VII

Избранные вопросы элементарной математики: элементы математического анализа

С.В. Лебедева, И.А. Рычагова
СГУ им. Н.Г. Чернышевского
Саратов, 2019

Министерство науки и высшего образования РФ

Саратовский государственный университет имени Н.Г.Чернышевского

С.В. Лебедева
И.А. Рычагова

Избранные вопросы элементарной математики: элементы математического анализа

для студентов, обучающихся по направлению подготовки
44.03.01 – педагогическое образование (профиль – математическое образование)

Учебно-методическое пособие

Саратов, 2019

УДК 51(072.8)
ББК 22.1Р
Л 33

Рекомендовано к печати
научно-методической комиссией механико-математического факультета
Саратовского государственного университета им. Н.Г.Чернышевского

Л 33 Лебедева, С. В. Избранные вопросы элементарной математики : элементы математического анализа : учебно-методическое пособие / С. В. Лебедева, И. А. Рычагова – Саратов, 2019. – 72 с. – (Профессиональная подготовка учителя математики).

Серийное оформление *С.В.Лебедевой*

Курс «Элементарная математика» ставит своей целью в плане общей подготовки студентов – обобщение и систематизацию с позиций информационного подхода имеющихся знаний в области элементарной математики, в плане профессиональной подготовки – пропедевтику курса методики обучения математики, а также смежных с этими курсами дисциплин профессионально-методической подготовки.

Пособие разработано в рамках экспериментального проекта «Интерактивное обучение» и служит дополнением к разработанному И. А. Рычаговой электронному образовательному ресурсу «Применение производной к решению уравнений и неравенств, доказательству тождеств».

ПРЕДИСЛОВИЕ

В 2018-2019 учебном году по инициативе магистранта 2 года обучения Т.С. Волгиной (направление подготовки – педагогическое образование, профиль – профессионально ориентированное обучение математике) был проведен эксперимент по самостоятельному выбору студентами 3 курса (направление подготовки – педагогическое образование, профиль – математическое образование) содержания модуля «Избранные вопросы элементарной математики» курса элементарной математики.

Одно из самостоятельных заданий для студентов было сформулировано следующим образом: «Предложите программу учебного модуля для изучения в следующем VII учебном семестре в рамках курса элементарной математики из расчёта: 5 учебных занятий (10 часов) + СРС (5 часов) + контрольная работа (1 задание) + аттестация (тест, 7 устных вопросов). Укажите тему модуля, его задачи, образовательные результаты (обязательные и повышенного уровня), краткое содержание (теоретические, операциональные и практические знания и виды деятельности). В качестве образца можно использовать элементы рабочей программы курса элементарной математики».

Выполнили это задание 9 человек из 15, удовлетворили всем предъявляемым требованиям только 6 человек, причём одна студентка разработала два варианта модуля. Все варианты были размещены на платформе Ipsilon (БАРС, электронный ресурс «Тригонометрия») для ознакомлении с содержанием.

Дальнейший опрос, проводимый на OnlineTestPad с целью ранжирования вариантов по привлекательности для дальнейшего изучения в 7 семестре (1 – хотел бы изучить в первую очередь, …, 7 – хотел бы изучить в последнюю очередь) показал, что будущие выпускники склонны изучать в первую очередь модули предметной подготовки, а лишь затем – предметно-методической.

После завершения сессии студенты экспериментальной группы ознакомились с результатами опроса, а двое, чьи варианты были выбраны большинством, получили предложение стать участником группы по проектированию электронного ресурса «Избранные вопросы элементарной математики» или передать право следующему разработчику. И одна, и другая студентка выразили желание стать членами группы, тем самым определив её состав:

Волгина Татьяна Сергеевна, магистрант 2 года обучения – ответственный разработчик и координатор группы,

Рычагова Ирина Александровна, студентка 3 курса – разработчик раздела «Применение производной к решению уравнений и неравенств, доказательству тождеств», Захарюта Юлия Дмитриевна, студентка 3 курса – разработчик раздела «Объёмы тел и площадь поверхности»,

Лебедева Светлана Владимировна, старший преподаватель кафедры математики и методики её преподавания – координатор проекта.

На стадии тестирования электронного ресурса в состав группы влилась Монакова Анастасия Владимировна (разработала в рамках проекта два учебных модуля «Олимпиадные задачи сказочной тематики» (3 место) и «Театр математических миниатюр» (5 место)), предложившая задания в афористической форме для этапа рефлексии каждого учебного занятия.

Данное учебно-методическое пособие является в какой-то степени печатным аналогом разработанного Ириной Александровной Рычаговой электронного ресурса и служит его дополнением.

С.В. Лебедева

ВВЕДЕНИЕ

На втором курсе, при изучении модуля «Функции и алгебраические выражения» были рассмотрены применения некоторых свойств функций: свойства монотонности, ограниченности, существования, наибольшего и наименьшего значений; – к решению уравнений и неравенств.

Иногда вопрос о монотонности, об ограниченности и, в особенности, о нахождении наибольшего и наименьшего значений сложных функций элементарными методами требует трудоемких и тонких исследований, однако он существенно упрощается при применении производной.

В этом пособии будет показано применение производной к решению уравнений и неравенств, доказательству тождеств и условных неравенств, решению некоторых других задач элементарной математики.

Для начала полезно вспомнить и проверить свои теоретические и операциональные знания, являющиеся базисом изучения модуля «Применение производной к решению уравнений и неравенств, доказательству тождеств».

Диагностическое тестирование.

За 30 минут вам предстоит ответить на 10 вопросов. Если в результате окажется, что вы ответили верно, не более, чем на 5 вопросов, то вам необходимо повторить основные теоретические положения дифференциального исчисления, иначе изучение нового материала будет весьма затруднительным.

Ниже представлена демо-версия диагностического теста. Ваш персональный вариант будет сгенерирован программой OnlineTestPad автоматически.

1. Производная (функции в точке)

а) основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке)

б) предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует

в) численно равна тангенсу угла, образованного касательной, проведенной через эту точку к данной кривой, и положительным направлением оси Ох

г) результат дифференцирования функции

д) конечный или бесконечный предел функции в этой точке

2. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{2}t^3-3t^2+2t$, где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения; её скорость в (м/с) в момент времени $t = 6$ *с*.

а) 3 б) 6 в) 12 г) 20

3. Производная константы равна

а) 0 б) 1 в) этой же константе г) независимой переменной

4. Если функция $f(x)$ имеет положительную производную на промежутке $(a;b)$ то эта функция

а) возрастает на промежутке $(a;b)$

б) имеет экстремум на промежутке $(a;b)$

в) непрерывна на промежутке $(a;b)$

г) убывает на промежутке $(a;b)$

5. Производная функции $y = 3\lg x$ в точке $x = 4$ равна

а) $y = 3\lg 4$ б) $\frac{3}{4}$ в) $\frac{3}{4\lg 10}$ г) $\frac{3}{10\lg 4}$

6. Производная функции $y = e^{x^2}$ в точке $x = -1$ равна

а) $y = 2e$ б) $-2e$ в) e г) $\frac{2}{e}$

7. Найдите $f'''(1)$, если $f(x) = 5x^5$.

Ответ. ____________________________

8. Найдите уравнение касательной к функции $f(x) = 2\sqrt{x}$ в точке $x = 4$.

Ответ. ____________________________

9. . Найдите $f''(0)$, если $f(x) = (\sin x)^5$.

Ответ. ____________________________

10. $\arcsin'\left(\frac{1}{2}\right) =$ ____________________.

«... математический анализ:
а) знакомит учителя с современными математическими методами изучения явлений природы и их использования в технике;
б) отвечает на вопросы, возникающие в элементарной математике и не находящие в ней ответа;
в) знакомит с проблемами современной математики;
г) приучает к точности речи, расширяет общий математический кругозор, повышает общую математическую культуру, обеспечивает глубокое понимание математических понятий и методов.
А это, в частности, значит, что учитель, изучив в вузе курс математического анализа, настолько разовьет свое мышление, что с успехом сумеет решать и самые замысловатые задачи элементарной математики, даже если их решением он в вузе специально и не занимался»

(Потоцкий, М. В. Что изучается в курсе математического анализа. – М. : Просвещение, 1965. – С.87.).

Занятие 1
Определение производной. Вычисление производной

I. Теоретический материал (повторение).

Приращение аргумента. Приращение функции. Определение производной. Касательная к графику функции. Механический и геометрический смыслы производной. Формулы дифференцирования. Основные элементарные функции. Основные правила дифференцирования. Дифференцирование суммы, произведения, частного. Дифференцирование сложной функции.

Повторите теоретический материал занятия по приведённым ниже конспектам опорных сигналов (аналоги ментальных карт).

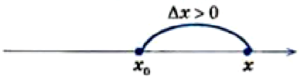
Проиллюстрируйте качество усвоения теоретических знаний темы при решении задач (задачи различной степени сложности носят репродуктивный характер, некоторые – отнесены к развивающим задачам и/или профессионально ориентированным задачам).

ПРОИЗВОДНАЯ

Понятие приращения аргумента и приращения функции

Приращение аргумента

$$\boxed{\Delta x = x - x_0}$$



Приращение функции

$$\boxed{\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$$

Пусть x и x_0 — два значения аргумента (независимой переменной) из области определения функции $y = f(x)$.

Приращением аргумента (обозначается Δx, читается: «дельта икс») называют разность $x - x_0$.

Из равенства $\Delta x = x - x_0$ имеем $x = x_0 + \Delta x$, т. е. первоначальное значение аргумента x_0 получило приращение Δx. Тогда значение функции изменилось на величину $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, которая называется ***приращением функции*** $y = f(x)$ в точке x_0 (Можно также обозначать Δf или $\Delta f(x_0)$.)

Определение производной

$$y = f(x)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называют предел отношения приращения функции в точке x к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю (можно обозначить y' или $f'(x)$).

Операцию нахождения производной называют ***дифференцированием***

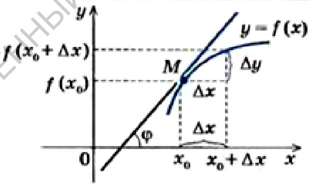
Касательная к графику функции и геометрический смысл производной

Касательной к кривой в данной точке M называют предельное положение секущей MN, когда точка N стремится вдоль кривой к точке M

$$\boxed{f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi}$$

k — угловой коэффициент касательной $k = \operatorname{tg} \varphi = f'(x_0)$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ — **уравнение касательной** к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0



Значение производной в точке x_0 равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 (и равно угловому коэффициенту касательной)

Физический смысл производной

Производная характеризует скорость изменения функции при изменении аргумента

$S = S(t)$ — зависимость пройденного пути от времени	В частности, производная по времени — это мера скорости изменения, применимая к самым разнообразным физическим величинам. Например, мгновенная скорость v неравномерного прямолинейного движения — производная от функции, выражающей зависимость пройденного пути S от времени t
$v = S'(t)$ — скорость прямолинейного движения	
$a = v'(t)$ — ускорение прямолинейного движения	

ФОРМУЛЫ И ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Формулы		Правила
Элементарные функции	**Сложные функции**	
$c' = 0$ (c — постоянная)		$(c\cdot f(x))' = cf'(x)$ (c — постоянная) *Постоянный множитель можно выносить за знак производной*
$x' = 1$		
$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α — постоянная)	$(u^{\alpha})' = \alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'$	**Производная суммы** $(f+g)' = f' + g'$ *Производная суммы дифферецируемых функций равна сумме их производных*
Частные случаи		
$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$	
$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}\cdot u'$	
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u\cdot u'$	**Производная произведения** $(f\cdot g)' = f'g + fg'$
$(a^x)' = a^x\cdot\ln a$ ($a > 0$ — постоянная)	$(a^u)' = a^u\cdot\ln a\cdot u'$	
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u'$	**Производная частного** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ $(g \neq 0)$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot\ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$	
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u\cdot u'$	**Производная сложной функции (функции от функции)** Если $y = f(u)$ и $u = u(x)$, т. е. $y = f(u(x))$, то $(f(u(x)))' = f'_u(u)\cdot u'_x(x)$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u\cdot u'$	
$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$	
$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{ctg}\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$	
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$	
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$	**Пример** $(2x^4 + \sin^3 5x)' = (2x^4)' + (\sin^3 5x)' =$ $= 2\,(x^4)' + 3\sin^2 5x\cdot(\sin 5x)' =$ $= 2\cdot 4x^3 + 3\sin^2 5x\cdot\cos 5x\,(5x)' =$ $= 8x^3 + 3\sin^2 5x\cdot\cos 5x\; 5\,(x)' =$ $= 8x^3 + 15\sin^2 5x\cdot\cos 5x$
$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u'$	
$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$	

II. Задачи для самостоятельного решения.

Задание 1. Простая задачная конструкция: прямая, обращённая, обратная задачи (для работы в трёх группах № 1-3). Решите задачу, соответствующую номеру группы; сконструируйте аналогичную к ней задачу и дополните ее до простой задачной конструкции.

1.1. Материальная точка движется прямолинейно по закону[1] $x(t)=t^2+t+2$, где $x(t)$ – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное в начале движения. В какой момент времени скорость точки будет равна 8 м/с?

1.2. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=t^2+t+2$, где $x(t)$ – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное в начале движения. Найдите скорость точки через 3,5 с после начала движения.

1.3. Скорость точки задана формулой $v(t)=2t+1$. Найдите закон $x=x(t)$ прямолинейного движения точки, если $x(0)=2$.

Задание 2. Простая вариация задачи «Вычислить производную функции».

Задание рассчитано на коллективную и индивидуальную работу.

Коллективная работа – дидактическая игра-цепочка по типу детской игры «Я садовником родился …» – заключается в решении всех задач вариации.

Индивидуальная работа заключается в самостоятельном определении степени сложности *LC* задач конструкции, при условии, что задача 2.1 имеет степень сложности, равную 1 (состоит из единственного действия – этапа решения: применения теоремы о производной постоянной функции), то есть *LC(2.1)=1*.

2.1. $f(x)=c^2$, где c – константа

2.2. $f(c)=c^2$, где c – переменная

2.3. $f(x)=x$

2.4. $f(x)=x+c$

2.5. $f(x)=x^2+c$

2.6. $f(x)=x^{-2}+c$

2.7. $f(x)=\frac{8}{5}x^{-4}+\frac{1}{5}$

2.8. $f(x)=\frac{8}{5}x^{-\frac{4}{3}}+\frac{1}{5}$

---

[1] Закон движения – математическая формулировка того, как движется тело или как происходит движение более общего вида или набор зависимостей, которые выявляют все данные о движении точки.

2.9. $f(x)=\frac{8}{5}x^{-\frac{4}{3}}-\frac{1}{5}x^{\frac{3}{4}}$

2.10. $f(x)=\frac{1}{5}x^{\frac{3}{4}}+\ln x$

2.11. $f(x)=\frac{1}{5}x^{\frac{3}{4}}+x\cdot\ln x$

2.12. $f(x)=x\cdot\ln x-\lg 2x$

2.13. $f(x)=x\cdot(\ln x-\lg 2x)$

2.14. $f(x)=x\cdot(\ln x-\log_2 x)$

2.15. $f(x)=x\cdot\sin x$

2.16. $f(x)=\frac{x}{\sin x}$

2.17. $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$

2.18. $f(x)=\frac{\cos 2x}{\sin x}$

2.19. $f(x)=\frac{\cos x}{\sin 2x}$

2.20. $f(x)=\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

2.21. $f(x)=\frac{2\cos^3\frac{x}{4}}{\sin^2 x}$

2.22. $f(x)=2\cos^3\frac{x}{4}\cdot\sin^2 x$

2.23. $f(x)=2\cos^3\frac{x}{4}+\sin^2 x$

2.24. $f(x)=2tg^3\frac{x}{4}+ctg^2 x$

2.25. $f(x)=2tg^3\frac{x^2}{x+4}+ctg 2x$

2.26. $f(x)=arctg 2x$

2.27. $f(x)=arctg 2x+arctg 2c$, где $c\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$

2.28. $f(x)=2x+arctg 2x$

2.29. $f(x)=(2x+1)arctg 2x$

2.30. $f(x)=(2x+1)arctg(2x+1)$

2.31. $f(x)=\frac{arctg(2x+1)}{2x+1}$

2.32. $f(x)=\frac{2x+1}{arctg(2x+1)}$

2.33. $f(x)=\frac{arctg(2x+1)^2}{2x+1}$

2.34. $f(x)=\frac{(2x+1)^2}{arctg(2x+1)}$

2.35. $f(x)=\frac{arctg^2(2x+1)}{2x+1}$

<u>Задание 3. Вариация задачи с учётом двух параметров-констант и одного параметра-функции (многочлен) «Вычислить производную тригонометрической функции вида</u> $f(x) = a\sin^p P(x)$*».*

Решите 3.1-3.5 или дополните задачную конструкцию 3.3-3.5, выявив закономерность вариации.

3.1. $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \sin x^7$, $f_3(x) = \sin\left(x^3 + 5x\right)$

3.2. $f_1(x) = \sin^2(4x)$, $f_2(x) = \sin^{\frac{3}{5}}\left(-\sqrt{2}x\right)$, $f_3(x) = \sin^{-\frac{5}{3}}(x \cdot \lg 2)$

3.3. $f_1(x) = 19\sin^8 x$, $f_2(x) = \sqrt[4]{\frac{8}{15}}\sin^{19} x$

3.4. $f_1(x) = \lg 19 \sin\frac{16x}{3}$, $f_2(x) = -\sin 19 \cdot \sin\left(-\frac{3x}{5}\right)$

3.5. $f_1(x) = -\frac{8}{\sqrt{19}}\sin^{\frac{4}{5}}\left(\frac{29x^2}{9} + x\right)$, $f_2(x) = \sqrt[3]{\sin 1} \cdot \sin^3\left(x^8 - 2x^7 + 3\right)$

III. Интерактивные упражнения для самостоятельного выполнения во внеаудиторное время и для демонстрационного выполнения на занятии при наличии мультимедиа-аудитории.

III.1. Прикрепитесь по ссылке в виртуальный класс в LearningApps.org: https://learningapps.org/join/05dwdy93

III.2. Выполните задания в LearningApps.org:
1. Определение функции – https://learningapps.org/view585528.
2. Терминология «Дифференцирование функции» – https://learningapps.org/view1694321.
3. Упражнение игра «Дифференцирование функции» – https://learningapps.org/view3881204.
4. Производная логарифмической функции – https://learningapps.org/view1881615.
5. Кроссворд – https://learningapps.org/view2316894.
6. «Закончи предложение» – https://learningapps.org/view1991957.
7. «Истинно или ложно высказывание?» – https://learningapps.org/view7627183.
8. Заполнение пропусков в тексте – https://learningapps.org/view449499.
9. Вычисление производной – https://learningapps.org/view2901899.
10. Вычисление производной – https://learningapps.org/watch?v=p671ij63k18.
11. Вычисление производной – https://learningapps.org/display?v=pr3mxywkj19.
12. Вычисление производной – https://learningapps.org/display?v=pce3tem5519.

13. Производная и первообразная – https://learningapps.org/view409395.
14. Производная и многочлены – https://learningapps.org/7672135.

III.3. Разработайте в LearningApps.org одно задание по теме занятия.

IV. Рефлексия.

Какое из афористичных высказываний более всего выражает Ваше отношение к содержанию занятия?

- Не испытав, не узнаешь.
- Испытай на себе, да прикинь другому.
- Легко сказать – нелегко доказать.
- Была бы охота, а выучиться можно.
- Дорога помощь вовремя.
- Услуга за услугу – помочь хотим друг другу.
- В мире нет трудных дел – нужны лишь усердные люди.
- Он за что ни возьмется, ему все удается; а я, за что ни возьмусь, на всем оборвусь.
- У всякого свое умение.
- Не тужи: перемелется – все мука будет.

«Понятия производной и интеграла давно стучатся в двери общеобразовательной школы; как бы ни относиться к вопросу об их фактическом включении в школьные программы, сколько-нибудь удовлетворительное завершённое изложение элементарных основ математической науки без этих основных понятий следует признать немыслимым при современном состоянии науки».

(Из предисловия книги Энциклопедия элементарной математики / Акад. пед. наук РСФСР ; под ред. П. С. Александрова, А. И. Маркушевича и А. Я. Хинчина. – Кн. 3 : Функции и пределы. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1952. – 559 с.).

Занятие 2
Применение производной к исследованию функции

I. Теоретический материал (повторение).

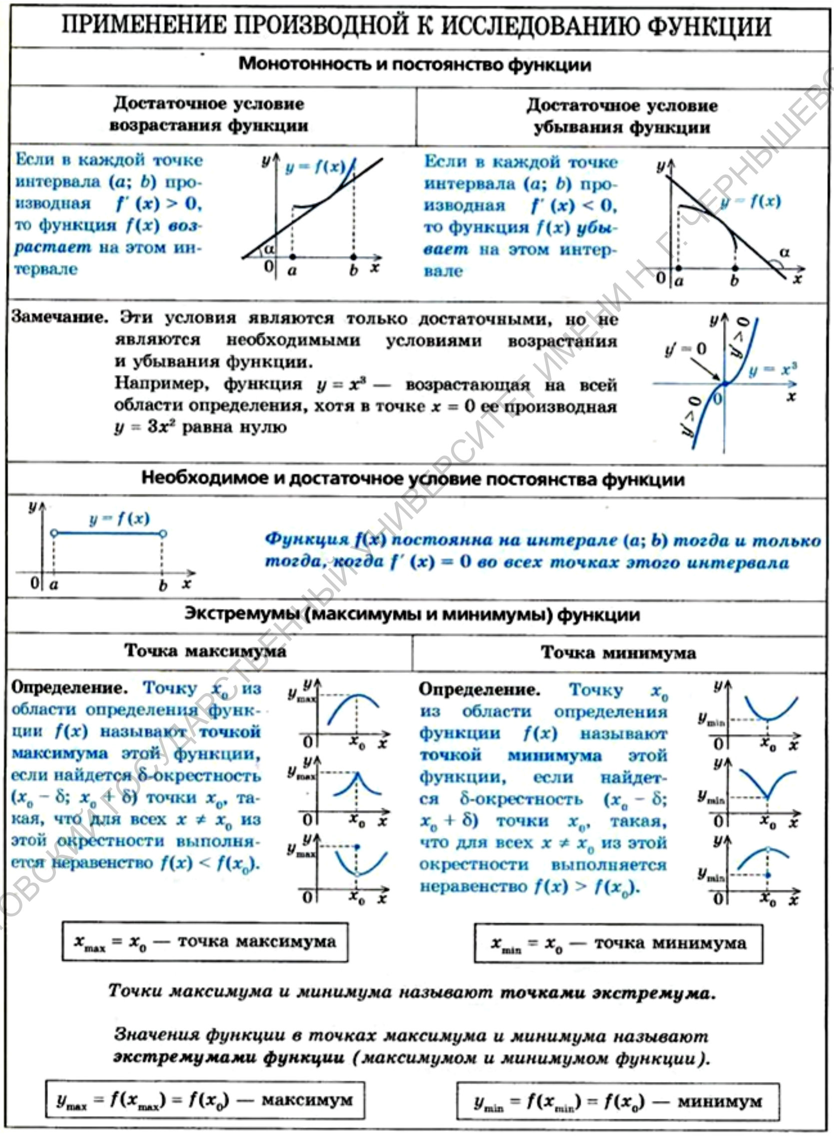
Очень часто знание свойств элементарных функций позволяет решить заданное уравнение / неравенство методами элементарной математики.

<table>
<tr><th>Свойство функции</th><th>Применение к решению уравнения / неравенства</th></tr>
<tr><td colspan="2">Функция f – это закон или правило, согласно которому каждому элементу x из множества X ставится в соответствие единственный элемент y из множества Y. При этом говорят, что функция f задана на множестве X, или что f отображает X в Y. Если элементу $x \in X$ сопоставлен элемент $y \in Y$, то говорят, что элемент y находится в функциональной зависимости f от элемента x. При этом переменная f хназывается аргументом (независимой переменной) функции f, множество X называется областью определения функции, а элемент y, соответствующий конкретному элементу x – частным значением функции f в точке x. Множество Y всех возможных частных значений функции f называется её областью значений.</td></tr>
<tr><td>Область определения – множество всех значений аргумента (переменной), для которых функция определена, то есть существует и имеет действительные значения.</td><td>Решим уравнение
$$\sqrt{3-x} = log_5(x-3).$$
Область допустимых значений (ОДЗ) уравнения состоит из пересечения областей определения функций $f(x) = \sqrt{3-x}$ и $g(x) = log_5(x-3)$, то есть удовлетворяет системе $3-x \geq 0,\ x-3>0$, которая не имеет решений. Итак, ОДЗ уравнения – $\varnothing$, следовательно, оно не имеет корней.</td></tr>
</table>

Функция $f(x)$ называется *ограниченной сверху*, если для некоторого числа М: $f(x) \le M$; наименьшее из М считается верхней гранью. Функция $f(x)$ называется *ограниченной снизу*, если для некоторого числа m: $f(x) \ge m$; наибольшее из m считается нижней гранью. Функция $f(x)$ называется *ограниченной*, если для существуют числа m и М: $m \le f(x) \le M$, где m и М – нижняя и верхняя грани.	Решим уравнение $\sin(x^3+2x^2+1) = x^2+2x+3.$ Рассмотрим функции $f(x) = \sin(x^3+2x^2+1)$ и $g(x) = x^2+2x+3.$ Наше уравнение можно представить как равенство этих функций: $f(x) = g(x)$. (*) $f(x)$ ограничена: $-1 \le f(x) \le 1$ $g(x)$ ограничена снизу: $\underline{g(x)} = x^2+2x+3 = (x^2+2x+1) + 2 = (x+1)^2 + 2 \underline{\ge 2.}$ Из равенства (*) следует, что $f(x) \le 1$ и $f(x) \ge 2$, что является противоречием, следовательно, уравнение не имеет корней.
Функция $f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке М, если $\forall x_1, x_2 \in M$: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ Функция $f(x)$ называется *строго возрастающей* на промежутке М, если $\forall x_1, x_2 \in M$: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ Функция $f(x)$ называется *убывающей* на промежутке М, если $\forall x_1, x_2 \in M$: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ Функция $f(x)$ называется *строго убывающей* на промежутке М, если $\forall x_1, x_2 \in M$: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ Возрастающая и убывающая функции называются монотонными (меняющимися в одном и том же направлении). Строго возрастающая или строго убывающая функция называется строго монотонными.	Решение уравнений и неравенств с использование свойства монотонности основывается на следующих утверждениях: (1) Пусть $f(x)$ – непрерывная и строго монотонная функция на промежутке М, тогда уравнение $f(x) = C$, где С – данная константа, может иметь не более одного корня на М. (2) Пусть $f(x)$ – непрерывна и строго возрастает на М, а $g(x)$ непрерывна и строго убывает на М, тогда уравнение $f(x) = g(x)$ может иметь не более одного корня на промежутке М. Решим уравнение $x \cdot 2^{x^2+2x+3} = 64.$ Рассмотрим функции $f(x) = x$ и $g(x) = 2^{x^2+2x+3}$. $g(x)$ – непрерывна, строго возрастает на $(-\infty; +\infty)$ и ограничена снизу нулём, то есть принимает только положительные значения. $f(x)$ – непрерывна, строго возрастает на $(-\infty; +\infty)$ и тоже должна принимать только положительные значения (поскольку в правой части исходного равенства стоит положительное число 64, представленное произведением двух множителей, одно из которых – $g(x)$ – тоже положительно): $f(x) > 0$, отсюда $x > 0$. Итак, $f(x) \cdot g(x)$ – непрерывная и строго монотонная функция на промежутке $(0; +\infty)$, тогда исходное уравнение может иметь не более одного корня на этом промежутке. Путь $x = 1$, тогда выполняется равенство: $1 \cdot 2^6 = 64$, следовательно, $x = 1$ – корень данного уравнения.

II. Теоретический материал (актуализация знаний).

Достаточный признак возрастания функции. Достаточный признак убывания функции. Необходимое и достаточное условие постоянства функции. Признак максимума функции. Признак минимума функции. Исследование функции на монотонность и экстремумы. Наибольшее и наименьшее значение функции, непрерывность на отрезке.



ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ

Монотонность и постоянство функции

Достаточное условие возрастания функции	Достаточное условие убывания функции
Если в каждой точке интервала $(a;\ b)$ производная $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ *возрастает* на этом интервале	Если в каждой точке интервала $(a;\ b)$ производная $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ *убывает* на этом интервале

Замечание. Эти условия являются только достаточными, но не являются необходимыми условиями возрастания и убывания функции.
Например, функция $y = x^3$ — возрастающая на всей области определения, хотя в точке $x = 0$ ее производная $y = 3x^2$ равна нулю

Необходимое и достаточное условие постоянства функции

Функция $f(x)$ постоянна на интерале $(a;\ b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ во всех точках этого интервала

Экстремумы (максимумы и минимумы) функции

Точка максимума	Точка минимума
Определение. Точку x_0 из области определения функции $f(x)$ называют точкой максимума этой функции, если найдется δ-окрестность $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ точки x_0, такая, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.	**Определение.** Точку x_0 из области определения функции $f(x)$ называют точкой минимума этой функции, если найдется δ-окрестность $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ точки x_0, такая, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.
$\boxed{x_{max} = x_0 \text{ — точка максимума}}$	$\boxed{x_{min} = x_0 \text{ — точка минимума}}$

*Точки максимума и минимума называют **точками экстремума**.*

*Значения функции в точках максимума и минимума называют **экстремумами функции** (максимумом и минимумом функции).*

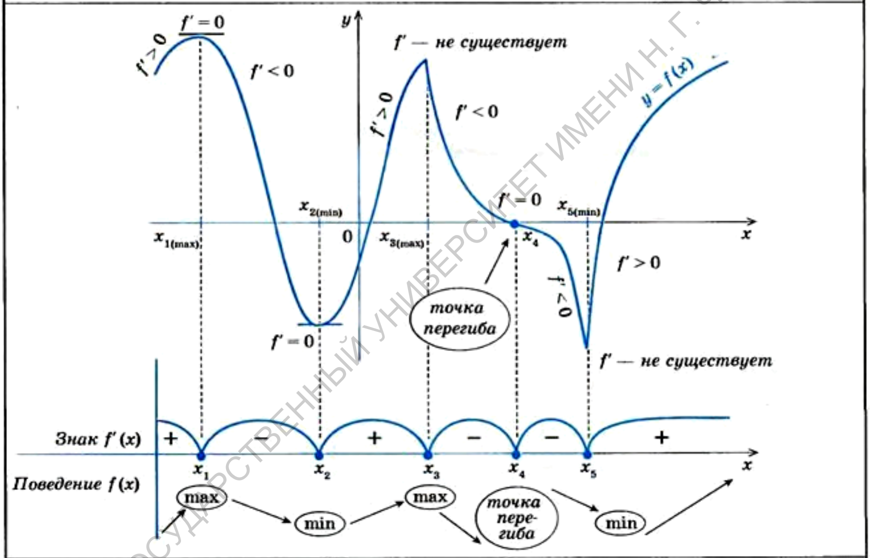
$\boxed{y_{max} = f(x_{max}) = f(x_0) \text{ — максимум}}$ $\boxed{y_{min} = f(x_{min}) = f(x_0) \text{ — минимум}}$

Критические точки

Определение. Внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю или не существует, называют ***критическими***

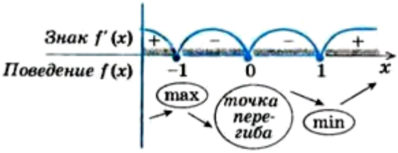
Необходимое условие экстремума	Достаточное условие экстремума
В точках экстремума производная функции $y = f(x)$ равна нулю или не существует.	Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и производная $f'(x)$ меняет знак в точке x_0, то x_0 — точка экстремума функции $f(x)$.
x_0 — точка екстремума $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ — не существует	В точке x_0 знак $f'(x)$ меняется с «+» на «−» $\Rightarrow$ x_0 — точка максимума
(но не в каждой точке x_0, где $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует, будет экстремум!)	В точке x_0 знак $f'(x)$ меняется с «−» на «+» $\Rightarrow$ x_0 — точка минимума

Пример графика функции $y = f(x)$, имеющей экстремумы (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — критические точки)



Исследование функции $y = f(x)$ на монотонность и экстремумы

Схема	Пример. $y = f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$
1. Найти область определения и интервалы, на которых функция непрерывна	Область определения: $x \in R$. Функция непрерывна в каждой точке своей области определения
2. Найти производную $f'(x)$	$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 15x^2(x - 1)(x + 1)$
3. Найти критические точки, т. е. внутренние точки области определения, в которых $f'(x) = 0$ или не существует	$f'(x)$ существует на всей области определения $f'(x) = 0$ при $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$

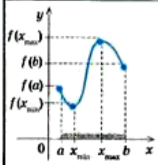
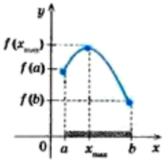
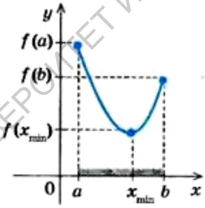
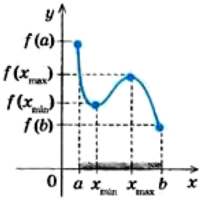
4. Отметить критические точки на области определения; найти знак производной и характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения	
5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума или минимума или не является точкой экстремума	
6. Записать результат исследования (промежутки монотонности и экстремумы)	$f(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; -1)$ и при $x \in (1; +\infty)$
	$f(x)$ убывает при $x \in (-1; 1)$
	Точки экстремума: $x_{max} = -1$; $x_{min} = 1$. Экстремумы: $y_{max} = f(-1) = 3$; $y_{min} = f(1) = -1$

Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке

Свойство

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке и имеет на нем конечное число критических точек, то она принимает свои наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке или в критических точках, принадлежащих этому отрезку, или на концах отрезка

Примеры

			
$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_{max})$ $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_{min})$	$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_{max})$ $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$	$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_{min})$	$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке

Схема	**Пример** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 22$ при $x \in [1; 3]$
1. Найти производную $f'(x)$	$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$
2. Найти критические точки ($f'(x) = 0$ или не существует)	$f'(x) = 0$ $(3x^2 + 6x - 24 = 0)$ при $x = -4$ и при $x = 2$
3. Выбрать критические точки, принадлежащие данному отрезку	Данному отрезку [1; 3] принадлежит только критическая точка $x = 2$
4. Вычислить значение функции в критических точках и на концах отрезку	$f(1) = 2$, $f(2) = -6$, $f(3) = 4$
5. Сравнить полученные значения и выбрать из них наименьшее и наибольшее	$\max\limits_{[1;3]} f(x) = f(3) = 4$, $\min\limits_{[1;3]} f(x) = f(2) = -6$

II. Задания для самостоятельного решения.

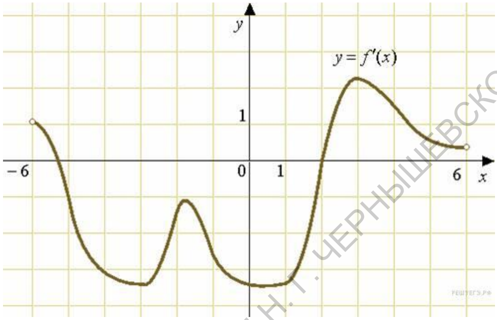
Задание 1. Серия задач «Применение производной к исследованию функций»

Выполните задания с сайта «СДАМ ГИА: РЕШУ ЕГЭ – Образовательный портал для подготовки к экзаменам: Математика профильного уровня».

1.1. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6;6)$.

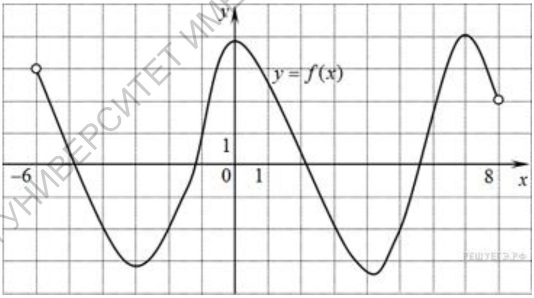
Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$.

В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



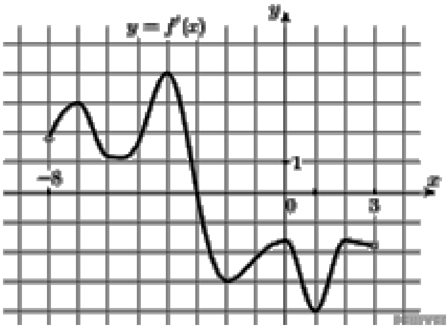
1.2. На рисунке изображен график функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6;8)$.

Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



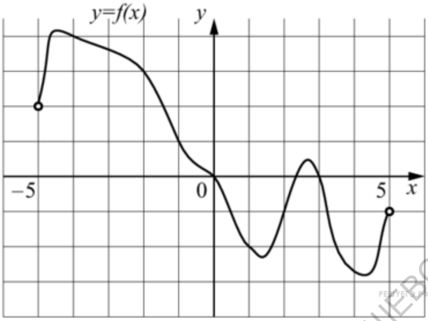
1.3. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;3)$.

В какой точке отрезка $[-3;2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



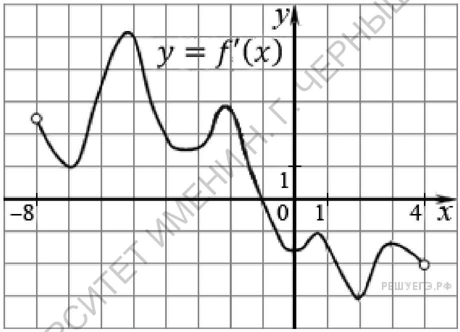
1.4. На рисунке изображен график функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5;5)$.

Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.



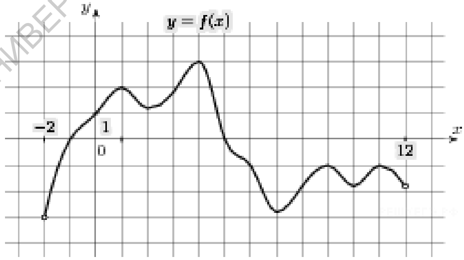
1.5. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;4)$.

В какой точке отрезка $[-7;-3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



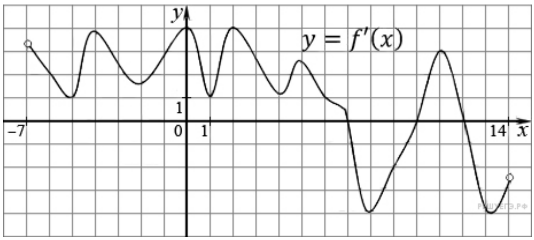
1.6. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-2;12)$.

Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



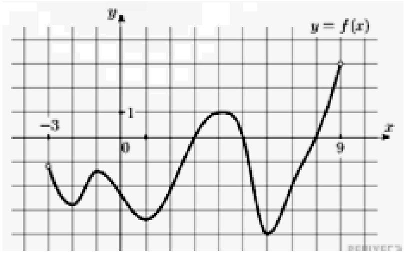
1.7. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7;14)$.

Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, на отрезке $[-6;9]$.



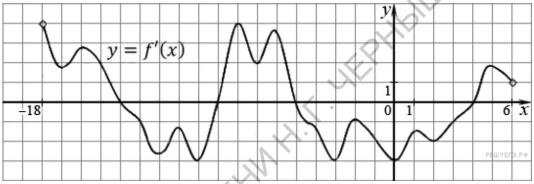
1.8. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3;9)$.

Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю.



1.9. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-18;6)$.

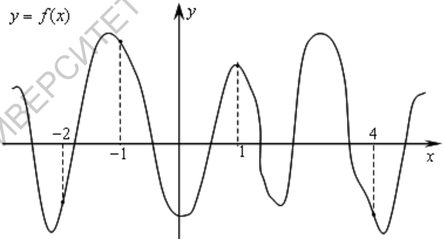
Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-13;1]$.



1.10. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-2, -1, 1, 4$.

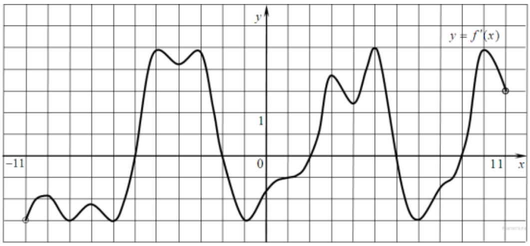
В какой из этих точек значение производной наименьшее?

В ответе укажите эту точку.



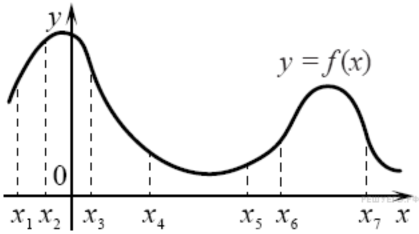
1.11. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11;11)$.

Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-10;10]$.



1.12. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_7$.

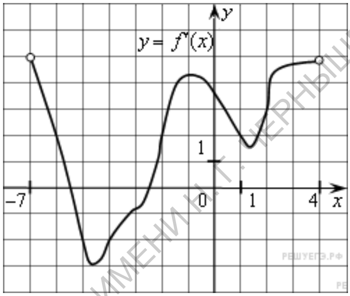
В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



1.13. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7;4)$.

Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$.

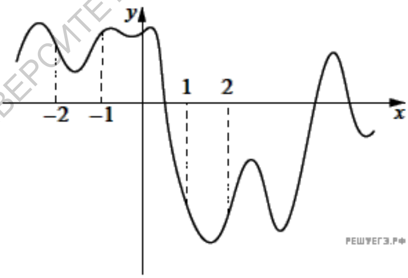
В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



1.14. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.

На оси абсцисс отмечены точки −2, −1, 1, 2.

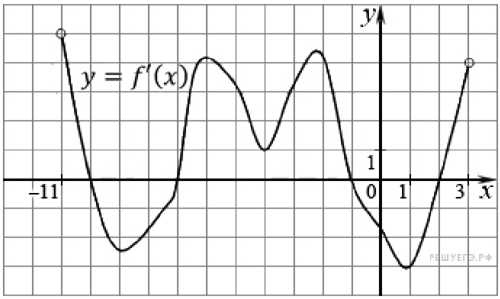
В какой из этих точек значение производной наибольшее?



1.15. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-11;3)$.

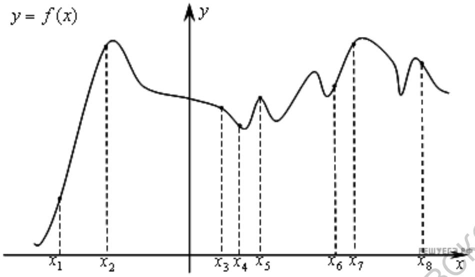
Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$.

В ответе укажите длину наибольшего из них.



1.16. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$.

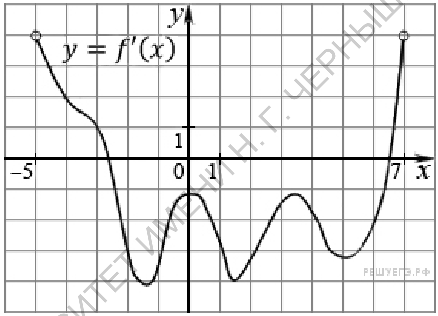
В скольких из этих точек производная функции положительна? Укажите эти точки.



1.17. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5;7)$.

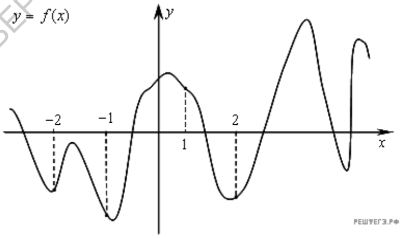
Найдите промежутки убывания функции $f(x)$.

В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



1.18. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, и отмечены точки −2, −1, 1, 2.

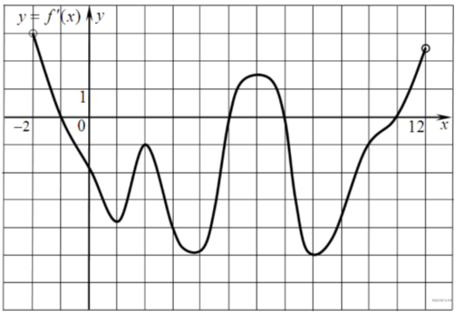
В скольких из этих точек производная функции отрицательна?



1.19. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2;12)$.

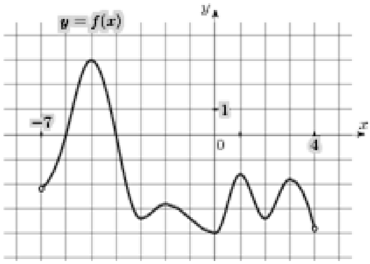
Найдите промежутки убывания функции $f(x)$.

В ответе укажите длину наибольшего из них.



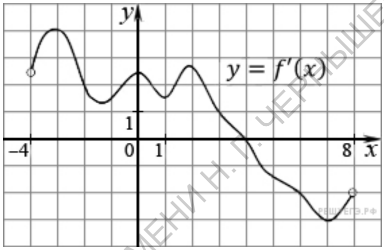
1.20. На рисунке изображен график функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7;4)$.

Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



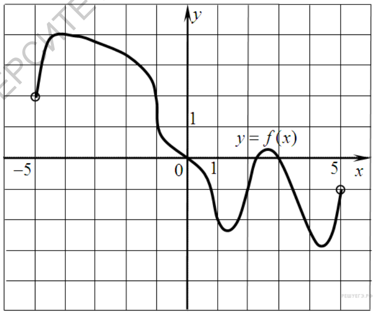
1.21. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4;8)$.

Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-2;6]$.



1.22. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5;5)$.

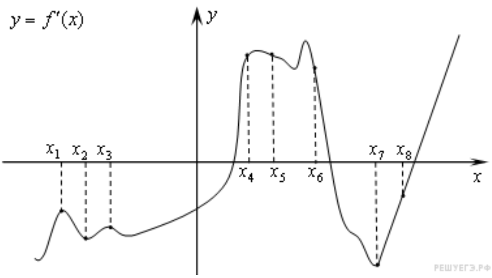
Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней.



1.23. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$.

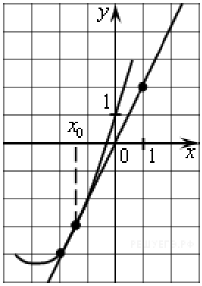
На оси абсцисс отмечены восемь точек: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_8$.

Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?

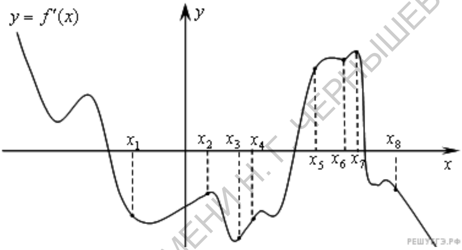


1.24. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0.

Найдите значение производной функции в точке x_0.



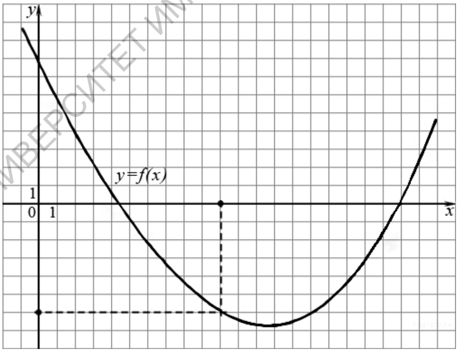
1.25. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?



1.26. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$.

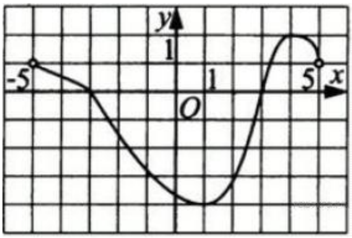
Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 10.

Найдите $f'(10)$.



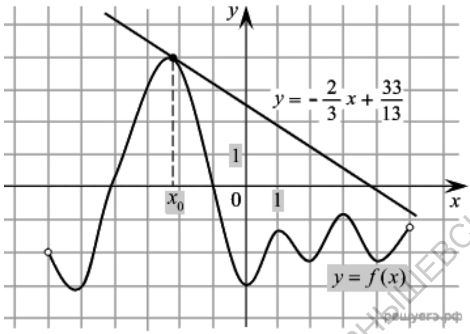
1.27. Функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[-5;5]$. На рисунке изображён график её производной.

Найдите точку x_0, в которой функция принимает наименьшее значение, если $f(-5) \geq f(5)$.



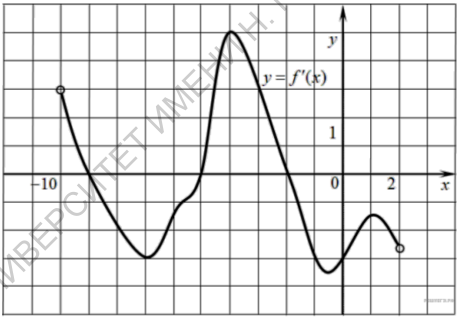
1.28. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0.

Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $g(x) = 12f(x) + \frac{6}{13}$ в точке x_0.



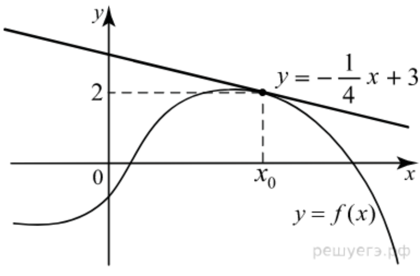
1.29. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10;2)$.

Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней.



1.30. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Уравнение касательной показано на рисунке.

Найдите значение функции $g(x) = f'(x) - f(x) + 3$ в точке x_0.



Одна из возможных форм самостоятельного решения задач – работа в парах с последующей взаимопроверкой, демонстрацией решения и чтением графиков (общий вопрос: «Что ещё по данному графику можно сказать о производной или первообразной функциях?»)

III. Упражнения для самостоятельного выполнения во внеаудиторное время и для демонстрационного выполнения на занятии.

Выполните задания в LearningApps.org:

1. Функция и соответствующий ей график производной – https://learningapps.org/view5780331.
2. Монотонность функции – https://learningapps.org/view6098037.
3. Асимптоты графика функции – https://learningapps.org/view7111181.
4. Исследование графиков функции с помощью производной – https://learningapps.org/view4667066.
5. Геометрический смысл производной – https://learningapps.org/view5226436.
6. Ребус «В раздумьях» – https://learningapps.org/view5147094.
7. Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции – https://learningapps.org/view7494625.
8. Связь между производной функции и графиком – https://learningapps.org/view1463625.
9. Функции и их графики – https://learningapps.org/view447363.
10. Экстремумы функции – https://learningapps.org/view2853634.
11. Расположение графиков линейной функции – https://learningapps.org/view1445594.
12. Возрастающая и убывающая показательная функция – https://learningapps.org/view1138065.
13. Возрастание (убывание) функций – https://learningapps.org/view666213.
14. Значения тригонометрических функций – https://learningapps.org/view2894926.

IV. Рефлексия.

Опишите содержание занятия или Ваше отношение к нему тремя словами (существительным, прилагательным и глаголом).

Первое условие, которое надлежит выполнять в математике, – это быть точным, второе – быть ясным и, насколько можно, простым.

Г. Лейбниц

Занятие 3
Применение производной к решению уравнений и доказательству тождеств

I. Теоретический материал (актуализация знаний).

Функциональный метод решения уравнений на основе исследования свойств функции с помощью производной.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{5x}{\sqrt{x^2+9}}+5x=24$.

Решение: Запишем уравнение в виде $\frac{5x}{\sqrt{x^2+9}}+5x-24=0$.

Пусть $f(x)=\frac{5x}{\sqrt{x^2+9}}+5x-24$, тогда область определения функции $D(f(x))=R$.

Найдем производную функции $f(x)$.

$$f'(x)=\left(\frac{5x}{\sqrt{x^2+9}}\right)'+5=\frac{5\sqrt{x^2+9}-\frac{5x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9}+5=\frac{5(x^2+9)-5x^2}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}+5=$$

$=\frac{45}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}+5>0$. Следовательно, функция возрастает на всей области определения. Значит, исходное уравнение имеет не более одного корня.

Подставив в уравнение $\frac{5x}{\sqrt{x^2+9}}+5x=24$ значение $x=4$, получим верное равенство.

Получается, что $x=4$ – единственный корень данного уравнения.

Есть два альтернативных метода решения данного уравнения.

Альтернативное решение-1
возведение в квадрат

$$\frac{5x}{\sqrt{x^2+9}}+5x=24$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{24}{5x}-1$$

$$\frac{1}{x^2+9}=\frac{576}{25x^2}+1-\frac{48}{5x};\quad 24\ge 5x\ge 0$$

$$\frac{1}{x^2+9}=\frac{576+25x^2-240x}{25x^2};\quad 4{,}8\ge x\ge 0$$

$$25x^2=\left(576+25x^2-240x\right)\left(x^2+9\right)$$

$$25x^4-240x^3+776x^2-2160x+5184=0$$

$1584=2^6\cdot 3^4;\ 25=5^2\Rightarrow$ придётся проверять значительное количество рациональных чисел, используя схему Горнера для определения значения x:

Делители свободного члена	25	-240	776	-2160	5184
4	25	-140	216	-1296	0

Определив, что $x = 4$ придётся решать кубическое уравнение на множестве $[0;\ 4{,}8]$ или доказывать, что оно не имеет действительного решения на этом множестве.

Альтернативное решение-2
анализ + искусственный метод с заменой

$$\frac{5x}{\sqrt{x^2+9}}+5x=24$$

Очевидно, что уравнение будет иметь только положительные корни.

Заменив $y=\sqrt{x^2+9},\ y\ne 0$, получим $\frac{5x}{y}+5x=24$,

а с учётом того, что $y\ne 0$: $5x(1+y)=24y$

Для поиска натуральных корней используем свойства делимости, откуда получим: x – чётное, y – кратно 5.

Пусть $y = 5$, тогда $25=x^2+9$ и, следовательно, $x = 4$.

Определив, что $x = 4$ придётся доказывать, что оно единственное действительное решение уравнения, используя свойства монотонности:

функция, стоящая в левой части уравнения монотонно возрастает на множестве положительных чисел, так все составляющие её функции возрастают на этом множестве; из возрастания функции следует единственность найденного решения.

Пример 2. Решить уравнение $3^x + 4^x = 7^x$.

Решение: Уравнение, очевидно, имеет корень $x = 1$. Покажем, что других корней оно не имеет. Действительно, разделим данное уравнение на 7^x и найдем производную функции $f(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x - 1.$

Имеем: $f'(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x ln\frac{3}{7} + \left(\frac{4}{7}\right)^x ln\frac{4}{7} < 0,$ следовательно, $f(x)$ монотонно убывает, поэтому $x = 1$ – единственный корень уравнения.

Пример 3. Доказать тождество

$$(a+b+c)^2 + (-a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 + (a+b-c)^2 = 4(a^2+b^2+c^2).$$

Доказательство.

Используем критерий постоянства дифференцируемой функции: «производная константы равна нулю»; – которое преобразуем в алгоритм: если на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ определена и дифференцируема, причём $f'(x) = 0$, то $f(x) = const.$ на $(a;b)$.

Составим функцию

$$f(a,b,c) = (a+b+c)^2 + (-a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 + (a+b-c)^2 - 4(a^2+b^2+c^2).$$

Заметим, что $f(a,b,c)$ – симметрический многочлен, поэтому функцию $f(a,b,c)$ можно рассматривать как функцию от одной переменной, например, $f(a)$. Эта функция определена на всём множестве действительных чисел и везде на этом множестве имеет конечную производную:

$$f'(a) = 2(a+b+c) - 2(-a+b+c) + 2(a-b+c) + 2(a+b-c) - 8a = 0.$$

Значит,

$$(a+b+c)^2 + (-a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 + (a+b-c)^2 - 4(a^2+b^2+c^2) = C.$$

Найдём значение C, например для $a = 0$.

$$C = (b+c)^2 + (b+c)^2 + (-b+c)^2 + (b-c)^2 - 4(b^2+c^2) = 0.$$

Итак,

$$(a+b+c)^2 + (-a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 + (a+b-c)^2 - 4(a^2+b^2+c^2) = 0,$$

что равносильно исходному равенству:

$$(a+b+c)^2 + (-a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 + (a+b-c)^2 = 4(a^2+b^2+c^2).$$

Задание 1. «Взгляд назад».

На втором курсе мы применяли свойства элементарных функций к решению уравнений и неравенств без обращения к производным функциям. Вот задачи, которые были предложены для освоения функционального метода (сохранена нумерация, принятая в пособии: *Лебедева, С. В. Элементарная математика: алгебра : учебно-методическое пособие / С. В. Лебедева – Саратов, 2018. – 72 с.*). Какие из предложенных задач можно решить с применением производной? Решите эти задачи или объясните, почему в некоторых случаях нецелесообразно применять аппарат дифференциального исчисления.

Задачи I уровня (по 0,1 балла). Решите уравнения, используя функциональный подход.

231. $\sqrt{|\sin x|} = \sqrt[4]{-|\sin x|} + tg\,x$

232. $x^3 - x = \sin \pi x$

233. $\sqrt[4]{18-x} - \sqrt[8]{x-2} = 2$

234. $x^2 + 2x + 3 = \sqrt{4-x^2}$

235. $x \cdot 2^x = 8$

236. $|x-3| + |x^2-3| = 0$

237. $x^8 + 1 = \cos x$

238. $\log_2 x = 3 - x$

239. $x^x = 27$

240. $\sqrt{7+x} - \sqrt{11-x} = 6$

II. Задания для самостоятельного решения.

После разбора примеров на применение функционального метода к решению уравнений и доказательству тождеств на основе исследования свойств функции с помощью производной выберите и самостоятельно выполните 10 из предложенных заданий (4 на доказательство того, что уравнение не имеет решений, и 6 на решение уравнений). Опишите ситуации, в которых не требуется вычисления производной.

Задание 2. Опровержение.

Требование А. Докажите, что следующие уравнения не имеют решений на множестве действительных чисел.

Требование Б. Докажите, что не существует действительного значения неизвестной, удовлетворяющего равенству

Требование В. Докажите, что равенства тождественно ложны на R.

2.1. $\sqrt{1-x} + \sqrt[4]{x-1} = 1$

2.2. $\sqrt{2-x} = \log_5(x-2)$

2.3. $|x-2| + |x^2-3| = 0$

2.4. $|x^4+1| + |x^2+4x-5| = 1$

2.5. $\sqrt{2x+5} + \sqrt[4]{x+2} = 0$

2.6. $\sqrt{4-x} - \sqrt{x-7} = 2$

2.7. $\sqrt[3]{x+\dfrac{1}{x}} = \sqrt[4]{-x} - 1$

2.8. $2^{x^2+1} = 1 - x^8$

2.9. $\sqrt[4]{x+2}-\sqrt[4]{x+3}=2$

2.10. $\sin x = x^2+x+1$

2.11. $\log_3 x = 1+\dfrac{-3}{2x-1}$

2.12. $\sqrt{10+3\sqrt{x^2-1}}+x^4\sqrt{5-x}=3$

2.13. $\sqrt{x}=-x^2+8x-15$

2.14. $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-4}=(x-1)^2(x-8)$

2.15. $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+2x+3\right)=1$

2.16. $2\log_3\left(x^2+4\right)=\log_2\left(1-(x+3)^2\right)$

2.17. $\log_5(x+1)+2\log_5(x-1)=\log_5\left(1-x^2\right)+1$

2.18. $\log_4\left(x^4+1+\dfrac{1}{x^4+1}\right)=\log_4\left(2-\sqrt{x+5}\right)$

2.19. $\sin^4 x-\sin^2 3x+\sin x=3$

2.20. $\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\sin 4x=2$

2.21. $\cos(\sin x)=\dfrac{1}{2}$

2.22. $\sin^2 x+\sin^2\sqrt{2}x+(1+x)^2=0$

2.23. $(x+8)(4-x)\left(\sqrt{x-8}+2\right)=1$

2.24. $(x-6)(1-x)^2=\sqrt{x-2}+\sqrt[4]{5-x}$

2.25. $\sqrt{9-x^2}-\log_3(|x|-3)=0$

2.26. $\sqrt{x^2-x-2}=\log_2\left(1-x^4\right)$

2.27. $x^3\left(\log_2 x-2^x\right)+\log_2^3 x\left(2^x-x\right)+8^x\left(x-\log_2 x\right)=0$

<u>Задание 3. Решите уравнения.</u>

3.1. $12^x+5^x=13^x$

3.2. $2^{|x|(x-2\pi)^2}=|\cos x|$

3.3. $\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}=3x(1-\ln x)$

3.4. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=x+4$

3.5. $\log_5(x+1)=x$

3.6. $\log_\pi \cos^2 x=x^4$

3.7. $(x-3)^3+6=\sqrt[3]{x-9}$

3.8. $\log_3\left(x^3+1\right)=2x^2-3x$

3.9. $\sin\dfrac{\pi x}{2\sqrt{3}}=x^2-2\sqrt{3}x+4$

3.10. $4\sin\pi x=4x^2-4x+5$

3.11. $\dfrac{x^2}{x^4+25}=-\dfrac{9}{10}+2^{\left(x-\sqrt{5}\right)^2}$

3.12. $|x-1|+|x-3|=2-\left(x-\dfrac{\pi^2}{4}\right)^4$

3.13. $2^{-|x|}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(|1+x|+|x-1|\right)$

3.14. $4|x|+\dfrac{9x^2}{|x|}-|\sin x|=12x-1$

3.15. $2\cos^{11}4x-\sin^{13}9x=3$

3.16. $\cos 4x\cdot\sin x=1$

3.17. $\cos^5 x+\sin^5 x=1$

3.18. $\left(3-2\sqrt{2}\right)^x+\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=6^x$

3.19. $\sin^4 x-\cos^4 x=-1-x^4$

3.20. $\left(\cos 4x-\cos 2x\right)^2=\sin 3x+5$

3.21. $\sin^3 x-\sin^6 x=\frac{1}{4}\left(1+\sin^{10} x\right)$

3.22. $\cos^2 9x+\frac{1}{4}\cos^2 x=\cos 3x\cdot\cos^4 x$

3.23. $x\log_2(x+1)=7+\log_{\frac{1}{3}} x$

3.24. $\sin^2 4x+\cos^2 x=2\sin 4x\cdot\cos^4 x$

3.25. $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x$

3.26. $3^x-1-\left|3^x-1\right|=2\log_6\left|6-x\right|$

3.27. $x\sqrt{-x^2+x}=\sqrt{x-x^2}\cdot\sin\left(\pi\cdot\frac{x+1}{3}\right)\cdot\sin\left(\pi\cdot\frac{1-x}{3}\right)$

3.28. $2\cos^2\frac{x^2+x}{6}=\log_5(5+x)+\frac{1}{\log_5(5+x)}$

3.29. $\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\left(x^2-2x-2\right)=\log_{2+\sqrt{3}}\left(x^2-2x-3\right)$

3.30. $2^{-|x-2|}\cdot\log_2\left(4x-x^2-2\right)=1$

Проверьте, по возможности, решение построением графиков в одном из интерактивных графикопостроителей.

Задание 4. Докажите тожества.

4.1. $\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$

4.2. $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

4.3. $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

4.4. $\frac{1}{2}\cos 2x+\sin^4 x=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\cos 4x$

4.5. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2 x=\frac{1}{4}$

4.6. $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}$

4.7. $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}+\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{4},\quad x\neq 1$

4.8. $\operatorname{arctg} x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

4.9. $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}=2, \quad a\in[1;2]$

4.10. $\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}}=\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}}, \quad x\in(5;10)$

При выполнении *заданий 2-4* целесообразно организовать групповую работу со сменой ролей: группы из трёх человек решает 9 заданий (по 3 из каждого блока):

1-ый – выбирает задание,

2-ой – записывает решение,

3-ий – демонстрирует решение одной из задач (по требованию преподавателя) у доски.

При переходе к другому блоку роли меняются. Оценивается работа группы в целом: количество решённых заданий, количество верно решённых заданий, количество и качество демонстрации решений.

Аналогично организуется деятельность студентов на *занятии 7*.

IV. Рефлексия – эссе.

Выскажите своё мнение относительно эпиграфа к занятию: как Вы понимаете высказывание Готфрида Лейбница? почему именно это высказывание послужило эпиграфом к занятию?

Какой бы эпиграф выбрали Вы?

С отрывками из математических сочинений Лейбница Вы можете ознакомиться на Общероссийском математическом портале Math-Net.Ru: *Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница (перевод и редакция А. П. Юшкевича), УМН, 1948, том 3, выпуск 1(23), 165–204.* – http://www.mathnet.ru/links/7ab6de874ef5252c224eb9022c4b650f/rm8687.pdf.

Постановка «я могу» приводит к положительному результату, постановка «я не могу» не приводит ни к какому результату.

Жан-Поль Сартр

Занятие 4
Численные методы решения уравнений

I. Изучение нового материала (самостоятельно).

Иногда при решении уравнений нас интересует значение какого-нибудь одного корня (например, если уравнение – алгебраическая модель некоторой текстовой задачи, имеющей единственное решение на множестве рациональных положительных чисел), а иногда надо вычислить значения всех действительных корней данного уравнения. В любом случае полезно уметь быстро определять тот, по возможности узкий интервал, вне которого не могут лежать корни данного уравнения, а также определять интервал, внутри которого лежал бы только один корень данного уравнения, то есть решать *задачу отделения корней.*

Вам надлежит разбиться на пары или же работать в одиночку и самостоятельно изучить третий раздел книги, а затем объяснить материал однокурсникам:

Энциклопедия элементарной математики. Книга 2. Алгебра / Акад. пед. наук РСФСР ; Под ред. П. С. Александрова [и др.]. – М.-Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит. 1951. – 424 с.

Этот раздел представляет весьма полную сводку важнейших методов численного и графического решения алгебраических и трансцендентных уравнений.

Издание «Энциклопедии элементарной математики» задумано Академией педагогических наук РСФСР как пособие для учителей математики средней школы и студентов физико-математических факультетов педагогических и учительских институтов. Его назначение – дать систематическое изложение научных основ школьного предмета математики. Логика издания – это логика систематического, по возможности простого и доступного изложения тех вопросов математической науки, из которых строится школьный курс, а также и тех, которые, хотя и не находят в этом курсе прямого выражения, однако необходимы для правильного и сознательного его понимания и создают перспективы для дальнейшего развития содержания и методов школьного курса.

Группа 1. Определение действительных корней многочленов – С. 318-324.

Группа 2. Отделение корней многочленов – С. 324-331.

Группа 3 (1 человек). Вычисление действительного корня способом Горнера – С. 332-336.

Группа 4. Вычисление действительного корня способом Лагранжа – С. 336-343.

Группа 5. Способ Лобачевского решения алгебраических уравнений – С. 343-350.

Группа 6. Способ линейного интерполирования и способ Ньютона решения трансцендентных уравнений – С. 357-363.

Группа 7 (1 человек). Обобщение способа Ньютона решения трансцендентных уравнений – С. 363-367.

Группа 8 (1 человек). Способ итерации – С. 367-372.

II. Решение задач (с комментарием) – формирование операциональных знаний численных методов решения алгебраических уравнений.

Задание 1. Отделить по способу Штурма корни уравнений:

1.1. $x^3 + x - 24 = 0$ 1.2. $x^3 - 60x + 4 = 0$ 1.3. $x^4 - 6x^2 + 4 = 0$; – найдя для каждого корня интервал, длина которого не превышала бы единицы.

Задание 2. Найти границы действительных корней уравнений:

2.1. $x^7 + 2x^4 - 10x^3 + 20x - 40 = 0$

2.2. $x^5 + x^4 - x^3 - 4x^2 + 60 = 0$

2.3. $4x^5 - x^2 + 20x - 2 = 0$

Задание 3. Вычислить с точностью до 0,01 по способу Горнера и по способу Лагранжа положительные корни уравнений:

3.1. $x^3 - 28 = 0$ 3.2. $x^3 - 15x + 4 = 0$ 3.3. $x^4 + x - 19 = 0$; –

Задание 4. Отделить по способу Штурма и вычислить по способу Лагранжа и по способу Горнера с точностью до 0,01 корни уравнений:

4.1. $15x^3 - 65x^2 + 93x - 44 = 0$ 4.2. $3x^3 + 4x^2 - 9x - 12 = 0$

Задание 5. Используя идею способа Лагранжа, найти первые три неполных частных разложения в непрерывную дробь корня уравнения $10^x = 2$.

Задание 6. Решить по способу Лобачевского уравнения:

6.1. $x^7 + 2x^4 - 10x^3 + 20x - 40 = 0$ 6.2. $x^5 + x^4 - x^3 - 4x^2 + 60 = 0$

6.3. $4x^5 - x^2 + 20x - 2 = 0$ 6.4. $3x^3 - 32x^2 + 170x - 100 = 0$

6.5. $x^4 - 9x^3 + 44x^2 + 40x + 50 = 0$ 6.6. $3x^3 - 41x^2 + 113x - 11 = 0$

6.7. $x^4 - 13x^3 + 27x^2 - 28x + 6 = 0$ 6.8. $x^4 + x - 19 = 0$

Задание 7. Вычислить по способу итерации с точностью до 0,001 иррациональный корень уравнения $x=\frac{2^x}{4}$, приняв $x \approx 0{,}5 = a$.

Задание 8. Вычислить по способу Ньютона с точностью до 0,001 корни уравнений, дополнив задачную конструкцию:

8.1. $x=\cos x$ 8.2. $x=2\sin x$ 8.3. _______ 8.4. ______ 8.5. _________;

– и определив исходные приближения табличным способом с точностью до 0,1.

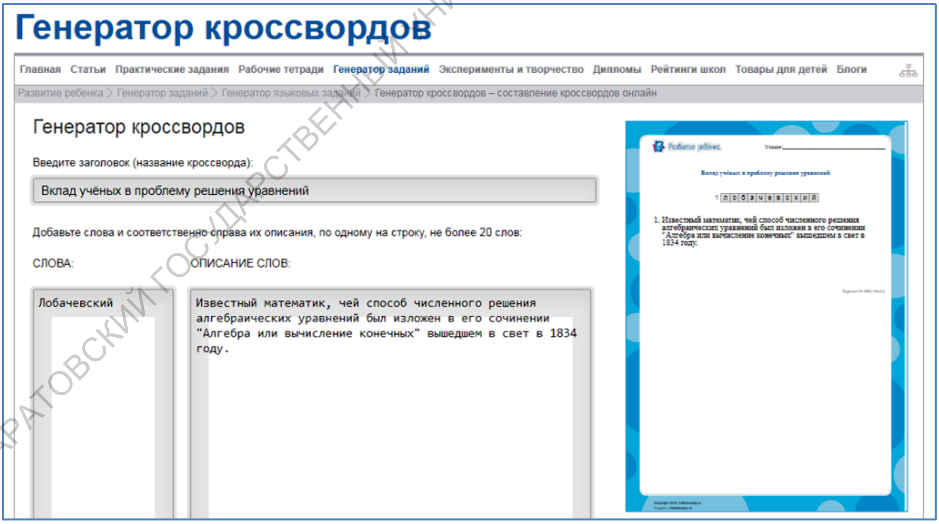
Задание 9. Вычислить с точностью до 10^{-8} положительные корни уравнений разложением в непрерывные дроби:

9.1. $x^3-4x-3=0$ 9.2. $3x^2+2x-5=0$ 9.3. $x^2-23=0$.

Задание 10. Придумать и решить два уравнения одним из изученных методов.

III. Рефлексия. Составляем кроссворд в генераторе https://childdevelop.ru/generator/letters/cross.html

Кратко охарактеризуйте вклад учёных в проблему решения уравнений, используя материал занятия, например, «*Известный математик, чей способ численного решения алгебраических уравнений был изложен в его сочинении "Алгебра или вычисление конечных" вышедшем в свет в 1834 году*» (Лобачевский).



Важность понятия производной состоит уже в том, что при ее использовании искусство исследования функции становится ремеслом.

(Иванов, О. А. Задачи по алгебре и началам анализа. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – С. 384.)

Занятие 5 – аукцион
Применение производной к решению уравнений

I . Аукцион.

Интеллектуальный аукцион – соревнование, в процессе которого по инициативе участников меняется «цена» вопроса, поэтому результаты зависят не только от знаний и умений её участников, но и от уровня их регулятивных умений. В процессе состязания между участниками за право решить задачу выявляется победитель аукциона.

Победителем аукциона признаётся участник, правильно решивший задачу, в противном случае – победа остаётся за аукционистом (организатором аукциона), а задача выставляется на следующий аукцион.

Задания для ознакомления и торгов (определения её цены) предъявляются не в виде «условие – требование», а иносказательным описанием.

1. Презентация лотов

2. Торги

Каждый выбирает себе задание для решения или демонстрации решения по иносказательному описанию этого задания.

Описание даётся на основании графика функции, составленной по данным условия задачи (переносом всех компонентов в левую часть уравнения). Так, например, уравнение $\sin \pi x = 3 + |\pi x|$, прячется за фотографией (презентация) и стихотворным описанием «Пик Леонарда Эйлера»:

«Ну, как же тебе рассказать, что такое гора?
Гора – это небо, покрытое камнем и снегом,
А в небе мороз неземной, неземная жара
И ветер такой, что нигде, кроме неба, и не был». (Памирская песня, Ю. Визбор)

Ведущий читает описание, и тот, кому оно понравилось, начинает торг за задачу. Например:

Ведущий: *начальная цена – 3 балла – за письменное решение задачи не более, чем за 5 минут*.

Покупатель: *за 5 баллов я решу задачу менее, чем за 5 минут и продемонстрирую её решение аудитории*.

Ведущий: *за 5 баллов нужно решить задачу за 3 минуты и в течение 2 минут продемонстрировать её решение аудитории*.

Покупатель: *за 4 балла я решу задачу менее, чем за 5 минут, и продемонстрирую её решение аудитории за дополнительное время*.

Ведущий: *принято – решай!*

3. Составление хаммер-прайсов

Хаммер-прайс – цена, достигнутая в результате торгов.

Каждый получает лист с выбранной задачей, на котором фиксируется желаемое число баллов, время, отведённое на её решение, и участие/неучастие в демонстрации решения.

Рефлексия.

Оцените Ваше участие в аукционе стихотворной фразой, отражающей степень удовлетворённости результатом

Пик Леонарда Эйлера

$$\sin \pi x = 3 + |\pi x|$$

Балл	Время	Демонстрация
4	*< 5 мин.*	+

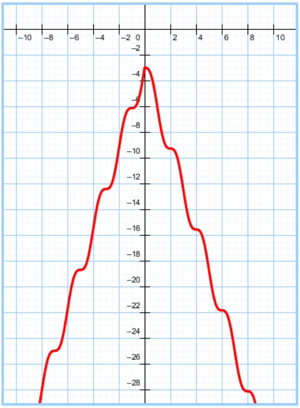
Ну, как же тебе рассказать, что такое гора?
Гора – это небо, покрытое камнем и снегом,
А в небе мороз неземной, неземная жара
И ветер такой, что нигде, кроме неба, и не был.

Юрий Визбор

4. Покупка лота – решение задачи.

Покупатель за отведённое время должен решить задачу и передать решение организаторам аукциона.

После того, как будут собраны все листки с решениями, участникам аукциона демонстрируются графики функций, составленных по данным условия задачи (переносом всех компонентов в левую часть уравнения) – презентация идёт в быстром темпе, и у участников есть несколько секунд для чтения каждого графика. Таким образом, осуществляется самопроверка.



Те задачи, ответы которых верны, демонстрируются на доске (если это входило в цену задачи). Оценивается полнота, правильность решения, выбранный подход.

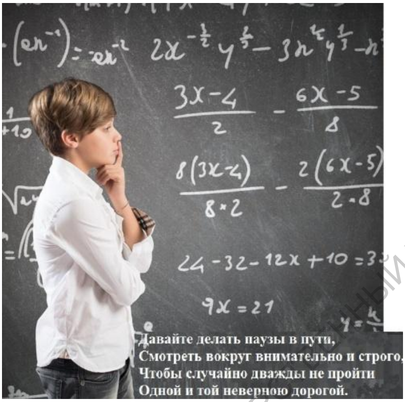
При выполнении всех условий, лот считается купленным (участник получает свои баллы).

5. Подведение итогов.

При невыполнении всех условий, покупка лота считается отсроченной (участник получает 1 балл за участие):

– участник не уложился в отведённое время – после аукциона он имеет возможность закончить решение задачи и получить, в общей сложности, лот за первоначальную цену;

– участник допустил ошибку в решении – он имеет возможность выкупить лот за первоначальную цену, решив столько дополнительных задач, включая данную, сколько первоначально стоил его лот (внеаудиторная самостоятельная проверочная работа);



– неудачная демонстрация – участник выкупает лот за первоначальную цену.

II. Рефлексия.

Оцените Ваше участие в аукционе стихотворной фразой, отражающей степень удовлетворённости результатом.

Per aspera ad astra // Через тернии к звездам.

Сенека

Занятие 6

Практические задачи на применение производной

I. Закрепление материала – математический бой.

Формирование:

операциональных знаний – применение производной при решении уравнений;

практических знаний – применение производной к решению задач реальной математики (практических задач).

Конкурс капитанов (примерные задания)

Закончите предложение.

А) Функция $y=f(x)$ убывает на отрезке $\left[-2\pi;-\frac{1}{3}\right]$, значит, она достигает своего наибольшего значения в точке х = …

Б) Функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $\left[-2\pi;-\frac{1}{3}\right]$, $f(-2\pi)=-1$, $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$, значит, на этом отрезке уравнение $f(x)=0$ …

В) Производная функции $y=f(x)$ дифференцируема на отрезке $\left[-2\pi;-\frac{1}{3}\right]$ и принимает следующие значения: $f'(-\pi)=-1$, $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$, $f'\left(-\frac{1}{3}\right)=1$, значит, в точке $x=-\frac{\pi}{2}$ функция $y=f(x)$…

Раунд 1. Решаем алгебраические уравнения

А1) $x^3+5=15-x$

А2) $x^5+3x^3+7x-11=0$

А3) $2x^5+3x^3=17-12x$

А4) $x^5+4x^3+8x-13=0$

Раунд 2. Решаем трансцендентные уравнения

Б1) $\sin 5x-2\cos x-8x=x^5-2$

Б2) $5\sin\frac{x}{2}+4\cos 3x+15=4-x^3$

Б3) $2\sin\frac{x}{2} - 2\cos\pi x - 10x = x^5 - 54$

Б4) $5\sin\frac{\pi x}{2} + 3\cos\pi x + 18x = 43 - x^5 - 22x^3$

Раунд 3. Доказываем тождества

В1) $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$

В2) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$

В3) $\arccos\sqrt{1 - x^2} = \begin{cases} \arcsin x, 0 \le x \le 1 \\ -\arcsin x, -1 \le x < 0 \end{cases}$

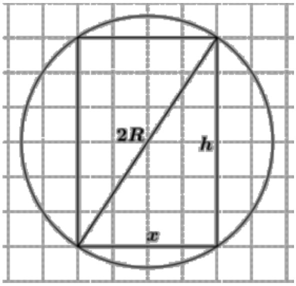
В4) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1 - x}{1 + x} = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, x > -1 \\ -\frac{3\pi}{4}, x < -1 \end{cases}$

II. Актуализация знаний – задачи на отыскание наибольших и наименьших величин.

Российский математик 19 века Панфутий Львович Чебышев говорил, что «особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека, например, как располагать своими средствами для достижения наибольшей выгоды».

С такими задачами в наше время приходится иметь дело представителям самых разных специальностей: инженеры-технологи стараются так организовать производство, чтобы выпускалось как можно больше продукции; конструкторы пытаются разработать прибор для космического корабля так, чтобы масса прибора была наименьшей; экономисты стараются спланировать связи завода с источниками сырья так, чтобы транспортные расходы оказались минимальными и т.п. Задачи подобного рода носят общее название – задачи на оптимизацию (от латинского слова optimum – «наилучший»). В самых простых задачах на оптимизацию мы имеем дело с двумя величинами, одна из которых зависит от другой, причём надо найти такое значение второй величины, при котором первая принимает своё наименьшее или наибольшее (наилучшее в данных условиях) значение. Задачи на оптимизацию решают методом математического моделирования. Продемонстрируем на примере.

Пример. Прочность балки прямоугольного сечения пропорциональна произведению её ширины на квадрат высоты. Какое сечение должна иметь балка,



вытесанная из цилиндрического бревна радиуса R, чтобы её прочность была наибольшей?

1. Оптимизируемая величина – прочность балки. Обозначим её – y.

2. Прочность зависит от ширины x и высоты h прямоугольника, служащего осевым сечением балки – см. рисунок. Объявим независимой переменной ширину балки. Поскольку осевое сечение представляет собой прямоугольник, вписанный в окружность радиуса R, то $0 < x < 2R$ – таковы реальные границы изменения независимой переменной.

3. Высота h прямоугольника связана с его шириной соотношением $x^2 + h^2 = 4R^2$ (теорема Пифагора). Значит, $h^2 = 4R^2 - x^2$.

4. Прочность балки y пропорциональна, согласно условию, произведению её ширины на квадрат высоты, то есть $y = kxh^2$, где коэффициент k – коэффициент пропорциональности – некоторое положительное число.

5. Подставляя в последнее равенство, значение для $h^2 = 4R^2 - x^2$, получим математическую модель задачи: $y = kx\left(4R^2 - x^2\right)$.

6. Исследуем функцию $y = kx\left(4R^2 - x^2\right)$ на интервале $0 < x < 2R$:

– представим функцию в виде многочлена:

$$y = kx\left(4R^2 - x^2\right) = 4R^2kx - kx^3;$$

– вычислим производную: $y' = 4R^2k - 3kx^2;$

– найдём нули производной на интервале $0 < x < 2R$: $x = \dfrac{2R}{\sqrt{3}};$

– определим характер производной в точке $x = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$:

на интервале $0 < x < \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ производная положительна: $y'\left(\dfrac{R}{\sqrt{3}}\right) = 3R^2k;$

на интервале $\dfrac{2R}{\sqrt{3}} < x < 2R$ производная отрицательна: $y'\left(\dfrac{3R}{\sqrt{3}}\right) = -5R^2k;$

в точке $x=\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ производная меняет знак с «+» на «–», значит, $x=\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ – точка максимума, в которой функция достигает наибольшего на интервале $0<x<2R$ значения:

$$y=4R^2k\frac{2R}{\sqrt{3}}-k\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^3=8R^3k\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{16R^3k}{3\sqrt{3}}.$$

7. Узнаем, какое сечение должна иметь балка наибольшей прочности. Мы выяснили, что ширина x прямоугольника, служащего осевым сечением наиболее прочной балки, равна $=\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$. Найдём высоту сечения: $h^2=4R^2-\dfrac{4R^2}{3}=\dfrac{8R^2}{3}$, значит, $h=\dfrac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$. Найдём соотношение высоты к ширине: $\dfrac{h}{x}=\sqrt{2}$.

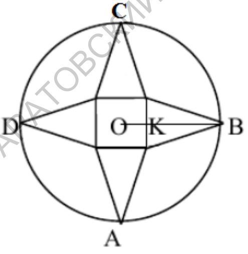
Ответ: сечением балки должен служить прямоугольник, у которого отношение высоты к ширине равно $\sqrt{2}\approx 1{,}4$.

III. Практические задачи.

Задание 1. Решить задачи реальной математики.

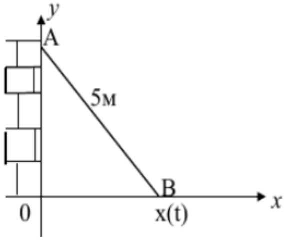
1.1. В степи в 9 км к северу от шоссе, идущего с запада на восток, находится поисковая партия. В 15 км к востоку от ближайшего к поисковой партии точки, лежащей на шоссе, находит райцентр. Поисковая партия отправляет курьера-велосипедиста в райцентр. Каков должен быть маршрут следования курьера, чтобы он прибыл в рай центр в кратчайший срок, если известно, что по степи он едет со скоростью 8 км/ч, а по шоссе 10 км/ч?

1.2. Открытый металлический бак с квадратным основанием должен вмещать V литров воды. При каких размерах на его изготовление уйдет наименьшее количество материала?



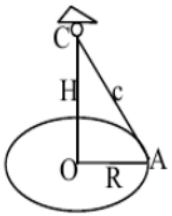
1.3. Из круга радиуса r вырезают симметричную звезду (см. рисунок) и четыре вершины A, B, C, D соединяют в вершину, образуя правильную пирамиду, в основании которой – квадрат. Какой наибольший объём пирамиды возможен?

1.4. При извержении вулкана камни горной породы выбрасываются перпендикулярно вверх с начальной скоростью $v_0=120$ м/с. Какой наибольшей высоты достигнут камни, если сопротивлением ветра пренебречь?

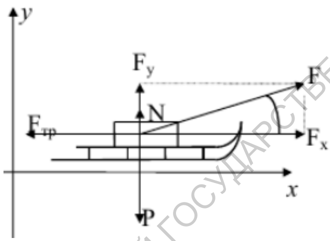


1.5. Лестница длиной 5 м приставлена к стене таким образом, что верхний её конец находится на высоте 4 м (см. рисунок). В некоторый момент времени лестница начинает падать, при этом верхний конец приближается к поверхности земли с постоянным ускорением 2 м/с. С какой скоростью удаляется от стены нижний конец лестницы в тот момент, когда верхний конец находится на высоте 2 м?

1.6. Установлено, что энергия, отдаваемая электрическим элементом, определяется по формуле $W = \dfrac{E^2 R}{(r+R)^2}$, где E – электродвижущая сила элемента, r – внутреннее сопротивление, R – внешнее сопротивление. Каким должно быть сопротивление цепи, чтобы отдаваемая элементом энергия W была наибольшей?

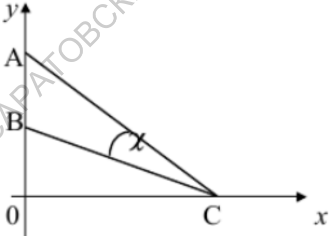


1.7. Лампа висит над центром круглого стола радиуса R (см.рисунок). При какой высоте лампы над столом освещённость предмета, лежащего на краю стола, будет наилучшей (освещённость прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света)?



1.8. Нагруженные сани движутся по горизонтальной поверхности у под действием силы F, приложенной к центру тяжести. Какой угол α должна составлять линия действия силы F с горизонтом, чтобы равномерное движение саней происходило под действием наименьшей силы?

Коэффициент трения саней о снег равен k.



1.9. На стене висит картина. Нижний конец её на 75 см, а верхний на 3 м выше глаз наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен встать наблюдатель, чтобы рассмотреть картину под наибольшим углом?

1.10. Для перевозки груза требуется изготовить закрытый короб в форме прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого относились бы как 2 : 3, а объем составлял 576 м^3. Каковы должны быть измерения параллелепипеда, чтобы его полная поверхность была наименьшей?

Задание 2. Применить производную к решению задач из разделов алгебры и геометрии.

2.1. Сумма двух целых чисел равна 24. Найти эти числа, если известно, что их произведение принимает наибольшее значение.

2.2. Произведение двух положительных чисел равно 484. Найдите эти числа, если известно, что их сумма принимает наименьшее значение.

2.3. Разность двух чисел равна 10. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наименьшее значение.

2.4. Известно, что одно из двух чисел на 36 больше другого. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наименьшее значение,

2.5. В арифметической прогрессии с разностью d девятый член равен 1. При каком значении d произведение четвертого, седьмого и восьмого членов прогрессии будет наибольшим?

2.6. В арифметической прогрессии с разностью d второй член равен 6. При каком значении d произведение первого, третьего и шестого членов будет наименьшим?

2.7. Найдите длину отрезка наибольшей длины, который заключен между графиками функций $y = 2x^2$ (снизу), $y = 4x$ (сверху) и параллелен оси y.

2.8. Найдите длину отрезка наибольшей длины, который заключен между графиками функций $y = x^2$ (снизу), $y = -2x$ (сверху) и параллелен оси y.

2.9. На графике функции $y = x^2$ найдите точку M, ближайшую к точке $A(0;\ 1{,}5)$.

2.10. На графике функции $y = \sqrt{x}$ найдите точку N, ближайшую к точке $B(4{,}5;\ 0)$.

2.11. Периметр прямоугольника составляет 56 см. Каковы его стороны, если этот прямоугольник имеет наибольшую площадь?

2.12. Площадь прямоугольника составляет 16 см^2. Каковы должны быть его размеры, чтобы периметр прямоугольника был наименьшим?

2.13. Сторона квадрата $ABCD$ равна 8 см. На сторонах AB и BC взяты соответственно точки P и E так, что $BP = BE = 3$ см. На сторонах AD и CD берутся точки соответственно K и M так, что четырехугольник $KPEM$ – трапеция. Чему равна наибольшая площадь такой трапеции?

2.14. Боковые стороны и одно из оснований трапеции равны 15 см. При какой длине второго основания площадь трапеции будет наибольшей?

2.15. Вписать в прямоугольную трапецию с основанием a и b и высотой h прямоугольник наибольшей площади. Чему равна эта площадь, если:

а) $a = 80, b = 60, h = 100$; б) $a = 24, b = 8, h = 12$?

2.16. У пятиугольника $ABCDE$ с прямыми углами A, B и E, стороны: $AB = a$, $BC = b$, $AE = c$, $DE = m$. Впишите в пятиугольник прямоугольник наибольшей площади, если:

а) $a = 7, b = 9, c = 3, m = 5$; б) $a = 7, b = 18, c = 3, m = 1$.

2.17. Диагональ боковой грани правильной четырехугольной призмы равна d. При какой длине бокового ребра объем призмы будет наибольшим?

2.18. Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна p. При какой высоте пирамиды её объем будет наибольшим?

2.19. Периметр осевого сечения цилиндра равен p см. Какова должна быть высота цилиндра, чтобы его объем был наибольшим?

2.20. Объем цилиндра равен V м^3. Каким должен быть его радиус, чтобы полная поверхность цилиндра была наименьшей?

IV. Рефлексия.

Какое из крылатых латинских выражений более всего выражает Ваше отношение к задачной конструкции занятия?

- Abeunt studia in mores // Занятия налагают отпечаток на характер. Действие переходит в привычку.
- Actum atque tractatum // Сделано и обсуждено.
- Actum ut supra // Поступай как выше (раньше) указано. Действуй, как указано выше.
- Ad discendum, non ad docendum // Для изучения, но не для поучения.
- Ad impossibilia nemo tenetur // Нельзя заставлять выполнить невозможное.
- Ad narrandum, non ad probandum // Для рассказывания, а не для доказывания.
- Audentes fortuna juvat // Удача сопутствует смелым.
- Aurea mediocritas // Золотая середина (иронично о достоинствах среднего качества).
- Cave hominem unius libri // Опасайся человека одной книги (того, кто знает хоть и немногое, но основательно).
- Duo quum faciunt idem, non est idem // Когда двое делают то же самое, это уже не то же самое.

Структура и содержание учебного материала шестого занятия предполагает групповую работу.

Формирование групп целесообразно осуществлять командно-выборным способом: назначаются капитаны (неформальные лидеры), которые по очереди набирают себе из общей массы студентов членов группы.

С случае, когда студенческий коллектив состоит из устойчивых групп, и командно-выборный способ приведёт к разбиению на эти же группы, можно рекомендовать полузакрытый способ формирования: назначаются капитаны, которым присваиваются номера команды, после чего каждый заходящий в аудиторию студент выбирает жетон с номером команды.

Математический бой начинается с конкурса капитанов (устная работа) – победитель получает право начать бой, то есть определить, какое задание из первого раунда будет решать с комментариями представитель команды соперников. Членам команды разрешается задавать своему представителю уточняющие и наводящие вопросы, указывать на наличие неточностей в решении. В случае удовлетворительного решения право продолжить бой переходит к другой команде, неудовлетворительного – остаётся за командой ведущей бой.

Любые спорные ситуации решает арбитр (как правило, это преподаватель курса). Он же подводит итоги боя.

Актуализация знаний (разбор задачи на отыскание наибольших и наименьших величин) проходит в тех же группах любым удобным для студентов способом.

Решение задач также проходит в форме групповой работы: цель решить максимально возможное число задач из заданий 1 и 2 (рабочие материалы группа сдаёт на проверку преподавателю), а затем продемонстрировать решение двух задач (по одной из каждого задания). Номер задачи и студента, демонстрирующего решение, выбирает группа соперников, она же оценивает результат.

Поэт должен видеть то, чего не видят другие. И это же должен и математик.
Софья Ковалевская

Занятие 7
Применение производной при решении и доказательстве неравенств

I. Актуализация знаний – задачи на отыскание наибольших и наименьших величин.

Формирование операциональных знаний – применение производной к решению неравенств.

Пример 1. Решить неравенство $7\cdot 2^{-x}-2^{x+2}-12\le 0$.

Решение:

$$7\cdot 2^{-x}-2^{x+2}-12\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7\cdot 2^{-x}-2^{x+2}-12=0 \\ 7\cdot 2^{-x}-2^{x+2}-12<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=-1 \\ 7\cdot 2^{-x}-2^{x+2}-12<0 \end{array}\right.$$

Исследуем функцию $f(x)=7\cdot 2^{-x}-2^{x+2}-12$, определённую на множестве R, на монотонность

Так как $f'(x)=-7\ln 2\cdot 2^{-x}-4\ln 2\cdot 2^{x}<0$, то $f(x)$ убывает на R и принимает значение, равное нулю в (– 1).

Итак, на $(-\infty;-1)$ функция $f(x)>0$,

при $x=-1$ функция $f(x)=0$,

на $(-1;+\infty)$ функция $f(x)<0$.

Следовательно, неравенство выполняется при $x\ge -1$.

Пример 2. Доказать, что $\sin x<x$ для $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Доказательство.

Исследуем функцию $f(x)=\sin x-x$ на монотонность на промежутке $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\subset D(f(x))$. Для этого найдем производную и определим её знак на промежутке $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$: $f'(x)=\cos x-1$.

Произведём оценку:

$0 < cos x < 1$

$0 - 1 < cos x - 1 < 1 - 1$

$-1 < f'(x) < 0$

Производная функции отрицательно, значит, сама функция убывает на промежутке $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Найдём значение функции на концах отрезка $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$:

$f(0) = sin 0 - 0 = 0$ – наибольшее значение на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$;

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = sin\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{2} = \frac{2-\pi}{2}$ – наименьшее значение на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Для любой другой точки $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, по определению убывающей функции,

$$\frac{2-\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) < \underline{f(x) < f(0) = 0}.$$

Итак, $f(x) = sin x - x < 0$ для $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Или, что то же самое, $sin x < x$ для $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

II. Задания для самостоятельного решения.

<u>Задание 1. «Взгляд назад».</u>

На втором курсе мы применяли свойства элементарных функций к решению неравенств без обращения к производным функциям. Вот задачи, которые были предложены для освоения функционального метода (сохранена нумерация, принятая в пособии: *Лебедева, С. В. Элементарная математика: алгебра : учебно-методическое пособие / С. В. Лебедева – Саратов, 2018. – 72 с.*). Какие из предложенных задач можно решить с применением производной? Решите эти задачи или объясните, почему в некоторых случаях нецелесообразно применять аппарат дифференциального исчисления.

<u>Задачи I уровня (по 0,1 балла).</u> Решите неравенства, используя функциональный подход.

241. $\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[8]{x^4 - 1} < 2^x - log_2\left(1 + x^8\right)$ *242.* $log_5 x < \sqrt{1 - x^4}$

243. $\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{9-x}<\sqrt{3}$

244. $2^x+3^x+5^x<10$

245. $\log_2(2^x+1-x^2)>\log_2(2^{x-1}+1-x)+1$

246. $\sqrt{2+x}-\sqrt{4+x}\ge 2$

247. $\log_2 x>3-x$

248. $x\cdot\log_3 x<18$

249. $|1-|x||\ge|x|+1$

250. $\cos x\ge 1-\dfrac{x^2}{2}$

Задание 2. Опровержение.

Требование А. Докажите, что следующие неравенства не имеют решений на множестве действительных чисел.

Требование Б. Докажите, что не существует действительного значения неизвестной, удовлетворяющего неравенству

Требование В. Докажите, что неравенства тождественно ложны на R.

2.1. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4}\ge 2$

2.2. $\left|x^2-x^4+5\sin x\right|<-0{,}1$

2.3. $\sqrt{x^2+x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}<2$

2.4. $2^{x^2-4x+9}<\dfrac{1}{1+|x-3|}$

2.5. $\left|x^2-1\right|+\left|x^2-4x+7\right|<1$

2.6. $2^{\sqrt{x}}+3^{\sqrt{x}}+4^{1+\sqrt{x}}<5$

2.7. $\left|\sqrt{2}\cdot|x|-1\right|\cdot\log_2\left(2-2x^2\right)>1$

2.8. $2\log_3\left(4+x^2\right)<\log_2\left(1-(x+5)^2\right)$

2.9. $\log_4\left(2+\sqrt[4]{x}\right)+\log_2\left(1+x^2+x^4\right)<0$

2.10. $\sqrt[4]{x+1}+\sqrt{\sqrt{x+1}+3}<\sqrt{2\sqrt{x+1}+2}$

Задание 3. Решите неравенство.

3.1. $x\cdot 4^x>4$

3.2. $5^x+2^x>7$

3.3. $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{4-x}>\sqrt[4]{2}$

3.4. $\sqrt{2-x-x^2}<2^x+1$

3.5. $\ln\left(1-x^2\right)\le x+\dfrac{1}{4}$

3.6. $\cos x\ge 1-\dfrac{1}{x^2}$

3.7. $e^x-1-\ln(x+1)>0$

3.8. $\sqrt{1+x}-1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{8}>0$

3.9. $\dfrac{6-3^{x+1}}{x}>\dfrac{10}{2x+1}$

3.10. $\dfrac{2+\log_3 x}{x-1}<\dfrac{6}{2x-1}$

3.11. $\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{x-1}\le 1$

3.12. $\sin\pi x-|\pi x|<3$

Задание 4. Докажите неравенство.

4.1. $(x-1)^4+(x+1)^4 \ge 2$

4.2. $x^6-x+1>0$

4.3. $\dfrac{x^2-9}{x^2-4}>1,\ -2<x<2$

4.4. $2x+\dfrac{1}{x^2}>7, 0<x<\dfrac{1}{2}$

4.5. $1+2\ln x \le x^2,\quad x>0$

4.6. $x^5 \ge \dfrac{1}{16}-(1-x)^5$

4.7. $\sin x+\operatorname{tg} x>2x,\quad 0<x<\dfrac{\pi}{2}$

4.8. $\sqrt{1+x} \le 1+\dfrac{x}{2},\quad x>1$

4.9. $(e+x)^{e-x}>(e-x)^{e+x}, 0<x<e$

4.10. $\cos x+\sin x+x\cdot\sin x>1+x\cdot\cos x,\quad \dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3\pi}{4}$

Проверьте, по возможности, решение построением графиков в одном из интерактивных графикопостроителей.

III. Рефлексия.

В эпиграфе к занятию деятельность поэта приравнивается к деятельности математика. Сегодня Вы уже побывали в роли математика. Давайте теперь попробуем «примерить» роль поэта.

Напишите синквейн на основе изученного материала. Синквейн – это пятистрочная строфа.

1-я строка – одно ключевое слово, определяющее содержание синквейна;

2-я строка – два прилагательных, характеризующих данное понятие;

3-я строка – три глагола, обозначающих действие в рамках заданной темы;

4-я строка – короткое предложение, раскрывающее суть темы или отношение к ней;

5-я строка – синоним ключевого слова (существительное).

Пример. Пушкин.
Великий, талантливый.
Думает, страдает, любит.
Чувства добрые пробуждает.
Гений.

Неравенство.
Математическое, социальное.
Проявляется, существует, решается.
Заставляет о многом задуматься.
Проблема.

Главная сила математики состоит в том, что вместе с решением одной конкретной задачи она создаёт общие приёмы и способы, применимые во многих ситуациях, которые даже не всегда можно предвидеть.
М.Башмаков

Занятие 8
Применение производной к решению задач с параметрами

I. Изучение нового материала (самостоятельно или по принципу «Спроси того, кто знает»).

При решении некоторых уравнений с параметрами используются наглядно-графические соображения. При построении необходимого графического образа часто приходится обращаться к производной функции. Используется следующее алгоритмическое предписание:

1. Из уравнения с переменной x и параметром a выражаем параметр a как функцию от x: $a = f(x)$.

2. В координатной плоскости xOa строим график функции $a = f(x)$.

3. Рассматриваем прямые $a = const$ и выделяем те промежутки оси Oa, на которых эти прямые удовлетворяют следующим условиям:

а) не пересекают график функции $a = f(x)$,

б) пересекают график функции $a = f(x)$ в одной точке,

в) пересекают график функции $a = f(x)$ в двух точках,

г) пересекают график функции $a = f(x)$ в трёх точках, и т.д. согласно требованию задачи.

4. Если поставлена задача найти значения x, то выражаем x через a для каждого из найденных промежутков значений a в отдельности.

Пример 1. Найти число корней уравнения $x = ae^x$ в зависимости от параметра a.

Решение.

Из уравнения $x = ae^x$ с переменной x и параметром a выражаем параметр a как функцию от x: $a(x) = \frac{x}{e^x}$. Исследуем получившуюся функцию.

1. Область определения функции. Функция $a(x)=\dfrac{x}{e^x}$ определена и непрерывна на множестве действительных чисел: $D(a)=R.$

2. Производная функция: $a'(x)=\left(\dfrac{x}{e^x}\right)'=\dfrac{1\cdot e^x-x\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2}=\dfrac{1-x}{e^x}$.

3. Исследование на монотонность:.

$0=\dfrac{1-x}{e^x}$. При $x=1$ функция $a'(x)=0.$

При $x<1$ функция $a'(x)>0,$ следовательно $a(x)=\dfrac{x}{e^x}$ – возрастает.

При $x>1$ функция $a'(x)<0,$ следовательно $a(x)=\dfrac{x}{e^x}$ – убывает.

Из всего вышеперечисленного следует, что $x=1$ – точка максимума функции $a(x)=\dfrac{x}{e^x}$.

$$a_{max}(1)=\frac{1}{e}.$$

4. Область значений. $E(a)=\left(-\infty;\ \dfrac{1}{e}\right].$

5. Исследование на интервалах (поиск горизонтальных асимптот)..

При $x\to-\infty$ функция $a(x)\to-\infty$, то есть $lim_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x}=-\infty.$

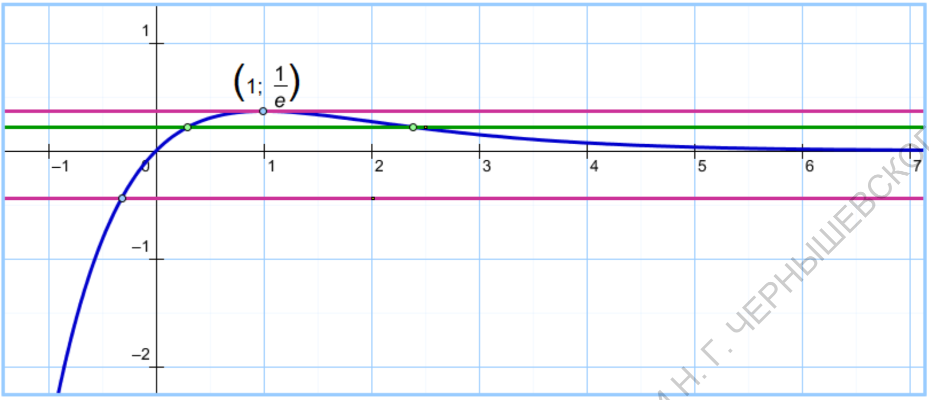
При $x\to+\infty$ функция $a(x)\to 0$, то есть $lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0.$ Следовательно, $a=0$ – горизонтальная асимптота.

6. Построение графика.

Нуль функции: $a(0)=\dfrac{0}{e^0}=0.$

С учётом положений 1-5 строим график функции $a(x)=\dfrac{x}{e^x}$ в системе координат xOa .

Пересекаем график параллельными оси Ox прямыми и делаем выводы относительно числа решений уравнения $x = ae^x$.



7. Выводы.

При $a \in (-\infty; 0] \cup \left\{\frac{1}{e}\right\}$ уравнение имеет единственный действительный корень.

При $a \in \left(0; \frac{1}{e}\right)$ уравнение имеет два действительных корня.

При других значениях a уравнение не имеет корней.

Пример 2. Найти все значения параметра a, при которых уравнение. $\sqrt{x^2 - 2x - 3} = \sqrt{ax - 7}$ имеет единственный корень.

Решение.

Из уравнения $\sqrt{x^2 - 2x - 3} = \sqrt{ax - 7}$ с переменной x и параметром a выражаем параметр a как функцию от x:

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} = \sqrt{ax - 7} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 = ax - 7 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x+1)(x-3) \geq 0 \\ \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x} = a \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x+1)(x-3) \geq 0 \\ a(x) = x + \dfrac{4}{x} - 2 \end{cases}.$$

Исследуем получившуюся функцию.

1. Область определения функции. Функция $a(x)=x+\frac{4}{x}-2$ определена и непрерывна на множестве $D(a)=(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$.

2. Производная функция: $a'(x)=\left(x+\frac{4}{x}-2\right)'=1-\frac{4}{x^2}$.

3. Исследование на монотонность:.

$0=1-\frac{4}{x^2}$. При $x=-2$ функция $a'(x)=0$.

При $x<-2$ функция $a'(x)>0$, следовательно $a(x)=x+\frac{4}{x}-2$ – возрастает.

При $x=-2$ функция $a(-2)=-2-2-2=-6$.

При $-2<x<-1$ функция $a'(x)<0$, следовательно $a(x)=x+\frac{4}{x}-2$ – убывает.

При $x=-1$ функция $a(-1)=-1-4-2=-7$.

При $x=3$ функция $a(3)=3+\frac{4}{3}-2=2\frac{1}{3}$.

При $x>3$ функция $a'(x)<0$, следовательно $a(x)=x+\frac{4}{x}-2$ – возрастает.

Из всего вышеперечисленного следует, что $x=-2$ – точка максимума функции $a(x)=x+\frac{4}{x}-2$.

$a_{max}(-2)=-6$.

4. Область значений. $E(a)=(-\infty;-6]\cup\left[2\frac{1}{3};+\infty\right)$.

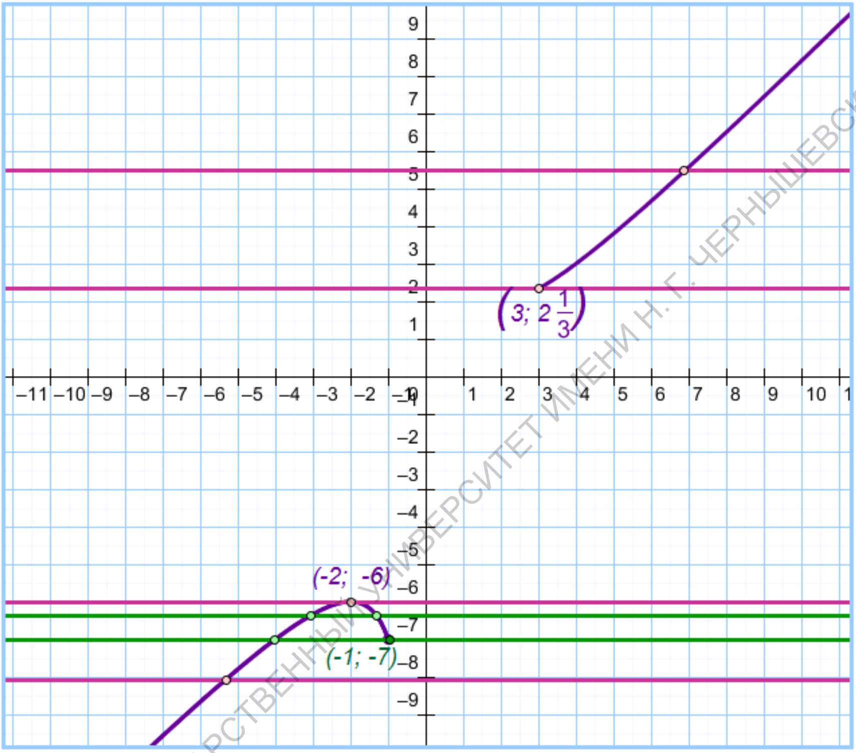
5. Исследование на интервалах (поиск горизонтальных асимптот).

При $x\to-\infty$ функция $a(x)\to-\infty$, то есть $lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{4}{x}-2\right)=-\infty$.

При $x\to+\infty$ функция $a(x)\to+\infty$, то есть $lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{4}{x}-2\right)=+\infty$.

6. Построение графика.

С учётом положений 1-5 строим график функции $a(x)=x+\frac{4}{x}-2$ в системе координат xOa.



7. Выводы.

При $a\in(-\infty;-7]\cup\{-6\}\cup\left[2\frac{1}{3};+\infty\right)$ уравнение $\sqrt{x^2-2x-3}=\sqrt{ax-7}$ имеет единственный действительный корень.

II. Задания для самостоятельного решения.

Задание 1. Простая вариация. Выяснить сколько корней имеет уравнение в зависимости от параметра a.

1.1. $x^2=ax+1$ 1.2. $x^3=ax+1$ 1.3. $x^3=ax+1$

1.4. $x^3=ax^2+1$ 1.5. $x^3=ax^2+x$ 1.6. $x^3=ax^2+x+1$

Доработайте задачную конструкцию до полной вариации.

<u>Задание 2. Серия задач.</u> Найти все значения параметра a, при которых уравнение имеет единственный корень.

2.1. $\sqrt{x^3-24x^2+118x+7}=5\sqrt{7x-x^2}+\sqrt{a^2-11a+18}$

2.2. $x-2=\sqrt{-2(a+2)x+2}$

2.3. $(x-3)(x+1)+3(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=(a-1)(a+2)$

2.4. $2\pi^2(x-1)^2+4a\cos(2\pi x)=9a^3$

2.5. $\sin^2(x+6)-(a-1)\sin(x+6)\cdot\sin(\pi x)+(a-1)\sin^2(\pi x)=0$

2.6. $3\sqrt[5]{x+2}-16a^2\cdot\sqrt[5]{32x+32}=\sqrt[10]{x^2+3x+2}$

2.7. $\dfrac{a^3-(x+2)a^2+xa+x^2}{x+a}=0$

2.8. $a+\sqrt{6x-x^2-8}=3+\sqrt{1+2ax-x^2-a^2}$

2.9. $a\cdot 2^x-\dfrac{2^{x+1}+1}{2^x-1}=2a+2$

2.10. $\ln\left(xa^2+xa+2x-x^3\right)=\ln\left(2x-x^2\right)$

<u>Задание 3. Серия задач.</u> Решить уравнение.

3.1. $\sin x-a=\sqrt{\sin x+\dfrac{1}{3}}$

3.2. $\sqrt{\sin x-a}=\sin x+\dfrac{1}{3}$

3.3. $\sqrt{\cos x+\dfrac{1}{2}}-\cos x=a$

3.4. $\cos x+\dfrac{1}{2}=\sqrt{a+\cos x}$

3.5. $\dfrac{2-a^2}{x}=x^2-3-3ax+6a$

3.6. $\dfrac{2-x^2}{a}=a^2-3-3ax+6x$

3.7. Определите способ конструирования пар 3.1-3.2, 3.3-3.4 и 3.5-3.6.

Индивидуальная работа с последующим взаимоконтролем (работа первого выполнившего задание проверяется преподавателем, работа второго проверяется первым и т.д.)

3.8. Разработайте свои пары уравнений согласно выявленным способом конструирования.

3.9. Решите получившиеся уравнения.

3.10. Оцените выполнение заданий 3.8-3.9 у сокурсника.

III. Рефлексия.

Подберите афоризм для описания собственной деятельности по решению математических задач

- Любую задачу реально выполнить, если разбить ее на выполнимые части.
- Чем сложнее задача, тем больше оснований сейчас же приступить к ней.
- Чем невозможнее кажется задача, тем интереснее её решать.
- Трудные задачи выполняем немедленно, невозможные — чуть погодя.
- Задача всегда проста, если знаешь ответ.
- Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их!
- Умение решать задачи - такое же практическое искусство, как умение плавать или бегать на лыжах. Ему можно научиться только путём подражания или упражнения.
- Решить задачу – это значит пережить приключение.
- Главная сила математики состоит в том, что вместе с решением одной конкретной задачи она создаёт общие приёмы и способы, применимые во многих ситуациях, которые даже не всегда можно предвидеть.
- В задачах приходится пользоваться очень остроумными, подчас тонкими приёмами, и тот, кто в своей молодости вкусил их прелесть, никогда их не забудет.

Уходят люди, умирают звёзды, меняется лик Вселенной, а законы и свойства этого мира остаются в вечности. И, может быть, этот мир слишком совершенен, чтобы мы могли познать его до конца.

«Математик и чёрт» (1972)

Занятие 9 (итоговое)

Брейн-ринг «На опережение»

I . Брейн-ринг.

Группа делится на две команды.

Дается первое задание. Жребием выбирается одна команда, которая будет решать уравнение (или неравенство) с помощью применения производной, другая команда будет выполнять тоже задание, но с использованием других известных методов решения уравнений и неравенств.

Той команде, которая первая справилась с заданием (не допустив при этом ошибок), дается шанс выбрать, каким способом они будут выполнять следующее задание (задание показано на доске). Другой команде достается невыбранной первой командой способ решения.

И так далее.

В результате, после выполнения всех заданий делается вывод о том, в каких случаях какой способ решения при наименьшем количестве затраченного на него времени дает верный ответ.

II. Рефлексия.

Какой крылатой фразой можно охарактеризовать организацию занятия?

- «Тоска зелёная летом, жёлтая осенью, белая зимой» («Королева бензоколонки» (1962))
- «Какой шофёр, такая и машина» («Королева бензоколонки» (1962))
- «Эх! Красота-то какая! Лепота!» («Иван Васильевич меняет профессию» (1973))
- «Это я удачно зашел!»(«Иван Васильевич меняет профессию» (1973))
- «Инфаркт микарда. Вот такой рубец, вскрытие показало...» («Любовь и голуби» (1984))
- «Я лучше помолчу. Здоровее буду» («Место встречи изменить нельзя» (1979))
- «Да скажем откровенно: меня тоже многое не устраивает, я тоже со многим не согласен!» («Тот самый Мюнхгаузен» (1979))
- «Это тройной восторг: предвкушение, представление и воспоминание» (Илка Чейз – американская актриса)
- «Это боль и мука, стыд, восторг, рай и ад, чувство, что ты живешь в сто раз напряженней, чем обычно, и невыразимая тоска, свобода и рабство, умиротворение и тревога» (слова Джулии Ламберт из романа Сомерсета Моэма «Театр» (1937))

Для того чтобы усовершенствовать ум,
надо больше рассуждать, чем заучивать.
Р. Декарт

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Задание 1. Проанализируйте и предоставьте решения 5 задач, где используется производная, из олимпиад для школьников, указав *метаданные* этих задач.

Задание 2 (рефлексия). Одну задачу (наиболее интересную на Ваш взгляд) предварите эпиграфом в стихотворной форме и стихотворно-числовой форме.

Например,

Задача *(№ 2, 11 класс, Московская математическая олимпиада 1998 года. Темы: «Производная в точке», «Рациональные и иррациональные числа», «Примеры и контрпримеры. Конструкции»)*.. Про непрерывную функцию $f(x)$ известно, что: она определена на всей числовой прямой; в каждой точке имеет производную (и, таким образом, её график в каждой точке имеет единственную касательную); график не содержит точек, у которых одна из координат рациональна, а другая – иррациональна. Следует ли отсюда, что график $f(x)$ – прямая?

Решение.

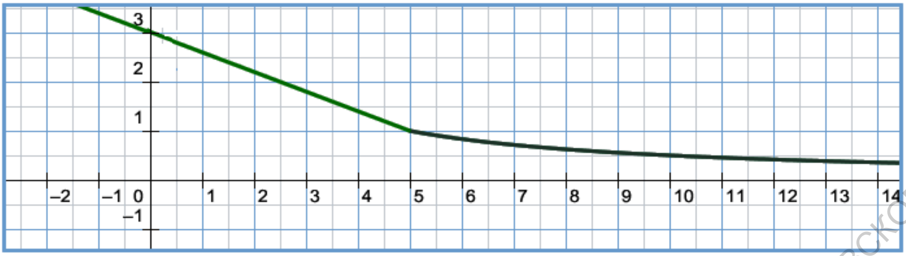
Лишь две функции не меняют рациональности координат: линейная функция и обратная пропорциональность: $f(x)=ax+b$ и $f(x)=\frac{k}{x}+n.$

Но функция $f(x)=\frac{k}{x}+n$ не удовлетворяет условию «определена на всей числовой прямой».

Если мы хотим сконструировать функцию, не являющуюся прямой, но удовлетворяющую условию задачи, нужно «собрать её» из «кусков» этих двух функций, «убирая точку разрыва» и учитывая условие «график в каждой точке имеет единственную касательную».

То есть наша функция должна быть кусочно-гладкой и монотонной. Построим такую функцию: $f(x)=\begin{cases} 3-\dfrac{2x}{5}, \text{ если } x\le 5 \\ \dfrac{5}{x}, \text{ если } x>5 \end{cases}$.

Изобразим её график.



Ответ. Из данных условия задачи не следует, что график $f(x)$ – прямая.

Эпиграфом к этой задаче могут служить следующие строки (Юлий Ким «Песня волшебника» из к/ф «Обыкновенное чудо»):

Нелепо, смешно, безрассудно, безумно, волшебно…
Ни толку, ни проку, не в лад, невпопад совершенно…
Приходит день, приходит час, приходит миг, приходит срок и рвется связь,
Кипит гранит, пылает лед и легкий пух сбивает с ног, что за напасть?
И зацветает трын-трава, и соловьем поет сова,
И даже тоненькую нить не в состоянии разрубить стальной клинок!

Стихотворно-числовая форма этого текста может быть выражена следующим набором чисел:

15, 16, 108, 17, 13…
500, 200, 100, 50, 25 19…
109-8, 101, 109-7, 102, 105, 107, 7-100,
1-3-5-7-23, 2-8-10-50, 5000-100?
1-5-23-700, 3-7-11-600,
6003 6005 6007 6100 7000-100!

Нельзя быть средним математиком — можно быть либо гениальным, либо вообще не быть математиком.

А. Л. Пажитнов

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Блок 1.

Цель – проверить, сформированные в ходе изучения модуля, операциональные знания.

Задание 1. Решите уравнение / неравенство с помощью производной.

1 вариант *2 вариант*

1.1. а) $\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{x-1}=1$ б) $\sqrt{2x+5}+\sqrt[4]{x+2}=0$

1.2 .а) $\frac{6-3^{x+1}}{x}>\frac{10}{2x+1}$ б) $\frac{2+\log_3 x}{x-1}<\frac{6}{2x-1}$

Задание 2 Докажите тождества, применяя производную.

1 вариант *2 вариант*

2.1. а) $2arctgx+arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi, x\geq 1$ б) $arctgx=arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x\geq 0$

Блок 2.

Цель – проверить, сформированные в ходе изучения модуля, практические знания, связанные со способностью применять имеющиеся знания к решению новых задач.

Задание 3. *Сравните числа, применяя производную.*

2.2. а) $log_2 3$ или $log_3 4$? б) 100^{101} или 101^{100} ?

Блок 3 (профессионально ориентированный).

Цель – проверить способности к педагогической рефлексии.

Задание 4. Поиск ошибок

Задание А.

Учитель приводит пример доказательства тождества с помощью производной. Насколько верны его рассуждения?

Задание. Докажите тождество $3\arcsin x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$, если $|x|\le\frac{1}{2}$.

1 шаг. *Перепишем утверждение в виде:*

«Для любого $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ *выполняется равенство* $3\arcsin x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$*».*

2 шаг. *Для доказательства будем использовать условие постоянства функции на отрезке: если функция непрерывна на отрезке, а во всех внутренних точках отрезка ее производная равна нулю, то функция постоянна на этом отрезке.*

Найдём производную функции $f(x)=3\arcsin x-\arccos(3x-4x^3)$ *на отрезке* $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

$$f'(x)=\left(3\arcsin x-\arccos(3x-4x^3)\right)'=(3\arcsin x)'-\left(\arccos(3x-4x^3)\right)'=$$

$$=(3\arcsin x)'-\left(\arccos(3x-4x^3)\right)'=\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{-(3x-4x^3)'}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3-12x^2}{\sqrt{(1-3x+4x^3)(1+3x-4x^3)}}=\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3-12x^2}{\sqrt{(x+1)(2x-1)^2(x-1)(-1)(2x+1)^2}}=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3(1-4x^2)}{\sqrt{(1+x)(1-x)((2x-1)(2x+1))^2}}=3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1-4x^2}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{(4x^2-1)^2}}\right)=$$

$$=3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1-4x^2}{\sqrt{1-x^2}\,|4x^2-1|}\right)=3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1-4x^2}{\sqrt{1-x^2}\,|4x^2-1|}\right).$$

Если $|x|\le\frac{1}{2}$, *то* $|4x^2-1|=4x^2-1$, *следовательно* $f'(x)=0$, *а значит* $f(x)=c-const$.

3 шаг. *Найдём c,* вычислив значение функции в произвольной точке интервала $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Пусть $x=0$, *тогда* $f(0)=\pi$ *и* $c=\pi$.

4 шаг. *Найдём значение функции на концах заданного отрезка:* $f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\pi$.

Таким образом, тождество верно при любом $|x|\le\frac{1}{2}$.

Задание Б.

Ученик доказывает неравенство. Насколько верны его рассуждения?

Задание. *Докажите неравенство* $e^x > -2 + x + e^2$ *для* $x > 2$.
1 шаг. *Перепишем утверждение в виде:*
«Докажите неравенство $e^x + 2 - x - e^2 > 0$ *для* $x > 2$*».*
2 шаг. *Исследуем функцию* $f(x) = e^x + 2 - x - e^2$.

1. $D(f) = R$
2. $f'(x) = e^x - 1 - e^2$
3. $e^x - 1 - e^2 > 0$ *при* $x \geq 2 \Rightarrow f(x)$ *– возрастает*
4. $f(2) = 0$

3 шаг. *Для* $\forall x \in [2; +\infty)$ *и* $x > 2$, *по определению возрастания функции имеем* $f(x) > f(2) = 0$, *то есть* $f(x) = e^x + 2 - x - e^2 > 0 \Rightarrow$
$e^x > -2 + x + e^2$.

Доказано.

Задание В.

Проверьте домашнее задание, выполненное учеником.

Задание. *Решить уравнение* $1 + x = e^x + x^3 \cdot \sqrt[5]{x}$.

Решение

Очевидно, что x = 0 – корень уравнения.
Докажем, что уравнение не имеет других корней.
Составим функцию $f(x) = e^x + x^3 \cdot \sqrt[5]{x} - x - 1$ *и найдём ей производную.*

$f'(x) = e^x + \frac{16}{5} x^2 \cdot \sqrt[5]{x} - 1.$

$f'(0) = 0$. *Других нулей функция не имеет, так как является возрастающей на R.*
Для функции $f(x) = e^x + x^3 \cdot \sqrt[5]{x} - x - 1$ *точка x = 0 является точкой максимума, в неё функция принимает наибольшее значение.*
Значит для всех x отличных от нуля $f(x) < 0$.
Ответ. x = 0.

Блок 4.

Задание 5. Рефлексия

Цель – оценить успешность в изучении модуля «Применение производной к решению уравнений и неравенств, доказательству тождеств», в том числе, прогнозирование результата зачётного занятия.

Сравните изучение Вами модуля с жизнедеятельностью какого-нибудь сказочного героя, объясните, почему возникла ассоциация именно с выбранным Вами персонажем?

Ниже дан один из возможных вариантов выполнения задания.

Колобок

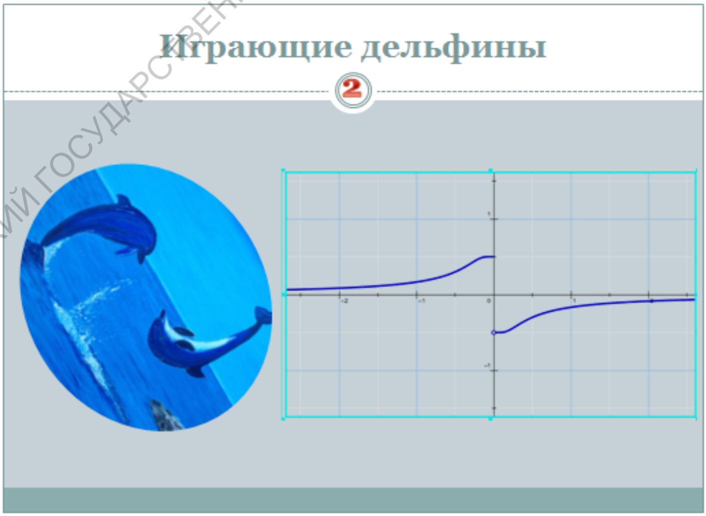
Больше всего изучение курса напоминает похождения Колобка – персонажа одноимённой восточнославянской народной сказки, изображаемого в виде небольшого пшеничного хлеба шарообразной формы, который сбежал от испёкших его бабушки и дедушки (разработчики курса), от разных зверей (зайца, волка и медведя – разнообразные формы организации занятий с совершенно непредсказуемым результатом), но был съеден лисой (прогнозирование результата зачётного занятия).

ПРИЛОЖЕНИЕ

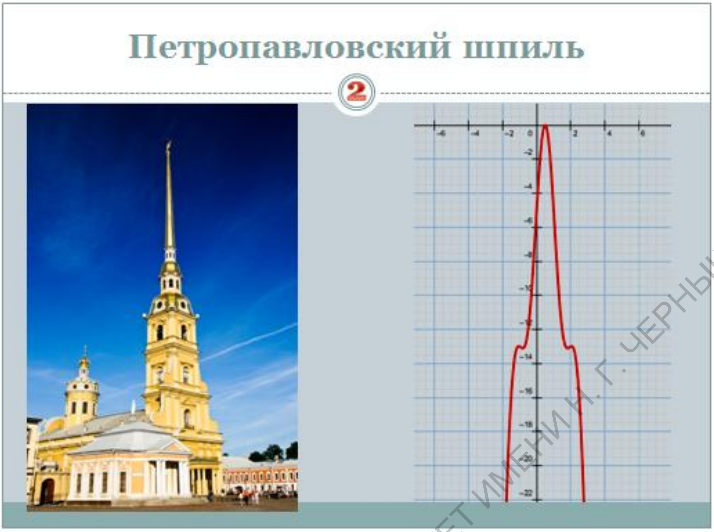
Материалы для аукциона (серия задач)

$$\log_3 x = 1 + \frac{-3}{2x-1}$$

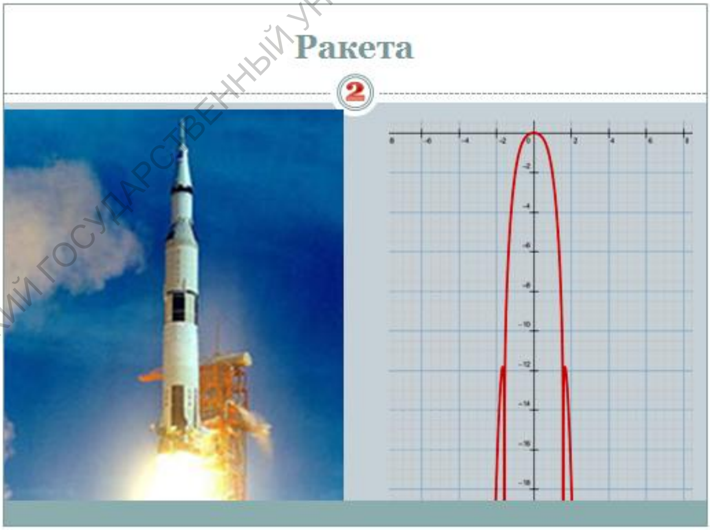
$$\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}$$



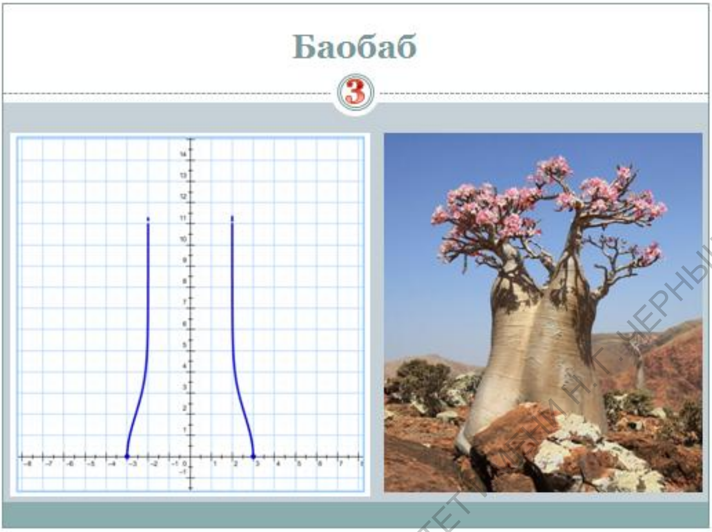
$$4\sin \pi x = 4x^2 - 4x + 5$$



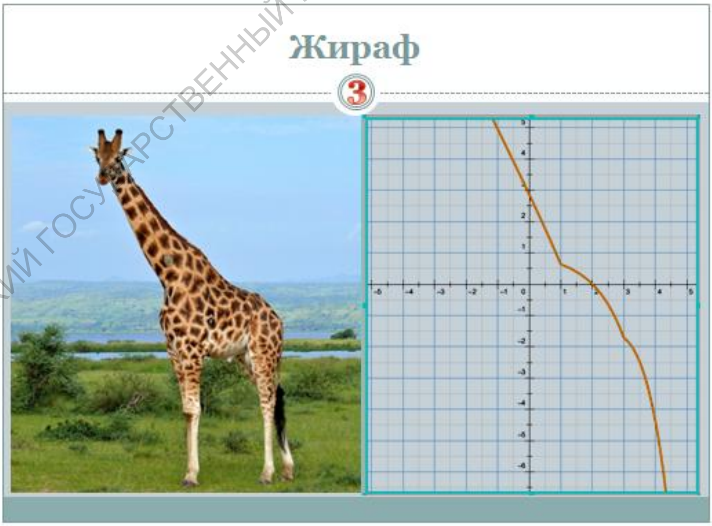
$$\log_{\pi} \cos^2 x = x^4$$



$$\sqrt{9-x^2}-\log_3(|x|-2)=0$$



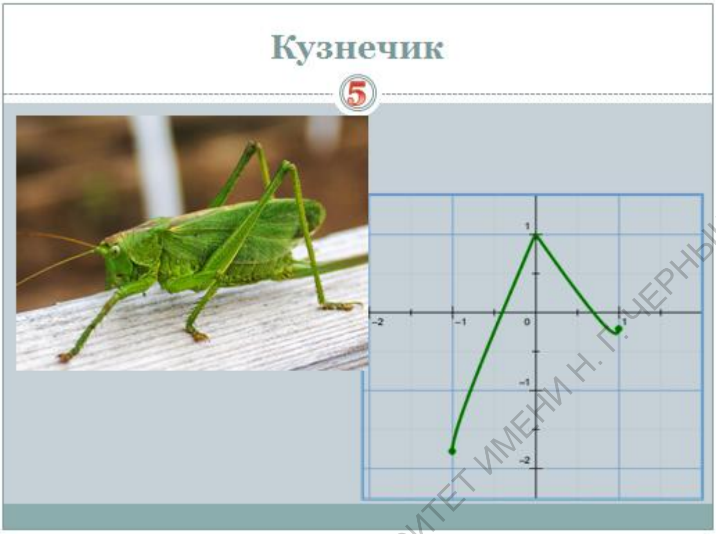
$$|x-1|+|x-3|=1+e^{x-2}$$



$$\sqrt{x^4+3x^2+4}=2$$

$$\sqrt{log_2\left(x^2-3\right)}=|\,x\,|-2$$

$$\frac{arcsin\, x}{2} = 2|x| - 1$$



$$cos^3 x + sin^3 x = -1$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

Светлана Владимировна Лебедева
Ирина Александровна Рычагова

Избранные вопросы элементарной математики:
элементы математического анализа

На обложке – репродукция картины «Студенты» неизвестного художника (1982 г.).

Работа издана в авторской редакции