонение сетки X.

определенные при натуральных значениях x. Обозначим через $N_T(\gamma_1,...,\gamma_s)$ число решений системы неравенств

$$\begin{cases} \{f_1(x)\} < \gamma_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & x = 1, 2, ..., T. \\ \{f_s(x)\} < \gamma_s \end{cases}$$

Определение 1. *Система функций называется* **равномерно распределенной** *в единичном s-мерном кубе, если*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} N_T(\gamma_1,...,\gamma_s) = \gamma_1...\gamma_s,$$

или, что то же,

$$N_T(\gamma_1,...,\gamma_s) = \gamma_1...\gamma_s T + o(T)$$

для любого набора $0 \leqslant \gamma_1,...,\gamma_s \leqslant 1$.

Из оценки (1) следует, что система функций $p_1(t),...,p_s(t)$ является равномерно распределенной по модулю 1.

Цель нашей работы — доказать следующую основную теорему.

Теорема 1. *Для системы функций $p_1(t),...,p_s(t)$ имеет место сильная равномерная распределенность, то есть для любого набора целых неотрицательных чисел $(n_1,...,n_s)$ система функций $p_1(t+n_1),\dots,p_s(t+n_s)$ является равномерно распределенной по модулю 1.*

Доказательство этой теоремы опирается на приближение сдвинутых последовательностей значений системы функций ван дер Корпута — Хэммерсли модифицированными сетками Хэммерсли — Рота. Впервые эти сетки ввёл в 1983 году Н. М. Добровольский в работе [2] для эффективного доказательства теоремы Рота о квадратичном отклонении [16]. Различные аспекты теории модифицированных сеток Хэммерсли — Рота рассматривались в работах [1] — [7]. Различным обобщениям теоремы Рота о квадратичном отклонении посвящены работы [10] — [11].

При фиксированном натуральном $p > 1$, натуральном $h \geq 1$, $P = p^h$ *периодизированная по модулю P функция ван дер Корпута — Хэммерсли* $x(m) = x_{(h)}(m)$ на множестве целых чисел задается равенствами

$$x(m) = \begin{cases} \sum\limits_{\nu=0}^{h-1} m_\nu p^{-\nu-1} & \text{при } m \in A(P),\ m = \sum\limits_{\nu=0}^{h-1} m_\nu p^\nu,\ m_\nu \in A(p) \\ x\left(P\left\{\frac{m}{P}\right\}\right) & \text{при } m \notin A(P). \end{cases}$$

Пусть $p_1, \ldots, p_s$ — различные попарно взаимно простые натуральные числа, большие 1. Для произвольного натурального $N \geqslant 3$ определим величины

$$\begin{gathered} h_j = [\ln N/\ln p_j] + 1,\ P_j = p_j^{h_j}\ (j = 1, \ldots, s); \\ M = P_1 \ldots P_s;\ M_j = M/P_j\ (j = 1, \ldots, s). \end{gathered} \tag{2}$$

Тогда справедливы соотношения

$$N < P_j \leqslant Np_j,\ (M_j, P_j) = 1\ (j = 1, \ldots, s);\ N^s < M \leqslant N^s p_1 \ldots p_s \tag{3}$$

Через $x_j(n)$ будем обозначать функцию $x(n)$ при $p = p_j$, $h = h_j$, $P = = P_j$ $(j = 1, \ldots, s)$. Пусть $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_s)$ — произвольный целочисленный вектор. Для любого целого n с $0 \leqslant n \leqslant N - 1$ полагаем

$$\vec{x}\left(n, \vec{t}\right) = \left(x_1(n + t_1), \ldots, x_s(n + t_s), \frac{n}{N}\right) \tag{4}$$

Определение 2. *Модифицированной сеткой Хэммерсли—Рота называется сетка*

$$XR\left(N, \vec{t}\right) = \left\{\vec{x}\left(n, \vec{t}\right) | n = 0, \ldots, N - 1\right\} \tag{5}$$

из N узлов.

Из периодичности $x_j(n)$ с периодом P_j следует, что сетка $XR\left(N, \vec{t}\right)$ периодически зависит от t_j с периодом P_j $(j = 1, \ldots, s)$. Отсюда вытекает, что при заданном N существует ровно M различных модифицированных сеток Хэммерсли—Рота, то есть порядка N^s различных сеток.

Оценка отклонения произвольной модифицированной сетки Хэммерсли—Рота получены в [3]. В этой же работе доказано существование и даны алгоритмы построения модифицированных сеток Хэммерсли — Рота с правильным порядком квадратичного и q-го отклонения.

Список цитированной литературы

1. Ванькова В. С., Добровольский Н. М., Есаян А. Р. О преобразовании многомерных сеток. Деп. в ВИНИТИ 22.01.91, № 447—91.

2. Добровольский Н. М. Эффективное доказательство теоремы Рота о квадратичном отклонении // УМН. 1984. Т. 39, вып. 4 (123). С. 155—156.

3. Добровольский Н. М. Оценки отклонений модифицированных сеток Хэммерсли—Рота. Деп. в ВИНИТИ 23.02.84, № 1365—84.

4. Добровольский Н. М., Ванькова В. С., Пентон М. М. Алгоритм построения оптимальных модифицированных сеток Хеммерсли—Рота. // Современные проблемы информатики, вычислительной техники и автоматизации: тез. докл. Всесоюз. конф. Тула, 1989. С. 92—95.

5. Добровольский Н. М., Ванькова В. С. Новые оценки для модифицированных сеток Хеммерсли—Рота. Деп. в ВИНИТИ 29.08.90, № 4992—В90.

6. Добровольский Н. М., Ванькова В. С. О регулярных p-ичных сетках // Мат. заметки. 1993. Т. 54, вып. 6. С. 22—32.

7. Добровольский Н. М. Средние по орбитам многомерных сеток // Мат. заметки. 1995. Т. 58, вып. 1. С. 48—66.

8. Коробов Н. М. Тригонометрические суммы и их приложения. М.: Наука, 1989.

9. Соболь И. М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М.: Наука, 1969.

10. Chen W. W. L. On irregularities of distribution // Mathematika. 1980. Vol. 27. № 2. P. 153—170.

11. Chen W. W. L. On irregularities of distribution II // Quarterly Journal of Mathematics. Oxford. 1983. Vol. 34. № 2. P. 257—279.

12. van der Corput J.G. Verteilungsfunktionen. I–VIII // Proc. Kon. Ned. Acad. Wetensch. Amsterdam. 1935. Vol. 38. № 8. P. 813—821; № 10. P. 1058—1066.

13. Hammersley J. M. Monte-Carlo methods for solving multivariable problems // Ann. New. York Acad. Sci. 1960. Vol. 86. № 4. P. 844—874

14. Halton J. H. On the effeciency of certain guasirandom secuencis of points in evaluating multidimensional integrals // Numerische Math. 1960. Vol. 2. № 2. P. 84—90.

15. Roth K. F. On irregularities of distribution // Mathematika. 1954. Vol. 1. № 2. P. 73—79.

16. Roth K. F. On irregularities of distribution — IV // Acta Arithm. 1980. Vol. 37. P. 67—75.

17. Скорикова О. В. Сильная равномерная распределенность системы функций ван дер Корпута–Хеммерсли // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып. 3. С. 91–102.

Государственное автономное учреждение Тульской области "Центр информационных технологий"
Получено 11.04.2015

УДК 511.3

О матричных разложениях М. Н. Добровольского и В. Д. Подсыпанина[1]

Д. К. Соболев (Москва)
co6ojib@gmail.com

В 50-х — 60-х годах прошлого столетия М. Н. Добровольский и его научный руководитель В. Д. Подсыпанин проводили исследования по многочленам Туэ и связанным с ними матричным многочленным разложениям алгебраических иррациональностей.

В работах [2] и [3] рассматриваются такие матричные разложения алгебраических иррациональностей.

В частности, для кубической иррациональности α, удовлетворяющей уравнению

$$f(t) = t^3 + at^2 + bt + c, \quad f(\alpha) = 0$$

дается матричное разложение

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} \left(\begin{pmatrix} t & -at^2 - 2bt - 3c \\ 1 & 3t^2 + 2at + b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3k+2 & 0 \\ 0 & 3k+1 \end{pmatrix} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \begin{pmatrix} 3t^2 + 2at + b & -at^2 - 2bt - 3c \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ab - 9c & 2b^2 - 6ac \\ 2a^2 - 6b & ab - 9c \end{pmatrix} \right) \quad (1)$$

и утверждается, что оно сходится при t, для которых разность $|t - \alpha|$ мала.

Общее определение сходимости матричного разложения следующее.

Определение 1. *Говорят, что матричное разложение*

$$\prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$$

сходится к числу α, если для матриц

$$M_n = \prod_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}$$

выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{C_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{D_n} = \alpha.$$

В этом случае пишется

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}.$$

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ № 15-01-01540а

Выделим класс матриц $\mathfrak{M}^+$ и подклассы $\mathfrak{M}^+(q)$, $\mathfrak{M}^\pm$, $\mathfrak{M}^*$ и $\mathfrak{M}^*(q)$ $(q \in \mathbb{N})$.

Определение 2. *Будем говорить, что целочисленная неотрицательная матриц $M \in \mathfrak{M}^+$, если выполнены условия*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a \geqslant c \geqslant 0,\ b \geqslant d \geqslant 0, \quad \det M = ad - bc \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Подкласс $\mathfrak{M}^\pm$ задается равенством

$$\mathfrak{M}^\pm = \left\{ M \in \mathfrak{M}^+ | \det M < 0 \right\}, \tag{3}$$

а подкласс $\mathfrak{M}^+(q)$ — равенством

$$\mathfrak{M}^+(q) = \left\{ M \in \mathfrak{M}^+ \,\middle|\, \left[\frac{a}{c}\right] = \left[\frac{b}{d}\right] = q \right\}, \tag{4}$$

Определение 3. *Будем говорить, что целочисленная неотрицательная матриц $M \in \mathfrak{M}^*$, если выполнены условия*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}^\pm, \quad \left[\frac{a}{c}\right] = \left[\frac{b}{d}\right] \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Подкласс $\mathfrak{M}^*(q)$ задается равенством

$$\mathfrak{M}^*(q) = \left\{ M \in \mathfrak{M}^* \,\middle|\, \left[\frac{a}{c}\right] = \left[\frac{b}{d}\right] = q \right\}. \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть в бесконечном матричном произведении*

$$\prod_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{\infty} m_k, \quad m_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \tag{7}$$

все матрицы $m_k \in \mathfrak{M}^*$, тогда матричное произведение сходится к числу $\alpha > 1$.

Если число α — иррациональное, то для любой матрицы $m \in \mathfrak{M}^+ \setminus \mathfrak{M}^*$ и $n \in \mathbb{N}$ найдется $t \geqslant n$ такое, что

$$m \prod_{k=n}^{t} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}^*.$$

Лемма 1. *Пусть матрица*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \bigcup_{q=1}^{\infty} \mathfrak{M}^+(q),$$

тогда её можно представить в виде

$$M = \left(\prod_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} q_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \cdot K \qquad (8)$$

и матрица

$$K = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}^+ \setminus \bigcup_{q=1}^{\infty} \mathfrak{M}^+(q).$$

Указанные теорема и лемма позволяют построить и обосновать несложный алгоритм перехода от матричного разложения к обычным цепным дробям, которые имеют представление в виде произведения матриц

$$\begin{pmatrix} q_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где q_k — неполные частные в разложении числа в цепную дробь.

Именно такой алгоритм реализован в работе [1].

Список цитированной литературы

1. Н. М. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев О матричном разложении приведенной кубической иррациональности // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 1(45). С. 34—55.

2. Подсыпанин В. Д. О разложении иррациональностей четвертой степени в непрерывную дробь // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8. вып. 3(23). С. 43—46.

3. Подсыпанин Е. В. О разложении иррациональностей высших степеней в обобщенную непрерывную дробь (по материалам В. Д. Подсыпанина) рукопись 1970 // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8, вып. 3(23). С. 47—49.

Московский педагогический государственный университет
Получено 10.04.2015

УДК 511.3

Короткие суммы дробных долей и их применение[1]

В. Н. Соболева (Москва)
printsessa@gmail.com

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ № 15-01-01540а

Все переменные величины в этой работе являются целочисленными. Пусть НОД$(a, N) = 1$ и $1 \leqslant a < N$.

Рассмотрим суммы дробных долей линейной функции вида

$$T(a, x, N) = \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{x-1} \left\{ \frac{ay}{N} \right\}. \tag{1}$$

В работе [2] доказаны следующие утверждения.

Лемма 1. *Для целых $q \geqslant 0$ и $0 \leqslant z < N$ справедливо равенство*

$$T(a, qN + z, N) = q \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2N} \right) + T(a, z, N). \tag{2}$$

Таким образом вопрос о вычислении произвольной суммы вида (1) свёлся к вопросу о вычислении неполных сумм, т. е. таких, у которых $0 \leqslant x < N$.

Пусть $P_0, \ldots, P_n$ — числители подходящих дробей, а $Q_0, \ldots, Q_n$ — их знаменатели для цепной дроби

$$\frac{a}{N} = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}}. \tag{3}$$

В работе важную роль играет известное тождество для подходящих дробей к цепной дроби (1) (см. [8])

$$\frac{P_k}{Q_k} = \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} + \frac{(-1)^{k-1}}{Q_{k-1}Q_k} \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Для заданного натурального x, удовлетворяющего условию $1 \leqslant x < N$, определим последовательно величины $x_n = x$, $y_{n-1} = \left[\frac{x_n}{Q_{n-1}}\right]$, $x_{n-1} = x_n - y_{n-1}Q_{n-1}, \ldots$, $y_1 = \left[\frac{x_2}{Q_1}\right]$, $x_1 = x_2 - y_1 Q_1$, $y_0 = x_1$, $x_0 = 0$.

Теорема 1. *Пусть $1 \leqslant x < N$, $x_{m+1} > 0$ и $x_m = 0$, тогда справедливо равенство*

$$T(a, x, N) = \frac{x - 1 + (-1)^m}{2N} + \frac{1}{2N} \sum_{j=m}^{n-1} y_j (-1)^{j+1} + \frac{a(x-1)x}{2N^2} -$$

$$- \frac{1}{2N} \sum_{j=m}^{n-1} P_j \left(y_j^2 Q_j + y_j (2x_j - 1) \right). \tag{5}$$

В своё время доктор физико-математических наук А. Б. Скопенков обратил внимание на то, что переход от суммы дробных долей к сумме целых частей позволит получить новый вывод указанных результатов, опирающийся на формулу Пика для площади многоугольника с целочисленными координатами.

Прежде всего приведем формулировку теоремы Пика. (см. [1], с. 131)

Теорема 2. *Пусть $N_1(M)$ — количество целых точек лежащих внутри, а $N_2(M)$ — на границе несамопересекающегося многоугольника M, все вершины которого — целые точки. Тогда для его площади $S(M)$ справедливо равенство*

$$S(M) = N_1(M) + \frac{1}{2}N_2(M) - 1. \tag{6}$$

Наряду с суммами (1) дробных долей рассмотрим соответствующие суммы целых частей.

$$T^*(a, x, N) = \frac{1}{N}\sum_{y=0}^{x-1}\left[\frac{ay}{N}\right]. \tag{7}$$

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$T(a, x, N) = \frac{a(x-1)x}{2N^2} - T^*(a, x, N). \tag{8}$$

Лемма 3. *Для целых $q \geqslant 0$ и $0 \leqslant z < N$ справедливо равенство*

$$T^*(a, qN+z, N) = \frac{a(qN+z)(qN+z-1)}{2N^2} - \frac{q(N-1)}{2N} - \frac{az(z-1)}{2N^2} + T^*(a, z, N). \tag{9}$$

Следующая лемма позволяет осуществить редукцию от $T(P_k, x_k, Q_k)$ к $T(P_{k-1}, x_{k-1}, Q_{k-1})$.

Лемма 4. *Пусть $2 \leqslant k \leqslant n$, тогда справедливо равенство*

$$\begin{aligned} T^*(P_k, x_k, Q_k) = {} & \frac{P_k x_k(x_k-1)}{2Q_k^2} + \frac{(-1)^k x_k(x_k-1)}{2Q_k^2 Q_{k-1}} - \frac{P_{k-1}x_{k-1}(x_{k-1}-1)}{2Q_k Q_{k-1}} + \\ & + \frac{Q_{k-1}}{Q_k}T^*(P_{k-1}, x_{k-1}, Q_{k-1}) - \frac{y_{k-1}(Q_{k-1}-1) + t_{k-1}(1+(-1)^k)}{2Q_k}, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$t_{k-1} = \begin{cases} y_{k-1} & \text{при } x_{k-1} > 0, \\ y_{k-1} - 1 & \text{при } x_{k-1} = 0 \text{ и } y_{k-1} > 0, \\ 0 & \text{при } x_k = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Теорема 3. *Пусть* $1 \leqslant x < N$, $x_{m+1} > 0$ *и* $x_m = 0$, *тогда справедливо равенство*

$$T^*(a,x,N) = \frac{ax(x-1)}{2N^2} - \frac{x-1+(-1)^m}{2N} + $$
$$+\frac{1}{2N}\sum_{j=m+1}^{n}\left(\frac{(-1)^{j-1}(x_j-1)x_j}{Q_{j-1}Q_j} - y_{j-1}(-1)^j\right). \quad (12)$$

В процессе вывода формул для неполных сумм дробных долей удалось получить аналогичные формулы для сумм целых частей, которые имеют важный геометрический смысл - выражают количество целых точек в области.

В работах [4] — [7] исследования по неполным суммам дробных долей были продолжены и применены к оценке отклонения плоских параллелепипедальных сеток.

Список цитированной литературы

1. Гашков С. Б., Чубариков В. Н. Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. — М.: Наука, 1996 — 239 с.
2. Добровольская В. Н. Неполные суммы дробных долей // Чебышевский сборник. 2004. Т. 5, вып. 2 (10) С. 43—59.
3. Добровольская В. Н. Формула Пика и неполные суммы дробных долей // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Меха-ника. Информатика. 2004. Т. 10, вып. 1. С. 5 — 11.
4. В. Н. Добровольская Отклонение плоских параллелепипедальных сеток // Чебышевский сборник. 2005. Т. 6, вып. 1 (13) С. 87—97.
5. В. Н. Добровольская Элементарный метод дробных долей Виноградова — Коробова и отклонение плоских сеток Бахвалова // Чебышевский сборник. 2005. Т. 6, вып. 2 (14) С. 138—144.
6. В. Н. Добровольская, В. И. Столбова Неполные степенные суммы дробных долей // Чебышевский сборник. 2005. Т. 6, вып. 4 (16) С. 100—107.
7. В. Н. Добровольская, В. И. Столбова Неполные степенные суммы дробных долей первого порядка // Чебышевский сборник. 2006. Т. 7, вып. 1 (17) С. 205—214.
8. Хинчин А. Я. Цепные дроби. — М.: ОГИЗ 1949.

Московский педагогический государственный университет
Получено 10.04.2015

УДК 511.3+511.48

Приближение решеток и их применение

Т. С. Шмелева (Тула)
platonov@niisi.ras.ru

В полном метрическом пространстве всех полных s-мерных решёток $\mathbb{PR}^s$ [1] рассмотрим полное подпространство диагональных решёток $\mathbb{DR}^s$. Таким образом, подпространство диагональных решёток $\mathbb{DR}^s$ состоит из решёток

$$\Lambda(d_1, \ldots, d_s) = D(d_1, \ldots, d_s)\mathbb{Z}^s,$$

где

$$D(d_1, \ldots, d_s) = \begin{pmatrix} d_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & d_s \end{pmatrix}$$

— диагональная матрица с ненулевыми элементами и $\mathbb{Z}^s$ — фундаментальная решетка.

Рассмотрим гиперболическую дзета-функцию решётки Λ, заданную в правой полуплоскости $\alpha > 1$ дзета рядом[1]

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' (\overline{x_1} \ldots \overline{x_s})^{-\alpha}.$$

Как показано в [2] гиперболическая дзета-функция решётки непрерывна на пространстве решёток $\mathbb{PR}^s$. В частности, если имеется сходящаяся последовательность решёток $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n,\ldots$ к решётке Λ, то для любого $\sigma_0 > 1$ в правой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma \geqslant \sigma_0$ имеет место равномерная сходимость

$$\lim_{n\to\infty} \zeta_H(\Lambda_n|\alpha) = \zeta_H(\Lambda|\alpha).$$

В работах [3, 4] получено аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки Λ на всю комплексную α-плоскость, кроме точки $\alpha = 0$, где полюс порядка s. В работе [5] доказаны следующие утверждения

Лемма 1. *Для гиперболической дзета-функции $\zeta_H(\Lambda \mid \alpha)$ произвольной декартовой решётки Λ вида $\Lambda = d \cdot \mathbb{Z}$ и дзета-функции $\zeta(\Lambda \mid \alpha)$ справедливо равенство*

$$\zeta_H(\Lambda \mid \alpha) = \zeta(\Lambda \mid \alpha) + f(\alpha, d), \tag{1}$$

[1] Символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключается $\vec{x} = \vec{0}$, и для любого вещественного x величина $\overline{x}$ задается равенством $\overline{x} = \max(1, |x|)$.

где аналитическая по α функция $f(\alpha, d)$ задана равенством

$$f(\alpha, d) = \begin{cases} 0, & \text{при } d \geqslant 1, \\ \sum\limits_{1 \leqslant |m| \leqslant \left[\frac{1}{d}\right]} \left(1 - \frac{1}{|dm|^\alpha}\right), & \text{при } 0 < d < 1. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 1. *Для гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки Λ вида $\Lambda = d \cdot \mathbb{Z}$, где $d > 0$, в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta_H(\Lambda \mid \alpha) - f(\alpha, d) = \frac{M(\alpha)}{\det \Lambda} \left(\zeta_H\left(\Lambda^* | \, 1 - \alpha\right) - f(\alpha, d^{-1})\right), \tag{3}$$

где

$$M(\alpha) = \frac{2\Gamma(1-\alpha)}{(2\pi)^{1-\alpha}} \sin \frac{\pi\alpha}{2}.$$

Заметим, что в левой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma < 0$ величина $M(\alpha)$ неограничена.

Положим

$$J_{k,s} = \{\vec{j}_t = (j_1, \ldots, j_s) \mid 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant s, \ 1 \leqslant j_{k+1} < \ldots < j_s \leqslant s,$$

$$\{j_1, \ldots, j_s\} = \{1, 2, \ldots, s\}\}.$$

Через $\Pi(\vec{j}_k)$ обозначим координатное подпространство

$$\Pi(\vec{j}_k) = \{\vec{x} \mid x_{j_\nu} = 0 \ (\nu = k+1, \ldots, s)\}.$$

Пусть $(\Lambda)_{\vec{j}_k} = \Lambda \bigcap \Pi(\vec{j}_k)$ — пересечение решётки с координатным подпространством. Через $\Lambda_{\vec{j}_k}$ будем обозначать k-мерную решётку, которая получается из решётки $(\Lambda)_{\vec{j}_k}$ отбрасыванием у каждой точки $s-k$ нулевых координат, а через $N_{\vec{j}_k}$ — её определитель, через $\Lambda^*_{\vec{j}_k}$ обозначим k-мерную взаимную решётку.

Ясно, что справедливо представление

$$\zeta_H(\Lambda(d_1, \ldots, d_s) \mid \alpha) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{\vec{j}_k \in J_{k,s}} \prod_{\nu=1}^{k} \zeta_H(d_{j_\nu}\mathbb{Z} \mid \alpha).$$

Теорема 2. *При $\alpha = \sigma + it$ и $\sigma < 0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta_H(\Lambda(d_1, \ldots, d_s) \mid \alpha) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{\vec{j}_k \in J_{k,s}} \prod_{\nu=1}^{k} \left(\frac{M(\alpha)}{d_{j_\nu}} \zeta_H(d_{j_\nu}^{-1}\mathbb{Z} \mid 1-\alpha) + R(\alpha, d_{j_\nu})\right),$$

где $R(\alpha, d) = f(\alpha, d) - \frac{M(\alpha)}{d} f(\alpha, d^{-1})$.

Теорема 3. *Если имеется сходящаяся последовательность решёток $\Lambda(\vec{d_1})$, $\ldots$, $\Lambda(\vec{d_n})$, $\ldots$ к решётке $\Lambda(\vec{d})$, то в левой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma < 0$ для любого положительного $\delta_0 < |\alpha - 1|$ в окрестности $|\beta - \alpha| < \delta$ имеет место равномерная сходимость*

$$\lim_{n\to\infty} \zeta_H(\Lambda(\vec{d_n})|\beta) = \zeta_H(\Lambda(\vec{d})|\beta).$$

Эта теорема аналогична результату из диссертации А. Л. Рощени (теорема 2, стр. 83, [6]). Неограниченность величины $M(\alpha)$ объясняет, почему характер сходимости в левой полуплоскости и в правой различны.

Список цитированной литературы

1. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965.

2. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. Непрерывность гиперболической дзета-функции решеток // Мат. заметки. 1998. Т. 63. Вып. 4. С. 522—526.

3. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

4. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices // Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. doi: 10.1007/978-3-319-03146-0_2.

5. Добровольский Н. М. О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 1(53). С. 176–190.

6. Рощеня А. Л. Аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решёток. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. МПГУ, 1998.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Получено 23.04.2015

УДК 511.3

О некоторых приведенных алгебраических иррациональностях[1]

Е. И. Юшина (Тула)
alisatim01@mail.ru

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ № 15-01-01540а

Прежде всего дадим определение приведенной алгебраической иррациональности n-ой степени.

Определение 1. *Пусть*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\in\mathbb{Z}[x],\quad a_n>0$$

— произвольный целочисленный неприводимый многочлен[2]*, у которого все корни* $\alpha^{(k)}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ *— различные вещественные числа, удовлетворяющие условию*

$$-1<\alpha^{(n)}<\ldots<\alpha^{(2)}<0,\quad \alpha^{(1)}>1,$$

тогда алгебраическое число $\alpha=\alpha^{(1)}$ *называется приведенной алгебраической иррациональностью степени* n*.*

Заметим, что для минимального многочлена $f(x)$, задающего приведенную алгебраическую иррациональность α степени n, всегда выполнено неравенство $a_0<0$, так как на промежутке $[0;\infty)$ имеется только один корень α, при $x>\alpha$ имеем $f(x)>0$, поэтому $f(0)<0$.

Для любого вещественного α, являющегося приведенной алгебраической иррациональностью степени n, рассмотрим разложение в бесконечную непрерывную дробь

$$\alpha=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_n+\cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Как обычно через P_k и Q_k будем обозначать числитель и знаменатель k-ой подходящей дроби, а через α_k — k-ую остаточную дробь.

Таким образом $\alpha=\alpha_0$ и справедливо равенство

$$\alpha=\frac{\alpha_{k+1}P_k+P_{k-1}}{\alpha_{k+1}Q_k+Q_{k-1}},\quad k\geqslant 0,$$

если принять обычное соглашение, что $P_{-1}=1$ и $Q_{-1}=0$.

Лемма 1. *Для произвольной приведенной алгебраической иррациональности* α *степени* n *её остаточная дробь* α_1 *также является приведенной алгебраической иррациональностью степени* n*, удовлетворяющей неприводимому многочлену*

$$f_1(x)=\sum_{k=0}^{n}a_{k,1}x^k\in\mathbb{Z}[x],\quad a_{n,1}>0,$$

[2]В частности, неприводимость многочлена означает, что $(a_0,\ldots,a_n)=1$.

где

$$a_{k,1} = \frac{b_k}{d}, \quad d = (b_0, \ldots, b_n), \quad b_k = -\sum_{m=n-k}^{n} a_m C_m^{m+k-n} q_0^{m+k-n}, \quad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

Теорема 1. *Для произвольной приведенной алгебраической иррациональности α степени n все её остаточные дроби α_m также являются приведенными алгебраическими иррациональностями степени n, удовлетворяющими неприводимым многочленам*

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,m} x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_{n,m} > 0,$$

где

$$a_{k,m} = \frac{b_{k,m}}{d_m}, \quad d_m = (b_{0,m}, \ldots, b_{n,m}),$$
$$b_{k,m} = -\sum_{l=n-k}^{n} a_{l,m-1} C_l^{l+k-n} q_{m-1}^{l+k-n}, \quad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

Теорема 2. *Неполное частное q_k определяется однозначно как натуральное число, удовлетворяющие условию*

$$f_k(q_k) < 0, \quad f_k(q_k + 1) > 0.$$

Нетрудно понять, что для вычисления q_k требуется $O(\ln q_k)$ вычислений значений $f_k(x)$. Действительно, рассмотрим последовательность $f_k(1)$, $f_k(2)$, $\ldots$, $f_k(2^m)$, $f_k(2^{m+1})$, где $m = [\log_2(q_k)]$. Ясно, что $f_k(2^j) < 0$ при $0 \leqslant j \leqslant m$ и $f_k(2^{m+1}) > 0$. Далее методом деления пополам стягиваем отрезок $[2^m; 2^{m+1}]$ до отрезка $[q_k; q_k + 1]$, что потребует ещё вычисления m значений $f_k(x)$.

Теорема 1 обобщается на случай цепной дроби произвольной чисто-вещественной алгебраической иррациональности α степени n. Докажем предварительно лемму о преобразовании корней.

Лемма 2. *Пусть*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_n > 0$$

— произвольный целочисленный неприводимый многочлен, у которого все корни $\alpha^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — различные вещественные числа, удовлетворяющие условию

$$\alpha^{(n)} < \ldots < \alpha^{(2)} < \alpha^{(1)},$$

и для целого q справедливы неравенства

$$\begin{cases} \alpha^{(k)} < q & \textit{при } k \geqslant k_0, \\ q < \alpha^{(k)} < q+1 & \textit{при } k_0 > k \geqslant k_1, \\ \alpha^{(k)} > q+1 & \textit{при } k_1 > k \geqslant 1, \end{cases}$$

тогда многочлен

$$g(x) = -f\left(q + \frac{1}{x}\right) \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k.$$

имеет корни $\beta^{(k)} = \frac{1}{\alpha^{(k)}-q}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, *удовлетворяющие неравенствам*

$$\begin{cases} \beta^{(k)} < 0 & \textit{при } k \geqslant k_0, \\ 1 < \beta^{(k)} & \textit{при } k_0 > k \geqslant k_1, \\ 0 < \beta^{(k)} < 1 & \textit{при } k_1 > k \geqslant 1. \end{cases}$$

Теорема 3. *Для произвольной чисто-вещественной алгебраической иррациональности α степени n все её остаточные дроби α_m, начиная с некоторого номера m_0+1, являются приведенными алгебраическими иррациональностями степени n.*

Напомним определение эквивалентных чисел.

Определение 2. *Если целые числа A, B, C, D, удовлетворяют соотношению $|AD - BC| = 1$, то числа α и $\beta = \frac{A+B\alpha}{C+D\alpha}$ называются эквивалентными.*

Следствие 1. *Произвольная чисто-вещественная алгебраическая иррациональность эквивалентна приведенной алгебраической иррациональности.*

Список цитированной литературы

1. Н. М. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев О матричном разложении приведенной кубической иррациональности // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 1(45). С. 34—55.

Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Получено 10.04.2015

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

Журнал "Чебышевский сборник" является общематематическим. В журнале публикуются оригинальные и обзорные работы по всем разделам современной математики и информатики на русском или английском языке.

Журнал "Чебышевский сборник" выходит один раз в год в одном томе и четырех выпусках.

Редакция журнала "Чебышевский сборник" предлагает авторам ознакомиться с данными правилами и придерживаться их при подготовке рукописей, направляемых в журнал.

1. Общие положения

1.1. Рукопись сопровождается краткой аннотацией на русском и английском языках, которая должна содержать не менее 250 слов, как на русском, так и на английском языках. Ключевые слова входят в анотацию, но отделяются одной строкой.

Все материалы представляются в редакцию в двух экземплярах.

1.2. Текст статьи начинается с шифра УДК, затем следуют заглавие статьи, инициалы и фамилии авторов, с указанием в скобках города проживания, аннотация.

Затем идет перевод на английский язык заглавия статьи, фамилия и инициалы авторов в латинской транскрипции, с указанием в скобках города проживания, аннотация.

Статья должна быть тщательно выверена и подписана всеми авторами "в печать".

Все страницы рукописи, включая таблицы, список литературы, рисунки и подписи к рисункам, следует пронумеровать. После списка литературы приводятся названия учреждений, в которых выполнена работа.

1.3. На отдельном листе указываются сведения о каждом из авторов: фамилия, имя, отчество — полностью, ученая степень, звание, должность, полное название учреждения, полный почтовый адрес, номер телефона с кодом города, адрес электронной почты (e-mail). Обязательно следует указать автора, ответственного за переписку и переговоры с редакцией.

1.4. Российские авторы представляют в редакцию акт комиссии, о том что статья не содержит сведений, связанных с государственной тайной, и может публиковаться в открытой печати.

1.5. Отклонения в оформлении рукописи от приведенных правил позволяют редколлегии принять решение о снятии с публикации статьи в текущем томе журнала (статья может быть опубликована в следующем томе).

2. Требования к оформлению рукописей

2.1. Редакция принимает к публикации статьи, подготовленные только в системе LaTeX2$_\varepsilon$; при этом в редакцию одновременно с распечаткой статьи представляются также соответствующие файлы. Статьи, подготовленные на компьютере в других текстовых редакторах, а также машинописный или рукописный варианты не принимаются.

2.2. При подготовке статьи в LaTeX2$_\varepsilon$ следует использовать класс *article* (см. пример в конце).

В статье запрещается переопределять стандартные команды и окружения. Пример подготовки статьи находится на Web-странице http://cheb.tsput.ru

2.3. Нумеруемые формулы необходимо выделять в отдельную строку. Номер формулы ставится у правого края страницы. Нумерация только арабскими цифрами в порядке возрастания с единицы. Нумеровать следует только те формулы, на которые в тексте имеются ссылки. Запрещаются прямые ссылки по номеру на формулы из других работ. Запрещается использовать в формулах буквы русского алфавита.

2.4. Все рисунки и таблицы должны иметь подпись. Файлы с рисунками необходимо представить в формате *.eps. Максимальный размер рисунка или таблицы вместе с подписью не должен превышать 80% размера А4. Не допускается заканчивать статью рисунком или таблицей.

2.5. Список цитированной литературы оформляется в соответствии с ГОСТ 7.0.5-2008. Сокращение слов и словосочетаний на русском языке оформляется в соответствии с ГОСТ Р 7.0.12-2011, сокращение слов и словосочетаний на иностранных европейских языках — ГОСТ 7.11-2004.

3. Пример оформления списка цитированной литературы

1. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985. 510 с.
2. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Оптимальные коэффициенты для комбинированных сеток // Чебышевский сборник. 2001. Т. 2, вып. 1. С. 41—53.

3. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994. 376 с.

4. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Об аддитивной проблеме И. М. Виноградова // Мат. заметки. 2010. Т. 88, № 3. С. 325—339.

5. Archipov G. I., Buriev K., Chubarikov V. N. Exponential sums in some binary additive problems over prime parameters // Materials of international scientific workshop on analytic number theory and its applications. Moscow: MSU, 1997. P. 12—13.

6. Голод Е. С. Комплекс Шафаревича и его применения: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1999. 68 с.

4. Список использованных источников (Reference) по Harvard Standard

Наиболее значимыми составляющими в библиографических ссылках являются фамилии авторов и названия журналов , поэтому

- в описание статьи вносят всех авторов, не сокращая их тремя, четырьмя и т.п.

- названия журналов приводят обязательно.

Ссылки на публикации оформляются по Harvard Citation Standard
Оформление ссылок на публикации на русском языке

- Запись всегда начинается с фамилии автора, затем инициалы, за которыми следует дата.

- Фамилии и инициалы авторов приводят в транслитерации (иностранных авторов — в оригинале).

- Если более чем одна запись одного и того же автора, сортировать по датам.

- Название публикации, книга или журнал, всегда выделяется курсивом.

- Выдержки из публикаций, то есть главы в книгах или журнальные статьи, всегда в английских "кавычках" , начиная с первого слова.

- Имя издателя ставится перед местом издания (как это было бы в адресе). Место издания — город, страна. Сокращения для штатов США должны быть с большой буквы, и должны быть добавлены по мере необходимости.

- Ссылки на электронные ресурсы следуют тем же правилам, а в конце ставится "Available at:" и URL-адрес ресурса. Недопустимо указывать только URL-адрес.

- Название статьи переводят на английский язык.

- Название книги приводят в транслитерации и в квадратных скобках переводят на английский язык. У англоязычных книг приводят только оригинальное английское название.

- Название периодического издания приводят в транслитерации. Если издание имеет официальное англоязычное название, то это название приводят в круглых скобках.

- Название издательств и организаций приводят в транслитерации.

- Название города, названия конференций, пояснительные слова, словосочетания переводят на английский язык. Для международных конференций, имеющих второе англоязычное название, приводят это название.

- Сокращения заменяют англоязычными аналогами:

  part 2; volume 3; Vol. 3; pp. 10–19; 323p.; no.1; issue;

  Abstract of the dissertation;

  International conference proceedings (Int. Conf. Proc.);

  Scientific-and-technical (Sci.-Tech.) collected articles; dated 19 December 2013; monograph; Annals — Ann.; Annual — Annu.; Colloquium — Colloq.;

  Conference — Conf.; Congress — Congr.; Technical Paper — Tech. Paper;

  First; Second; Third; Fourth/nth... -1st; 2nd; 3rd; 4th/nth...;

  Convention — Conv.; Digest — Dig.; Exposition — Expo.;

  International — Int.; National — Nat.; Proceedings — Proc.; Record — Rec.; Symposium — Symp.; Technical Digest — Tech. Dig.

Базовая схема описания

Автор, А.А., Автор, В.В. & Автор, С.С. Год публикации, "Заглавие статьи в переводе" , *Название журнала в транслитерации или перевод заглавия, если журнал переводной* , том., номер, страницы.

Примеры описания статей из журналов:

Polyanchikov, Yu. N., Bannikov, A. I. & Kurchenko, A. I. 2007, "Improved Performance of Thermofrictional Cutting Disks" , *Vestnik Saratovskogo Gos. Tekhn. Univ.*, vol. 67, no. 1 (23), pp. 21–24.

Danilovich, A. S. & Koltyshev, S. M. 2009, "Setup for radiometric separation of contaminated soil" , *Pribory*, no. 12, pp. 56–59.

Пример описания статьи из электронного журнала:

Swaminathan V., Lepkoswka-White E., Rao B. P. 1999, "Browsers or buyers in cyberspace? An investigation of electronic factors influencing electronic exchange", *Journal of ComputerMediated Communication*, vol. 5, no. 2, Available at: www. ascusc.org/ jcmc/vol5/ issue2/.

при наличии в статье DOI, в списке литературы желательно указывать ее doi - идентификатор:

Zhang, Z & Zhu, D 2008, "Experimental research on the localized electrochemical micromachining", *Russian Journal of Electrochemistry*, no. 44 (8), pp. 926–930. doi: 10.1134/S1023193508080077/.

Пример описания монографии:

Автор АА Год, "Заглавие", Издание – если не первое, Издатель, Место публикации, страницы (pp.)

Jones, J 2002, "Managing small teams", Penguin, Sydney.

Smith, P. & Benn, J. 2012, "Report of the University of Western Australia", Small Business Working group, University of Western Australia, W. A.

Пример описания материалов конференций

Usmanov T. S., Gusmanov A. A., Mullagalin I. Z., Muhametshina R. Ju., Chervyakova A. N., Sveshnikov A. V. 2007, "Features of the design of field development with the use of hydraulic fracturing", *Trudy 6 Mezhdunarodnogo Simpoziuma "Novye resursosberegayushchie tekhnologii nedropol'zovaniya i povysheniya neftegazootdachi" (Proc. 6th Int. Technol. Symp. "New energy saving subsoil technologies and the increasing of the oil and gas impact")*, Moscow, pp. 267–272.

Пример описания Интернет-ресурса:

"APA Style", 2011, Available at: http://www.apastyle.org/apa-style-help.aspx (accessed 5 February 2011).

5. Пример оформления статьи

```
\levkolonttl{О. А. МАТВЕЕВА}

\prvkolonttl{О НУЛЯХ ПОЛИНОМОВ ДИРИХЛЕ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ \ldots}

\thispagestyle{empty}

\input{shapka.tex}

\setcounter{equation}{0}

\setcounter{theorem}{0}
```

```
\setcounter{lemm}{0}

\setcounter{corollary}{0}

\setcounter{footnote}{0}

\setcounter{section}{0}
УДК 511.3
\begin{center}
{\Large \bf О НУЛЯХ ПОЛИНОМОВ ДИРИХЛЕ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ В КРИТИЧЕСКОЙ

\medskip
ПОЛОСЕ L-ФУНКЦИИ ДИРИХЛЕ}

\medskip
{\large О.~А.~Матвеева (г. Саратов)}
\end{center}
```

```
\begin{abstract}
Получены плотностные теоремы о нулях полиномов Дирихле,
аппроксимирующих L-функции Дирихле в критической области.

\medskip
Ключевые слова: полиномы Дирихле, L-функции Дирихле, нули полиномов
Дирихле.
\end{abstract}
\begin{center}
{\Large \bf ZEROS OF DIRICHLET POLYNOMIALS

\medskip
APPROXIMATING DIRICHLET L-FUNCTIONS

\medskip
IN THE CRITICAL STRIP}

\medskip
{\large O.~A.~Matveeva}
\end{center}

\begin{engabstract}
Density theorems about zeros of dirichlet polynomials approximating
Dirichlet L-fuctions in the critical strip are obtained.

\medskip
Key words: Dirichlet polynomials, Dirichlet L-fuctions, zeros of
Dirichlet polynomials.
\end{engabstract}

\section{Введение}
В работе \cite{KorotkovMatveeva} была приведена вычислительная схема
построения полиномов Дирихле  $Q_n(s),\; s = \sigma + it$, которые
в прямоугольнике $0 < \sigma < 1,\; 0 < t < T$ аппроксимируют целые
функции, заданные рядами Дирихле с периодическими коэффициентами,
с показательной скоростью. В частности, эта схема позволяет
эффективно вычислять нули L-функций Дирихле, лежащие в
критической полосе. В данной работе показано, что, с одной стороны,
известные факты о нулях L-функций Дирихле дают возможность получить
результаты о нулях аппроксимирующих полиномов Дирихле; с другой
стороны, поведение в критической полосе аппроксимирующих полиномов
Дирихле определяет поведение L-функций Дирихле.
```

```
\section{Конструкция полиномов Дирихле, аппроксимирующих
 в критической полосе L-функции Дирихле}
Рассмотрим L-функцию Дирихле
\begin{equation}
L(s, \chi) = \sum_{1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}, \quad
s = \sigma + it,
\end{equation}
и соответствующий степенной ряд
\begin{equation}
\label{powerseries}
g(z) = \sum_{1}^{\infty}\chi(n)t^n.
\end{equation}

.....

Для оценки величины \eqref{Meq10} сверху необходимо применить
численную схему, которая связана с вычислением полиномов $Q_n(s)$.

В заключении отметим, что аналогичные факты будут иметь место
и в случае рядов
Дирихле с периодическими коэффициентами.
\begin{thebibliography}{99}
\bibitem{KorotkovMatveeva} Коротков, А. Е. Об одном численном
алгоритме определения нулей целых функций, определяемых рядами
Дирихле с периодическими коэффициентами / А. Е. Коротков,
О. А. Матвеева // Научные ведомости Белгородского государственного
 университета. Сер. Математика. Физика.~--- Белгород: Изд-во
 НИУ "Белгу", 2011. Вып.24, № 17(112). С. 47-53.

.....

\bibitem{Prahar}
Прахар К. Распределение простых чисел / К. Прахар.~--- М.:
Мир, 1967.~--- 513 с.
\end{thebibliography}

\noindent Саратовский государственный университет им.
Н. Г. Чернышевского.

\noindent Получено 10.03.2013
```

Адрес редакции:
г. Тула, пр. Ленина, 125, учебный корпус № 4 ТГПУ им. Л. Н. Толстого, комната 310, кафедра алгебры, математического анализа и геометрии.

Электронные адреса (e-mail): dobrovol@tspu.tula.ru, pikhtilkov@mail.ru

СОДЕРЖАНИЕ