

Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского

А.В.Хохлов

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ
ОСНОВЫ
РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ**

*Учебное пособие
для студентов физического факультета,
факультета нелинейных процессов
и факультета нано- и биомедицинских технологий*

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2005

УДК 621.37
ББК 32.84
X86

Хохлов А.В.

X86 Теоретические основы радиоэлектроники. Учеб. пособие для студентов физ. фак., фак. нелинейных процессов и фак. нано- и биомедицинских технологий. – Саратов: Изд-во Сарат.ун-та, 2005.– 296 с.: ил.
ISBN 5–292–03435–5

В книге рассматриваются методы представления и математические модели детерминированных радиотехнических сигналов, методы описания и расчета радиоэлектронных систем. Анализируются физические процессы, протекающие в инерционных, резонансных и связанных системах с сосредоточенными параметрами.

Для студентов университета, обучающихся по физическим специальностям, а также для аспирантов, научных работников и инженеров, специализирующихся на разработке и создании радиоэлектронных систем.

Рекомендуют к печати:

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики физического факультета
Саратовского государственного университета
Доктор физико-математических наук, профессор *В.А.Коломейцев*
(Саратовский государственный технический университет)

УДК 621.37
ББК 32.84

ISBN 5–292–03435–5

© Хохлов А.В., 2005

Введение

Современное общество невозможно представить без радиовещания, телевидения, мобильной и спутниковой связи, без радиолокации и радионавигации, радиоэлектронной обработки и передачи данных, без ЭВМ, микропроцессоров и Internet. Уже давно стали неотъемлемыми элементами быта микроволновые печи, аудио- и видеоманитофоны, видеокамеры, компакт-диски и радиотелефоны. Все эти достижения в значительной степени обязаны развитию радиоэлектроники.

Радиоэлектроника – область современного естествознания, объединяющая ряд разделов науки и техники, основными из которых являются радиотехника и электроника, и изучающая проблемы использования электромагнитных колебаний и волн для передачи и преобразования информации¹. К радиоэлектронике условно относят инфракрасную технику и оптоэлектронику.

Теоретической основой радиоэлектроники является *радиофизика* – область физики, в которой изучаются физические процессы, связанные с электромагнитными колебаниями и волнами радиодиапазона: их возбуждение, распространение, прием и преобразование частоты, а также возникающие при этом взаимодействия электрических и магнитных полей с зарядами в вакууме и веществе².

По мнению многих специалистов-радиофизиков, это определение является неполным и лишь подчеркивает содержание радиофизики как физических основ радиоэлектроники. В частности, известный ученый, профессор С.М.Рытов ввел другое определение радиофизики:

«Можно, по-видимому, считать, что радиофизика охватывает в основном два направления:

1) *изучение физических явлений, существенных для радиосвязи* (в широком понимании), т.е. для всех основных этапов всякой радиосвязи – генерации электромагнитных сигналов, излучения и распространения

¹ Электротехника как отрасль науки и техники тоже занимается изучением и практическим использованием физических законов, описывающих электромагнитные явления. Однако главная цель электротехники – получение, передача, преобразование и использование *электроэнергии*, а основная цель радиотехники – передача и преобразование сигналов, несущих *информацию*. Энергию удобно передавать на постоянном токе и переменном токе промышленной частоты (50 или 60 Гц) простейшей (синусоидальной) формы. Для передачи информации (сообщений) эти сигналы не пригодны. Чем сложнее сообщение, тем богаче передаваемый сигнал, и тем более высокие радиочастоты приходится использовать.

² БСЭ. М.: Сов.энциклопедия, 1975. Т.21. С.392.

электромагнитных волн и, наконец, приема радиосигналов. Это направление можно назвать "физикой для радио";

2) *изучение методами и средствами радиотехники* самых разнообразных физических (и не только физических) объектов – атомных ядер, молекул, живых организмов, земной атмосферы, небесных тел и т.д. Это, коротко говоря, "радио для физики"»³.

Со временем радиофизические методы стали широко использоваться в оптике и механике, акустике и астрономии, а отдельные разделы радиофизики оформились в теорию колебаний, теорию волн, квантовую радиофизику и статистическую радиофизику, распространение радиоволн, радиооптику, радиоастрономию и т.п.

"Радиофизика как Наука, как понятие, – пишет М.А.Миллер⁴, – это наше! родное! Такого сочетания не было и по сей день нет ни в какой иностранной энциклопедии!"

Стремительное развитие методов радиоэлектроники и их активное внедрение в большинство областей современной техники породило множество радиосистем различного назначения: от радиовещания до глобальных систем спутниковой связи. При этом любую техническую систему можно рассматривать как радиоэлектронную, если ее основная или одна из основных функций выполняется с помощью радиосредств.

Типичный пример – радиосистемы для передачи информации. Поток информации может быть односторонним (радиовещание, телевидение) или двухсторонним (мобильная телефонная связь), а радиосистема – одноканальной или многоканальной. В первом случае в состав системы входят: источник информации, радиопередающее устройство, передающая антенна, радиоканал, приемная антенна, радиоприемное устройство и потребитель информации. При двухсторонней связи в каждом пункте связи есть приемопередающее устройство, а антенна переключается с передачи на прием сигналов. В многоканальной радиосистеме несущее колебание используется для передачи информации от нескольких источников к нескольким потребителям. Необходимыми элементами такой радиосистемы являются дополнительные устройства для разделения каналов связи, кодирования, декодирования и уплотнения информации.

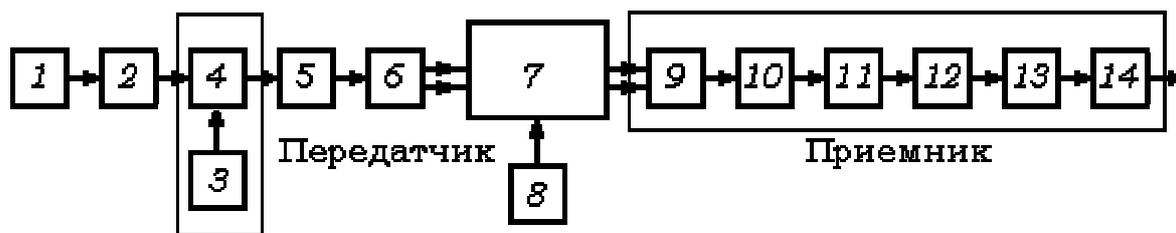
Основные физические процессы, связанные с функционированием радиоэлектронных систем, не зависят от назначения системы и характера передаваемых сигналов и могут быть рассмотрены на примере односторонней приемопередающей радиосистемы, функциональная или блок-схема которой представлена на рисунке.

Радиосистема состоит из последовательности радиоустройств или *функциональных узлов*, каждый из которых выполняет определенное преобразование сигнала (усиление, кодирование, частотную фильтрацию и т.д.) и отображает взаимосвязь между ними, т.е. показывает какие операции и в какой последовательности выполняются с сигналами.

Начнем с источника сообщений. В радиосвязи – это звуковой сигнал,

³ Рывтов С.М. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1966. С. 8.

⁴ Миллер М.А. Избранные очерки о зарождении и взрослении радиофизики в Горьковско-Нижегородских местах/К 50-летию радиофизического факультета Нижегородского университета. Н.Новгород: Изд-во Нижегород.ун-та, 1995. С.24.



Блок-схема приемопередающей радиосистемы:

1 – источник сообщения; 2 – преобразователь сообщения в электрический сигнал; 3 – генератор несущего колебания; 4 – модулятор; 5, 10 – фидеры; 6 – передающая антенна; 7 – канал связи; 8 – источник помех; 9 – приемная антенна; 11 – частотный фильтр; 12 – усилитель; 13 – демодулятор, 14 – преобразователь электрического сигнала в сообщение

в телевидении – распределение интенсивности света, в радиоуправляющем комплексе – величина давления, температуры или скорость вращения космического аппарата. Так как для передачи и обработки наиболее удобны электрические величины, колебания различной физической природы преобразуются в *электрические сигналы*. Роль подобных преобразователей выполняют микрофоны, передающие телевизионные камеры, датчики температуры, давления и т.п. Электрические сигналы на небольшие расстояния можно передать по проводам. При значительном удалении источника сообщения от потребителя приходится использовать свободное пространство и передавать сообщения с помощью электромагнитных волн радиочастотного диапазона от нескольких килогерц до десятков терагерц (10^{12} Гц), хотя в принципе для этого пригодны электромагнитные волны любых частот, в том числе и очень низких. Эффективное излучение последних происходит лишь в тех случаях, когда длина излучаемой волны соизмерима с размерами передающей антенны (при частоте излучения в 10 кГц длина волны составляет 300 км и необходима антенна протяженностью хотя бы в несколько сотен метров).

Источник радиочастотных колебаний, с помощью которого передается сообщение, называется *генератором несущего колебания*, а устройство, изменяющее (*модулирующее*) один или несколько параметров несущего колебания по закону передаваемого сообщения, – *модулятором*. Эти два функциональных узла составляют передатчик, подключаемый с помощью *фидера* к передающей антенне, преобразующей модулированное радиочастотное *колебание* в *радиоволну*.

Через канал связи в виде свободного пространства радиоволна поступает в приемную антенну. На пути распространения на волну воздействуют помехи. Строго говоря, помехи возникают во всех функциональных узлах радиосистемы, но их характеристики известны и определяются структурой функционального элемента, присутствием электровакуумных и полупроводниковых приборов, режимом их работы и т.д. Источники помех, возникающих в свободном пространстве, являются сторонними для радиоустройства, а их характеристики чаще всего не поддаются анализу.

Приемная антенна преобразует волну с передаваемым сообщением и помехами в соответствующие колебания, а фидер направляет их в приемное устройство, состоящее из *частотного фильтра*, выделяющего

полезный сигнал, *усилителя* и *демодулятора (детектора)*, выполняющего операцию, обратную модуляции. Наконец, выходной преобразователь трансформирует электрический сигнал в акустический, световой или сигнал другой физической природы, представляющий переданное сообщение.

Функционирование описанной радиотехнической системы сопровождается различными преобразованиями сигналов. При этом сигналы, а также реальные элементы и узлы заменяются *идеализированными моделями*, допускающими точное математическое описание. Изучение математических моделей и физических закономерностей, лежащих в основе различных преобразований, а также принципов функционирования узлов, реализующих эти закономерности, и составляет предмет курса "Теоретические основы радиоэлектроники". Это первый теоретический курс в цикле радиофизической подготовки студентов. Он формирует основные радиофизические понятия и методы, т.е. закладывает основы радиофизического мышления. Следует еще раз напомнить высказывание М.А.Миллера: «Складывается впечатление, что обучение людей любому думанию, чувствованию и деланию через Радиофизику весьма эффективно и что не так уж много в нашем распоряжении таких "наук-тренажеров"»⁵.

Современная радиоэлектроника интенсивно развивается по многим направлениям. Использование известных и новых физических эффектов, разработок в области твердого тела и полупроводниковых материалов, освоение новых частотных диапазонов, системных и технологических принципов значительно расширили ее естественно-научную базу, а комплексирование технических средств и микроминиатюризация обеспечили решение проблем, совсем недавно казавшихся неразрешимыми. Но, по-видимому, главным достижением последних лет явилась математизация радиоэлектроники, усилившая ее исследовательские возможности и позволившая рассматривать явления более глубоко и обобщенно.

Если ранее в расчетах и конструировании устройств преобладал эмпирический подход и использовались приближенные графоаналитические оценки, то теперь основой для расчетов становятся теоретически или численно построенные модели. Все возрастающая роль теоретических основ радиоэлектроники выдвигает новые задачи перед вузами, и прежде всего перед университетами, хорошо зарекомендовавшими себя в обучении студентов умению ставить и нетривиально решать сложные задачи.

Предлагаемая студентам книга посвящена теоретическим основам радиоэлектроники. К настоящему времени уже издано большое число прекрасных учебников и учебных пособий. Каждый из них ориентирован на свой круг студентов, поэтому отдельные вопросы рассмотрены более детально, чем в предлагаемой книге, а другие рассмотрены недостаточно полно. Четкая и последовательная математическая проработка вопроса не всегда сопровождается столь же четкой физической трактовкой проводимых преобразований и полученных результатов.

Настоящее учебное пособие посвящено важнейшим разделам курса теоретических основ радиоэлектроники: теории детерминированных сиг-

⁵ Миллер М.А. Указ.соч. С.26.

налов и анализу физических процессов, протекающих в линейных радиоэлектронных цепях и системах.

При изложении материала автор старался следовать традициям саратовской радиофизической школы, заложенным основателем кафедры радиопрофики, выдающимся ученым, профессором Венедиктом Ивановичем Калининым и его преемником профессором Григорием Моисеевичем Герштейном. Основное внимание акцентируется не на радиосистемах, а на методах описания и характере протекающих в них физических процессов. Везде, где это возможно, проводится спектральный (гармонический) анализ сигналов и физических процессов.

Ограниченный круг обсуждаемых в книге проблем не случаен. Автором уже изданы два учебных пособия⁶, в которых даны различные описания нелинейных и параметрических пассивных и активных радиоэлектронных систем и приведены методы анализа физических процессов, сопровождающих преобразование сигналов в этих системах. Кроме этого, курс "Теоретические основы радиоэлектроники" читается параллельно с курсами "Теория колебаний", "Статистическая радиофизика", "Цифровая обработка сигналов".

Основная идея и структура книги были предложены автору старейшим российским радиофизиком академиком Владимиром Васильевичем Мигулиным. Именно он обратил мое внимание на необходимость спектрального подхода в описании различных физических процессов, на важность толкования низкочастотных представлений узкополосных сигналов, на необходимость более детального обсуждения преобразований типа свертки, актуальных для многих областей теории антенн, оптики, астрофизики. При написании книги автор старался реализовать его идеи и рекомендации.

Написанию настоящего пособия предшествовали многочасовые дискуссии с коллегами по кафедре и факультету. Существенно улучшить книгу помогли В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова, Д.Э. Постнов, А.С. Листов, А.Н. Павлов, О.Н. Соколов, А.В. Климшин, В.В. Каштанов, А.В. Шабунин, А.П. Никитин, И.А. Хованов, В.Д. Лучинин, К.С. Сергеев, которым автор выражает свою сердечную благодарность.

Книга подготовлена при финансовой поддержке Научно-образовательного центра Саратовского государственного университета (грант REC-006).

⁶ См.: Хохлов А.В. Нелинейные и параметрические радиотехнические цепи и системы с полупроводниковыми приборами: Учеб. пособие. Саратов: Изд-во Саратов.ун-та, 1994; Хохлов А.В. Полупроводниковые усилители и автогенераторы. Саратов: Изд-во Саратов.ун-та, 1997.

Часть I

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Теория электрических сигналов и методы их описания составляют один из основных разделов радиоэлектроники. Фундаментализация последней началась именно с теории сигналов.

Введение геометрических методов и основ функционального анализа позволило создать стройную теорию сигналов и установить соответствие между сигналами и результатами их линейных измерений. Весьма продуктивным явилось введение понятий нормированного линейного пространства и скалярного произведения сигналов, использование достижений теории множеств.

В теоретический базис радиоэлектроники органично влились матричные, статистические и вероятностные модели, а классические методы дуальности приобрели более широкое толкование и применение. Но, пожалуй, самое важное достижение последних лет связано со значительным углублением методов спектрального анализа сигналов, распространением их на не абсолютно интегрируемые и дискретные сигналы, с использованием интегральных преобразований во временной и частотной областях, многообещающее внедрение операций свертки различных сигналов.

Первая часть учебного пособия посвящена избранным вопросам современной теории сигналов и преднамеренно не включает статистическое и вероятностное описание случайных процессов, элементы теории линейных пространств, методы функционального и корреляционного анализа, так как эти вопросы рассматриваются в параллельно читаемых курсах лекций.

Глава 1

Информация, сообщения, сигналы

1.1. Общие сведения о радиотехнических сигналах

Информация (от лат. *informatio* – разъяснение, осведомление) – сведения и данные, отражающие свойства природных объектов, в радиоэлектронике используется в более узком смысле как содержание сообщений, т.е. совокупности символов и знаков, предназначенных для передачи, хранения и использования.

Носителями информации могут быть любые физические процессы, параметры которых отображают передаваемые сообщения. В радиоэлектронике – это электрические колебания.

В физической литературе встречаются различные определения колебаний [1–3], но, по-видимому, наиболее общее определение дано в физической энциклопедии¹:

Колебания – движения или процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени².

Колебания, несущие информацию о состоянии и динамике исследуемого объекта или передающие команды управления, называются *сигналами* (от лат. *signum* – знак), а колебания, препятствующие правильной передаче сообщений, называются *помехами*.

Сигналы и помехи становятся объектами теоретических исследований и расчетов только при наличии строгих математических описаний – математических моделей. Моделями колебаний могут служить графики и таблицы, комплексные числа и векторы, но чаще других используются аналитические функции времени.

Реальные сигналы не удается полностью описать математически, поэтому при создании математических моделей приходится абстрагироваться от конкретной природы и некоторых свойств колебаний, несущественных для рассмотрения. В математике введен даже специальный термин – *гомоморфизм*, представляющий соответствие между элементами множеств, сохраняющее лишь основные операции и отношения. Такие отношения существуют между оригиналами и их моделями.

¹ См.: Физическая энциклопедия. М.: Сов.энциклопедия, 1990. Т.2. С.399.

² Во многих случаях колебания могут быть не только функциями времени, но и функциями пространственных координат.

1.2. Классификация сигналов

1.2.1. Детерминированные и случайные сигналы

Радиотехнические сигналы обычно разделяют на *детерминированные* (от лат. *determino* – определяю) и *случайные*.

Детерминированными называются сигналы, мгновенные значения которых в любой момент времени можно точно предсказать. Они описываются математическими моделями в виде известных функций $x(t)$.

Сигналы, принимающие с течением времени случайные значения (рис. 1.1), не могут быть заранее предсказаны и называются случайными. Математическими моделями случайных сигналов служат случайные функции времени $\xi(t)$. Их характеристики являются статистическими и строятся вероятностными методами. К реальным сигналам, несущим информацию, предъявляются противоречивые требования [5]: с одной стороны, они должны быть случайными, так как содержат непредсказуемые сообщения, с другой – быть узнаваемыми.

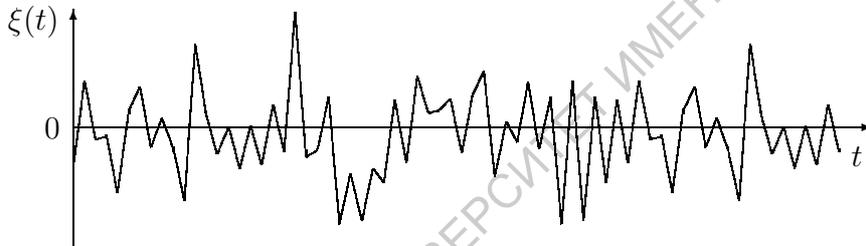


Рис. 1.1. Временная реализация случайного сигнала

Детерминированные сигналы переносят единственное сообщение: "Я существую" и используются в радиоэлектронике в качестве несущих, испытательных (тестирующих) или управляющих.

Детерминированные колебания могут быть периодическими, квазипериодическими, непериодическими (переходными) или хаотическими.

Периодическими называют колебания, мгновенные значения которых повторяются через интервал T , называемый *периодом*:

$$x(t + T) \equiv x(t), \quad -\infty < t < \infty. \quad (1.1)$$

Период – это наименьший промежуток времени (рис. 1.2), через который сигнал возвращается в первоначальное состояние, выбранное произвольно. Простейшим видом периодических сигналов являются гармонические колебания. Более сложные сигналы представляют собой наложение гармонических колебаний различных частот и могут быть периодическими или квазипериодическими:

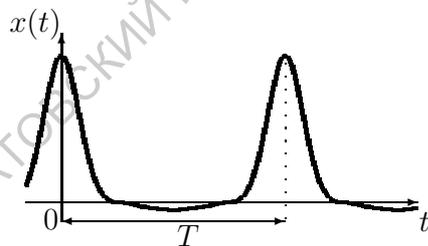


Рис. 1.2. Периодическое колебание

$$x(t) = f(\omega_1 t, \omega_2 t, \omega_3 t, \dots, \omega_N t). \quad (1.2)$$

У периодических колебаний отношение любых частот гармонических составляющих является *рациональным числом*: $\omega_i/\omega_j = m/n$, где m и n –

целые числа. Только в этом случае существует отрезок времени (период), на котором периоды составляющих колебаний укладываются целое число раз. Так, детерминированный сигнал

$$x(t) = A_1 \sin 2\pi t + A_2 \sin 4\pi t + \sin 10\pi t \quad (1.3)$$

содержит три гармонических колебания. Отношения частот $1/2$, $1/5$ и $2/5$ – рациональные числа. Частота первой гармоники 2π , а период $T=1$.

Квазипериодическими называют полигармонические колебания вида (1.2), если отношение хотя бы одной пары частот является *иррациональным* числом. Примером квазипериодического детерминированного сигнала может служить следующее выражение:

$$x(t) = A_1 \sin 2\pi t + A_2 \sin 2\pi\sqrt{3}t + \sin 10\pi t. \quad (1.4)$$

Для квазипериодических процессов иногда вводится понятие *квазипериода*. Если для любого сколь угодно малого ε существует такое \tilde{T} , что для любых t выполняется соотношение

$$|x(t + \tilde{T}) - x(t)| < \varepsilon, \quad (1.5)$$

то \tilde{T} представляет квазипериод сигнала.

Различие в структуре сигналов (1.3) и (1.4) иллюстрирует рис. 1.3, на котором представлены изменения мгновенных значений сигналов, рассчитанные по формулам (1.3) и (1.4).

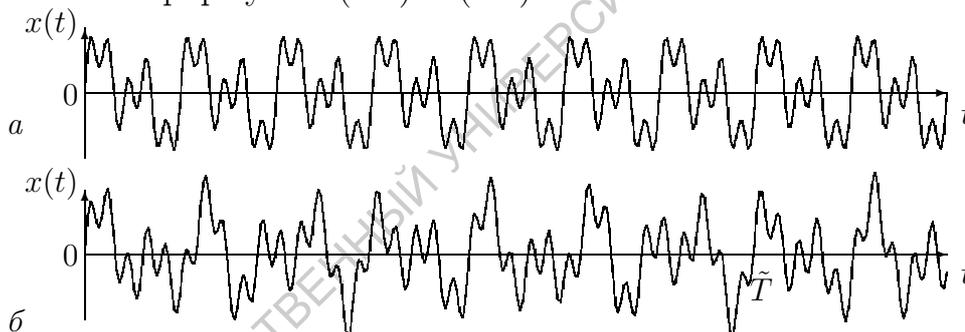


Рис. 1.3. Периодическое (а) и квазипериодическое (б) колебания

Видно, что колебание, изображенное на рис. 1.3,а, является периодическим, а колебание на рис. 1.3,б воспринимается как непериодическое, и даже зная, что это колебание квазипериодическое, по графику функции трудно определить величину квазипериода.

Периодические и квазипериодические сигналы по определению существуют сколь угодно долго и поэтому характеризуют стационарные (установившиеся) состояния радиосистемы. Переходы из одного стационарного состояния в другое описываются непериодическими (переходными) сигналами. К ним относятся нарастающие и затухающие синусоидальные колебания, нарастающие, затухающие и лимитационные сигналы (рис. 1.4), у которых $x(t)$ с течением времени стремится к предельному (равновесному), обычно нулевому значению:

$$x(t) = (Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t})e^{-\kappa t}, \quad \kappa > \alpha, \quad (1.6)$$

где α и κ – некоторые вещественные положительные постоянные, а также импульсные сигналы.

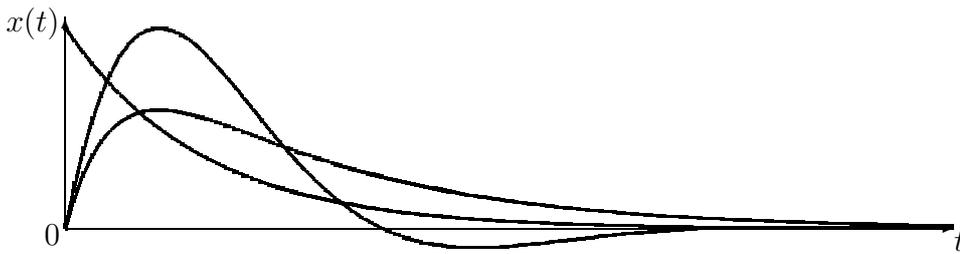


Рис. 1.4. Переходные процессы при трех вещественных значениях α и κ

В последние десятилетия радиофизика все большее внимание уделяет особому классу колебаний, получивших название *детерминированного хаоса* [4]. Они могут возникать в полностью детерминированных (без шумов и флуктуаций) нелинейных системах и внешне не отличаются от реализаций случайного процесса.

1.2.2. Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы

Реальные физические процессы протекают так, что колебания $x(t)$

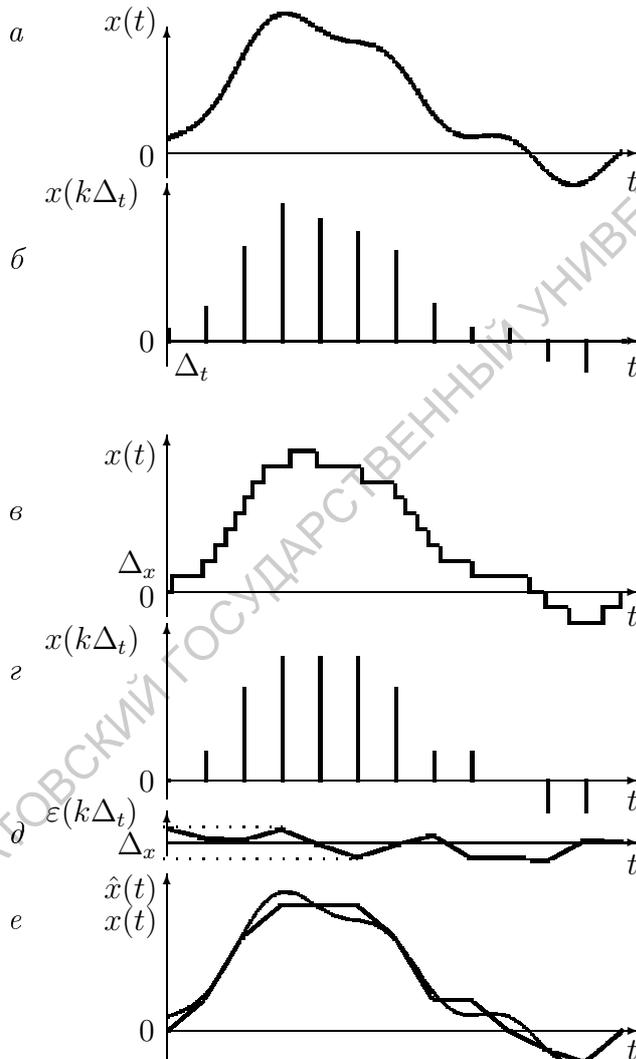


Рис. 1.5. Дискретизация аналогового сигнала

(рис. 1.5,а) могут принимать любые значения в любые моменты времени, т.е. $x(t)$ – непрерывные (континуальные) функции, обычно называемые *аналоговыми сигналами*. Если значения сигнала $x(t)$ задавать в дискретные моменты, равномерно расположенные на оси времени через интервал Δ_t , называемый *шагом дискретизации*, получим *дискретный сигнал* (рис. 1.5,б). Если же функция $x(t)$ принимает дискретные значения x_n , разделенные интервалом Δ_x , то при непрерывном изменении времени диапазон возможных значений сигнала разбивается на конечное число равноудаленных уровней, называемых *уровнями квантования* и возникает *квантованный по амплитуде сигнал* (рис. 1.5,в). Величина Δ_x называется *шагом квантования*.

Функция $x(t)$ может быть и дискретизована по t , и квантована по x (рис. 1.5,з). В этом случае отсчеты получают из рис. 1.5,б заменой истинных

значений $x(k\Delta_t)$, где k – номер отсчета, ближайшими целыми значениями $N\Delta_x$, где N – номер уровня квантования. Дискретизованный по t и квантованный по x сигнал $x(t)$, уровни квантования которого представлены в цифровой форме, называется *цифровым сигналом*.

При переходе от аналоговых сигналов к квантованным всегда возникает ошибка квантования отсчетов $\varepsilon(k\Delta)$ (рис. 1.5, *d*), причем абсолютная величина ошибки не превышает $\Delta_x/2$. Восстановление непрерывного сигнала $\hat{x}(t)$ на основе квантованных отсчетов (рис. 1.5, *e*) сопровождается появлением фонового *шума квантования* в виде разности $x(t) - \hat{x}(t)$. Например, для звуковых сигналов шум проявляется как шипение.

Цифровые сигналы широко применяются в современных радиоэлектронных системах различного назначения, прежде всего потому, что между отдельными отсчетами одного сигнала удается передавать другие сигналы, отсчеты которых сдвинуты на части шага дискретизации, т.е. линия связи становится многоканальной.

1.2.3. Импульсные сигналы

Электрическим импульсом (от лат. impulsus – удар, толчок) называется сигнал, существующий в течение конечного (как правило, достаточно короткого) интервала времени τ , называемого *длительностью*, и обладающий нулевой или пренебрежимо малой амплитудой за его пределами. Импульсы могут быть одиночными или образовывать последовательности (периодические или непериодические). Основными характеристиками импульса (рис. 1.6) являются его амплитуда A_m (наибольшее значения переменной), длительность τ , длительности фронта (резкого нарастания физической величины) и среза (τ_f и τ_c), а также спад вершины ΔA_m .

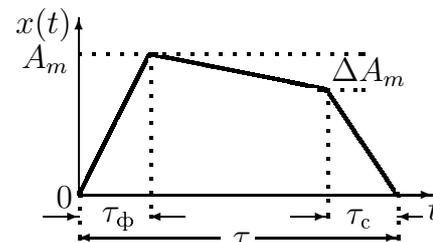


Рис. 1.6. Основные характеристики видеоимпульса

Импульсные процессы чрезвычайно широко распространены в природе. Импульсный характер имеют многие сейсмические явления, волновые процессы в нелинейных и активных средах, в частности, нервные импульсы в биологических системах. Совокупностью импульсов различной амплитуды и длительности является электромагнитное излучение заряженных частиц. В радиоэлектронике различают два основных класса импульсных процессов: видеоимпульсы и радиоимпульсы.

Рассмотренные выше импульсные сигналы получили название *видеоимпульсов* (рис. 1.7, *a-d*), так как впервые они стали широко использоваться в телевидении.

Радиоимпульсами называются высокочастотные или сверхвысокочастотные (СВЧ) колебания, огибающие которых изменяются по закону видеоимпульсов (рис. 1.7, *e-z*), т.е. для радиоимпульсов $x_{\text{рад}}(t)$ справедлива следующая математическая модель:

$$x_{\text{рад}}(t) = x_{\text{вид}}(t) \cdot \cos \omega_0 t, \quad (1.7)$$

где $x_{\text{вид}}(t)$ – функция, описывающая видеоимпульс; ω_0 – круговая частота несущего высокочастотного колебания. Различают видео- и радиоим-

пульсы прямоугольной (рис. 1.7, *a, e*), колоколообразной (рис. 1.7, *в, жс*), треугольной (рис. 1.7, *б*), трапецеидальной (рис. 1.7, *д, з*), экспоненциальной (рис. 1.7, *з*) и другой формы.

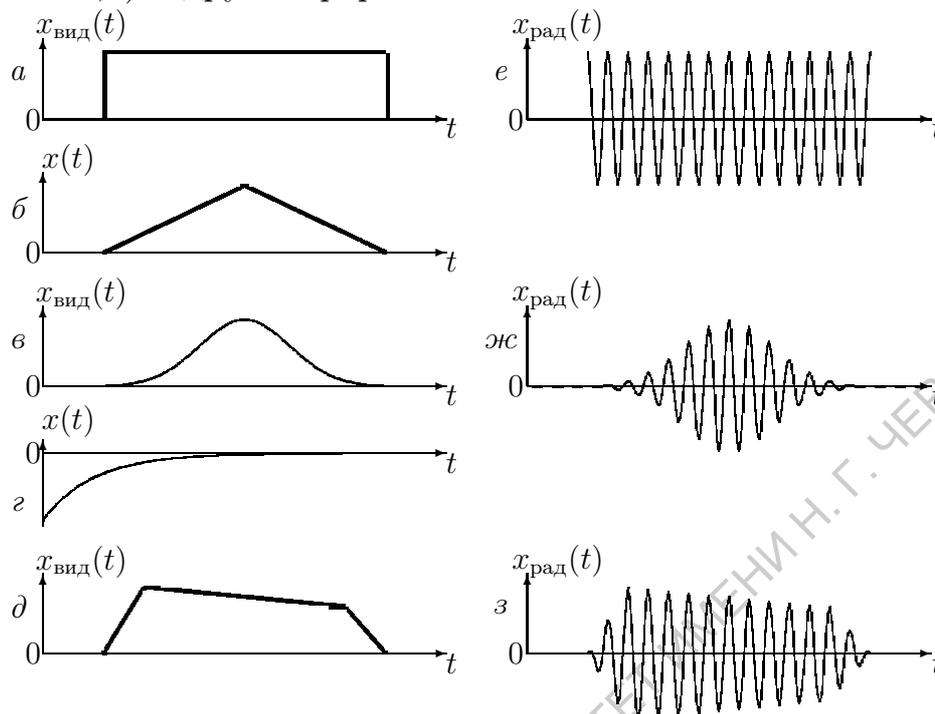


Рис. 1.7. Видеоимпульсы (*a-d*) и радиоимпульсы (*e-z*) различной формы

Будем рассматривать в дальнейшем только детерминированные (периодические, квазипериодические и импульсные) сигналы.

1.2.4. Функция включения Хевисайда и дельта-функция Дирака

Важнейшая роль в теоретической радиоэлектронике отводится простейшим (элементарным) сигналам – функциям включения постоянного и кратковременного импульсного воздействий, математическими моделями которых являются идеализированные функции Хевисайда и Дирака.

Функция Хевисайда описывает мгновенный переход из "нулевого" в "единичное" состояние (рис. 1.8) и обычно задается соотношением:

$$\sigma(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ 1/2, & t = t_0, \\ 1, & t > t_0. \end{cases} \quad (1.8)$$

При этом предполагается, что $\sigma(t)$ задана для всех $-\infty < t < \infty$.

На практике это условие не выполняется, и функция Хевисайда является идеализированной моделью реальных функций включения. Наряду с приведенным определением для теоретического анализа

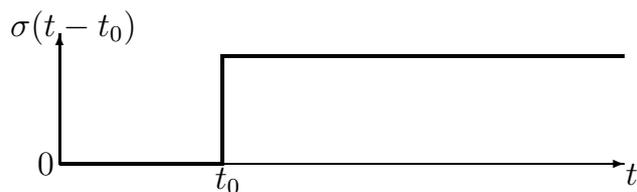


Рис. 1.8 Функция включения Хевисайда

оказываются полезными различные асимптотические аппроксимации $\sigma(t)$, например,

$$\sigma(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0. \quad (1.9)$$

Дельта-функция введена П. Дираком в 1926 г. Она не является функцией в обычном смысле и относится к разряду так называемых "обобщенных" функций³. Обобщенные функции часто используются при изучении разрывных физических процессов и позволяют формально представлять функциональные преобразования в удобном для анализа виде. В частности, с помощью дельта-функций представляют дискретные отсчеты физических величин и спектральные функции не абсолютно интегрируемых функций.

Построим дельта-функцию как результат сжатия прямоугольного импульса (рис. 1.9,а). Пусть симметричный относительно $t=0$ импульс $D(t)$ имеет длительность Δ и высоту $1/\Delta$, т.е. обладает единичной площадью:

$$S_D = \int_{-\infty}^{\infty} D(t)dt = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{1}{\Delta} dt = 1. \quad (1.10)$$

Переходя в (1.10) к пределу при $\Delta \rightarrow 0$, получим сингулярную (от лат. singularis – отдельный, особый) импульсную функцию (рис. 1.9,б).

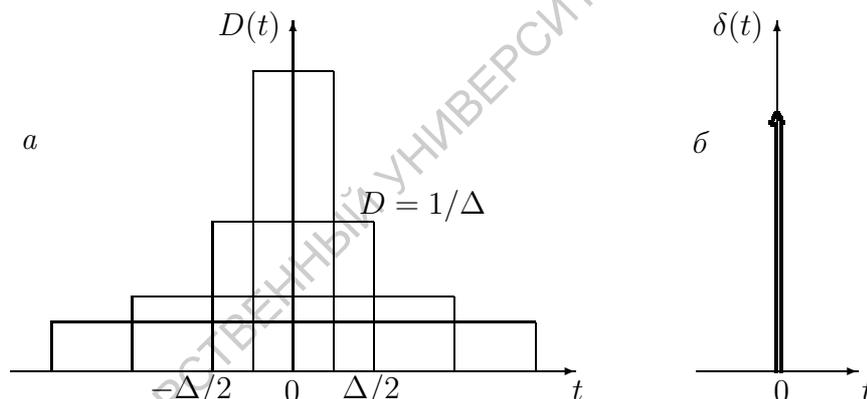


Рис. 1.9. Дельта-функция Дирака: а – как результат сжатия прямоугольных импульсов; б – графическое представление

- Сингулярная импульсная функция $\delta(t)$, имеющая единичную площадь, принимающая бесконечно большое значение в точке $t = 0$ и равная нулю во всех остальных точках, называется *дельта-функцией Дирака*. Символическое изображение дельта-функции представлено на рис. 1.9,б.

Тот же импульс $D(t)$ можно представить разностью двух сдвинутых по времени на σ функций Хевисайда (рис. 1.10):

$$D(t) = \frac{1}{\Delta} (\sigma(t + \Delta/2) - \sigma(t - \Delta/2)). \quad (1.11)$$

³ Строгое определение дельта-функции базируется на понятии функционала как оператора, ставящего в соответствие любому элементу из некоторого множества непрерывных вместе со своими производными функций определенное число.

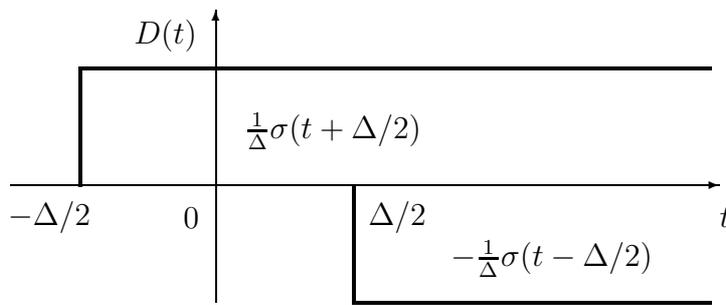


Рис. 1.10. Разность двух функций Хевисайда

Переходя в (1.11) к пределу при $\Delta \rightarrow 0$, получим дельта-функцию в виде

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} D(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left(\sigma\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) \right) = \frac{d\sigma(t)}{dt} = \begin{cases} \infty, & t=0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Справедливо и обратное утверждение:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau. \quad (1.13)$$

Итак, дельта-функция совпадает с производной функции Хевисайда, а функция Хевисайда является интегралом от функции Дирака. Приведем некоторые свойства δ -функций.

1. Симметричность: $\delta(-t) = \delta(t)$.
2. Масштабирование: $\delta(\alpha t) = |\alpha|^{-1} \delta(t)$.
3. Обнуление: $(t - t_0) \delta(t - t_0) = 0$.
4. Алгебраические операции, операции дифференцирования и интегрирования для обобщенной функции Дирака определены подобно тому, как это делается для обычных функций.

5. Стробирование. Поскольку дельта-функция $\delta(t - t_0)$ равна нулю всюду, кроме точки $t = t_0$, и выполняется равенство (1.10), для любой непрерывной функции $x(t)$ имеет место соотношение

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt, \quad (1.14)$$

которое выражает *фильтрующее* или *стробирующее свойство дельта-функций* и ставит в соответствие непрерывной функции $x(t)$ определенное число — ее значение в точке.

Это тривиальный результат, так как функцию представляет она сама, но именно он используется для формального определения дельта-функции (см. сноску 3, с. 15). К тому же рассмотрение сигнала в виде плотной последовательности δ -функций оказывается весьма полезным при построении характеристик радиоэлектронных цепей и систем.

1.3. Интегральные представления сигналов

Радиотехнические сигналы в общем случае обладают достаточно сложной структурой, и не всегда удается построить гомоморфное представление, т.е. подобрать соответствующую аппроксимирующую функцию.

При анализе прохождения таких сигналов в радиоэлектронике используются два подхода. Сложный сигнал либо представляется в виде наложения более простых сигналов, задержанных во времени, или в виде суперпозиции взаимно ортогональных сигналов, действующих одновременно. Первый подход называется *временным* или *динамическим представлением* сигналов, второй – *частотным* или *спектральным представлением*.

Настоящий раздел посвящен динамическому представлению сигналов, а спектральное представление рассматривается в последующих главах книги.

Временное (динамическое) представление сигналов отражает их изменение во времени, причем разность двух значений сигнала, разделенных некоторым интервалом времени, задается элементарным сигналом ступенчатой или импульсной формы. Если временной интервал между отсчетами устремить к нулю, то динамическое представление принимает интегральную форму и обеспечивает точное описание сигналов.

1.3.1. Разложение сигналов по функциям Хевисайда

Представим произвольный сигнал $x(t)$ (рис. 1.11) совокупностью начального скачка и множества последовательно смещенных во времени ступенчатых сигналов. Каждая следующая элементарная функция вводится в более поздний момент времени и характеризует рост или убывание сигнала со временем (динамику сигнала). Интервалы дискретизации времени Δ обычно считаются одинаковыми. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= x(0)\sigma(t) + (x(\Delta) - x(0))\sigma(t - \Delta) + (x(2\Delta) - x(\Delta))\sigma(t - 2\Delta) + \dots = \\ &= x(0)\sigma(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [x(k\Delta) - x((k-1)\Delta)]\sigma(t - k\Delta) = \\ &= x(0)\sigma(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k\Delta) - x((k-1)\Delta)}{\Delta} \sigma(t - k\Delta) \Delta. \end{aligned} \quad (1.15)$$

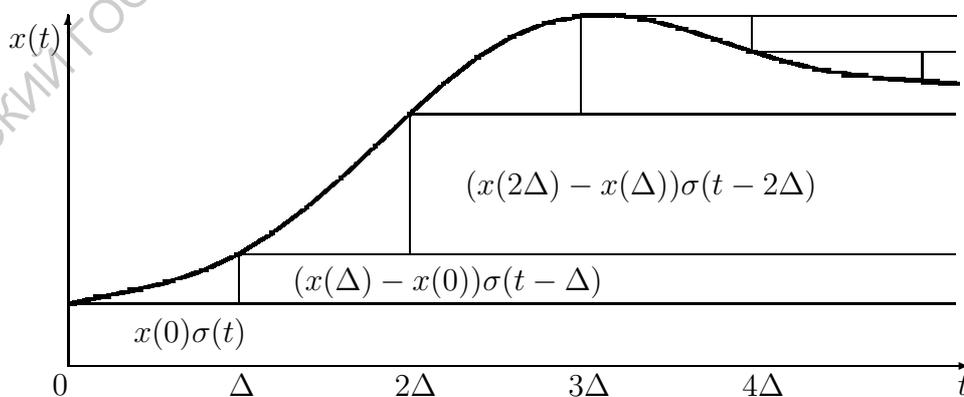


Рис. 1.11. Представление сигнала совокупностью σ -функций

Переходя к пределу при $\Delta \rightarrow 0$ и заменяя суммирование интегрированием по переменной τ ($d\tau \sim \Delta$), получим

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \tilde{x}(t) = x(0)\sigma(t) + \int_0^t \frac{dx}{d\tau} \sigma(t - \tau) d\tau. \quad (1.16)$$

Соотношение (1.16) выражает значение сигнала в любой момент времени через его значение в начальный момент времени и скорость изменения сигнала ($\frac{dx(t)}{dt}$).

1.3.2. Разложение сигналов по функциям Дирака

Представим произвольный сигнал $x(t)$ бесконечной последовательностью плотно примыкающих друг к другу прямоугольных импульсов (рис. 1.12). Каждый последующий импульс вводится в более поздний момент времени.

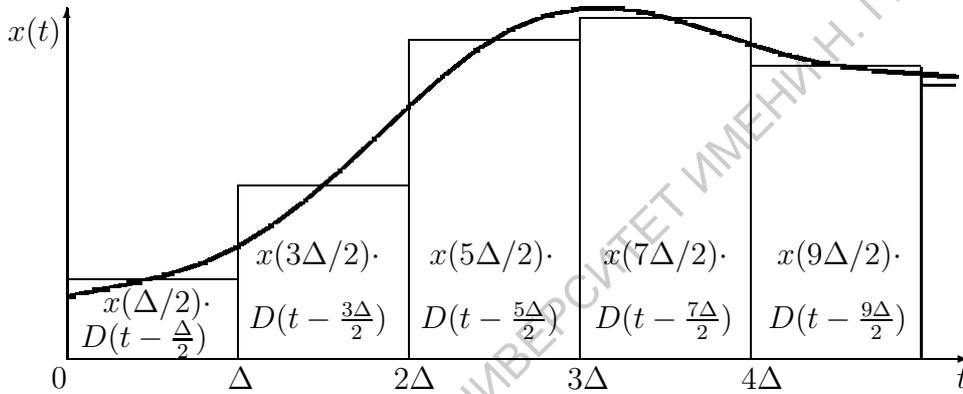


Рис. 1.12. Представление сигнала совокупностью импульсов

Интервалы дискретизации Δ обычно выбираются одинаковыми. Если каждый прямоугольный импульс представить разностью двух сдвинутых во времени функций Хевисайда (см. формулу (1.11)), то сигнал $x(t)$ аппроксимируется приближенным выражением:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[(k + \frac{1}{2})\Delta] \left(\sigma(t - k\Delta) - \sigma[t - (k + 1)\Delta] \right). \quad (1.17)$$

Переходя к пределу при $\Delta \rightarrow 0$, заменяя суммирование интегрированием по переменной $\tau = k\Delta$ ($d\tau \sim \Delta$) и учитывая, что при каждом определенном $t = k\Delta$ отлично от нуля только одно слагаемое с номером k , получим

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \tilde{x}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x[(k + 1/2)\Delta]}{\Delta} \left(\sigma(t - k\Delta) - \sigma[t - (k + 1)\Delta] \right) \Delta = \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[(k + \frac{1}{2})\Delta] D[t - (k + \frac{1}{2})\Delta] \Delta = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Формула (1.18) выражает уже известное *стробирующее свойство дельта-функции*. Следует отметить, что в соответствии с (1.18) значение сигнала $x(t)$ в момент времени t является результатом суммирования его значений не только в предшествующие ($-\infty < \tau < t$), но и в последующие ($\tau > t$) моменты времени, что противоречит принципу причинности. Противоречие снимается, если верхний предел интеграла в (1.18) принять равным t :

$$x(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau. \quad (1.19)$$

Естественно, возникает потребность дать физическую трактовку построенным в 1.3 интегральным представлениям сигналов, кажущимся подчас тривиальными. Физическая трактовка этих представлений будет дана после рассмотрения физических свойств радиоэлектронных систем (см. 8.1.1, 8.1.2).

1.4. Гармонические колебания. Вещественное и комплексное представления

1.4.1. Вещественное представление гармонических колебаний

Гармоническим называется периодическое изменение физической величины (напряжения, заряда или тока) по синусоидальному (или косинусоидальному) закону (рис. 1.13):

$$x(t) = A_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0), \quad -\infty < t < \infty. \quad (1.20)$$

где $x(t)$ – мгновенное значение физической величины; A_m – амплитуда; $\varphi(t) = (\omega t + \varphi_0)$ – мгновенная (полная) фаза колебаний в момент времени t ; ω – круговая или угловая частота, выражаемая в радианах в секунду; φ_0 – начальная фаза колебаний.

Минимальный промежуток времени $T = 2\pi/\omega$, по истечении которого мгновенные значения физической величины повторяются, называется *периодом гармонического колебания* и выражается в секундах или долях секунды, а величина $f = 1/T$, равная числу полных колебаний в единицу времени, называется *частотой гармонического колебания* и выражается в герцах (Гц).

Формула (1.20) выражает *вещественное представление* гармонических сигналов.

Рассмотрим основные свойства гармонических колебаний.

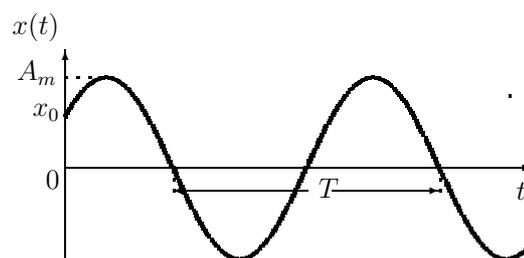


Рис. 1.13 . Гармоническое колебание

- 1. Гармонические сигналы представляют колебания одной определенной и строго постоянной частоты, т.е. являются *однотональными*⁴. Все другие периодические сигналы состоят из конечного или даже бесконечного числа гармонических составляющих и поэтому характеризуются периодом, хотя иногда термин "частота" используется в качестве синонима обратного периода $1/T$ или частоты основной (первой) гармоники периодического сигнала.
- 2. Среднее за период значение гармонической функции равно нулю:

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{A_m}{T} \int_0^T \cos(\omega t + \varphi_0) dt = \frac{A_m}{\omega T} \sin(\omega t + \varphi_0) \Big|_0^T = 0. \quad (1.21)$$

- 3. Гармонические колебания являются идеализацией или математической моделью реальных колебаний, так как последние ограничены во времени, т.е. имеют начало и конец.

Гармонические колебания занимают особое место в радиоэлектронике. И не только потому, что любое физическое воздействие, любой сигнал можно представить в виде суммы гармонических составляющих с различными частотами. Среди периодических функций лишь гармонические сохраняют свою форму при дифференцировании и интегрировании и, следовательно, *инвариантны относительно линейных преобразований*. С помощью гармонических колебаний удобно передавать энергию, но невозможно передать какую-либо информацию, и в радиоэлектронике подобные колебания чаще других используются в качестве несущих и испытательных (тестирующих) воздействий.

Изучение физических процессов, связанных с прохождением гармонических сигналов и их преобразованием в линейных радиосистемах удобно проводить с помощью векторных диаграмм (рис.1.14), на которых гармонические воздействия и отклики представляются векторами в полярной системе координат. При этом полярный радиус пропорционален амплитуде, а полярный угол равен начальной фазе гармонического колебания.

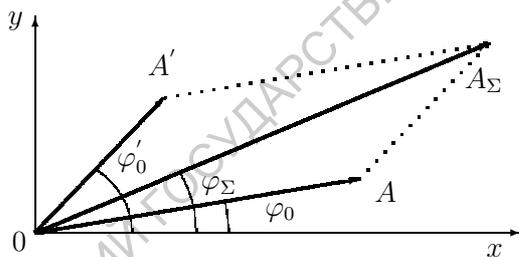


Рис. 1.14 Векторная диаграмма

Поскольку мгновенная фаза колебаний линейно возрастает со временем, вектор равномерно вращается против часовой стрелки с угловой частотой ω , а его проекции на ось Ox представляет мгновенные значения физической величины в соответствующие моменты времени. Векторная диаграмма – это весьма распространенное представление гармонических колебаний. На векторных диаграммах наиболее просто, по правилу параллелограмма (см.

⁴ Гармонические колебания иногда называют *монохроматическими* (от греч. *mónos* – один и *chróma* (*chrómatos*) – цвет), хотя, строго говоря, этот термин введен для электромагнитного излучения.

рис. 1.14), суммируются гармонические колебания одной частоты, что позволяет найти амплитуду A_{Σ} и начальную фазу φ_{Σ} результирующего колебания без использования тригонометрических преобразований.

Когда частоты слагаемых различаются, векторы с течением времени поворачиваются против часовой стрелки на углы, пропорциональные их частотам, и суммарный сигнал представляет мгновенные значения амплитуды и фазы результирующего колебания.

До сих пор использовались линейные характеристики гармонических сигналов и обсуждались линейные преобразования последних. Но для радиоэлектроники представляют известный интерес и мощностные или энергетические характеристики взаимодействующих или несвязанных гармонических колебаний одинаковой частоты, что приводит к образованию квадратичных интегральных параметров.

1.4.2. Энергетические характеристики гармонических колебаний

Пусть в электрической цепи задан ток или напряжение, описываемое гармонической функцией $x(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi_0)$. Мгновенная мощность $p(t)$, выделяемая этим сигналом, имеет вид

$$p(t) = (A_m \cos(\omega t + \varphi_0))^2 = \frac{A_m^2}{2} + \frac{A_m^2}{2} \cos(2\omega t + 2\varphi_0)$$

и представляет сумму двух слагаемых: постоянной составляющей $A_m^2/2$ и косинусоидального колебания с частотой 2ω . Величину $p(t)$ нельзя считать энергетическим параметром рассматриваемого сигнала, так как она периодически изменяется от 0 до A_m^2 . Поэтому в качестве *квадратичных* (энергетических) параметров гармонических сигналов используются:

1) мощность, усредненная за период колебаний $T = 2\pi/\omega$ – *средний квадрат гармонической функции*

$$P_{\text{cp}} = \overline{x^2(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{A_m^2}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi_0) dt = \frac{A_m^2}{2}, \quad (1.22)$$

2) *среднеквадратичная величина* (или СКВ), равная положительному значению квадратного корня из $\overline{x^2(t)}$, т.е. СКВ = $A_m/\sqrt{2}$.

Теперь обратимся к связанным гармоническим колебаниям и рассмотрим мгновенную мощность, обусловленную их взаимодействием. Пусть одно из колебаний представляет ток $i(t) = I_m \cos \omega t$, протекающий через радиоэлектронное устройство, а другое – напряжение на этом устройстве $u(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha)$. Предполагается, что сигналы сдвинуты по фазе. Начальные и особенно мгновенные фазы играют важную роль, когда в теоретическом рассмотрении участвуют два или большее число гармонических колебаний.

Представим мгновенную мощность $p(t) = u(t) \cdot i(t)$ в виде

$$p(t) = U_m \cos(\omega t + \alpha) I_m \cos \omega t = \frac{U_m I_m}{2} \cos \alpha + \frac{U_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \alpha).$$

Как и в предыдущем случае, будем использовать в качестве энергетического параметра мощность $P_{\text{ср}}$, усредненную за период колебаний $T = 2\pi/\omega$. Тогда получим выражение

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t) dt = \frac{U_m I_m}{2} \cos \alpha. \quad (1.23)$$

Из (1.23) следует, что средняя мощность, выделяемая на единичной нагрузке связанными гармоническими сигналами, сдвинутыми по фазе на угол α , пропорциональна амплитудам сигналов и существенно зависит от сдвига фаз: при $0 < \alpha < \pi/2$ средняя мощность положительная, при $\pi/2 < \alpha < \pi$ – отрицательная, а при $\alpha = \pi/2$ обращается в нуль. Эти результаты нетрудно объяснить, используя векторную диаграмму и рассматривая α как угол между векторами электрического поля, пропорционального U_m , и тока I_m . Труднее объяснить другое. При $\alpha \neq 0$ выполняется неравенство $P_{\text{ср}} < P_{\text{max}} = U_m \cdot I_m$, но вещественные модели не объясняют физический смысл мощности $P_{\text{max}} - P_{\text{ср}}$.

1.4.3. Комплексное представление гармонических колебаний

Если на плоскости полярных координат дополнительно ввести правую декартову систему координат так, чтобы ось абсцисс совпала с полярной осью, то проекции вращающегося вектора единичной длины на оси Ox и Oy изменяются как косинус и синус мгновенной фазы $\varphi(t)$ гармонического сигнала. Рассматривая плоскость xOy как комплексную плоскость и учитывая формулу Эйлера

$$e^{j(\omega t + \varphi_0)} = \cos(\omega t + \varphi_0) + j \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (1.24)$$

можно построить комплексное представление гармонических функций, развитое Ч.Штейнмецем и получившее название *символического метода*, более известного как *метод комплексных амплитуд*.

Будем называть *комплексной моделью гармонического колебания* выражение

$$\dot{x}(t) = A_m e^{j(\omega t + \varphi_0)} = A_m e^{j\varphi_0} \cdot e^{j\omega t} = \dot{A}_m e^{j\omega t}, \quad (1.25)$$

а комплексное число $\dot{A}_m = A_m e^{j\varphi_0}$ – *комплексной амплитудой колебания*. Здесь обозначения комплексно-сопряженных величин отличаются от вещественных точками над ними⁵ и символом $\{*\}$.

Комплексную амплитуду можно представлять не только в экспоненциальной (показательной), но и в алгебраической или тригонометрической форме

$$\dot{A}_m = a + jb = A_m \cos \varphi_0 + j A_m \sin \varphi_0 = \text{Re}(\dot{A}_m) + j \text{Im}(\dot{A}_m), \quad (1.26)$$

⁵ Такое обозначение широко распространено и удобно, но им нужно пользоваться осторожно, чтобы не спутать с таким же обозначением первой производной переменной $x(t)$.

где $\operatorname{Re}(\dot{A}_m)$ и $\operatorname{Im}(\dot{A}_m)$ – действительная и мнимая части комплексной амплитуды гармонического колебания. Отсюда

$$\operatorname{Re}(\dot{x}(t)) = \frac{\dot{x}(t) + \dot{x}^*(t)}{2}, \quad \operatorname{Im}(\dot{x}(t)) = \frac{\dot{x}(t) - \dot{x}^*(t)}{2j}. \quad (1.27)$$

Переход от комплексной модели гармонического колебания к вещественной осуществляется путем умножения комплексной амплитуды колебания на $\exp(j\omega t)$ и вычисления вещественной части полученного выражения:

$$x(t) = \operatorname{Re}[\dot{A}_m e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[A_m e^{j(\omega t + \varphi_0)}] = A_m \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1.28)$$

Рассмотрим основные свойства комплексных амплитуд.

1. Если начальная фаза колебания равна нулю, то комплексная амплитуда становится вещественной.

2. Комплексная амплитуда суммы гармонических колебаний одинаковой частоты равна сумме комплексных амплитуд слагаемых.

3. При умножении комплексной амплитуды колебания на комплексное число $Ce^{j\alpha}$ ее модуль увеличивается в C раз, а аргументы сомножителей суммируются. В частности, когда $\dot{C} = \pm j$, модуль комплексной амплитуды сохраняется, а ее аргумент изменяется на $\pm\pi/2$.

4. Комплексная амплитуда временной производной от гармонического колебания равна произведению комплексной амплитуды колебания и оператора дифференцирования $j\omega$, а комплексная амплитуда интеграла – произведению комплексной амплитуды исходного колебания и оператора интегрирования $1/j\omega = -j/\omega$. Действительно, если $x(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi_0)$, то

$$\frac{dx}{dt} = -A_m \omega \sin(\omega t + \varphi_0) = A_m \omega \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}).$$

Отсюда комплексная модель производной $\dot{A}_m[dx/dt]$ принимает вид

$$\dot{A}_m[dx/dt] = A_m \omega e^{j(\varphi_0 + \pi/2)} = j\omega A_m e^{j\varphi_0} = j\omega \dot{A}_m, \quad (1.29)$$

а k -кратному дифференцированию эквивалентно умножение комплексной амплитуды на оператор дифференцирования в k -й степени $(j\omega)^k$. Аналогично доказывается справедливость утверждения о комплексной амплитуде интеграла.

5. Поскольку линейные дифференциальные уравнения представляют алгебраические суммы производных различных степеней, метод комплексных амплитуд позволяет свести линейные дифференциальные уравнения с вещественными коэффициентами к эквивалентным алгебраическим уравнениям относительно $j\omega$.

1.4.4. Энергетические характеристики комплексных гармонических колебаний

Построим мгновенную мощность, обусловленную взаимодействием рассмотренных выше гармонических сигналов: тока $i(t)$ и напряжения $u(t)$, заданных в комплексной форме. Сначала найдем вещественные части мгновенной и усредненной за период мощностей.

Согласно (1.27) вещественные сигналы $i(t)$ и $u(t)$ удовлетворяют соотношениям:

$$i(t) = \frac{\dot{i}(t) + \dot{i}^*(t)}{2}, \quad u(t) = \frac{\dot{u}(t) + \dot{u}^*(t)}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) \cdot i(t) = \frac{\dot{u}(t) + \dot{u}^*(t)}{2} \cdot \frac{\dot{i}(t) + \dot{i}^*(t)}{2} = \\ &= \frac{\dot{U}_m e^{j\omega t} + \dot{U}_m^* e^{-j\omega t}}{2} \cdot \frac{\dot{I}_m e^{j\omega t} + \dot{I}_m^* e^{-j\omega t}}{2} = \\ &= \frac{1}{4} (\dot{U}_m \dot{I}_m e^{2j\omega t} + \dot{U}_m \dot{I}_m^* + \dot{U}_m^* \dot{I}_m + \dot{U}_m^* \dot{I}_m^* e^{-2j\omega t}) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{U}_m \dot{I}_m^* + \dot{U}_m \dot{I}_m e^{2j\omega t}). \end{aligned}$$

Для энергетического параметра P_{cp} в виде усредненной за период колебаний мгновенной мощности получим следующую функцию:

$$\begin{aligned} P_{\text{cp}} &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{U}_m \dot{I}_m^* + \dot{U}_m \dot{I}_m e^{2j\omega t}) dt = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{U}_m \dot{I}_m^*) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Она полностью совпадает с (1.23). При выводе формулы (1.30) использовались только вещественные сигналы и поэтому

$$P_{\text{cpR}} = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \alpha = \operatorname{Re}[P_{\text{cp}}]$$

может быть названа средней за период колебаний *резистивной* или *активной мощностью* взаимодействия гармонических колебаний.

Из (1.30) легко получить квадратичные характеристики комплексных гармонических колебаний. Например, для средней за период колебаний мощности, возникающей на единичном сопротивлении нагрузки, имеем

$$P_{\text{cp}} = \overline{x^2(t)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\dot{I}_m \dot{I}_m^*] = \frac{I_m^2}{2}.$$

Теперь предположим, что один из сигналов задан в вещественной форме, а другой – в комплексной. Это наиболее общий случай, так как начальную фазу одного из колебаний можно принять равной нулю, а другому в качестве начальной фазы присвоить разность исходных фаз.

Пусть $i(t) = I_m \cos \omega t$, а $\dot{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \alpha)} = U_m \cos(\omega t + \alpha) + j U_m \sin(\omega t + \alpha)$. Так как для $U_m \cos(\omega t + \alpha)$ мгновенная и средняя мощности найдены, достаточно рассчитать их для $U_m \sin(\omega t + \alpha)$. С помощью замены $\alpha = \pi/2 + \alpha'$ трансформируем $U_m \sin(\omega t + \alpha)$ в $U_m \cos(\omega t + \alpha')$ и, повторяя вывод формулы (1.30), получим для *реактивной составляющей* средней за период мощности выражение

$$P_{\text{cpX}} = \operatorname{Re}(\dot{U}_m \dot{I}_m^*) = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \alpha' = \frac{1}{2} U_m I_m \sin \alpha.$$

Итак, средняя за период комплексная мощность взаимодействия гармонических колебаний состоит из резистивной и реактивной составляющих:

$$\dot{P}_{\text{ср}} = \dot{U}_m \dot{I}_m^* = P_{\text{ср}R} + jP_{\text{ср}X} = \frac{U_m I_m}{2} \cos \alpha + j \frac{U_m I_m}{2} \sin \alpha, \quad (1.31)$$

где $P_{\text{ср}R}$ – резистивная, а $P_{\text{ср}X}$ – реактивная составляющие средней мощности. Теперь становится ясным, что с ростом сдвига фаз α все большая часть мощности взаимодействия гармонических сигналов переходит в реактивную составляющую, причем за период сигналов реактивная энергия дважды поступает от источника к нагрузке и обратно, т.е. реактивная мощность характеризует обмен энергией между генератором и нагрузкой.

Таким образом, комплексное представление гармонических сигналов оказывается не только полезным с точки зрения упрощения математических выкладок, но и открывает широкие возможности для раскрытия природы физических явлений и построения новых характеристик радиосигналов (реактивная мощность).

Метод комплексных амплитуд представляет эффективный инструмент для наиболее рационального решения разнообразных задач радиоэлектроники, среди которых спектральный анализ сигналов, всестороннее изучение фазовых соотношений, расширение закона Ома на энергоемкие (реактивные) элементы.

Глава 2

Спектральное представление периодических колебаний

Гипотеза спектрального разложения произвольных периодических функций была выдвинута французским математиком и физиком Жаном Батистом Жозефом Фурье в 1822 г., а первое строгое доказательство версии Фурье осуществил немецкий математик Петер Густав Дирихле в 1829 г. Идеи, математически оформленные Фурье в виде рядов гармонических функций, использовались задолго до этого в астрономии и музыке (достаточно вспомнить эпициклы Птолемея или соображения Пифагора о консонансах), а термины "гармоника" и "основной тон" введены Совером еще в 1704 г.

Одна и та же нота (например, нота *ля первой октавы*), исполненная на скрипке, флейте или органе, имеет совершенно непохожее звучание, а между тем частота основного тона этих колебаний одинакова и составляет $f_0 = 440$ Гц. Различие в звучании определяется индивидуальным тембром инструмента, т.е. наличием гармоник с частотами Nf_0 , равными 880 Гц, 1320 Гц и т.д., а также их относительной амплитудой или интенсивностью. Если с помощью специального прибора измерить частоты и амплитуды гармоник, то можно получить дискретный спектр колебания. Чем больше гармоник (обертонов) содержит колебание (нота) и чем больше их амплитуды, тем богаче спектр. Генератор звуковых колебаний с подключенным к нему динамиком тоже можно настроить на 440 Гц, т.е. получить ноту *ля* электронным способом. Но какой бедный тембр при этом звучит! Уже достигнут заметный прогресс в создании электронных аналогов рояля, скрипки и других инструментов, но их спектральные свойства и звучание пока еще заметно отличаются от естественных.

Фурье первым понял, что гармоники сложного сигнала представляют синусоидальные функции кратных частот, но собственно теорема Фурье была доказана только в начале XX века и инициировала пересмотр ряда понятий теории функций [5–7].

2.1. Математическая постановка проблемы

Пусть на интервале времени $[t_1, t_2]$, конечном или бесконечном, определено множество функций $\{x(t)\}$, образующее вещественное (или комплексное) *гильбертово пространство* $\hat{\mathbf{L}}$ и пусть в этом пространстве

введен ортонормированный базис $\{\dot{\Phi}_i(t)\}$ в виде бесконечной системы функций

$$\dot{\Phi}_0(t), \dot{\Phi}_1(t), \dot{\Phi}_2(t), \dot{\Phi}_3(t), \dot{\Phi}_4(t), \dots, \quad (2.1)$$

удовлетворяющих условиям

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\Phi}_k(t) \dot{\Phi}_m^*(t) dt = 0, \quad k \neq m \quad (\text{ортогональность}),$$

$$\int_{t_1}^{t_2} |\dot{\Phi}_k(t)|^2 dt = \|\dot{\Phi}_k\|^2 = 1 \quad (\text{нормирование})$$

или

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\Phi}_k(t) \dot{\Phi}_m^*(t) dt = \delta_{km} = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases} \quad (2.2)$$

где δ_{km} – символ Кронекера. Тогда колебание $x(t) \in \dot{\mathbf{L}}$ можно представить соотношением

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dot{\alpha}_i \dot{\Phi}_i(t). \quad (2.3)$$

Любой сигнал, записанный в таком виде, называется *спектральным разложением в базисе ортонормированных функций* $\{\dot{\Phi}_i(t)\}$. Он полностью определяется совокупностью коэффициентов разложения $\dot{\alpha}_i$, которые можно рассматривать как координаты вектора \vec{x} в бесконечномерном пространстве с ортонормированным базисом $\{\dot{\Phi}_i(t)\}$.

Чтобы найти коэффициенты разложения $\dot{\alpha}_i$, достаточно умножить обе части (2.3) на $\dot{\Phi}_m^*$ и проинтегрировать полученные выражения в пределах области определения функций, т.е. от t_1 до t_2 . Все слагаемые вида $\int_{t_1}^{t_2} \dot{\alpha}_i \dot{\Phi}_i(t) \dot{\Phi}_m^*(t) dt$ при $i \neq m$ обращаются в нуль (ортогональность), и в правой части равенства остается единственное слагаемое

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\alpha}_i \dot{\Phi}_i(t) \dot{\Phi}_i^*(t) dt = \dot{\alpha}_i \|\dot{\Phi}_i\|^2 = \dot{\alpha}_i.$$

. Отсюда

$$\dot{\alpha}_i = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \dot{\Phi}_i^*(t) dt. \quad (2.4)$$

Ряд (2.3) с коэффициентами (2.4), не зависящими от t , называется *обобщенным рядом Фурье функции* $x(t)$ в выбранном базисе $\{\dot{\Phi}_i(t)\}$. Существует большое число систем ортонормированных функций, которые используются в качестве базисных. Базисные наборы образуют гармонические функции, функции Хаара, Радемахера, Уолша, широко используемые в цифровой обработке сигналов, ортогональные полиномы и функции Чебышева, Лежандра, Эрмита. При этом главная проблема состоит

в определении условий сходимости обобщенного ряда к $x(t)$. Для оценки сходимости можно ограничиться подмножеством из конечного числа N базисных функций и, аппроксимируя $x(t)$ рядом $\hat{x}(t)$ из N членов, оценить сходимость интегралом

$$\varepsilon(N) = \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - \hat{x}(t)]^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[x(t) - \sum_{i=0}^N \dot{\alpha}_i \dot{\Phi}_i(t) \right]^2 dt,$$

представляющего среднеквадратичную ошибку аппроксимации. Если при разложении заданного (аналитически или графически) колебания по такой "урезанной" системе ортонормированных функций существуют такие N и $\dot{\alpha}_i$, что ошибка аппроксимации ε меньше сколь угодно малого наперед заданного значения, то ряд (2.3) называется *сходящимся к $x(t)$ в среднем квадратичном*.

В теоретической радиоэлектронике в качестве базиса чаще всего используется совокупность гармонических функций, замечательные свойства которых рассмотрены в 1.4.

Представление сложных сигналов совокупностями гармонических колебаний с различными частотами называется *спектральным разложением в базисе гармонических функций*. При этом ряды, получаемые в результате разложения, сходятся, а необходимое число N базисных функций удастся ограничить с учетом допустимой среднеквадратичной ошибки аппроксимации ε .

2.2. Спектральное разложение в базисе гармонических функций

2.2.1. Разложение в тригонометрические ряды Фурье

Будем рассматривать периодические колебания, удовлетворяющие (1.1), а в качестве базиса используем следующую систему тригонометрических функций с кратными частотами:

$$\begin{aligned} \Phi_0(t) &= \sqrt{\frac{1}{T}}, \\ \Phi_{1C}(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi}{T}t, & \Phi_{1S}(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi}{T}t, \\ \Phi_{2C}(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2\frac{2\pi}{T}t, & \Phi_{2S}(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2\frac{2\pi}{T}t, \\ &\dots & & \dots \end{aligned}$$

Представленная совокупность функций является ортонормированной на отрезке $[0, T]$, в чем легко убедиться с помощью формулы (2.2). Множитель $\sqrt{2/T}$ принято включать в коэффициенты, а ряд (2.3) записывать в виде

$$x(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_{kC} \cos k \frac{2\pi}{T} t + c_{kS} \sin k \frac{2\pi}{T} t \right), \quad (2.5)$$

где

$$c_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt, \quad (2.6)$$

$$c_{kC} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos k \omega_I t dt, \quad (2.7)$$

$$c_{kS} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin k \omega_I t dt. \quad (2.8)$$

Здесь и в дальнейшем $\omega_I = 2\pi/T$ – угловая частота *основной (первой) гармоники* периодической функции $x(t)$.

Ряд (2.5) называется *рядом Фурье в тригонометрической форме* и представляет периодическое колебание в виде совокупности гармонических функций. Однако такое разложение не удобно для целей спектрального анализа, так как каждой частоте $k\omega_I$ отвечают одновременно две составляющие ряда, и необходимо устройство, способное различать синусоидальные и косинусоидальные (*квадратурные*) составляющие и находить их амплитуды. Задача упрощается, когда периодические функции симметричны: тригонометрические ряды (2.5) четных функций ($x(-t) = x(t)$) не содержат синусоидальные составляющие ($c_{kS} = 0$), а нечетных ($x(-t) = -x(t)$) – косинусные составляющие ($c_{kC} = 0$), но для спектрального анализа это ничего не дает. (Справедливость этих утверждений предлагается проверить самостоятельно.)

Оптимальной для спектрального анализа представляется так называемая *амплитудно-фазовая формулировка* рядов Фурье.

2.2.2. Амплитудно-фазовая формулировка ряда Фурье

Каковы бы не были коэффициенты Фурье c_{kC} и c_{kS} , можно найти такое $c_k > c_{kC}$, c_{kS} и такой угол φ_k , чтобы выполнялись соотношения

$$c_{kC} = c_k \cos \varphi_k, \quad c_{kS} = c_k \sin \varphi_k. \quad (2.9)$$

Подставляя (2.9) в (2.5) и используя формулу косинуса разности углов, приведем выражение, стоящее под знаком суммы в (2.5), к виду:

$$x(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos (k\omega_I t - \varphi_k). \quad (2.10)$$

Это тоже тригонометрический ряд Фурье, но его гармонические составляющие представлены *амплитудами* $c_k = \sqrt{c_{kC}^2 + c_{kS}^2}$ и *начальными фазами* $\varphi_k = \arctg(c_{kS}/c_{kC})$.

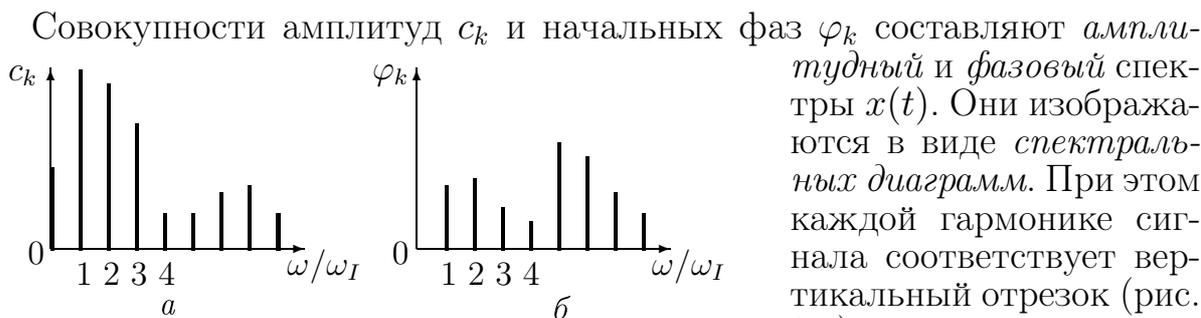


Рис. 2.1. Амплитудный (а) и фазовый (б) спектры периодического сигнала

а местоположение на горизонтальной оси соответствует частоте.

Если функция $x(t)$ удовлетворяет *условиям Дирихле*:

- а) $x(t)$ определена и ограничена,
- б) $x(t)$ имеет только конечное число максимумов и минимумов, а также конечное число разрывов на период (т.е. интервал $[t, t + T]$ можно разбить на конечное число подынтервалов, в которых $x(t)$ непрерывна и монотонна),
- в) в точках разрыва t_i функции $x(t)$ существуют $x(t_i - 0)$ и $x(t_i + 0)$, то $x(t)$ интегрируема, а ряд $\hat{x}(t)$ сходится к $x(t)$ в обычном смысле (поточечно) во всех точках, кроме точек разрыва, в которых $x(t) = [x(t_i - 0) + x(t_i + 0)]/2$.

- Математическая модель периодического колебания, удовлетворяющего условиям Дирихле, представляет сумму постоянной составляющей и гармонических колебаний кратных частот.
- Совокупность гармоник, на которые разлагается функция $x(t)$, называется *спектром периодического колебания $x(t)$* .
- Спектральные линии периодического сигнала образуют *эквидистантный дискретный* или *эквидистантный линейчатый* спектр с частотами $k\omega_I$.
- Тригонометрические ряды (2.5) и (2.10) представляют *вещественные модели* реальных периодических сигналов.
- Структура спектров зависит от симметрии функций.

2.2.3. Представление ряда Фурье в комплексной форме

Воспользуемся формулой Эйлера и представим каждую гармоническую функцию в (2.10) суммой комплексно-сопряженных величин. Тогда из (2.10) имеем

$$x(t) = \frac{1}{2} \left(c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{j(k\omega_I t - \varphi_k)} + c_k e^{-j(k\omega_I t - \varphi_k)} \right). \quad (2.11)$$

Если ввести комплексные амплитуды гармоник $\dot{C}_k = c_k e^{-j\varphi_k}/2$ и $\dot{C}_k^* = c_k e^{j\varphi_k}/2$, то уравнение (2.11) принимает вид

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_I t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \dot{C}_k^* e^{jk\omega_I t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_I t}, \quad (2.12)$$

где $\dot{C}_0 = c_0/2$, $\dot{C}_{-k} = \dot{C}_k^*$, а (2.12) называется *комплексным рядом Фурье*.

Согласно формуле (2.12) величина $x(t)$ равна сумме комплексных амплитуд всех его гармоник. Соответствующая векторная диаграмма для начального момента времени ($t = 0$) изображена на рис. 2.2.

Поскольку $|\dot{C}_{-k}| = |\dot{C}_k|$ и $\varphi_{-k} = -\varphi_k$, векторы \dot{C}_{-k} и \dot{C}_k располагаются симметрично относительно полярной оси, их сумма является вещественным числом $\dot{C}_{-k} + \dot{C}_k = 2|\dot{C}_k| \cos \varphi_k$, а выражение для $x(t)$ при $t = 0$ принимает вид

$$x(0) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|\dot{C}_k| \cos \varphi_k.$$

В любой следующий момент t_1 длины векторов C_k не изменяются, а их полярные углы получают приращения $k\omega_I t_1$ и $-k\omega_I t_1$. При этом гармоники с положительными частотами поворачиваются на соответствующие углы *против*, а гармоники с отрицательными частотами — *по часовой стрелке*. Каждая пара векторов $|\dot{C}_k|$ и $|\dot{C}_{-k}|$ в сумме дает по-прежнему вещественное число, но длина результирующего вектора изменяется:

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|\dot{C}_k| \cos(k\omega_I t - \varphi_k),$$

т.е. соответствует амплитудно-фазовой формулировке (2.10) ряда Фурье. Кажущееся удвоение коэффициентов Фурье связано с введенными выше обозначениями ($|\dot{C}_k| = c_k/2$) и отражает тот факт, что $2|\dot{C}_k| \cos \varphi_k$ представляет сумму проекций на вещественную ось двух одинаковых по модулю комплексных чисел.

Таким образом, комплексный ряд (2.12) в отличие от вещественного ряда (2.10) содержит гармоники с отрицательными частотами. Сразу отметим, что *отрицательные частоты не имеют физического смысла и порождены комплексным представлением гармонических колебаний*.

Для определения коэффициентов комплексного ряда Фурье представим амплитуды гармоник \dot{C}_k в тригонометрической форме и используем соотношения (2.9). Тогда

$$\dot{C}_k = \frac{c_k}{2} \cos \varphi_k - j \frac{c_k}{2} \sin \varphi_k = \frac{c_k C}{2} - j \frac{c_k S}{2}. \quad (2.13)$$

Подставляя (2.7) и (2.8) в (2.13), окончательно получим:

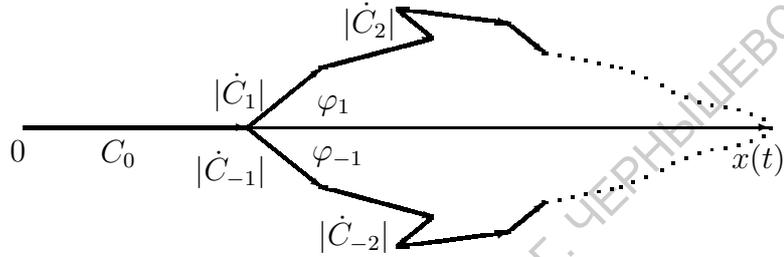


Рис. 2.2. Векторная диаграмма периодического сигнала для $t = 0$

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)(\cos k\omega_I t - j \sin k\omega_I t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_I t} dt. \quad (2.14)$$

Совокупность комплексных амплитуд \dot{C}_k называется *комплексным спектром сигнала* $x(t)$. На спектральных диаграммах изображаются гармоники с положительными и отрицательными частотами, т.е. амплитудный и фазовый спектры имеют вид, представленный на рис. 2.3, хотя реальные спектры физических процессов содержат только гармоники с положительными частотами, а их амплитуды, согласно (2.12), при $k \neq 0$ – вдвое больше амплитуд соответствующих комплексных гармоник. (Сравните рис. 2.1 и 2.3.)

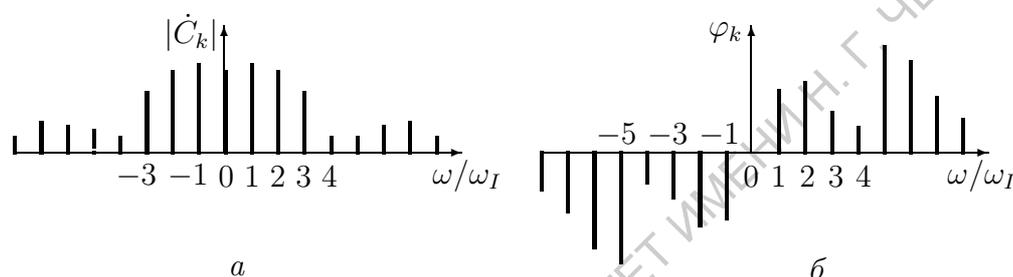


Рис. 2.3. Амплитудный (а) и фазовый (б) комплексные спектры периодического сигнала

Комплексный спектр можно изобразить в виде единой спектральной диаграммы, если над вертикальными отрезками амплитудного спектра указать численные значения начальных фаз гармоник.

Формулы (2.12) и (2.14) часто называют *парой преобразований Фурье*, так как первая из них позволяет определить совокупность комплексных амплитуд по заданной функции $x(t)$ (прямое преобразование Фурье \mathbf{F}), а вторая – найти $x(t)$ по заданному множеству комплексных амплитуд гармоник (обратное преобразование Фурье \mathbf{F}^{-1}). Чтобы подчеркнуть дuality преобразований Фурье, в литературе (особенно зарубежной) вместо \dot{C}_k вводят дискретно-определенные функции $\dot{X}(k)$:

$$\dot{X}(k) = \mathbf{F}[x(t)], \quad x(t) = \mathbf{F}^{-1}[\dot{X}(k)].$$

В качестве иллюстрации возможностей спектрального метода рассмотрим спектральное представление последовательности прямоугольных видеоимпульсов. Импульсы прямоугольной формы будут чаще других встречаться в книге, поскольку такой формой обладают многие радиотехнические колебания: тестирующие, управляющие, а также тактирующие и цифровые.

2.2.4. Спектр последовательности прямоугольных видеоимпульсов

Пусть периодическая (с периодом T) последовательность импульсов (рис. 2.4) задана аналитическим выражением:

$$x(t) = \begin{cases} E, & nT - \tau/2 < t < nT + \tau/2 \quad (n - \text{целое число}), \\ 0, & nT + \tau/2 < t < (n+1)T - \tau/2, \end{cases} \quad (2.15)$$

где E – амплитуда, а τ – длительность импульсов.

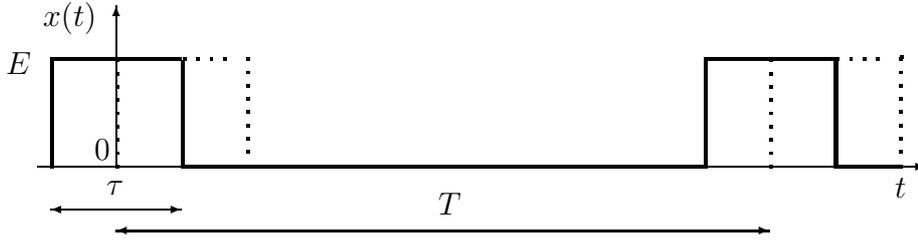


Рис. 2.4. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

Подставляя $x(t)$ в (2.14), получим:

$$\begin{aligned} C_0 &= E \frac{\tau}{T}, & C_k &= \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-jk\omega_I t} dt = \frac{E}{T} \cdot \frac{e^{-jk\omega_I t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}}{-jk\omega_I} = \\ & & &= \frac{E}{-jk\omega_I T} (e^{-jk\omega_I \tau/2} - e^{jk\omega_I \tau/2}) = E \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin k\omega_I \tau/2}{k\omega_I \tau/2}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $\omega_I = 2\pi/T$ – частота основной (первой) гармоники $x(t)$.

Амплитудный и фазовый спектры рассматриваемой последовательности импульсов, т.е. зависимости амплитуд и фаз \dot{C}_k от частот гармоник, представлены на рис. 2.5,а и 2.5,б соответственно.

С учетом (2.12) сигнал $x(t)$ можно представить в виде следующего ряда Фурье:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} E \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin k\omega_1 \tau/2}{k\omega_1 \tau/2} e^{jk\omega_1 t} = E \frac{\tau}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} 2E \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin k\omega_1 \tau/2}{k\omega_1 \tau/2} \cos k\omega_1 t = \\ &= \frac{E}{q} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi/q}{k\pi/q} \cos k\omega_1 t \right), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где величина $q = T/\tau$ характеризует длительность паузы между импульсами и называется *скважностью последовательности* (спектральные диаграммы рис. 2.5 построены для скважности 5).

Если фронт импульса совпадает с началом отсчета времени (пунктирная кривая на рис. 2.4), то

$$x(t) = \begin{cases} E, & nT < t < nT + \tau \quad (n - \text{целое число}), \\ 0, & nT + \tau < t < (n+1)T, \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{T} \int_0^{\tau} E e^{-jk\omega_I t} dt = \frac{E}{T} \cdot \frac{e^{-jk\omega_I t} \Big|_0^{\tau}}{-jk\omega_I} = \frac{E}{-jk\omega_I T} (e^{-jk\omega_I \tau} - 1) = \\ &= E \frac{\tau}{T} e^{-jk\omega_I \tau/2} \frac{\sin k\omega_I \tau/2}{k\omega_I \tau/2}, \end{aligned}$$

т.е. $\varphi_k = -k\omega_I\tau/2$, а $x(t)$ принимает вид

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin k\omega_I\tau/2}{k\omega_I\tau/2} e^{jk(\omega_I t - \omega_I\tau/2)} =$$

$$= \frac{E}{q} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi/q}{k\pi/q} \cos(k\omega_I t - k\omega_I\tau/2) \right). \quad (2.19)$$

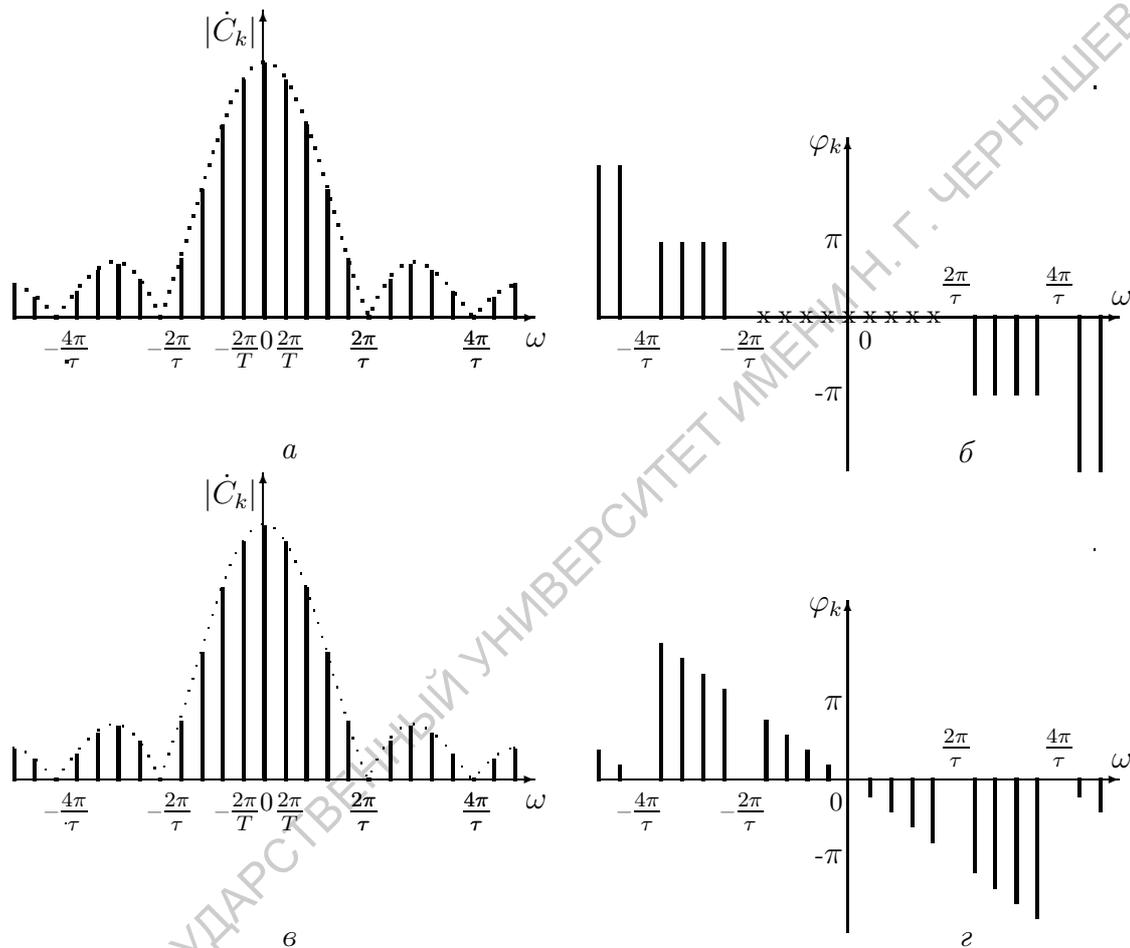


Рис. 2.5. Комплексные амплитудные и фазовые спектры основной (а и б) и задержанной (в и г) последовательностей импульсов

Таким образом, при задержке последовательности импульсов на $\tau/2$ амплитудный спектр не изменяется (рис. 2.5, в), а трансформируется только фазовый спектр (рис. 2.5, г).

Проанализируем полученные результаты.

1. Огибающая спектра, согласно (2.17), определяется соотношением

$$\frac{2\tau}{T} \cdot \left| \frac{\sin k\omega_I\tau/2}{k\omega_I\tau/2} \right| = \frac{2}{q} \cdot \left| \frac{\sin k\pi/q}{k\pi/q} \right|, \quad (2.20)$$

имеет *лепестковую структуру* и принимает нулевые значения на частотах $\omega = 2K\pi/\tau$ или на гармониках с номерами $k = K \cdot q$. Первый нуль ($K = 0$) огибающей спектра последовательности прямоугольных

импульсов имеет круговую частоту $\omega = 2\pi/\tau$, следующий $\omega = 4\pi/\tau$ и т.д., т.е. в нуль обращаются гармоники с номерами $k = q, 2q, 3q, \dots$

В частности, при $q = 2$ амплитуды всех четных гармоник обращаются в нуль, а амплитуды нечетных уменьшаются обратно пропорционально номерам гармоник (рис. 2.6,б). Последовательность прямоугольных импульсов, длительность τ которых равна половине периода (рис. 2.6,а), называется *меандр*.

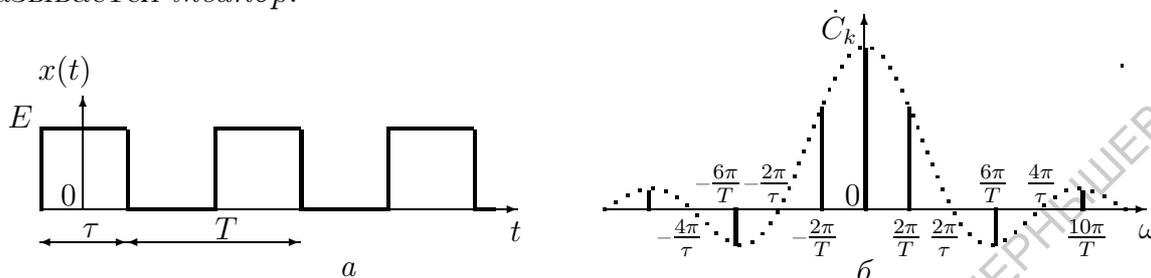


Рис. 2.6. Периодическая последовательность импульсов при $q=2$: а – меандр; б – комплексный спектр

Вклад различных составляющих в сигнал, аппроксимируемый рядом Фурье с конечным числом слагаемых, иллюстрирует рис. 2.7. При $k = 3$ суммируются всего 5 гармоник и $\hat{x}(t)$ сильно отличается от $x(t)$, но уже при $k = 31$ функции $\hat{x}(t)$ и $x(t)$ практически не различимы.

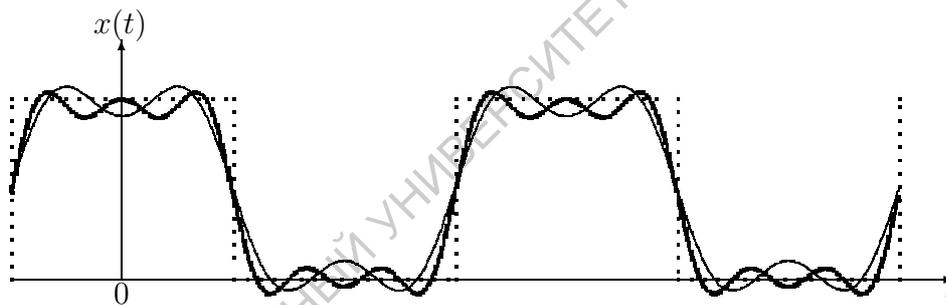


Рис. 2.7. Аппроксимация $x(t)$ укороченным рядом Фурье: $k = 3$ (тонкая линия), $k = 5$ (жирная линия) и $k = 31$ (пунктирная линия)

2. Уменьшение длительности импульсов τ сопровождается перемещением нулей огибающей в область все более высоких частот, т.е. *спектр расширяется*, а скорость убывания его амплитуд и сами амплитуды уменьшаются.

Так при $q = 2$ имеем $X(3)/X(1) = C_3/C_1 = 0.33$, $X(5)/X(1) = 0.2$, а при $q = 10$ – соответственно 0.97 и 0.9, т.е. амплитуда первой гармоники уменьшается с $0.64E$ до $0.2E$.

3. Увеличение T при неизменном значении τ вызывает рост числа спектральных линий в каждом лепестке диаграммы и уменьшение расстояний между ними. При $T \rightarrow \infty$, т.е. при переходе от последовательности к одиночному импульсу, спектр *из дискретного превращается в непрерывный, состоящий из бесконечно большого числа спектральных линий малой амплитуды* ($|\dot{C}_k| \rightarrow 0$), расположенных сколь угодно близко друг к другу.

Глава 3

Спектральное представление непериодических сигналов

Обобщение ряда Фурье на непериодические функции было предложено самим Фурье при исследовании структуры ряда в предельном случае очень большого периода. Строгое доказательство обоснованности представления непериодических колебаний совокупностями гармонических функций является чрезвычайно сложным. Однако возможно формальное решение задачи, основанное на правдоподобных доводах.

3.1. Интегральное преобразование Фурье

3.1.1. Переход от ряда Фурье к интегралу Фурье. Спектральная функция

Пусть задан непериодический сигнал, например импульс $x(t)$ конечной длительности (рис. 3.1,а). Как уже отмечалось, переход от последовательности к одиночному импульсу можно осуществить, устремляя период повторения импульсов T к бесконечности, но согласно (2.14) при этом ($|\dot{C}_k| \rightarrow 0$) и не ясно, каким образом их описывать.

Представим модель непериодического сигнала в виде периодического продолжения $x(t)$, повторяя его через очень большой, но конечный период T (рис. 3.1,а, пунктирная кривая). Построенный периодический сигнал $x_{\text{пер}}(t)$ можно разложить в комплексный ряд Фурье

$$x_{\text{пер}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{j2\pi kt/T}.$$

Его коэффициенты \dot{C}_k удовлетворяют соотношению (2.14), т.е.

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_{\text{пер}}(t) e^{-j2\pi kt/T} dt,$$

а спектр периодизированного сигнала становится линейчатым и эквидистантным. Фрагмент спектра $x_{\text{пер}}(t)$ представлен на рис. 3.1,б.

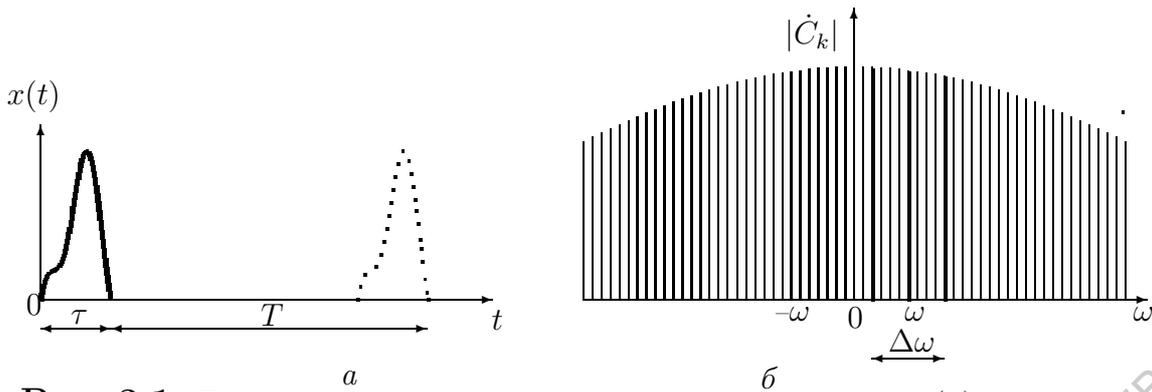


Рис. 3.1. Периодическое продолжение импульсного сигнала (а) и фрагмент его спектра (б)

Рассмотрим небольшой интервал частот $\Delta\omega$ в окрестности $\omega = 2\pi k/T$. Пусть $\Delta\omega = 2n\pi/T$ содержит n гармоник ($n \ll k$) сигнала $x_{\text{пер}}(t)$. Поскольку период повторения импульсов T велик, а $\Delta\omega$ мало, все гармоники, оказавшиеся в интервале $\Delta\omega$, имеют близкие частоты, их амплитуды можно считать практически одинаковыми, а совокупность n гармоник заменить эквивалентным гармоническим колебанием со средней частотой ω и некоторой комплексной амплитудой $\Delta\dot{C}$. Величину $\Delta\dot{C}$ нетрудно вычислить простым умножением амплитуды k -й гармоники на число линий n :

$$\Delta\dot{C} = \frac{2n}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_{\text{пер}}(t) e^{-j2\pi kt/T} dt.$$

Удвоение n объясняется включением в $\Delta\dot{C}$ гармоник как с положительными, так и с отрицательными частотами, расположенных в окрестностях $\pm\omega$. Используя введенные выше обозначения, окончательно получим:

$$\Delta\dot{C} = \frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} x_{\text{пер}}(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.1)$$

Ширина частотного интервала $\Delta\omega$ выбрана произвольно, поэтому неопределенной становится амплитуда эквивалентного гармонического колебания. Неопределенность устраняется, если использовать среднюю амплитуду гармоник, заключенных в полосе частот $\Delta\omega$, т.е. рассмотреть отношение $\Delta\dot{C}$ к $\Delta\omega/\pi$.

Чтобы перейти к спектру непериодического процесса, достаточно устремить период повторения T к бесконечности. Тогда $\Delta\omega = 2n\pi/T \rightarrow 0$, вспомогательный сигнал $x_{\text{пер}}(t)$ превращается в $x(t)$, а отношение $\Delta\dot{C}/\Delta\omega$ — в производную $\dot{X}(\omega) = d\dot{C}/d\omega$.

Назовем

$$\dot{X}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \pi \frac{\Delta\dot{C}}{\Delta\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.2)$$

спектральной плотностью или спектральной функцией¹ $x(t)$. Спектральная плотность сигнала является непрерывной комплексной функцией частоты и зависит от формы $x(t)$.

В радиоэлектронике наряду с комплексной спектральной плотностью часто применяется вещественная спектральная плотность сигналов, определенная только для положительных частот от 0 до $+\infty$ соотношением

$$X(\omega) = \operatorname{Re}[\dot{X}(\omega)] = 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos \omega t dt.$$

В дальнейшем будет использоваться в основном комплексная спектральная плотность.

Для решения обратной задачи – восстановления сигнала по известной его спектральной функции $\dot{X}(\omega)$ – обратимся снова к периодизированному сигналу $x_{\text{пер}}(t)$ и представим его в виде ряда Фурье, но в качестве комплексных амплитуд гармоник будем использовать значения спектральной функции в дискретных точках:

$$x_{\text{пер}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{j2\pi kt/T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \dot{X}(2\pi k/T) e^{j2\pi kt/T}.$$

Представляя $1/T$ как $(k+1)/T - k/T$ и учитывая, что частоты $2\pi k/T$ и $2\pi(k+1)/T$ близки по величине, будем рассматривать их разность как малое приращение $d\omega$ частоты $\omega = 2\pi k/T$. Тогда имеем

$$x_{\text{пер}}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{X}(2\pi k/T) e^{j2\pi kt/T} [2\pi(k+1)/T - 2\pi k/T].$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $T \rightarrow \infty$, получим:

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_{\text{пер}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.3)$$

3.1.2. Прямое и обратное преобразования Фурье

Соотношение (3.2) называется *прямым интегральным преобразованием Фурье* функции $x(t)$:

$$\dot{X}(\omega) = \mathbf{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt,$$

¹ Этот термин предпочтительнее, что подтверждается ГОСТ 16465-70.

а формула (3.3) представляет *обратное преобразование Фурье* для функции $x(t)$:

$$x(t) = \mathbf{F}^{-1}[\dot{X}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

- Формулы (3.2) и (3.3) так же, как (2.12) и (2.14), составляют пару преобразований Фурье, причем (3.2) *анализирует функцию* $x(t)$ по составу спектральных составляющих, а (3.3) *восстанавливает или синтезирует* $x(t)$ из гармонических функций.
- Теорема Фурье утверждает, что *процесс анализа-синтеза выполняется без потерь информации*, т.е. восстановленный сигнал *идентичен* исходному сигналу, если функция $x(t)$ абсолютно интегрируема $\left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \right)$, имеет конечное число максимумов и минимумов, а также конечное число разрывов.

Пара преобразований Фурье становится полностью симметричной, если в (3.3) перейти от круговой частоты ω к частоте $f = \omega/2\pi$. Тогда

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}(f) e^{j2\pi ft} df. \quad (3.4)$$

Полная симметрия интегральных преобразований Фурье позволяет ввести *принцип дуальности времени и частоты*:

- если $X(f)$ является преобразованием Фурье функции $x(t)$, то $x(-f)$ представляет преобразование Фурье функции $X(t)$.

Пусть, например, $X_1(f)$ является спектральной плотностью функции $x(t)$, изображенной на рис. 3.1, *a*. Замещая в $X_1(f)$ частоту f временем t , получим временную функцию $X_1(t)$, спектральной плотностью которой будет зеркальное отражение функции, представленной на рис. 3.1, *a*, т.е. $x(-f)$.

Итак, периодический или непериодический физический процесс полностью определяется заданием либо функции времени либо его комплексного спектра. Оба эти представления равносильны.

Представляя энергию сигнала $x(t)$ в виде $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt$, можно ввести важное соотношение, известное как равенство Парсеваля²:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df.$$

Функция $|X(f)|^2$ называется *энергетическим спектром* сигнала.

² Строго говоря, Парсеваль построил аналогичное равенство для рядов Фурье, а его обобщение на интегралы Фурье, вероятно, было сделано Рэлеем.

3.2. Спектральные плотности избранных интегрируемых сигналов

3.2.1. Спектральная плотность экспоненциального видеоимпульса

Пусть

$$x(t) = \begin{cases} Ee^{-\alpha t}, & t \geq 0 \quad (\alpha > 0 \text{ и вещественная}), \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Фурье-преобразование функции $x(t)$ (рис. 3.2,а), согласно (3.2), имеет вид

$$\dot{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Ee^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \frac{E}{-(\alpha + j\omega)} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{E}{\alpha + j\omega}. \quad (3.5)$$

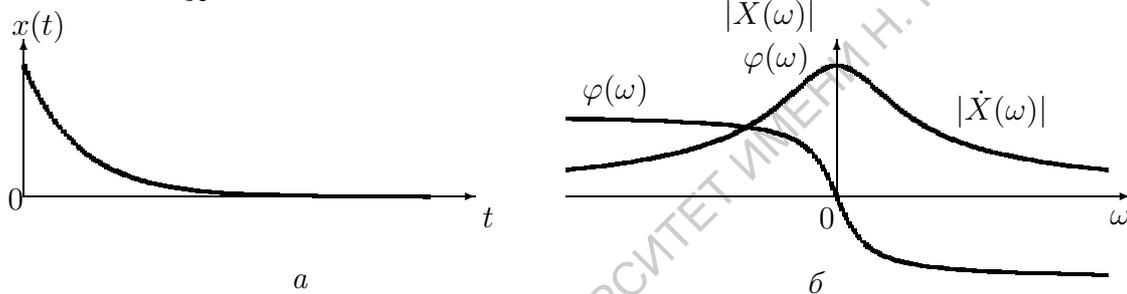


Рис. 3.2. Экспоненциальный видеоимпульс (а) и частотные зависимости модуля $|\dot{X}(\omega)|$ и аргумента $\varphi(\omega)$ его спектральной функции (б)

Частотные зависимости модуля $|\dot{X}(\omega)| = E/\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$ и аргумента $\varphi(\omega) = -\arctg(\omega/\alpha)$ спектральной функции изображены на рис. 3.2,б. Эти спектральные диаграммы иллюстрируют важнейшее свойство симметрии спектральных функций, характерное для преобразования Фурье вещественных сигналов $x(t)$:

- если $x(t)$ вещественная функция, то модуль и реальная часть ее спектральной плотности являются *четными функциями*, а аргумент и мнимая часть – *нечетными функциями*, т.е.

$$\dot{X}(\omega) = \dot{X}^*(-\omega).$$

Согласно (3.4) функцию $x(t)$ можно представить следующим интегралом Фурье:

$$x(t) = Ee^{-\alpha t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E}{\alpha + j\omega} e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E}{\alpha + j2\pi f} e^{j2\pi f t} df.$$

3.2.2. Спектральная плотность гауссова импульса

Пусть видеоимпульс описывается функцией Гаусса (рис. 3.3,а)

$$x(t) = Ee^{-\pi(t/\tau)^2},$$

где τ – некоторая характеристическая длительность (“ширина” импульса на уровне $1/e^2 = 0.135$ составляет $2\tau/\sqrt{\pi}$). Функция Гаусса быстро убывает при $|t| \rightarrow \infty$, т.е. абсолютно интегрируема. При вычислении ее спектральной функции будем использовать формулу (3.2) в виде

$$\dot{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} E e^{-\pi(t/\tau)^2} e^{-j2\pi ft} dt.$$

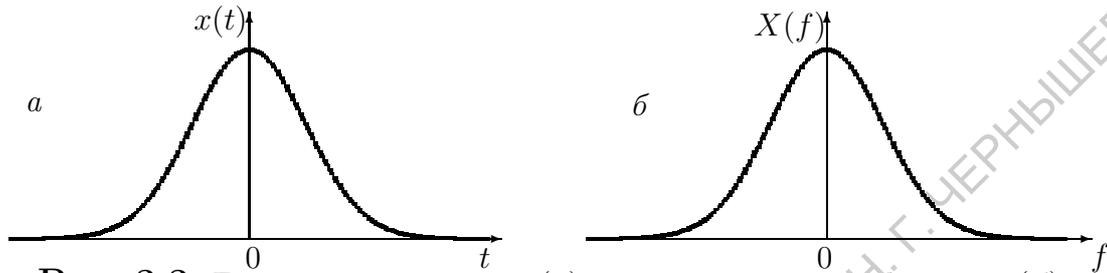


Рис. 3.3. Гауссов видеоимпульс (а) и его спектральная функция (б)

Приведем суммарный показатель экспонент к виду $-\pi u^2$, дополняя его до полного квадрата. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{X}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} E e^{-\pi[(t/\tau)^2 + j2ft - (f\tau)^2]} e^{-\pi(f\tau)^2} dt = \\ &= E e^{-\pi(f\tau)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi[(t/\tau + jf\tau)^2]} dt = E\tau e^{-\pi(f\tau)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi u^2} du, \end{aligned}$$

где $u = t/\tau + jf\tau$.

Для вычисления интеграла $A = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi u^2} du$ рассмотрим A^2 и введем полярные координаты:

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi u^2} du \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(u^2+v^2)} dudv = \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} r e^{-\pi r^2} d\varphi = \\ &= \int_0^{\infty} 2\pi r e^{-\pi r^2} dr = \int_0^{\infty} e^{-w} dw = 1. \end{aligned}$$

Итак, спектральная плотность гауссова импульса вещественна

$$X(f) = E\tau e^{-\pi(f\tau)^2}$$

и описывается такой же функцией, как и $x(t)$ (рис. 3.3,б). Построенная математическая модель имеет важное значение для теории сигналов, так как в этом случае симметрией обладают не только интегральные соотношения для функции $x(t)$ и ее спектральной функции $\dot{X}(f)$, но и сами функции.

3.2.3. Спектральная плотность δ -функции Дирака

Как отмечалось выше, дельта-функция, хотя и принимает бесконечно большое значение при $t = 0$, обладает единичной площадью и поэтому абсолютно интегрируема. Построим ее спектральную функцию с помощью преобразования Фурье:

$$\dot{X}_\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Используя фильтрующее свойство $\delta(t)$, этот интеграл можно считать равным значению экспоненты в точке $t = 0$, т.е.

$$\dot{X}_\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = 1. \quad (3.6)$$

Итак, спектральная плотность функции $\delta(t)$ вещественна и равна единице для всех частот $-\infty < \omega < \infty$. Ее спектральная диаграмма изображена на рис. 3.4,а.

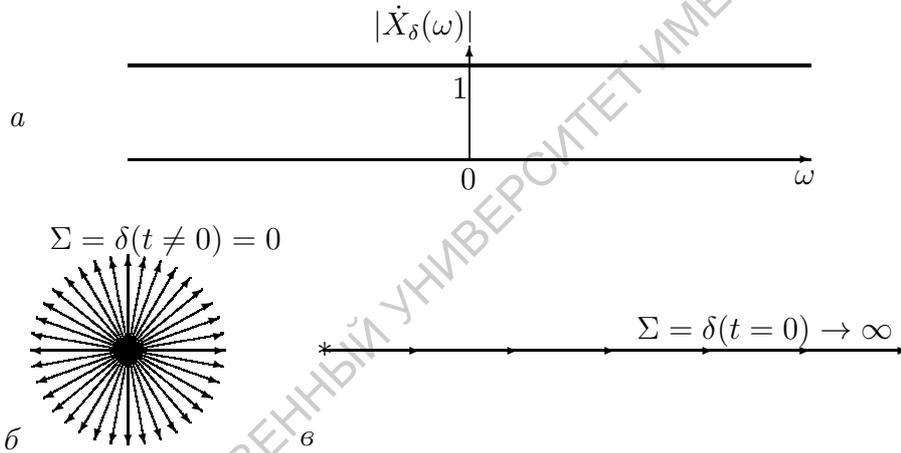


Рис. 3.4. Спектральная плотность дельта-функции (а) и векторные диаграммы, иллюстрирующие суммирование спектральных компонент при $t \neq 0$ (б) и при $T = 0$ (в)

Обратное преобразование Фурье удовлетворяет соотношению

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_\delta e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.7)$$

Тот факт, что сумма бесконечного числа гармоник при $t = 0$ создает бесконечно большой сигнал, а при $t \neq 0$ – нулевой сигнал, нетрудно объяснить из качественных соображений с помощью векторных диаграмм (рис. 3.4,б, в).

В момент времени $t = 0$ все спектральные составляющие $\dot{X}(\omega)$ имеют нулевые начальные фазы и суммируются как коллинеарные векторы (рис. 3.4,в). Во все другие моменты времени ($t \neq 0$) их текущие фазы отличны от нуля. (Для большей наглядности все спектральные составляющие приведены к началу координат.) Каждой гармонике с положительной фазой соответствует спектральная компонента с подходящей

отрицательной фазой (рис. 3.4,б), а так как они имеют одинаковые амплитуды, происходит полная взаимная компенсация векторов $\dot{X}(\omega)$, и результирующий вектор обращается в нуль.

3.2.4. Спектральная плотность прямоугольного видеоимпульса

Пусть прямоугольный видеоимпульс (рис. 3.5,а) задан аналитическим выражением:

$$x(t) = \begin{cases} E, & -\tau/2 < t < +\tau/2, \\ 0, & t < -\tau/2, \quad t > +\tau/2. \end{cases}$$

Подставляя $x(t)$ в (3.2), получим:

$$\dot{X}(\omega) = E \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{E}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = E\tau \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2}$$

или

$$\dot{X}(f) = E\tau \frac{\sin \pi f\tau}{\pi f\tau} = E\tau \operatorname{sinc}(f\tau). \quad (3.8)$$

Используя обратное преобразование Фурье, синтезируем $x(t)$ в виде

$$x(t) = E\tau \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(f\tau) e^{j2\pi ft} df.$$

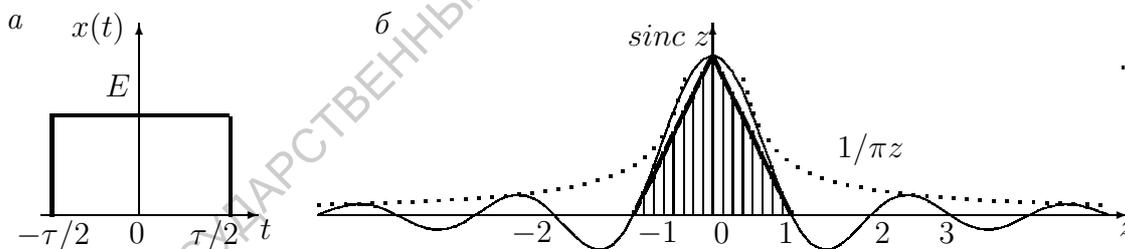


Рис. 3.5. Прямоугольный видеоимпульс (а) и его спектральная плотность (б). Пунктирная линия представляет изменение ее модуля

Согласно (3.8) спектральная плотность одиночного прямоугольного импульса представляет знакопеременную функцию, известную как $\operatorname{sinc} z = \sin \pi z / (\pi z)$ (рис. 3.5,б). Интересно, что огибающая этой функции изменяется по гиперболическому закону $1/\pi z$ (рис. 3.5,б, пунктирная кривая), а площадь под кривой функции $x(z) = \operatorname{sinc} z$ равна площади вписанного в главный лепесток треугольника (рис. 3.5,б, заштрихован).

Спектральная плотность симметричного относительно начала отсчета времени прямоугольного импульса вещественна (модуль и аргумент спектральной функции представлены на рис. 3.6,а,б соответственно). Сопоставление спектральных диаграмм рис. 3.6 и 2.4 показывает, что огибающие спектров совпадают. Нули огибающих располагаются при одинаковых значениях частоты ($\omega = 2\pi n/\tau$). Единственное отличие состоит

в том, что спектр одиночного импульса сплошной, а спектр последовательности импульсов – линейчатый.

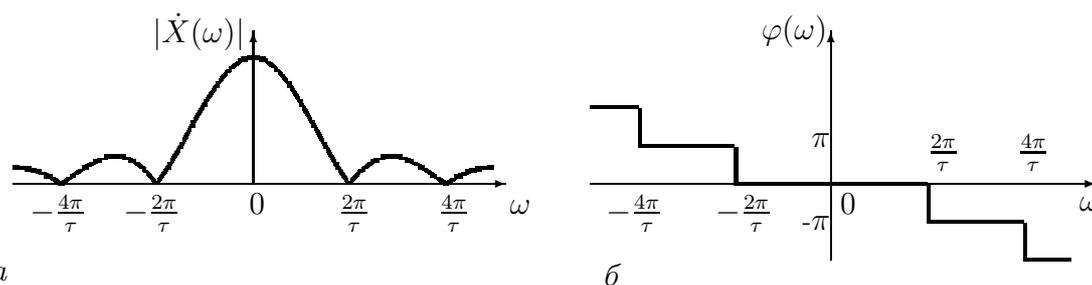


Рис. 3.6. Модуль (а) и аргумент (б) спектральной плотности прямоугольного импульса

Наконец, используя принцип дуальности частоты и времени, можно показать, что преобразование Фурье функции $x(t) = AF \text{sinc}(Ft)$ имеет вид:

$$X(f) = \begin{cases} A, & -F/2 < f < F/2, \\ 0, & f < -F/2, \quad f > F/2. \end{cases}$$

3.2.5. "Иерархия" спектральных функций видеоимпульсов

Сравним спектральные функции видеоимпульсов различной формы и попытаемся выявить закономерности изменения их модулей с ростом частоты спектральных составляющих. Будем рассматривать зависимости вида $|\dot{X}(f\tau)/X_{max}|$, где f – частота спектральной компоненты; τ – длительность импульса; X_{max} – наибольшее значение спектральной плотности. Тогда нормированные спектральные функции $|\dot{X}(f\tau)/X_{max}|$ гауссова (рис. 3.3,а) и прямоугольного (рис. 3.5,а) импульсов принимают вид

$$|\dot{X}_{Гс}(f\tau)| = e^{-\pi(f\tau)^2}, \quad (3.9)$$

$$|\dot{X}_{пр}(f\tau)| = \left| \frac{\sin \pi f\tau}{\pi f\tau} \right|, \quad (3.10)$$

Спектральные функции еще трех видеоимпульсов, симметричных относительно начала отсчета времени³, можно получить с помощью формулы (3.2).

Нормированная спектральная функция треугольного импульса $x_{тр}(t) = 1 - 2\frac{|t|}{\tau}$ (рис. 3.7,а) описывается соотношением

$$|\dot{X}_{тр}(f\tau)| = \frac{\sin^2 \pi f\tau/2}{(\pi f\tau)^2}, \quad (3.11)$$

косинусоидального импульса $x_{кос}(t) = \cos \frac{\pi t}{\tau}$ (рис. 3.7,б) – формулой

$$|\dot{X}_{кос}(f\tau)| = \left| \frac{\cos \pi f\tau}{1 - (2f\tau)^2} \right|, \quad (3.12)$$

³ Соотношения предлагается вывести самостоятельно.

а "приподнятого" косинусоидального импульса, известного как "окно Хэннинга" $x_{\text{хэн}}(t) = (1 + \cos 2\pi t/\tau)/2$ (рис. 3.7, в), – формулой

$$|\dot{X}_{\text{хэн}}(f\tau)| = \left| \frac{\sin \pi f\tau}{\pi f\tau(1 - (f\tau)^2)} \right|. \quad (3.13)$$

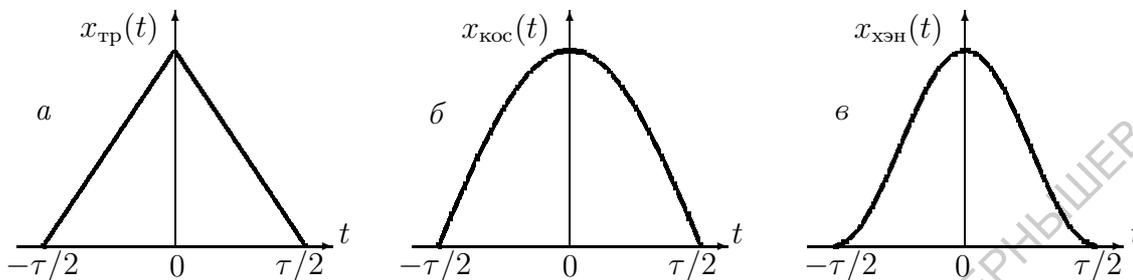


Рис. 3.7. Видеоимпульсы треугольной (а), косинусоидальной (б) формы и в виде "окна Хэннинга" (в)

Для сопоставления модули спектральных плотностей пяти видеоимпульсов изображены на одной спектральной диаграмме (рис. 3.8).

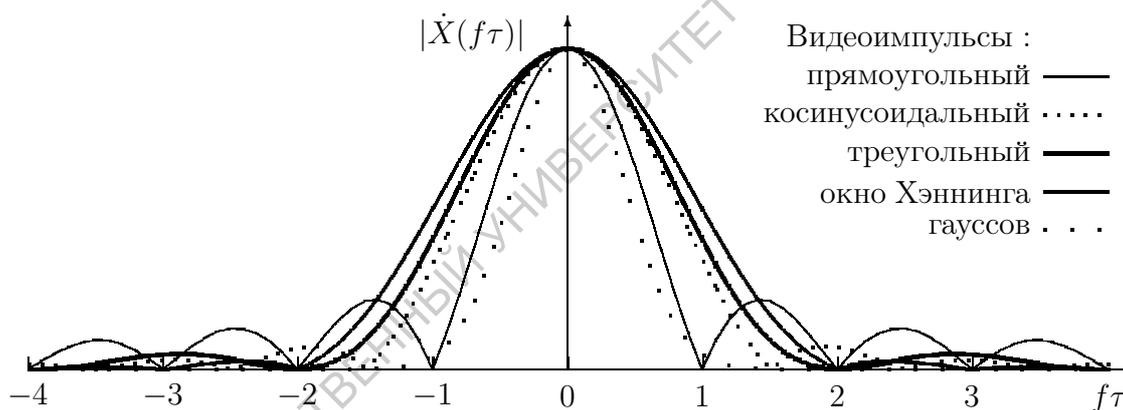


Рис. 3.8. Модули спектральных плотностей пяти видеоимпульсов

Если рассматривать ширину спектра как частотный интервал между первыми нулями огибающей (главный лепесток), то наименьшей шириной главного лепестка обладает прямоугольный импульс, а наибольшей – треугольный импульс и окно Хэннинга. Уже отмечалось, что огибающая спектральной функции прямоугольного импульса убывает обратно пропорционально частоте f . Сравнение скоростей убывания огибающих функций спектральных плотностей удобнее проводить на спектральных диаграммах, представленных в логарифмическом масштабе (рис. 3.9). Диаграммы (рис. 3.8 и 3.9) позволяют сделать важный для практики вывод:

- вдоль последовательности импульсов **прямоугольный** → **треугольный** → **косинусоидальный** → **хэннинговский** → **гауссов** скорость убывания огибающих нарастает.

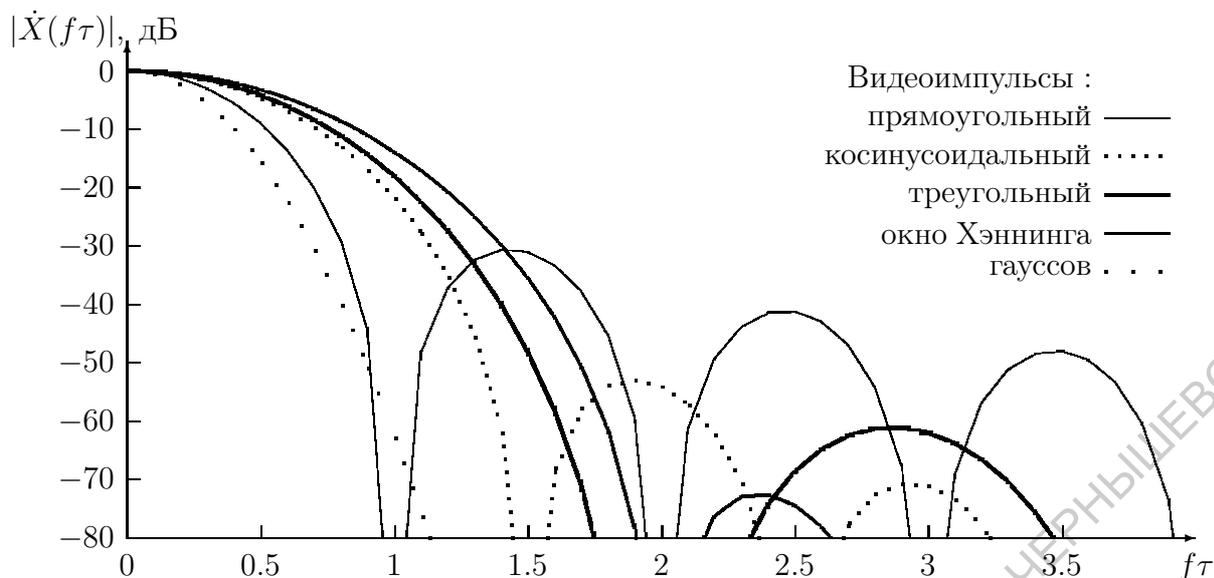


Рис. 3.9. Модули спектральных плотностей пяти видеоимпульсов в логарифмическом масштабе

Этот эффект понятен. Увеличение крутизны изменения функций $x(t)$, появление разрывов и изломов (разрывов производной) сопровождается возрастанием роли высших гармоник сигнала. Прямоугольный импульс содержит разрывы функции $x(t)$ и ее производной, в то время как треугольный и косинусоидальный импульс — только разрывы производной, причем огибающая последнего изменяется более плавно. Два последних импульса вообще не содержат разрывов и все зависит от крутизны изменения $x(t)$. Если распространить этот принцип и на другие сигналы, то можно приблизиться к обобщенной функции Дирака в начале построенной выше последовательности (ее спектральная плотность постоянна и не зависит от частоты гармоник) и к гармоническому периодическому сигналу в конце последовательности (его спектр состоит из одной линии). При этом функцию Дирака можно трактовать как сочетание двух сколь угодно близких бесконечных разрывов, что обеспечивает максимально возможный вклад высших гармоник. Из спектральных диаграмм рис. 3.8 и 3.9 следует еще один важный результат, касающийся взаимосвязи длительности импульса и ширины его спектра.

3.2.6. Связь длительности сигнала и ширины его спектра

Шириной спектра сигнала будем называть интервал частот, в пределах которого модуль спектральной функции превышает некоторое наперед заданное значение. Обычно ширина спектров сигналов, заданных в виде временного изменения напряжения или тока, определяется на уровне $|Ẋ|/10$, так как этот интервал содержит основную часть мощности сигнала (до 90 % и более).

Как следует из спектральных диаграмм (см. рис. 3.9), ширина спектра прямоугольных импульсов произвольной длительности τ удовлетворяет соотношению $\Delta f \simeq 1.8/\tau$, ширина спектра треугольных импульсов — соотношению $\Delta f \simeq 1.5/\tau$, а гауссова импульса — $\Delta f \simeq 1.2/\tau$.

- произведение ширины спектра импульсного сигнала и его длительности является величиной постоянной, зависящей только от формы импульса:

$$\tau \Delta f \geq 1. \quad (3.14)$$

Итак, длительность процесса и ширина его спектра не могут одновременно иметь произвольно малые значения. Соотношение (3.14) напоминает формулу Гейзенберга и по аналогии с ней иногда называется соотношением неопределенности [8]. Им руководствуются при расчете полосы пропускания радиоустройств, а в грубых оценках, достаточных для практики, полагают $\Delta f \simeq 1/\tau$.

Произведение $D = \tau \Delta f$ в радиоэлектронике называется *базой сигнала*. Если база сигнала D мала (порядка единиц), то сигнал называется *простым*. Когда D достигает значений 100 и более, то сигнал называется *сложным*. Все рассмотренные до сих пор сигналы были простыми. В качестве примера сложных сигналов в дальнейшем будет рассмотрен радиоимпульс, несущая частота которого промодулирована по линейному закону (ЛЧМ-сигнал).

3.3. Основные свойства спектров и теоремы о спектрах

Многие важные свойства спектров были выявлены выше в процессе рассмотрения конкретных сигналов. Кратко сформулируем полученные результаты еще раз.

1. Периодические и непериодические сигналы $x(t)$, удовлетворяющие условиям Дирихле, представимы бесконечной совокупностью ортонормированных гармонических функций, комплексные амплитуды которых описываются спектральной плотностью $\dot{X}(\omega)$ или $\dot{X}(f)$, дискретно-определенной для периодических и непрерывной для непериодических $x(t)$.

2. Функции $\dot{X}(\omega)$ и $x(t)$ образуют пару преобразований Фурье, причем прямое преобразование Фурье $\dot{X}(\omega) = \mathbf{F}[x(t)]$ анализирует $x(t)$ по составу спектральных компонент, а обратное преобразование $x(t) = \mathbf{F}^{-1}[\dot{X}(\omega)]$ однозначно синтезирует $x(t)$ из ее гармонических составляющих. Представления физического процесса функцией времени $x(t)$ и комплексной спектральной функцией $\dot{X}(\omega)$ равносильны, а для гауссовых процессов функции $x(t)$ и $\dot{X}(\omega)$ еще и подобны.

3. Периодические процессы обладают эквидистантными линейчатями, квазипериодические – *неэквидистантными* линейчатями, а непериодические – сплошными спектрами. Огибающие спектров одиночных и периодических импульсов одинаковой формы совпадают, т.е. не зависят от частоты повторения импульсов, и (за редкими исключениями) имеют лепестковую структуру. Ширина лепестков огибающей обратно пропорциональна длительности импульсов.

4. Как показано в 3.1.2, фурье-преобразования удовлетворяют принципу дуальности частоты и времени: если $\dot{X}(f) = \mathbf{F}[x(t)]$, то $\mathbf{F}[\dot{X}(t)] = x(-f)$.

5. Произведение ширины спектра импульсного сигнала и его длитель-

ности является характеристическим параметром импульса, величина которого зависит только от формы импульса.

6. Средняя за период мощность периодического сигнала $x(t)$ равна сумме мощностей его гармонических составляющих, а энергия непериодического сигнала – интегралу от квадрата модуля спектральной функции (формула Рэлея), т.е. полная энергия сигнала равна сумме энергий его частотных составляющих.

Не нарушая общности, все другие свойства спектров будем формулировать для спектральных функций сигналов в виде теорем.

7. Спектр линейной комбинации сигналов является линейной комбинацией спектров.

Доказательство. Пусть $x(t) = \sum_{i=1}^N \beta_i \cdot x_i(t)$. Его спектральная функция удовлетворяет соотношению

$$\dot{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^N \beta_i \cdot x_i(t) \right) e^{-j\omega t} dt = \sum_{i=1}^N \beta_i \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{i=1}^N \beta_i \cdot \dot{X}_i(\omega).$$

8. Спектр произвольного вещественного процесса удовлетворяет условию

$$\dot{X}(-\omega) = \dot{X}^*(\omega),$$

т.е. реальная часть спектральной плотности является четной, а мнимая – нечетной функцией.

Доказательство. Поскольку

$$\begin{aligned} \dot{X}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt = \\ &= 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos \omega t dt - 2j \int_0^{\infty} x(t) \sin \omega t dt = 2\dot{X}_C(\omega) - 2j\dot{X}_S(\omega), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \dot{X}(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt + j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin \omega t dt = \\ &= 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos \omega t dt + 2j \int_0^{\infty} x(t) \sin \omega t dt = 2\dot{X}_C(\omega) + 2j\dot{X}_S(\omega), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

9. При сдвиге функции во времени на $\pm t_0$ модуль ее спектральной характеристики не изменяется, а фазовый сдвиг всех гармоник увеличивается на величину $\mp \omega t_0$.

Доказательство. Пусть $\dot{X}(\omega)$ – спектральная функция сигнала $x(t)$. Для установления связи спектральной плотности $\dot{X}'(\omega)$ функции $x(t \pm t_0)$ с $\dot{X}(\omega)$ введем замену переменных $t \pm t_0 = \tau$. Тогда

$$\dot{X}'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} e^{\mp j\omega t_0} d\tau = e^{\mp j\omega t_0} \dot{X}(\omega). \quad (3.15)$$

9а. Используя принцип дуальности частоты и времени, можно утверждать, что при сдвиге спектра по частоте на величину $\pm\omega_0$ начальная фаза сигнала изменяется на величину $\mp j\omega_0 t$, т.е.

$$\dot{X}(\omega \pm \omega_0) = \mathbf{F}[x(t)e^{\mp j\omega_0 t}]. \quad (3.16)$$

Это означает, что сдвиг спектра по частоте происходит при умножении анализируемого сигнала на $e^{\mp j\omega t}$. Полученный результат представляет частный случай теоремы о свертке, которая будет рассмотрена ниже.

10. При уменьшении временного масштаба сигнала в N раз ширина спектра увеличивается, а амплитуды всех его гармоник уменьшаются в N раз:

$$\mathbf{F}[x(Nt)] = \dot{X}'(\omega) = \frac{1}{N} \dot{X}\left(\frac{\omega}{N}\right).$$

Доказательство. Пусть $\dot{X}(\omega)$ (рис. 3.10,б) – спектральная функция импульсного сигнала $x(t)$ (рис. 3.10,а). Спектральная функция $\dot{X}'(\omega)$ (рис. 3.10,г) ”растянутого” ($N < 1$) импульса (рис. 3.10,в) будет удовлетворять соотношению

$$\dot{X}'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t/N) e^{-j\omega t} dt.$$

Вводя новую переменную $\vartheta = t/N$, получим:

$$\dot{X}'(\omega) = N \int_{-\infty}^{\infty} x(\vartheta) e^{-jN\omega\vartheta} d\vartheta = N \dot{X}(N\omega).$$

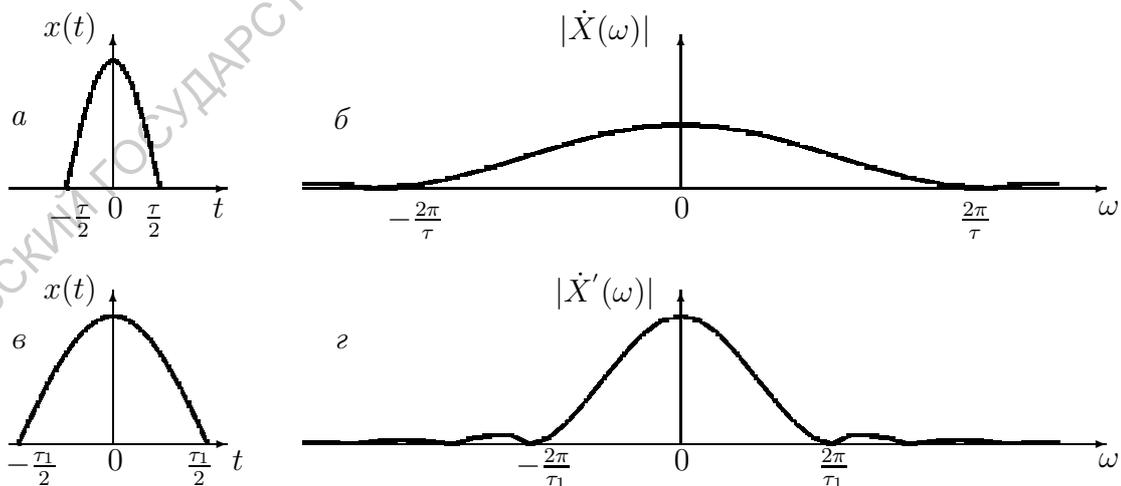


Рис. 3.10. Огибающие исходного (а) и растянутого во времени (в) видеоимпульсов и их спектральные плотности ((б) и (г) соответственно)

Этот эффект уже был отмечен при изучении спектра прямоугольного импульса: уменьшение длительности в N раз приводило к смещению нулей огибающей и расширению спектра.

11. Спектр производной сигнала является произведением его спектральной характеристики и оператора дифференцирования $j\omega$.

Доказательство. Пусть $\dot{X}(\omega)$ – спектральная функция $x(t)$. Спектральная функция производной после интегрирования по частям принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{dt} e^{-j\omega t} dt = x(t) \cdot e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = j\omega \dot{X}(\omega),$$

так как первое слагаемое в этом выражении обращается в нуль. (Абсолютно интегрируемая функция $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$.) Оператор $j\omega$ уже встречался в методе комплексных амплитуд при дифференцировании гармонических сигналов. В спектральном анализе этот оператор показывает, что при дифференцировании сигналов амплитуды спектральных гармоник возрастают пропорционально их частотам.

12. Спектр определенного интеграла с переменным верхним пределом $\Psi(t) = \int_0^t x(t) dt$ является произведением спектральной характеристики исходного сигнала и оператора интегрирования $1/j\omega$.

Доказательство. Пусть $\dot{X}(\omega)$ – спектральная функция сигнала $x(t)$, а $\dot{X}'(\omega)$ – спектральная функция интеграла с переменным верхним пределом. Дифференцируя $\Psi(t)$ по времени и используя предыдущее свойство, получим:

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^t x(t) dt = x(t).$$

Но спектральная плотность функции $d\Psi(t)/dt$, согласно введенным обозначениям, равна $\dot{X}'(\omega)$. Приравнявая ее спектральной функции $\dot{X}(\omega)$, получим:

$$\dot{X}'(\omega) = \frac{1}{j\omega} \dot{X}(\omega).$$

Таким образом, при интегрировании сигналов их спектральная плотность уменьшается обратно пропорционально частоте.

13. Спектральная плотность произведения двух сигналов является сверткой спектральных плотностей сомножителей.

Доказательство. Пусть $\dot{X}(\omega)$ и $\dot{Y}(\omega)$ – спектральные плотности сигналов $x(t)$ и $y(t)$ соответственно. Спектральная функция $\dot{S}(\omega)$ произведения этих сигналов удовлетворяет соотношению

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Если функцию $x(t)$, представленную в виде интеграла Фурье

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega,$$

подставить в выражение для $\dot{S}(\omega)$ и изменить порядок интегрирования, то получим

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}(\Omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j(\omega-\Omega)t} dt \right) d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}(\Omega) \dot{Y}(\omega - \Omega) d\Omega.$$

Как известно, выражение

$$\dot{S}(\omega) = \dot{X}(\omega) * \dot{Y}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}(\Omega) \dot{Y}(\omega - \Omega) d\Omega. \quad (3.17)$$

называется *интегралом свертки* или *сверткой* функций $\dot{X}(\omega)$ и $\dot{Y}(\omega)$.

Свертка функций обозначается символом (*), а интеграл свертки $S(\omega)$ допускает геометрическое толкование в виде численного значения площади, ограниченной произведением функций $X(\omega)$ и $Y(\omega)$.

Используя принцип дуальности частоты и времени, можно построить теорему о свертке в инверсной формулировке: интеграл Фурье от произведения спектральных функций является сверткой этих функций, т.е. спектр $\dot{R}(\omega) = \dot{X}(\omega) \dot{Y}(\omega)$ соответствует функции

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(\tau - t) dt = x(\tau) * y(\tau). \quad (3.18)$$

Представленная теорема справедлива и для периодических процессов. Она имеет широчайшее применение в различных областях современного естествознания, от астрономии до социологии, а в теоретической радиоэлектронике позволяет быстро и в компактной форме находить решения очень сложных задач теории фильтрации сигналов.

Дуальная формулировка теоремы о свертке позволяет более глубоко, чем это было сделано в 1.4, обсудить вопрос о взаимной связи сигналов.

3.3.1. Корреляционный анализ сигналов и энергетические спектры

Пусть детерминированный сигнал конечной длительности $x(t)$ центрирован, т.е. его среднее значение равно нулю. Тогда функция

$$R_{xx}(\tau) = 2\pi\varphi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t - \tau) dt = \langle x(t)x(t - \tau) \rangle \quad (3.19)$$

характеризует взаимную связь значений $x(t)$, разделенных интерва-

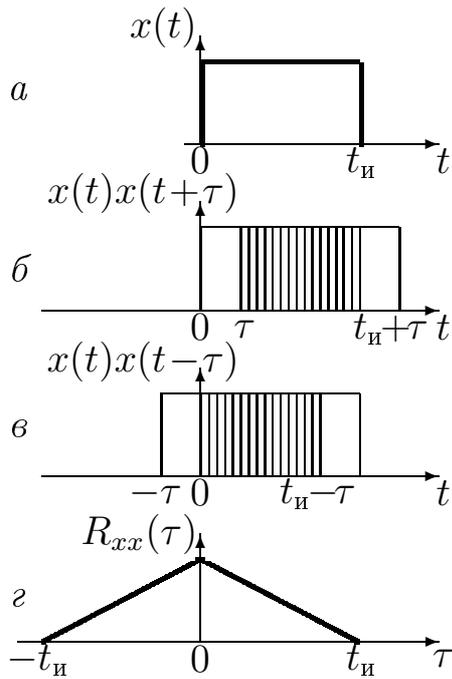


Рис. 3.11. Построение АКФ для прямоугольного импульса

Если сигнал $x(t)$ обладает спектральной плотностью $\dot{X}(\omega)$, то согласно (3.18) спектральная плотность АКФ $G(\omega)$ является вещественной и по теореме о свертке удовлетворяет равенству

$$G(\omega) = \dot{X}(\omega)\dot{X}^*(\omega) = |\dot{X}(\omega)|^2. \quad (3.20)$$

Функция $G(\omega)$ называется *энергетическим спектром* или *спектральной плотностью энергии* сигнала $x(t)$.

Итак, автокорреляционная функция детерминированного сигнала и его энергетический спектр связаны преобразованием Фурье:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega, \quad G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Эти соотношения часто называют формулами Винера–Хинчина.

При $\tau=0$ АКФ достигает максимума и монотонно или осциллируя уменьшается с ростом τ , оставаясь симметричной, т.е. является четной. Четность АКФ нетрудно показать, если ввести замену переменных $u=t-\tau$, $t=u+\tau$. Тогда

$$R_{xx}(\tau) = \varphi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u+\tau)x(u)du.$$

На рис. 3.12 представлены АКФ радиоимпульса прямоугольной фор-

лом времени τ , и называется *автокорреляционной* (от греч. autos – сам и позднелат. correlatio – соотношение) функцией (АКФ) сигнала $x(t)$. АКФ, по существу, усредняет $x(t)x(t-\tau)$ на бесконечном интервале времени, а при $\tau=0$, согласно формуле Рэлея (см. 3.3), она равна энергии сигнала $x(t)$. Для практической реализации АКФ необходимы: устройство с регулируемой задержкой, обеспечивающее получение сигнала $x(t-\tau)$, умножитель, вырабатывающий сигнал, соответствующий произведению $x(t)x(t-\tau)$, и интегратор, вычисляющий АКФ, пропорциональную площади перекрытия сигналов. Построение АКФ для прямоугольного импульса длительности t_n иллюстрирует рис. 3.11. При $\tau=0$ (рис. 3.11,а) сигналы полностью перекрываются, что соответствует $R_{xx}(0)$ (рис. 3.11,г). При $\tau \neq 0$ перекрытие сигналов и АКФ уменьшаются, причем запаздывания $\pm\tau$ (рис. 3.11,б,в) создают одинаковые значения АКФ.

мы и трех равноудаленных прямоугольных видеоимпульсов ("пачки" импульсов). Как и в первом примере (рис. 3.11) при $\tau = 0$ происходит полное перекрытие сигналов, и R_{xx} принимает наибольшее значение. Для $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \dots < T$, где T – период несущего колебания, АКФ радиоимпульса сначала уменьшается до нуля (лепестки косинусоиды перекрываются все в меньшей степени), а затем изменяет знак (перекрываются положительные и отрицательные лепестки косинусоид). При дальнейшем увеличении τ число перекрывающихся лепестков сокращается, и огибающая АКФ убывает до нуля. АКФ "пачки" импульсов (рис. 3.12, з) при всех τ положительна и содержит пять лепестков треугольной формы с линейно убывающей амплитудой.

Заметим, что АКФ импульсных сигналов обращаются в нуль при задержке τ , равной длительности импульса $t_{и}$. Это позволяет определять длительности сверхкоротких импульсов, измерение которых другими методами подчас просто невозможно.

Для периодических сигналов усреднение на бесконечном интервале времени адекватно усреднению за период, поэтому АКФ периодического сигнала можно определить в виде

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t-\tau)dt.$$

АКФ периодического сигнала является периодической функцией с тем же периодом, что и $x(t)$. Размерность АКФ тоже изменяется. Теперь она равна средней мощности периодического сигнала.

Для оценки степени связи между центрированными сигналами $x(t)$ и $y(t)$ используются *взаимные корреляционные функции* (ВКФ)

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)x(t-\tau)dt.$$

Если ВКФ $R_{xy}(\tau)$ удовлетворяет условию интегрируемости, то справедливы следующие формулы Винера–Хинчина:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}_{xy}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega, \quad \dot{G}_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau,$$

где $\dot{G}_{xy}(\omega)$ – *взаимная спектральная плотность* функций $x(t)$ и $y(t)$. Взаимная спектральная плотность является комплексной функцией частоты.

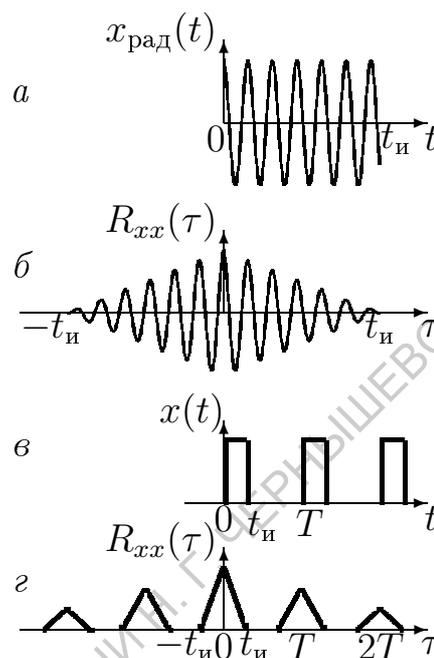


Рис. 3.12. Радиоимпульс (а), "пачка" импульсов (в) и их АКФ (б, з)

ВКФ может быть асимметричной относительно оси ординат и не обязательно достигает максимума при $\tau = 0$, Значение ВКФ при $\tau = 0$ соответствует взаимной энергии сигналов.

Формулы Винера–Хинчина постулируют взаимно-однозначную связь корреляционных и спектральных характеристик сигналов и широко используются при анализе структуры сложных, прежде всего случайных колебаний.

3.4. Спектральные плотности неинтегрируемых сигналов

Если функция не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости, то фурье-преобразование нельзя использовать, а проблема спектрального представления сигнала становится невыполнимой. К счастью, спектры некоторых не удовлетворяющих условию абсолютной интегрируемости сигналов можно построить путем введения и последующего исключения в предельном переходе к исходной функции дополнительного множителя, обеспечивающего сходимость. При этом, как правило, спектральные функции выражаются через обобщенную функцию Дирака.

3.4.1. Спектральные плотности функций Хевисайда, $1/\pi t$ и постоянного сигнала

Для построения спектральной плотности функции Хевисайда воспользуемся ее асимптотической моделью в виде экспоненциального импульса (см. формулу (1.9)) и формулой (3.5). При этом спектральная плотность функции $\sigma(t)$ принимает вид

$$\dot{X}_\sigma(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha + j\omega}.$$

Представим $\dot{X}_\sigma(\omega)$ суммой действительной и мнимой компонент:

$$\dot{X}_\sigma(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{j\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right).$$

Предел первого слагаемого (вещественная составляющая спектральной

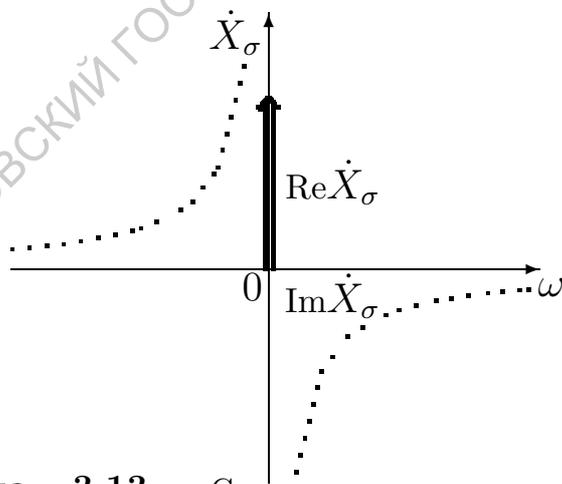


Рис. 3.13. Спектральная плотность функции Хевисайда

плотности) обращается в бесконечность на нулевой частоте и равен нулю на всех других частотах, т.е. представляет произведение функции Дирака и некоторого масштабного множителя (рис. 3.13). Величина множителя определяется при интегрировании $\dot{X}_\sigma(\omega)$ во всем частотном диапазоне:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha d\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \text{arctg}(\omega/\alpha) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi$$

и не зависит от величины α .

Предел второго слагаемого (мнимая составляющая спектральной плотности) описывается простым выражением $1/j\omega$, а полная спектральная плотность функции $\sigma(t)$ (рис. 3.13) – соотношением

$$\dot{X}_\sigma = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}. \quad (3.21)$$

Интересно, что с помощью принципа дуальности частоты и времени можно определить спектральную плотность еще одной функции, широко используемой в функциональных преобразованиях, в частности в преобразованиях Гильберта.

Если рассмотреть в качестве дуальной для $\dot{X}(\omega) = \frac{1}{2j\pi f}$ временную функцию $g(t) = \frac{1}{\pi t}$, то ее спектральная плотность $\dot{G}(\omega)$ должна соответствовать функции включения с мнимой единицей в качестве множителя. Точное вычисление $\mathbf{F}[\frac{1}{\pi t}]$ сопряжено с использованием специальных функций, поэтому ограничимся известным из теории функций результатом:

$$\dot{G}(\omega) = \mathbf{F}[\frac{1}{\pi t}] = -j \operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} -j, & \omega \geq 0, \\ j, & \omega < 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

и покажем справедливость соотношений (3.22), вычисляя $g(t)$ в виде обратного преобразования Фурье.

Представляя $\dot{G}(\omega)$ асимптотической формулой

$$\dot{G}(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} [-j \operatorname{sgn}(\omega) e^{-\alpha|\omega|}],$$

получим

$$\begin{aligned} g(t) = \mathbf{F}^{-1}[\dot{G}(\omega)] &= \frac{j}{2\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^0 e^{(\alpha+jt)\omega} d\omega - \int_0^{\infty} e^{(-\alpha+jt)\omega} d\omega \right) = \\ &= \frac{j}{2\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\left. \frac{e^{(\alpha+jt)\omega}}{\alpha+jt} \right|_{-\infty}^0 - \left. \frac{e^{(-\alpha+jt)\omega}}{-\alpha+jt} \right|_0^{\infty} \right) = \frac{j}{2\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\alpha+jt} + \frac{1}{-\alpha+jt} \right) = \frac{1}{\pi t}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим спектральную плотность постоянного сигнала единичной амплитуды

$$x(t) = 1, \quad -\infty < t < \infty.$$

Его спектральную плотность получим, используя принцип дуальности частоты и времени для функции Дирака и ее спектральной плотности. Действительно, зависимости $x(t)$ и $\dot{X}_\delta(\omega)$ (см. рис. 3.4) идентичны. По формуле (3.7) имеем

$$2\pi\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_\delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{или} \quad \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_\delta(f) e^{2j\pi f t} df.$$

Заменяя ω на t и t на ω , как следствие дуальности получаем вместо $\dot{X}_\delta(\omega)$ постоянный сигнал $x(t) = 1$, а вместо $\delta(t)$ – спектральную плотность

$$\dot{X}_{(x(t)=1)} = 2\pi\delta(\omega).$$

Итак, спектральная плотность постоянного сигнала (напряжения или тока) содержит единственную вещественную составляющую в виде функции Дирака на нулевой частоте.

Различие спектральных плотностей $\sigma(t)$ и постоянного сигнала трудно объяснить. Вещественная составляющая функции включения вдвое меньше, чем постоянного сигнала такой же амплитуды, что соответствует различию в длительностях этих сигналов. Функция включения в отличие от $x(t) = 1$ содержит скачок огибающей сигнала и как следствие появляется реактивная составляющая в выражении для спектральной плотности.

3.4.2. Спектральные плотности периодических сигналов и суперпозиций периодических и непериодических сигналов

Спектральный анализ периодических сигналов осуществлялся с помощью рядов Фурье. Это затрудняет исследование процессов, представляющих суперпозицию перекрывающихся по частотному диапазону непериодических (описываемых спектральной плотностью) и периодических (описываемых совокупностями коэффициентов ряда Фурье) сигналов. Чтобы решить эту задачу в общем виде, достаточно получить спектральную плотность периодических процессов. Поскольку гармонические сигналы определены на всей оси времени и не убывают при $t \rightarrow \pm\infty$, они не являются абсолютно интегрируемыми, и их спектральные плотности будут выражаться через обобщенные функции Дирака.

Рассмотрим сначала комплексный экспоненциальный сигнал $\dot{x}(t) = \dot{A}_m e^{j\omega_0 t}$ и определим его спектральную функцию $\dot{X}(\omega)$:

$$\dot{X}(\omega) = \dot{A}_m \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt.$$

Используя формулу (3.7), получим:

$$\dot{X}(\omega) = 2\pi \dot{A}_m \delta(\omega - \omega_0). \quad (3.23)$$

Теперь обратимся к вещественным гармоническим сигналам. Если $x(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, то по формуле Эйлера имеем

$$A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{A_m}{2} (e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi_0)}) = \frac{1}{2} (\dot{A}_m e^{j\omega_0 t} + \dot{A}_m^* e^{-j\omega_0 t}).$$

Используя соотношение (3.23), окончательно получим:

$$\dot{X}_{\cos}(\omega) = \pi \left(\dot{A}_m \delta(\omega - \omega_0) + \dot{A}_m^* \delta(\omega + \omega_0) \right). \quad (3.24)$$

Для синусоидального сигнала $x(t) = A_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ аналогичные преобразования приводят к следующей спектральной плотности:

$$\dot{X}_{\sin}(\omega) = \mathbf{F}[A_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0)] = -j\pi \left(\dot{A}_m \delta(\omega - \omega_0) - \dot{A}_m^* \delta(\omega + \omega_0) \right). \quad (3.25)$$

Комплексная спектральная плотность косинусоидального сигнала $\dot{X}_{\cos}(\omega)$ изображена на рис. 3.14 и представляет совокупность двух дельта-функций, расположенных на частотах $\pm\omega_0$ и обладающих комплексно-сопряженными амплитудами. Как известно (см. 2.2.3), комплексный спектр косинусоидального сигнала состоит из двух спектральных линий в виде отрезков длиной A_m , расположенных на частотах $\pm\omega_0$, т.е. комплексная спектральная плотность косинусоидального сигнала отличается от его комплексного ряда Фурье превращением спектральных линий в функции Дирака.

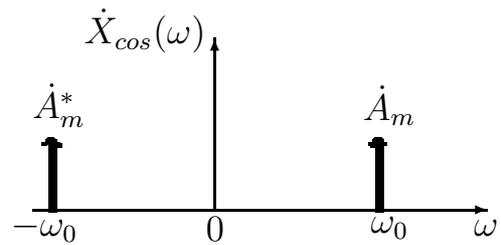


Рис. 3.14. Спектральная плотность косинусоидального сигнала

Используя линейность преобразований Фурье и формулу (3.23), представим спектральную плотность периодического сигнала $x_1(t)$ в виде

$$\dot{X}_1(\omega) = \mathbf{F}^{-1}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_I t}\right] = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k \delta(\omega - k\omega_I), \quad (3.26)$$

где ω_I – первая (основная) гармоника сигнала $x_1(t)$.

Пусть теперь на радиоэлектронную систему одновременно воздействуют периодический сигнал $x_1(t)$ (его комплексный спектр изображен на рис. 3.15,а) и непериодический сигнал $x_2(t)$, обладающий спектральной плотностью $\dot{X}_2(\omega)$ (рис. 3.15,б).

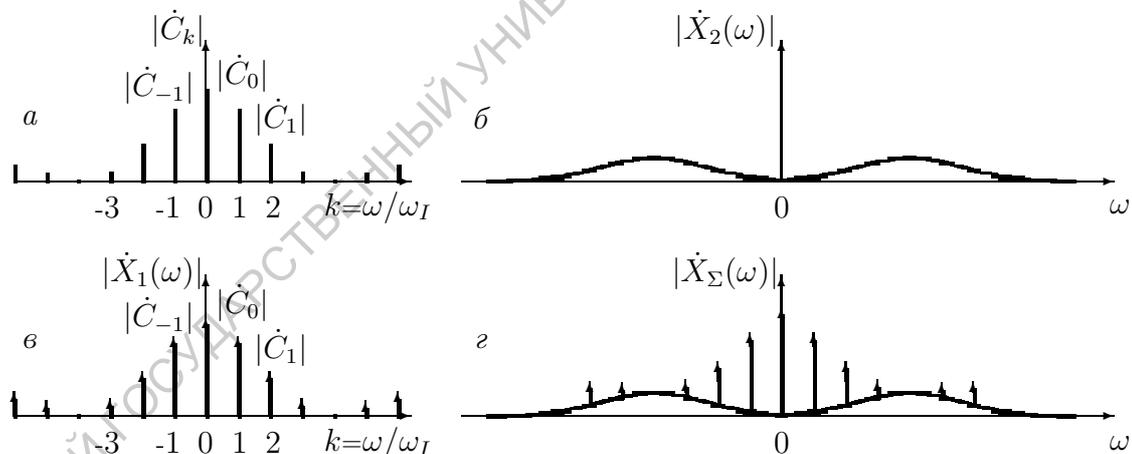


Рис. 3.15. Построение спектральной плотности суперпозиции периодического и непериодического сигналов: а – комплексный спектр $x_1(t)$; б – спектральная плотность $x_2(t)$; в – спектральная плотность $x_1(t)$; г – спектральная плотность суммарного сигнала

Представляя спектральную плотность периодического процесса в виде совокупности δ -импульсов с координатами $\pm k\omega_I$ и условными амплитудами, пропорциональными $|\dot{C}_k|$ (рис. 3.15,в), и используя принцип суперпозиции, получим результирующую спектральную плотность рассматриваемой суперпозиции сигналов (рис. 3.15,г) в виде наложения (суммы) спектральных плотностей:

$$\dot{X}_{\Sigma}(\omega) = \dot{X}_1(\omega) + \dot{X}_2(\omega).$$

3.4.3. Спектральная плотность последовательности δ -импульсов

Сигнал может быть задан не только непрерывной функцией времени $x(t)$, но и последовательностью равноотстоящих дискретных отсчетов $x(kT) = x[kT]$ (см. рис. 1.5,б), где $T = \Delta_t$ – интервал дискретизации, а $kT = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – дискретное время.

Дискретизацию сигнала удобно рассматривать как умножение непрерывной функции $x(t)$ и периодической последовательности δ -импульсов $s_T(t)$. Тогда дискретизированный сигнал $x_T(t)$ принимает вид

$$x_T(t) = x(t)s_T(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (3.27)$$

или

$$x[kT] = x(t)\delta(t - kT).$$

Спектральная плотность $X_T(\omega)$ дискретной функции $x_T(t)$ как произведения двух функций является сверткой их спектральных плотностей. Поэтому проблема фурье-анализа дискретизированных функций сводится прежде всего к отысканию спектральной плотности периодической последовательности δ -импульсов.

Будем искать спектральную плотность $S_T(\omega)$ функции $s_T(t)$ в два этапа. Сначала рассмотрим спектральную плотность $S_N(\omega)$ конечного числа $2N + 1$ одинаковых импульсов, а затем совершим предельный переход при $N \rightarrow \infty$. Спектральная плотность конечного числа импульсов имеет вид

$$S_N(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-N}^N \delta(t - kT) \right) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-N}^N \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-N}^N e^{-j\omega kT}. \quad (3.28)$$

Представим (3.28) в виде геометрической прогрессии

$$S_N(\omega) = e^{j\omega NT} + e^{j\omega(N-1)T} + \dots + e^{-j\omega NT}. \quad (3.29)$$

Первый член прогрессии $a_0 = e^{j\omega NT}$, ее знаменатель $r = e^{-j\omega T}$, а сумма $2N + 1$ членов прогрессии описывается известной формулой

$$\begin{aligned} S_N &= a_0 \frac{1 - r^{2N+1}}{1 - r} = \frac{e^{j\omega NT} (1 - e^{-j\omega(2N+1)T})}{1 - e^{-j\omega T}} = \\ &= \frac{e^{j\omega NT} e^{-j\omega(N+\frac{1}{2})T} (e^{j\omega(N+\frac{1}{2})T} - e^{-j\omega(N+\frac{1}{2})T})}{e^{-j\omega T/2} (e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})} = \frac{e^{j\omega(N+\frac{1}{2})T} - e^{-j\omega(N+\frac{1}{2})T}}{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}. \end{aligned}$$

Используя формулу Эйлера, получим для $S_N(\omega)$ выражение

$$S_N(\omega) = \frac{\sin \omega(N + \frac{1}{2})T}{\sin \omega T/2}. \quad (3.30)$$

Согласно (3.30) огибающие обращаются в нуль при $\omega(N + \frac{1}{2})T = \pm k\pi$. Тогда частоты первых нулей огибающих (ω_H) удовлетворяют равенству $\omega_H = \pm \pi / (N + \frac{1}{2})T$, т.е. с ростом N ширина главных лепестков уменьшается.

Амплитуды главных лепестков одинаковы. Главный лепесток нулевой структуры достигает максимума при $\omega \rightarrow 0$, и в соответствии с (3.29) его величина равна $2N + 1$. Таким образом, амплитуды главных лепестков с ростом N неограниченно возрастают.

Спектральная плотность девяти равноудаленных δ -функций ($N = 4$) изображена на рис. 3.16 и представляет последовательность девяти идентичных многолепестковых импульсных структур, отстоящих на расстоянии $2\pi/T$.

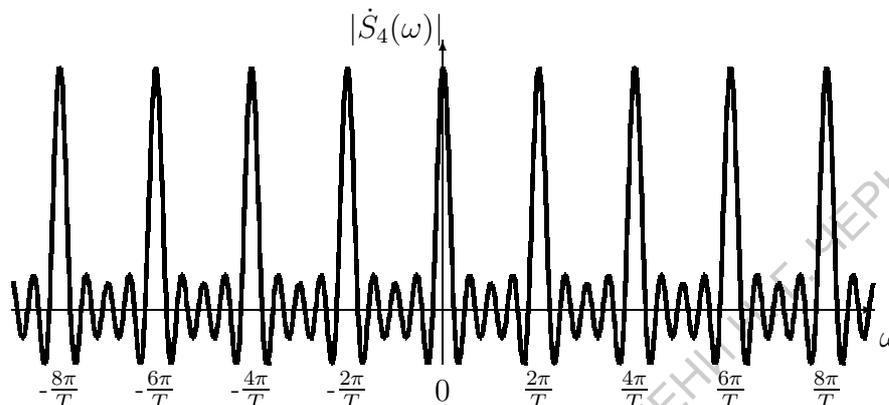


Рис. 3.16. Спектральная плотность последовательности девяти равноудаленных δ -импульсов

Теперь перейдем ко второму этапу вычисления спектральной плотности последовательности. Для этого в (3.30) выполняется предельный переход при $N \rightarrow \infty$, и каждый импульс спектральной функции в соответствии с рассмотренными свойствами трансформируется в δ -функцию.

- Спектральная плотность бесконечной последовательности одинаковых δ -импульсов во временной области принимает вид бесконечной последовательности одинаковых δ -импульсов в частотной области:

$$S_T(\omega) = \mathbf{F} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \right] = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right). \quad (3.31)$$

3.5. Спектральные плотности радиоимпульсов

3.5.1. Спектральные плотности одиночных радиоимпульсов

Как отмечалось выше (см. 1.2.2 и формулу (1.7)), радиоимпульсы описываются соотношением

$$x_{\text{рад}}(t) = x_{\text{вид}}(t) \cdot \cos \omega_0 t,$$

т.е. представляет собой произведения импульсных огибающих $x_{\text{вид}}(t)$ и гармонического колебания с частотой ω_0 .

Пусть спектральная плотность одиночного видеоимпульса $\dot{X}_{\text{вид}}(\omega)$ известна. Тогда спектральную плотность сигнала $x_{\text{рад}}(t)$ можно найти, ис-

пользуя теорему о свертке или теорему о смещении спектра (см. 4.3)⁴. Используя (3.17) и фильтрующее свойство $\delta(t)$ -функций (см. п. 1.2.4 и формулу (1.14)), находим:

$$\begin{aligned} \dot{X}_{\text{рад}}(\omega) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}_{\text{вид}}(\omega - \Omega) (\delta(\Omega - \omega_0)e^{j\varphi_0} + \delta(\Omega + \omega_0)e^{-j\varphi_0}) d\Omega = \\ &= \frac{1}{2} \dot{X}_{\text{вид}}(\omega - \omega_0)e^{j\varphi_0} + \frac{1}{2} \dot{X}_{\text{вид}}(\omega + \omega_0)e^{-j\varphi_0}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

- Спектральные плотности радиоимпульсов отличаются от видеоимпульсов с теми же огибающими *переносом спектров в область высоких частот*.

В качестве иллюстрации рассмотрим спектральную плотность прямоугольного радиоимпульса.

Огибающей прямоугольного радиоимпульса (рис. 3.17, б) является видеоимпульс (рис. 3.17, а).

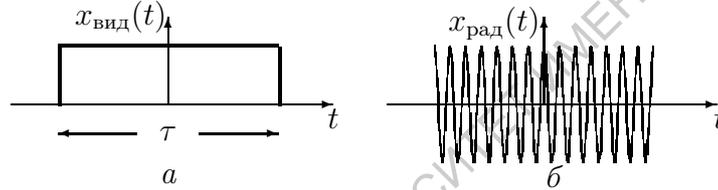


Рис. 3.17. Прямоугольные видеоимпульс (а) и радиоимпульс (б) одинаковой длительности

Спектр видеоимпульса сплошной (рис. 3.18), а его спектральная плот-

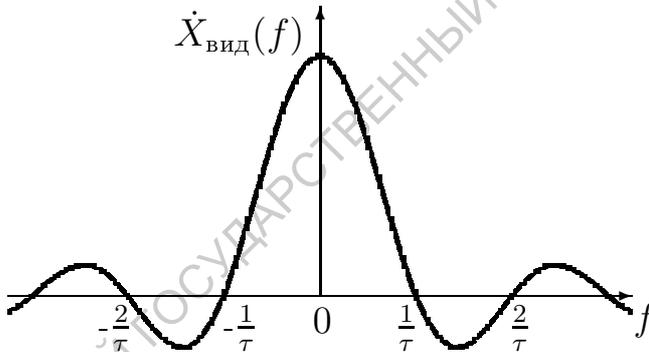


Рис. 3.18. Спектральная плотность прямоугольного видеоимпульса

ность, согласно (3.8), описывается формулами:

$$\begin{aligned} X_{\text{вид}}(\omega) &= E\tau \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2}, \\ X_{\text{вид}}(f) &= E\tau \frac{\sin \pi f\tau}{\pi f\tau}. \end{aligned}$$

Напомним, что нули огибающей спектра располагаются на частотах $\omega_n = \frac{2K\pi}{\tau}$, где τ – длительность импульса. Спектр прямоугольного радиоимпульса согласно (3.32) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{X}_{\text{рад}}(\omega) &= \frac{1}{2} \dot{X}_{\text{вид}}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \dot{X}_{\text{вид}}(\omega + \omega_0) = \\ &= \frac{E\tau}{2} \left(\frac{\sin(\omega - \omega_0)\tau/2}{(\omega - \omega_0)\tau/2} + \frac{\sin(\omega + \omega_0)\tau/2}{(\omega + \omega_0)\tau/2} \right). \end{aligned}$$

⁴ Спектральную плотность радиоимпульса с помощью теоремы о смещении спектра предлагается получить самостоятельно, представляя $\cos \omega_0 t$ по формуле Эйлера.

Переходя от ω к f , получим:

$$\dot{X}_{\text{рад}}(f) = \frac{E\tau}{2} (\text{sinc}[\tau(f - f_0)] + \text{sinc}[\tau(f + f_0)]).$$

При этом в окрестностях $\pm\omega_0$ формируются две области спектра вдвое меньшей амплитуды с огибающими, подобными огибающей видеоимпульса, а нули спектральной функции с частотами $\pm\omega_H$ смещаются к частотам $\pm\omega_0 \pm \omega_H$.

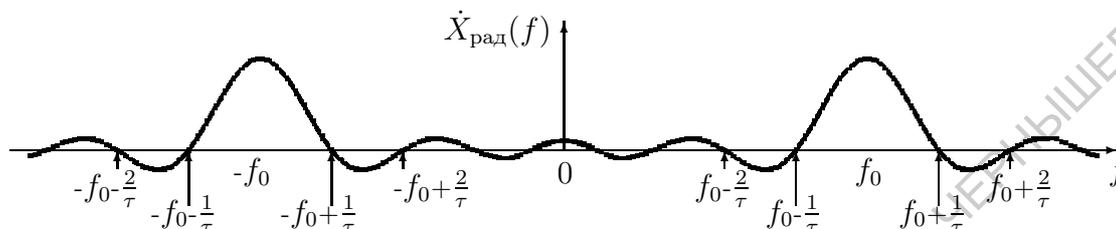


Рис. 3.19. Спектральная плотность прямоугольного радиоимпульса

Итак, спектральная плотность одиночного радиоимпульса представляет наложение двух непрерывных функций вида $\text{sinc}(f\tau)$ (рис. 3.19), принимающих максимальные значения в $\pm f_0$. Поскольку функции $\text{sinc}(f\tau)$ по мере удаления от максимумов быстро затухают (см. рис. 3.5, б), при больших значениях $f_0\tau$ их "перекрытием" можно пренебречь. При небольших значениях $f_0\tau$ перекрытие увеличивается (рис. 3.19), и спектральная плотность радиоимпульса становится несимметричной относительно $\pm f_0$.

Спектральные плотности одиночных радиоимпульсов нетрудно построить, не прибегая к обобщенным функциям Дирака, так как длительности импульсов конечны, а функции $x_{\text{рад}}(t)$ абсолютно интегрируемы.

3.5.2. Спектры периодических последовательностей радиоимпульсов

Функция $x_{\text{рад}}(t)$ в отличие от огибающей $x_{\text{вид}}(t)$ становится непериодической (частота несущей не пропорциональна частоте повторения импульсов) и ее нельзя представить рядом Фурье. С другой стороны, $x_{\text{рад}}(t)$ не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости в силу неинтегрируемости несущего колебания $\cos \omega_0 t$. Поэтому спектральную плотность периодической последовательности радиоимпульсов следует строить как свертку дискретного (линейчатого) спектра огибающей и обобщенных функций $\delta(\omega \pm \omega_0)$. В ряде случаев, например для периодической последовательности прямоугольных радиоимпульсов, задачу удается упростить.

Представим спектр последовательности видеоимпульсов (рис. 3.20, а) в виде ряда (2.17) и, используя для $x_{\text{рад}}(t)$ выражение (1.7), получим:

$$x_{\text{рад}}(t) = E \frac{\tau}{T} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi k \tau / T}{\pi k \tau / T} e^{j2\pi k t / T} \right) \cos \omega_0 t.$$

Чтобы найти спектр последовательности радиоимпульсов, распишем $\cos \omega_0 t$ как полусумму экспоненциальных функций:

$$x_{\text{рад}}(t) = E \frac{\tau}{2T} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi k \tau / T}{\pi k \tau / T} e^{j(\omega_0 + 2k\pi/T)t} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi k \tau / T}{\pi k \tau / T} e^{j(-\omega_0 + 2k\pi/T)t} \right).$$

Гармонические составляющие сигнала $x_{\text{рад}}(t)$ группируются вокруг частот $\pm \omega_0$. Оба спектра являются линейчатыми и эквидистантными. Форма огибающих определяется формой импульсов. Для прямоугольных импульсов комплексные амплитуды гармоник описываются формулой (2.16), а $\dot{X}_{\text{рад}}(f)$ принимает вид

$$\dot{X}_{\text{рад}}(f) = \frac{1}{2} \dot{X}_{\text{вид}}(-f_0 + k/T) + \frac{1}{2} \dot{X}_{\text{вид}}(f_0 + k/T), \quad -\infty < k < \infty.$$

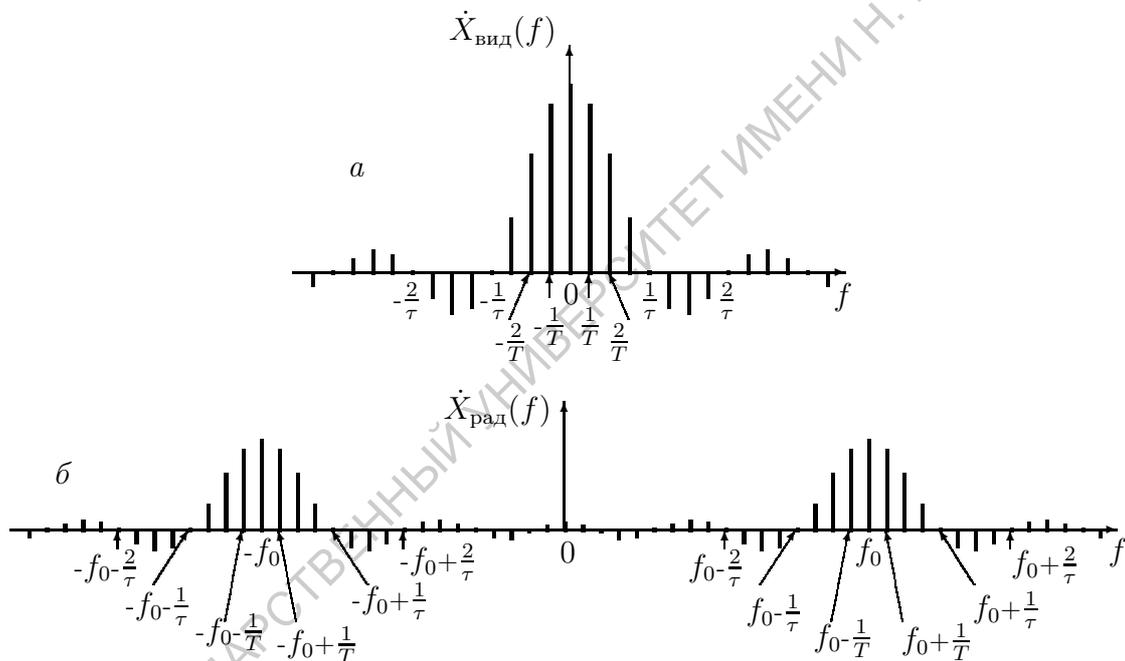


Рис. 3.20. Комплексные спектры периодических последовательностей прямоугольных видеоимпульсов (а) и радиоимпульсов (б)

Как и в случае одиночного радиоимпульса, комплексный спектр (рис. 3.20, б) содержит две составляющие с половинной амплитудой.

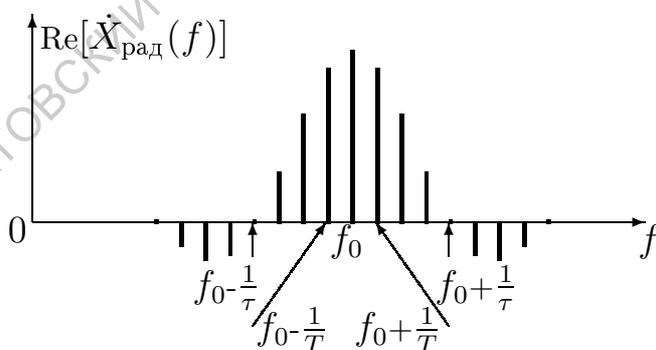


Рис. 3.21. Вещественный спектр периодической последовательности прямоугольных радиоимпульсов

Замещая сумму экспонент эквивалентной функцией косинуса, можно получить вещественный спектр последовательности прямоугольных радиоимпульсов – тот самый спектр, который измеряется с помощью радиоизмерительных приборов – анализаторов спектра (рис. 3.21):

$$\operatorname{Re}[\dot{X}_{\text{рад}}(f)] = X_{\text{вид}}(f_0 + k/T), \quad -\infty < k < \infty.$$

3.5.3. Ширина спектра однотональных колебаний конечной длительности

Реальные синусоидальные сигналы имеют конечную длительность (начало и конец) и, строго говоря, не являются гармоническими. Спектральный метод позволяет установить условия, при которых для реальных синусоидальных колебаний справедлива модель гармонического сигнала.

Синусоидальный сигнал конечной протяженности Δt , можно считать радиопульсом с $\tau = \Delta t$. Его спектральная плотность описывается функцией $\operatorname{sinc}(f\Delta t)$, которая трансформируется в дельта-функцию только для $\Delta t \rightarrow \infty$. При конечном Δt спектр имеет ненулевую ширину, а расстояние между первыми нулями огибающей $\operatorname{sinc}(f\Delta t)$ (см. рис. 3.5) равно $2/\Delta t$.

- Синусоидальное колебание конечной длительности имеет *сплошной спектр, ширина которого обратно пропорциональна длительности процесса Δt .*

Насколько правомерно представление такого колебания идеализированной моделью гармонического сигнала зависит от величины $f\Delta t$.

Пусть однотональный сигнал с частотой f длится в течение 20 с. Ширина главного лепестка его спектра составляет $\Delta f = 2/\Delta t = 0.1$ Гц. Если сигнал имеет частоту 100 кГц, то относительная ширина его спектра ($\Delta f/f$) составляет 10^{-6} или 0.0001%, и немонахроматичностью можно пренебречь. Но если сигнал имеет частоту 100 Гц, то $\Delta f/f$ составляет 0.1%, и его едва ли целесообразно представлять моделью в виде гармонической функции.

Подводя итоги, следует подчеркнуть, что спектральный метод универсален и обладает несомненной наглядностью. Он является одним из основных средств теоретической радиоэлектроники и широко распространен во многих областях естествознания. Метод наиболее эффективен при исследовании установившихся процессов. Конечно, его можно использовать и для переходных процессов, рассматривая нестационарные сигналы как непериодические и используя разложение в интеграл Фурье. Но трудоемкость такого анализа неоправданно велика. Спектральный метод не лишен и других недостатков. Уже отмечались трудности оперирования с сигналами, не удовлетворяющими условию абсолютной интегрируемости. Еще большие трудности возникают при наличии в системе начального запаса энергии и анализе переходных процессов.

Обе трудности удастся преодолеть при использовании комплексных частот и операторного метода, основанного на представлении сигналов *интегральными преобразованиями Лапласа или \mathbf{L} -преобразованиями.*

Глава 4

Преобразование Лапласа

Интегральное преобразование Лапласа (**L**-преобразование) было впервые введено французским математиком и физиком Пьером Симоном де Лапласом в 1779 г. в статье "О том, что следует" и использовалось для решения дифференциальных уравнений. Через сто с лишним лет его предложил использовать в электротехнике английский инженер Оливер Хевисайд.

В физических приложениях чаще всего используется частная формулировка **L**-преобразования – так называемое *одностороннее преобразование Лапласа*¹, когда отображаемая оператором **L** функция времени задана для $t \geq 0$. Это требование полностью отвечает принципу причинности и обеспечивает взаимно-однозначное соответствие $\mathbf{L}[x(t)]$ и $x(t)$.

4.1. Прямое и обратное преобразование Лапласа

Пусть $f(t)$ существует при $t \geq 0$ и не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости. Введем вспомогательную функцию $f_1(t) = f(t)e^{-\sigma t}$ и выберем параметр σ так, чтобы $f_1(t)$ была абсолютно интегрируемой². Минимальное значение σ , при котором вспомогательная функция абсолютно интегрируема, называется *абсциссой сходимости*.

Абсолютно интегрируемую функцию $f_1(t)$ можно разложить на спектральные составляющие с помощью преобразования Фурье. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = F(\sigma + j\omega). \quad (4.1)$$

Вводя комплексную лапласовскую переменную $s = \sigma + j\omega$ и учитывая, что $f(t)$ и $f_1(t)$ отличны от нуля при $t \geq 0$, получим из (4.1):

$$\mathbf{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad \mathbf{K}[f(t)] = sF(s) = s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (4.2)$$

¹ Известно также двустороннее **L**-преобразование – обобщение преобразования Лапласа для $t < 0$.

² Построить абсолютно интегрируемую вспомогательную функцию не всегда возможно. Если $x(t)$ растет быстрее, чем любая экспонента, например $x(t) = e^{t^2}$, то области сходимости не существует.

Преобразование $\mathbf{L}[f(t)]$ называется *преобразованием Лапласа*, а $\mathbf{K}[f(t)]$ – *преобразованием по Карсону*. Последнее используется весьма редко.

Функция $F(s)$, зависящая от комплексной переменной $s = \sigma + j\omega$, называется *лапласовским, операторным* или *L-изображением* функции $x(t)$.

Для практического использования \mathbf{L} -преобразования необходимо правило восстановления $x(t)$ по заданной функции комплексной частоты $F(\sigma + j\omega)$ или обращения уже описанного процесса.

Поскольку спектральная плотность вспомогательной абсолютно интегрируемой функции $f_1(t)$ известна ($F(\sigma + j\omega)$), ее можно восстановить, используя обратное преобразование Фурье:

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.3)$$

Чтобы перейти от $f_1(t)$ к искомой функции $f(t)$, достаточно умножить обе части равенства (4.3) на $e^{\sigma t}$, внести эту экспоненту под знак интеграла и заменить интегрирование по ω интегрированием по комплексной переменной $s = \sigma + j\omega$ ($d\omega = ds/j$). Тогда получим

$$f(t) = \mathbf{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds. \quad (4.4)$$

Это интегральное соотношение называется *обратным L-преобразованием*. Оно восстанавливает оригинал в виде функции вещественной переменной, чаще всего времени ($f(t)$), по ее лапласовскому изображению $F(s)$.

Построенная пара преобразований Лапласа

$$F(s) = \mathbf{L}[f(t)], \quad f(t) = \mathbf{L}^{-1}[F(s)]$$

аналогична паре преобразований Фурье. Но преобразование Фурье представляет сигнал бесконечным числом гармонических составляющих, а преобразование Лапласа – бесконечным числом элементарных экспоненциально затухающих синусоидальных функций различных частот. Поэтому лапласовскую переменную $s = \sigma + j\omega$ часто называют *комплексной частотой*, а интегральное преобразование Фурье рассматривают как частный случай двустороннего преобразования Лапласа при $s = j\omega$.

Если в преобразованиях Фурье интегрирование ведется по оси $j\omega$, то в преобразованиях Лапласа – на комплексной плоскости вдоль прямой, параллельной мнимой оси $j\omega$.

Рассмотрим \mathbf{L} -изображения широко распространенных функций:

а) изображение $F(s)$ функции Хевисайда $\sigma(t)$ имеет вид

$$F(s) = \mathbf{L}[\sigma(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}, \quad (4.5)$$

$$\text{б) } F(s) = \mathbf{L}[e^{-\alpha t} \sigma(t)] = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+s)t} dt = -\frac{e^{-(\alpha+s)t}}{s + \alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s + \alpha}, \quad (4.6)$$

$$\text{в) } F(s) = \mathbf{L}[e^{\pm j\omega t} \sigma(t)] = \int_0^{\infty} e^{-(s \mp j\omega)t} dt = -\frac{e^{-(s \mp j\omega)t}}{s \mp j\omega} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s \mp j\omega}, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \text{г)} \quad F(s) &= \mathbf{L}[\cos \omega t \cdot \sigma(t)] = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) e^{-st} dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \text{д)} \quad F(s) &= \mathbf{L}[\sin \omega t \cdot \sigma(t)] = \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{-st} dt = \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

В двух последних случаях использована теорема линейности \mathbf{L} -преобразований.

4.2. Основные свойства преобразований Лапласа

Будем формулировать основные свойства \mathbf{L} -преобразований в виде теорем. Они чаще всего повторяют теоремы, уже доказанные для спектров, если в формулах для спектральной плотности заменить $j\omega$ на s .

1. **Теорема линейности.** Если $F_i(s) = \mathbf{L}[f_i(t)]$, то изображение алгебраической суммы сигналов равно алгебраической сумме их изображений:

$$F(s) = \mathbf{L}\left[\sum_{i=1}^N \alpha_i f_i(t)\right] = \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i F_i(s)\right]. \quad (4.10)$$

2. **Теорема об изображении запаздывающего сигнала:**

$$\mathbf{L}[f(t - \tau)] = e^{-s\tau} \mathbf{L}[f(t)]. \quad (4.11)$$

3. **Теорема о смещении изображения** является, по существу, обратной для теоремы об изображении запаздывающего сигнала, т.е.

$$\mathbf{L}[e^{-\alpha t} f(t)] = F(s + \alpha). \quad (4.12)$$

Итак, при умножении оригинала на экспоненциальный множитель $e^{-\alpha t}$ изображение смещается в области комплексных частот на величину α , а при умножении изображения сигнала на экспоненциальный множитель $e^{-s\tau}$ оригинал смещается во времени на величину τ . Из этих теорем следуют два частных случая:

а) изображение прямоугольного импульса единичной амплитуды и длительности τ с использованием формул (4.5) и (4.11) удовлетворяет равенству

$$\mathbf{L}[\sigma(t) - \sigma(t - \tau)] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s\tau}}{s} = \frac{1}{s}(1 - e^{-s\tau}); \quad (4.13)$$

б) изображения синусоиды и косинусоиды с экспоненциально затухающими амплитудами с учетом формул (4.5) и (4.12) имеют вид

$$\mathbf{L}[e^{-\alpha t} \cos \omega t] = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}, \quad \mathbf{L}[e^{-\alpha t} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}. \quad (4.14)$$

4. **Лапласовское изображение производной от сигнала** соответствует аналогичной теореме для спектров, но спектральная теорема справедлива только при нулевых начальных условиях. Рассмотрим общий случай.

Пусть $\mathbf{L}[f(t)] = F(s)$. Изображение $F_1(s)$ производной от сигнала имеет вид

$$F_1(s) = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt.$$

Интегрируя это выражение по частям, получим:

$$F_1(s) = f(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = -f(0) + sF(s).$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\mathbf{L} \left[\frac{df}{dt} \right] = -f(0) + s\mathbf{L}[f(t)], \quad (4.15)$$

а изображение временной производной сигнала содержит значение функции при $t = 0$, т.е. начальное условие задачи. Если многократно использовать формулу (4.15), то теорему об изображении производной можно обобщить на производные более высоких порядков:

$$\mathbf{L} \left[\frac{d^n f}{dt^n} \right] = s^n \mathbf{L}[f(t)] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \frac{df}{dt} \Big|_{t=0} - \dots - s \frac{d^{n-2} f}{dt^{n-2}} \Big|_{t=0} - \frac{d^{n-1} f}{dt^{n-1}} \Big|_{t=0}.$$

Изображение временной производной n -го порядка теперь содержит кроме начального значения функции еще и начальные значения ее производных до $n - 1$ -го порядка включительно.

5. **Изображение интеграла** не зависит от начальных условий. Пусть дана функция $\phi(t) = \int_0^t f(w)dw$, а ее изображение $\mathbf{L}[\phi(t)] = F(s)$. Производная функции $\phi(t)$ удовлетворяет соотношению $d\phi(t)/dt = f(t)$.

Пусть $\mathbf{L}[f(t)] = F_1(s)$. Согласно теореме о производной сигнала для $F_1(s)$ получаем выражение $F_1(s) = sF(s) - \phi(0)$. Поскольку $\phi(0) = 0$ (верхний предел интеграла равен нижнему), изображение интеграла принимает вид

$$\mathbf{L} \left[\int_0^t f(w)dw \right] = \frac{1}{s} \mathbf{L}[f(t)]. \quad (4.16)$$

6. **Теорема о производной изображения:** если

$$\mathbf{L}[f(t)] = F(s), \quad \text{то} \quad -\frac{dF(s)}{ds} = \mathbf{L}[tf(t)]. \quad (4.17)$$

Эту теорему нетрудно доказать, если продифференцировать соотношение (4.2) по комплексной переменной s . Теорему о производной порядка n от изображения функции можно получить, если многократно использовать формулу (4.17):

$$\mathbf{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}.$$

Теорема о производной изображения имеет важные следствия:

6а) если $f(t) = \sigma(t)$, то

$$\mathbf{L}[t\sigma(t)] = \frac{1}{s^2}, \quad \mathbf{L}[t^n \sigma(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}; \quad (4.18)$$

6б) если $f(t) = e^{-\alpha t}$, то

$$\mathbf{L}[te^{-\alpha t}] = \frac{1}{(s + \alpha)^2}, \quad \mathbf{L}[t^n e^{-\alpha t}] = \frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}. \quad (4.19)$$

7. Изображение свертки двух функций. Пусть $\mathbf{L}[x(t)] = X(s)$, $\mathbf{L}[y(t)] = Y(s)$, свертка этих функций — $f(t) = \int_0^t x(\tau)y(t-\tau)d\tau$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{L}[f(t)] &= \int_0^\infty \left(\int_0^t x(\tau)y(t-\tau)d\tau \right) e^{-st} dt = \int_0^\infty x(\tau)e^{-s\tau} d\tau \int_0^\infty y(t-\tau)e^{-s(t-\tau)} dt = \\ &= \int_0^\infty x(\tau)e^{-s\tau} d\tau \int_0^\infty y(\xi)e^{-s\xi} d\xi, \end{aligned}$$

где $\xi = t - \tau$, $d\xi = dt$. Отсюда

$$\mathbf{L} \left[\int_0^t x(\tau)y(t-\tau)d\tau \right] = \int_0^\infty x(\tau)e^{-s\tau} d\tau \int_0^\infty y(\xi)e^{-s\xi} d\xi = X(s)Y(s). \quad (4.20)$$

4.3. Определение оригиналов по изображениям в виде дробно-рациональных функций. Теорема разложения Хевисайда

Если входной сигнал и описание радиоэлектронной системы представить в виде функций комплексной частоты s , то выходной сигнал тоже становится функцией s , т.е. его \mathbf{L} -изображением. Но задачу можно считать решенной лишь тогда, когда выходной сигнал является функцией времени.

Для перехода от изображения $F(s)$ к оригиналу $f(t)$ в общем случае используется формула Римана-Меллина, позволяющая решать интегральные уравнения вида (4.2). Но большинство L -изображений радиоэлектронных сигналов представляют дробно-рациональные функции, т.е. отношения многочленов. Отношения называются *правильными*,

когда степень многочлена в числителе меньше, чем степень знаменателя. L -изображения функций включения, экспоненциальных, гармонических, а также экспоненциально затухающих или нарастающих синусоидальных или косинусоидальных сигналов представляют правильные дробно-рациональные функции.

Многочлен n -й степени с вещественными коэффициентами имеет n корней, вещественных или попарно-сопряженных. Корни многочлена-числителя $F(s)$ обращают дробно-рациональную функцию в нуль и называются *нулями*, а значения s , при которых многочлен-знаменатель обращается в нуль, а $F(s) \rightarrow \infty$, называются *полюсами* дробно-рациональной функции. Если полюсы (нули) функции различны, то они называются *простыми*. Если же среди них встречаются одинаковые значения, то полюсы (нули) называются *кратными*. Расположение нулей и полюсов L -изображения полностью определяет структуру сигнала-оригинала.

Рассмотрим методы восстановления аналитической формы сигналов по их изображениям. Основу методов составляет разложение правильных дробно-рациональных функций на элементарные дроби, для которых известны оригиналы.

Пусть изображение некоторой функции имеет вид

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)}, \quad (4.21)$$

и степень m многочлена $F_1(s)$ меньше степени n многочлена $F_2(s)$. Задача заключается в том, чтобы представить $F(s)$ в виде суммы простых дробей, для которых известны оригиналы. С этой целью используем две известные из математики теоремы.

1. Теорема о разложении многочлена на множители: действительный или комплексный многочлен $F(s)$ степени n относительно s может быть единственным способом представлен произведением n линейных множителей:

$$F_2(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = a_0 \prod_{i=1}^n (s - s_i),$$

где s_i – корни многочлена $F_2(s)$.

2. Теорема о разложении на элементарные дроби: отношение многочленов $F_1(s)$ степени m и $F_2(s)$ степени n ($n > m$) может быть представлено в виде суммы *элементарных дробей*, соответствующих корням многочлена $F_2(s)$:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{F_1(s)}{F_2(s)} = \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^r \frac{A_{im}}{(s - s_i)^m} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{A_{i1}}{s - s_i} + \frac{A_{i2}}{(s - s_i)^2} + \dots + \frac{A_{im}}{(s - s_i)^m} + \dots + \frac{A_{ir_i}}{(s - s_i)^{r_i}} \right), \end{aligned} \quad (4.22)$$

где r_i – кратность i -го корня.

У изображений радиоэлектронных сигналов многочлены $F_2(s)$ могут содержать как простые различные корни, так и кратные корни s_i кратности r_i . Методика восстановления оригиналов для этих случаев различается.

4.3.1. Восстановление оригиналов L -изображений с простыми полюсами

Если отношение многочленов $F(s)$ обладает только простыми полюсами, то его можно разложить на элементарные дроби:

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)} = \frac{F_1(s)}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{(s - s_i)}, \quad (4.23)$$

где A_i – некоторые константы, называемые *вычетами*. Существуют различные методы расчета вычетов. Самым простым и естественным является следующий прием. Умножим обе части равенства (4.23) на $(s - s_k)$:

$$\frac{F_1(s)}{F_2(s)}(s - s_k) = A_k + (s - s_k) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{A_i}{(s - s_i)}.$$

При $s \rightarrow s_k$ все слагаемые, кроме A_k , обращаются в нуль, а левая часть равенства превращается в неопределенность так как $F_2(s)$ содержит $(s - s_k)$ в качестве сомножителя. Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, получим:

$$\lim_{s \rightarrow s_k} \frac{F_1(s)(s - s_k)}{F_2(s)} = \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{F_1(s) + (s - s_k)F_1'(s)}{F_2'(s)} = \frac{F_1(s)}{F_2'(s)} \Big|_{s=s_k} = A_k. \quad (4.24)$$

Использование формул (4.5) и (4.6) позволяет получить окончательное выражение для оригинала:

$$f(t) = \mathbf{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(s_k)}{F_2'(s_k)} e^{s_k t} \sigma(t). \quad (4.25)$$

Описанная методика применима и в тех случаях, когда один из корней $F_2(s)$ равен нулю.

Пусть $F_2(s) = s\Phi(s) = s \prod_{k=1}^n (s - s_k)$. Многочлен $F_2(s)$ имеет $n + 1$ корней, один из которых равен нулю. Производная $F_2(s)$ имеет вид

$$F_2'(s) = s\Phi'(s) + \Phi(s), \quad F_2'(0) = \Phi(0), \quad F_2'(s_k) = s_k\Phi'(s_k) \quad (\Phi(s_k) = 0). \quad (4.26)$$

Подставляя (4.26) в (4.25), находим:

$$f(t) = \mathbf{L}^{-1}[F(s)] = \frac{F_1(0)}{\Phi(0)} \sigma(t) + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(s_k)}{s_k\Phi'(s_k)} e^{s_k t} \sigma(t). \quad (4.27)$$

Эти соотношения иногда формулируют как теоремы Хевисайда. Функция $f(t)$, соответствующая L -изображению, имеющему только простые полюсы, состоит из суммы экспоненциальных функций и постоянного сигнала. Если корни $F_2(s)$ комплексно-сопряженные, а их вещественные части отрицательны, т.е. расположены на левой полуплоскости комплексных частот s , то искомый сигнал состоит из затухающих с течением времени косинусоидальных или синусоидальных функций. Если же

вещественные части корней положительны, то функции нарастают со временем.

Когда корни $F_2(s)$ вещественные, т.е. расположены на оси абсцисс в правой или левой полуплоскости s , то сигнал $f(t)$ состоит соответственно из нарастающих или затухающих экспонент. Корень $F_2(s)$, расположенный в начале координат соответствует постоянной составляющей искомого сигнала $f(t)$.

Пример 1. Пусть

$$F(s) = \frac{s + 3}{s(s + 2)(s^2 + 2s + 2)}.$$

Нетрудно видеть, что L -изображение сигнала имеет нуль при $s = -3$ и четыре полюса (рис. 4.1).

Прежде всего найдем корни третьего сомножителя $F_2(s)$: $s^2 + 2s + 2 = 0 \implies s = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm j$.

Теперь представим $F(s)$ в виде суммы четырех слагаемых

$$F(s) = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{s - (-1+j)} + \frac{A_3}{s - (-1-j)}.$$

Для расчета $A_0 - A_3$ по описанной выше методике потребуется аналитическое выражение производной $\Phi'(s)$. Дифференцируя $\Phi(s) = (s + 2)(s^2 + 2s + 2)$, получим:

$$\Phi'(s) = (s^2 + 2s + 2) + (s + 2)(2s + 2). \quad (4.28)$$

Расчет $A_0 - A_3$ по формуле (4.27) дает

$$A_0 = \frac{3}{4}, \quad A_1 = -\frac{1}{4}, \quad A_2 = \frac{2+j}{-1+j} = \frac{-1+2j}{4}, \quad A_3 = \frac{2-j}{-1-j} = \frac{-1-2j}{4}.$$

С учетом (4.6) и (4.7) искомое выражение для оригинала принимает вид

$$f_1(t) = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{-1+2j}{4}e^{(-1+j)t} + \frac{-1-2j}{4}e^{(-1-j)t} \right) \sigma(t)$$

или

$$f_1(t) = (0.75 - 0.25 e^{-2t} - 0.5 e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t) \sigma(t).$$

Переменные слагаемые с течением времени затухают и $f(t) \rightarrow 3/4$.

4.3.2. Восстановление оригиналов L -изображений с кратными полюсами

Пусть многочлен-знаменатель $F_2(s)$ правильной дроби $F(s)$ содержит один корень кратности r (присвоим ему первый номер), а остальные корни $(n - 1)$ являются простыми. Тогда $F_2(s) = (s - s_1)^r \prod_{i=2}^{n-r} (s - s_i)$, а

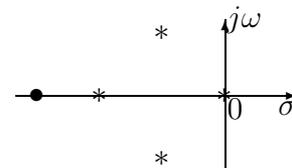


Рис. 4.1. Нуль и полюсы L -изображения: ● – нуль функции, * – полюсы функции

функцию $F(s)$ можно представить суммой двух правильных дробей:

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)} = \frac{\Theta_1(s)}{(s - s_1)^r} + \frac{\Theta_2(s)}{\prod_{i=2}^n (s - s_i)}.$$

Результирующий знаменатель первого слагаемого будет равен $(s - s_1)^r$ только в том случае, если знаменатели всех составляющих его простых дробей имеют вид $(s - s_1)^m$, а $m \leq r$. В соответствии с теоремой о разложении на элементарные дроби функция $F(s)$ принимает вид

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)} = \frac{A_{11}}{s - s_1} + \frac{A_{12}}{(s - s_1)^2} + \dots + \frac{A_{1m}}{(s - s_1)^m} + \dots + \frac{A_{1r}}{(s - s_1)^r} + \sum_{i=2}^n \frac{A_i}{s - s_i}. \quad (4.29)$$

Определение коэффициентов разложения начнем с A_{1r} . Чтобы найти величину коэффициента A_{1r} умножим (4.29) на $(s - s_1)^r$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{F_1(s)}{F_2(s)}(s - s_1)^r &= A_{11}(s - s_1)^{r-1} + \dots + A_{1(r-1)}(s - s_1) + \\ &+ A_{1r} + (s - s_1)^r \sum_{i=2}^n \frac{A_i}{s - s_i}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

При $s \rightarrow s_1$ все слагаемые, кроме A_{1r} , обращаются в нуль, а левая часть равенства превращается в число $F_1(s_1) / \prod_{i=2}^n (s_1 - s_i)$. Итак,

$$A_{1r} = (s - s_1)^r \frac{F_1(s)}{F_2(s)} \Big|_{s=s_1} = \frac{F_1(s)}{\prod_{i=2}^n (s - s_i)} \Big|_{s=s_1} = \frac{F_1(s_1)}{\prod_{i=2}^n (s_1 - s_i)}.$$

Определение остальных коэффициентов A_{1m} вызывает определенные трудности. Для определения коэффициента A_{1m} необходимо оставить в правой и левой частях формулы (4.30) только члены, содержащие m -ю или более низкие степени $(s - s_1)$. Это возможно, если продифференцировать соотношение (4.30) соответствующее число раз и только после этого совершить предельный переход при $s \rightarrow s_1$. Действительно, при первом дифференцировании (4.30) справа устраняется коэффициент A_{1r} , а коэффициент $A_{1(r-1)}$ лишается множителя $(s - s_1)$, т.е.

$$A_{1(r-1)} = \frac{d}{ds} \left(\frac{F_1(s)}{\prod_{i=2}^n (s - s_i)} \right) \Big|_{s=s_1}.$$

Аналогично получаем выражение для любого коэффициента A_{1m} :

$$A_{1m} = \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left(\frac{F_1(s)}{\prod_{i=2}^n (s - s_i)} \right) \Big|_{s=s_1}. \quad (4.31)$$

Для оставшихся простых корней $F_2(s)$ коэффициенты разложения вычисляются по формуле (4.24), а результат полного разложения функции $F(s)$, содержащей один полюс кратности r и $(n - 1)$ простых полюсов, принимает вид:

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{F_2(s)} = \frac{A_{11}}{s - s_1} + \frac{A_{12}}{(s - s_1)^2} + \dots + \frac{A_{1r}}{(s - s_1)^r} + \frac{A_2}{s - s_2} + \frac{A_3}{s - s_3} + \dots + \frac{A_n}{s - s_n}, \quad (4.32)$$

где A_{1m} и A_i определяются по формулам

$$A_{1m} = \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left((s - s_1)^r \frac{F_1(s)}{F_2(s)} \right) \Big|_{s=s_1}, \quad A_i = \frac{F_1(s)}{F_2'(s)} \Big|_{s=s_i}.$$

Согласно следствию из теоремы о производной изображения (см. (4.19)) справедливо равенство

$$\mathbf{L}^{-1}[m!/(s - s_1)^{m+1}] = t^m e^{s_1 t}.$$

С учетом последнего равенства и формул (4.6) и (4.7) можно восстановить оригинал по известному изображению $F(s)$, т.е. определить аналитическое выражение функции $f(t)$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathbf{L}^{-1} \left[\frac{A_{11}}{s - s_1} + \frac{A_{12}}{(s - s_1)^2} + \dots + \frac{A_{1r}}{(s - s_1)^r} + \frac{A_2}{s - s_2} + \frac{A_3}{s - s_3} + \dots + \frac{A_n}{s - s_n} \right] = \\ &= (A_{11}t^{r-1} + A_{12}t^{r-2} + \dots + A_{1r}t) e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \dots + A_n e^{s_n t}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Пример 2. Пусть

$$F(s) = \frac{s + 3}{s(s + 2)^2(s^2 + 2s + 2)}.$$

Эта функция имеет те же нуль и полюсы, что и L -изображение в примере 1 (см. рис. 4.1), но корень $s = -2$ имеет кратность 2.

В соответствии с описанной методикой представим $F(s)$ в виде суммы пяти слагаемых

$$F(s) = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s + 2} + \frac{A_2}{(s + 2)^2} + \frac{A_3}{s - (-1 + j)} + \frac{A_4}{s - (-1 - j)}$$

и будем вычислять коэффициенты $A_0 - A_4$ по формулам:

$$A_0 = \left. \frac{s+3}{(s+2)^2(s^2+2s+2)} \right|_{s=0}; \quad A_1 = \left. \frac{d}{ds} \left[\frac{s+3}{s(s^2+2s+2)} \right] \right|_{s=-2}; \quad A_2 = \left. \frac{s+3}{s(s^2+2s+2)} \right|_{s=-2};$$

$$A_3 = \left. \frac{(s+3)(s+1-j)}{s(s+2)^2(s^2+2s+2)} \right|_{s=-1+j} = \left. \frac{s+3}{s(s+2)^2(s+1+j)} \right|_{s=-1+j};$$

$$A_4 = \left. \frac{(s+3)(s+1+j)}{s(s+2)^2(s^2+2s+2)} \right|_{s=-1-j} = \left. \frac{s+3}{s(s+2)^2(s+1-j)} \right|_{s=-1-j}.$$

Тогда $A_0 = \frac{3}{8}$, $A_1 = -\frac{5}{8}$, $A_2 = -\frac{1}{4}$, $A_3 = \frac{1+3j}{8}$, $A_4 = \frac{1-3j}{8}$, а искомое выражение для оригинала принимает вид

$$f_2(t) = \frac{3}{8} - \frac{5}{8}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1+3j}{8}e^{(-1+j)t} + \frac{1-3j}{8}e^{(-1-j)t} =$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{5}{8}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + e^{-t} \left(\frac{1+3j}{8}e^{jt} + \frac{1-3j}{8}e^{-jt} \right)$$

или

$$f_2(t) = \left(\frac{3}{8} - \frac{5}{8}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{e^{-t}}{4}(\cos t - 3\sin t) \right) \sigma(t).$$

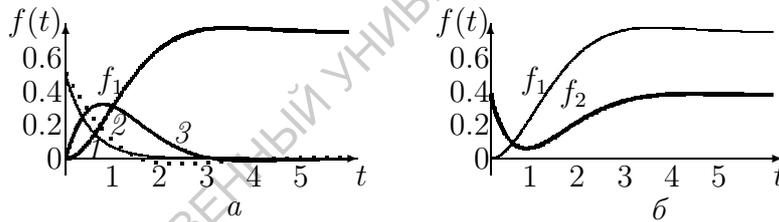


Рис. 4.2. Временные изменения сигналов f_1 и f_2 в примерах 1 (а) и 2 (б). Составляющие сигнала f_1 представлены кривыми 1, 2, 3

На рис. 4.2 изображены временные реализации сигнала $f(t)$, соответствующие решениям, полученным в примере 1 (рис. 4.2,а) и в примере 2 (рис. 4.2,б). Расположение нуля и полюсов $F(s)$ в рассмотренных примерах одинаково (см. рис. 4.1), а временные реализации различаются только из-за разных кратностей полюса $s = -2$.

Глава 5

Модулированные колебания и их спектры

Как отмечалось выше, сигналы, поступающие от источников сообщений, чаще всего являются низкочастотными и для передачи с помощью радиоволн их спектры необходимо перенести в область высоких частот. Для этого достаточно изменять пропорционально передаваемому сообщению параметры высокочастотного колебания, называемого *несущим*. В качестве несущих применяются непрерывные (аналоговые), импульсные или даже хаотические колебания. Чаще других используются однонаправленные непрерывные сигналы, математической моделью которых является гармоническое колебание.

- Физический процесс изменения во времени одного или нескольких параметров несущего колебания в соответствии с передаваемым сообщением называется *модуляцией*.

Гармоническое несущее колебание

$$x_{\text{нес}}(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (5.1)$$

имеет три параметра: *амплитуду* A_m , *круговую частоту* ω_0 и *начальную фазу* φ_0 . Управляя одним из них можно получить *три вида модуляции*: *амплитудную*, *частотную* или *фазовую* (в дальнейшем используются сокращенные обозначения АМ, ЧМ и ФМ).

Если при неизменных ω_0 и φ_0 амплитуда колебания (5.1) изменяется по закону

$$A(t) = A_m + \Delta A s(t), \quad (5.2)$$

где $s(t)$ – передаваемое сообщение, то колебание называется *амплитудно-модулированным*.

Если при неизменных A_m и φ_0 частота колебания удовлетворяет соотношению

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega s(t), \quad (5.3)$$

то колебание называется *частотно-модулированным*. Наконец, когда при постоянных A_m и ω_0 текущая фаза колебания изменяется по закону

$$\Psi(t) = \Psi + \Delta\Psi s(t) = \omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\Psi s(t), \quad (5.4)$$

то получаем *фазомодулированное* колебание.

Частотная и фазовая модуляции сопровождаются изменением одного и того же параметра – фазы (или угла) Ψ несущего колебания и поэтому часто рассматриваются в рамках единой *угловой модуляции*.

Ширина и структура спектра модулированного колебания зависит и от спектральных характеристик передаваемого сообщения, и от вида модуляции. В реальных радиосистемах передаваемое сообщение непредсказуемо, а $s(t)$ является случайной функцией. Ее спектр обычно занимает полосу частот от десятков герц до десятков килогерц. Это означает, что *наивысшая частота в спектре передаваемого сообщения значительно ниже частоты несущего колебания* и модулированное колебание можно считать *узкополосным* или даже *квазигармоническим*.

5.1. Амплитудно-модулированные сигналы

Математической моделью АМ-сигнала служит выражение

$$x_{\text{AM}}(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (5.5)$$

где $A(t) = A_m(1 + ms(t))$ – огибающая АМ-сигнала; ω_0 и φ_0 – круговая частота и начальная фаза высокочастотного заполнения; A_m – амплитуда несущего колебания в отсутствие модуляции; $m = \Delta A/A_m$ – коэффициент модуляции.

Коэффициент модуляции является основным параметром АМ-коле-

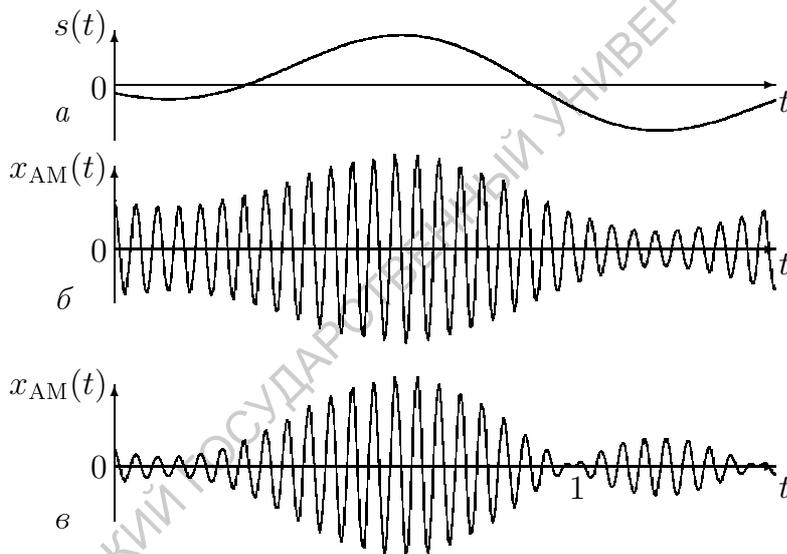


Рис. 5.1. Передаваемое сообщение (а) и АМ-колебание при $|ms(t)| < 1$ (б) и $|ms(t)| > 1$ (в), 1 – точка разрыва фазы несущего колебания

бания, обычно выражается в процентах и характеризует эффективность передачи сообщения. Пока $|ms(t)| < 1$ (рис. 5.1, б), передаваемое сообщение (рис. 5.1, а) вносится в $x_{\text{AM}}(t)$ без искажений. Эффективность использования несущего колебания с ростом m увеличивается, но если $|ms(t)| > 1$ (рис. 5.1, в), то происходит *перемодуляция* сигнала. Как видно из рис. 5.1, в, в этом случае огибающая АМ-сигнала не соответствует

передаваемому сообщению, а фаза несущего колебания претерпевает разрывы (точка 1), т.е. из перемодулированного сигнала выделяется совсем другое сообщение.

Любое АМ-колебание представляет собой произведение двух временных функций, поэтому для определения его спектрального состава в общем случае необходимо использовать теорему о свертке спектральных функций сомножителей. Однако для некоторых частных случаев

спектральный анализ АМ-сигналов удается осуществить более простыми средствами. Начнем исследование свойств и структуры АМ-процессов с простейшей модели – однотонового АМ-колебания.

5.1.1. Однотоновое АМ-колебание и его свойства

Пусть модулирующий сигнал $s(t)$ является гармоническим (однотоновым) колебанием:

$$s(t) = A_s \cos(\Omega t + \Phi_0),$$

частота которого Ω удовлетворяет условию $\Omega \ll \omega_0$. Такое АМ-колебание называется *однотоновым*, а его мгновенное значение описывается соотношением

$$x_{\text{AM}}(t) = A_m (1 + m \cos(\Omega t + \Phi_0)) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (5.6)$$

где $m = A_s/A_m$. График однотонового АМ-колебания представлен

на рис. 5.2 и показывает, что его амплитуда изменяется от $A_{\min} = A_m(1 - m)$ до $A_{\max} = A_m(1 + m)$. Поэтому коэффициент модуляции можно определить по осциллограмме процесса с помощью формулы

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}.$$

Чтобы выяснить спектральный состав такого сигнала, совсем не обязательно использовать фурье-преобразование. Достаточно с помощью тригонометрических формул представить произведение функций в (5.6) в виде суммы гармонических колебаний:

$$x_{\text{AM}}(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{mA_m}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi_0] + \frac{mA_m}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0]. \quad (5.7)$$

Итак, однотоновое АМ-колебание состоит из трех гармонических колебаний с близкими частотами и в общем случае является квазипериодическим. Ширина его спектра равна удвоенной частоте модуляции. Первое слагаемое в правой части (5.7) является несущим колебанием. Его амплитуда A_m не зависит от коэффициента модуляции. Два других колебания возникают в результате модуляции. Они имеют равные амплитуды, пропорциональные m , симметричные относительно несущего колебания фазы $-\Phi_0$ и $+\Phi_0$ и частоты $\omega_0 - \Omega$ и $\omega_0 + \Omega$, называемые *нижней* и *верхней* боковыми частотами. Формулу (5.7) можно интерпретировать графически.

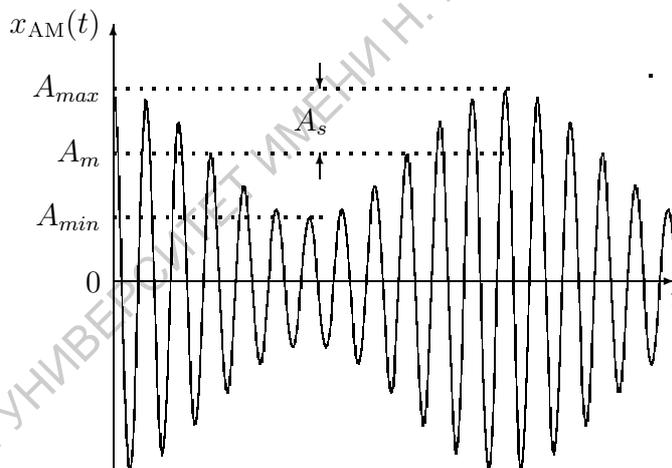


Рис. 5.2 Однотоновое АМ-колебание

Векторная диаграмма однотонового АМ-колебания для начального момента времени ($t=0$) изображена на рис. 5.3 и состоит из трех векторов. Вектор несущего колебания A_m составляет угол φ_0 с полярной осью Or , а верхнее и нижнее боковые колебания – углы Φ_0 и $-\Phi_0$ с направлением вектора A_m .

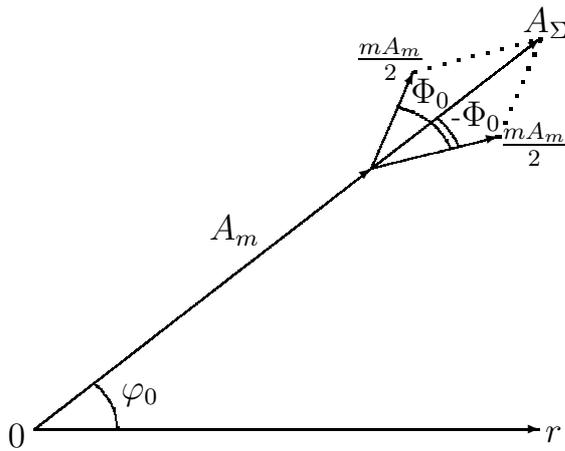


Рис. 5.3. Векторная диаграмма однотонового АМ-колебания

С течением времени вектор A_m вращается вокруг полюса O против часовой стрелки с угловой частотой ω_0 , а векторы боковых составляющих с частотами Ω и $-\Omega$ – вокруг конца вектора A_m . В полярной системе координат, вращающейся по часовой стрелке с частотой ω_0 , вектор A_m неподвижен. Вектор суммы трех колебаний все время остается сонаправленным с A_m , а его длина изменяется от $(1 - m)A_m$ до $(1 + m)A_m$.

Все это справедливо только для "идеального" АМ-колебания, удовлетворяющего соотношению (5.7). Если же амплитуды колебаний боковых частот различаются или нарушается симметрия фаз боковых колебаний, то во вращающейся системе координат результирующий вектор суммы трех колебаний не коллинеарен A_m и испытывает качание относительно вектора несущего колебания. Это означает, что фаза результирующего колебания периодически изменяется во времени, что эквивалентно паразитной фазовой модуляции.

Вещественный спектр однотонового АМ-колебания (рис. 5.4, а) в общем случае – линейчатый спектр квазипериодического процесса. Только в тех случаях, когда $\omega_0/\Omega = N$, где N – целое число, процесс становится периодическим, а линии спектра – $(N - 1)$ -й, N -й и $(N + 1)$ -й гармониками частоты модуляции. Комплексная спектральная плотность однотонового АМ-колебания (рис. 5.4, б) содержит шесть δ -функций: три в области положительных и три в области отрицательных частот.

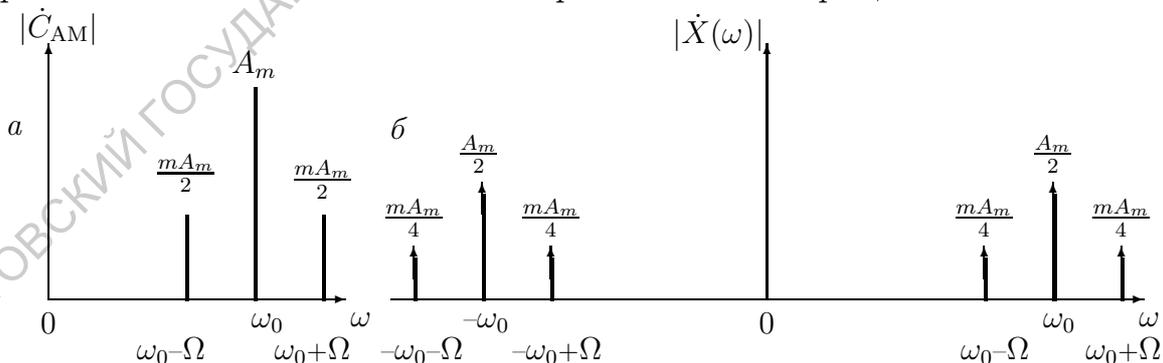


Рис. 5.4. Вещественный (а) и комплексный (б) спектры однотонового АМ-сигнала

Соотношение (5.7) позволяет рассчитать распределение мощности АМ-колебания между его составляющими. Вычисляя среднюю мощность АМ-сигнала за время T , значительно превышающее период модулирующего колебания ($T \gg 2\pi/\Omega$), получим:

$$P_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T x_{\text{AM}}^2(t) dt = \frac{A_m^2}{2} + \frac{m^2 A_m^2}{8} + \frac{m^2 A_m^2}{8}. \quad (5.8)$$

Здесь первое слагаемое представляет среднюю мощность несущего колебания, а два других – средние мощности колебаний боковых частот, содержащих передаваемое сообщение. Таким образом, при 100%-ной модуляции средняя мощность АМ-колебания в 1.5 раза превышает мощность несущего колебания, а суммарная мощность колебаний боковых частот составляет всего 1/3 от полной мощности АМ-колебания, что свидетельствует о неэффективном распределении энергии между составляющими, содержащими сообщение, и несущим колебанием.

Однотональные АМ-колебания – очень удобная математическая модель для изучения простых модулированных колебаний, но она не отражает специфики реальных АМ-радиосигналов, содержащих широкополосные сообщения. Структуру таких процессов целесообразно изучать на более сложных моделях многотональных АМ-колебаний.

5.1.2. Многотональные АМ-колебания

Пусть модулирующий сигнал $s(t)$ является полигармоническим (многотональным) колебанием:

$$s(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(\Omega_i t + \Phi_i).$$

Спектр $s(t)$ может быть неэквидистантным. Если последовательность частот Ω_i упорядочена так, что $\Omega_1 < \Omega_2 < \dots < \Omega_N$ (рис. 5.5, а), то мгновенное значение многотонального АМ-колебания описывается соотношением

$$x_{\text{AM}}(t) = A_m \left(1 + \sum_{i=1}^N m_i \cos(\Omega_i t + \Phi_i) \right) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (5.9)$$

где $m_i = A_i/A_m$ – парциальные (частные) коэффициенты модуляции.

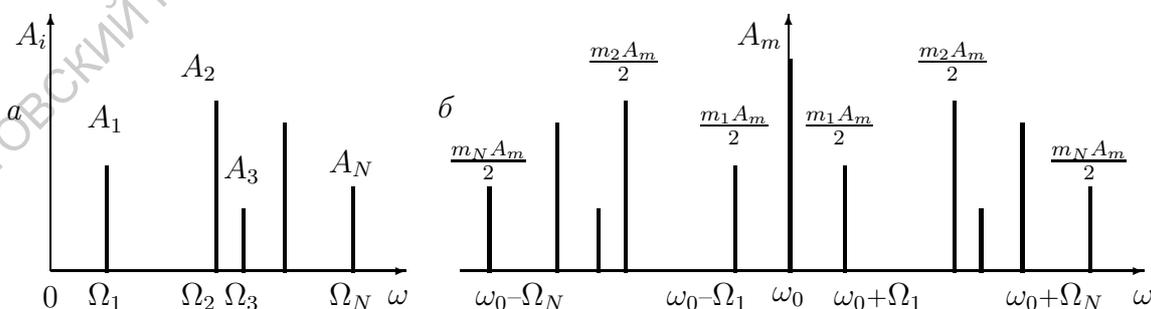


Рис. 5.5. Спектры полигармонического модулирующего сигнала (а) и многотонального АМ-сигнала (б)

Спектральный состав сигнала получим, как и в случае однотонального АМ-колебания, с помощью тригонометрических формул:

$$\begin{aligned}
 x_{\text{AM}}(t) = & A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \sum_{i=1}^N \frac{m_i A_m}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega_i)t + \varphi_0 - \Phi_i] + \\
 & + \sum_{i=1}^N \frac{m_i A_m}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega_i)t + \varphi_0 + \Phi_i].
 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Спектр многотонального АМ-сигнала представлен на рис. 5.5,б и содержит две группы колебаний с верхними от $(\omega_0 + \Omega_1)$ до $(\omega_0 + \Omega_N)$ и нижними от $(\omega_0 - \Omega_N)$ до $(\omega_0 - \Omega_1)$ боковыми частотами. При этом структуры спектров верхней боковой полосы частот и модулирующего сигнала идентичны, а спектральные компоненты нижней боковой полосы частот получаются при зеркальном отражении верхней боковой полосы относительно несущей. Таким образом, колебания боковых частот располагаются попарно-симметрично относительно частоты несущего колебания. Полный спектр содержит $2N + 1$ составляющих, а его ширина определяется величиной максимальной частоты в спектре модулирующего сигнала и равна $2\Omega_N$.

Все рассмотренные спектры АМ-колебаний являются амплитудными. Конечно, можно построить и фазовые спектры, но они малоинформативны и поэтому не приводятся.

Частным случаем многотонального АМ-сигнала является высокочастотное колебание, промодулированное по амплитуде последовательностью прямоугольных импульсов (рис. 5.6).

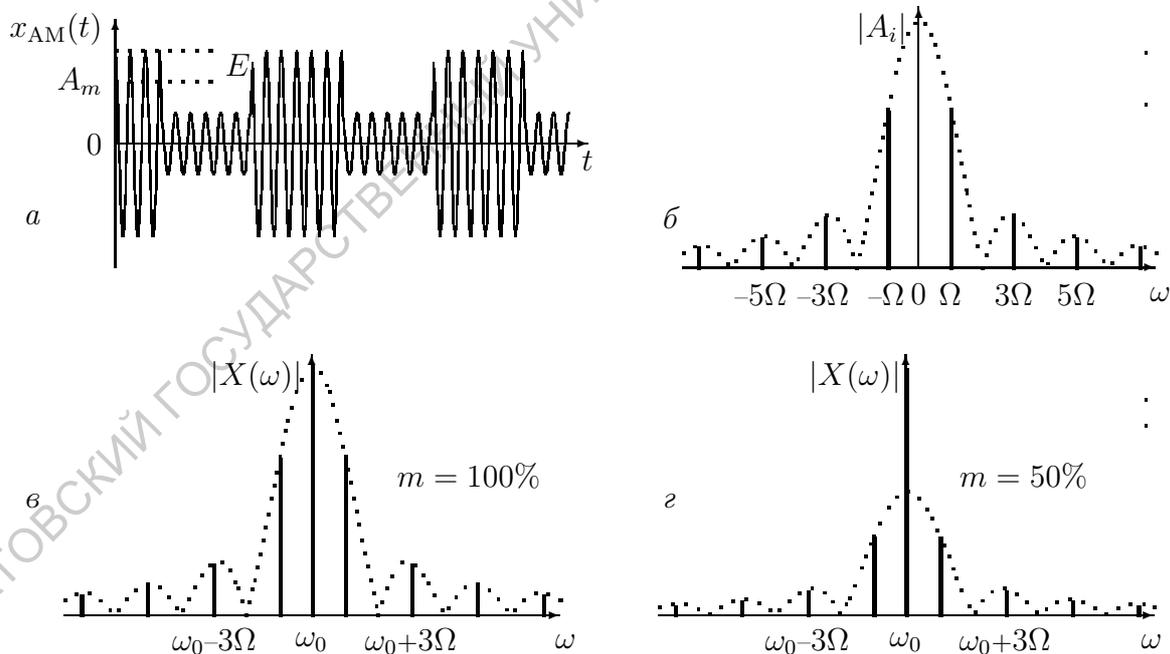


Рис. 5.6. Многотональный АМ-сигнал с прямоугольной огибающей: *a* – временная реализация сигнала; *б* – спектр огибающей; *в* – спектр АМ-сигнала при $m = 100\%$; *г* – спектр АМ-сигнала при $m = 50\%$

Пусть скважность последовательности $q = 2$. Последовательность импульсов (см. 2.2.4) превращается в прямоугольное напряжение $s(t)$, симметричное относительно оси времени, а амплитуда импульсов – в размах

(удвоенную амплитуду) напряжения. Используя для $s(t)$ соотношение (2.16) и учитывая, что $C_0 = 0$ в силу симметричности $s(t)$ относительно оси времени (рис. 5.6,а), а комплексные амплитуды всех четных гармоник ряда при $q = 2$ обращаются в нуль (рис. 5.6,б), представим мгновенное значение АМ-колебания в виде

$$\begin{aligned} x_{\text{AM}}(t) &= \left(A_m + 2E \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(2i+1)\pi/2}{(2i+1)\pi/2} \cos(2i+1)\Omega t \right) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= A_m \left(1 + 2m \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(2i+1)\pi/2}{(2i+1)\pi/2} \cos(2i+1)\Omega t \right) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \end{aligned} \quad (5.11)$$

где $m = E/A_m$ – коэффициент модуляции; Ω – частота основной гармоники $s(t)$, а спектральное разложение $x_{\text{AM}}(t)$ – в виде

$$\begin{aligned} x_{\text{AM}}(t) &= A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \\ &+ mA_m \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(2i+1)\pi/2}{(2i+1)\pi/2} \cos[(\omega_0 - (2i+1)\Omega)t + \varphi_0] + \\ &+ mA_m \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(2i+1)\pi/2}{(2i+1)\pi/2} \cos[(\omega_0 + (2i+1)\Omega)t + \varphi_0]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Амплитудные спектры процесса, построенные по формуле (5.12) для $m = 100\%$ и $m = 50\%$, представлены на рис. 5.6,в и 5.6,г соответственно. При $m = 100\%$ сигнал $x_{\text{AM}}(t)$ представляет последовательность прямоугольных радиоимпульсов¹, что подтверждается совпадением спектра рис. 5.6,в со спектром последовательности радиоимпульсов (см. рис. 3.20). При 50%-ной модуляции структура боковых полос сохраняется, но амплитуды боковых составляющих уменьшаются вдвое (рис. 5.6,г), что вполне согласуется с уменьшением коэффициента модуляции.

Используя (5.12), можно рассчитать распределение средней мощности в таком АМ-сигнале между несущим колебанием и боковыми полосами частот, ответственными за передачу сообщения. Для средней мощности боковых полос, рассчитанной с помощью соотношения Парсеваля, при 100%-ной модуляции имеем

$$P_{\text{ср.бок}} = 2(A_m^2/2)(1 + (1/3)^2 + (1/5)^2 + (1/7)^2 + \dots) \simeq 1.184A_m^2,$$

а полная мощность АМ-колебания определяется как

$$P_{\text{нес}} + P_{\text{ср.бок}} = A_m^2/2 + 2(A_m^2/2)(1 + (1/3)^2 + (1/5)^2 + (1/7)^2 + \dots) \simeq 1.684A_m^2.$$

Таким образом, при 100%-ной модуляции средняя мощность колебаний боковых полос АМ-колебания в виде последовательности прямоугольных радиоимпульсов составляет уже 70% от полной мощности АМ-колебания.

Проведенный анализ показывает, что значительная доля мощности АМ-колебаний расходуется на несущее колебание и не участвует в передаче сообщения, а информация, заключенная в верхней и нижней боковых полосах, дублируется. Поскольку все радиовещательные станции

¹ Фазы высокочастотного заполнения должны быть такими же, какие получаются при "нарезании" их из одного непрерывного гармонического колебания.

(кроме УКВ-диапазона) используют принципы амплитудной модуляции, проблема повышения эффективности использования мощности передатчиков долгое время занимала радиофизиков. В результате исследований были разработаны более экономичные методы амплитудной модуляции: модуляция с подавленной несущей, получившая название *балансной АМ*, и модуляция с подавленной боковой полосой – *однополосная АМ*.

При балансной модуляции в эфир поступают только сигналы верхней и нижней боковых полос. Чтобы понять, как при этом изменяется структура сигнала обратимся к однотоновой модуляции. В спектре АМ-сигнала теперь остаются две составляющие (два последних слагаемых в (5.7), сложение которых приводит к биениям (произведение гармонических функций в (5.6)). В результате огибающая не соответствует передаваемому сообщению и периодически обращается в нуль. Хотя в спектре отсутствует несущее колебание, высокочастотное заполнение содержит частоту ω_0 .

При передаче одной боковой полосы (обычно нижней) сигнал содержит не только произведение несущего колебания и сообщения, но и дополнительный квадратурный член. Оба способа требуют значительного усложнения приемника и поэтому не получили распространения. Разработка различных систем, в том числе квадратурных модуляторов Хартли, не дала необходимого результата, и проблема остается.

5.2. Фазо- и частотно-модулированные сигналы

У произвольного гармонического колебания

$$x(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A_m \cos \Psi(t)$$

набег текущей фазы $\Psi(t_2) - \Psi(t_1)$ за конечный отрезок времени $t_2 - t_1$ пропорционален угловой частоте ω_0 , т.е.

$$\Psi(t_2) - \Psi(t_1) = \omega_0(t_2 - t_1), \quad \text{а} \quad \omega_0 = [\Psi(t_2) - \Psi(t_1)] / (t_2 - t_1).$$

Когда же частота колебания зависит от времени, имеем

$$\Psi(t_2) - \Psi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \omega(t) dt, \quad (5.13)$$

$$\omega(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt}. \quad (5.14)$$

Таким образом, изменения во времени частоты и текущей фазы колебания взаимосвязаны. Отсюда для текущей фазы колебания с переменной частотой имеем

$$\Psi(t) = \int_0^t \omega(t) dt + \varphi_0, \quad (5.15)$$

где φ_0 – начальная фаза колебания. Воспользуемся этими соотношениями для анализа структуры ФМ- и ЧМ-колебаний.

Фазомодулированное колебание, у которого текущая фаза $\Psi(t)$ изменяется пропорционально модулирующему сигналу $s(t)$, можно представить следующей математической моделью:

$$x_{\text{ФМ}}(t) = A_m \cos [\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\Psi \cdot s(t)], \quad (5.16)$$

где $\Delta\Psi$ – максимальное отклонение или *девиация* фазы колебания. Эта же величина характеризует глубину фазовой модуляции и поэтому называется *индексом фазовой модуляции* $m_{\text{ФМ}} = \Delta\Psi$.

Мгновенную частоту ФМ-сигнала нетрудно найти, дифференцируя по времени фазу колебания (5.16):

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\Psi \cdot s'(t) = \omega_0 + \Delta\omega(t),$$

т.е. фазовая модуляция вызывает модуляцию частоты, но $\Delta\omega$ не пропорциональная $s(t)$.

Частотно-модулированное колебание возникает при изменении частоты гармонического сигнала пропорционально сообщению $s(t)$, т.е. $\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega \cdot s(t)$. Величина $\Delta\omega$ характеризует максимальное отклонение частоты и называется *девиацией частоты*.

Поскольку каждому значению $\omega(t)$ соответствует определенное значение фазы, определяющей мгновенное значение ЧМ-сигнала в момент времени t , для построения аналитического выражения $x_{\text{ЧМ}}(t)$ необходимо использовать соотношение (5.15). Тогда

$$\begin{aligned} x_{\text{ЧМ}}(t) &= A_m \cos \Psi(t) = A_m \cos \left(\int_0^t \omega(t) dt + \varphi_0 \right) = \\ &= A_m \cos \left(\omega_0 t + \Delta\omega \int_0^t s(t) dt + \varphi_0 \right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Соотношения (5.16) и (5.17) идентичны. Единственное различие состоит в способе внесения сообщения в текущую фазу. Различие тем существеннее, чем сложнее функция $s(t)$.

5.2.1. Однотональные ФМ- и ЧМ-сигналы

Пусть $s(t) = \cos(\Omega t + \Phi_0)$. Тогда (5.16) принимает вид

$$\begin{aligned} x_{\text{ФМ}}(t) &= A_m \cos [\omega_0 t + \varphi_0 + m_{\text{ФМ}} \cos(\Omega t + \Phi_0)] = \\ &= A_m \cos [\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\Psi \cos(\Omega t + \Phi_0)]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Индекс фазовой модуляции $m_{\text{ФМ}}$ однотонального ФМ-сигнала, как и в общем случае, характеризует предельное отклонение фазового сдвига $\Delta\Psi$. Дифференцируя по времени текущую фазу ФМ-сигнала, получим:

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = \omega_0 - \Delta\Psi \cdot \Omega \sin(\Omega t + \Phi_0).$$

Таким образом, предельное отклонение частоты $\Delta\omega$ в однотональном ФМ-колебании пропорционально девиации фазы и частоте модулирующего сигнала.

Колебание $x_{\text{ФМ}}(t)$ не является гармоническим, но превращается в него в отсутствие модулирующего сигнала. Характер ФМ-колебания легко выявить с помощью формулы (5.18): текущая фаза (рис. 5.7) под воздействием модулирующего сигнала сначала опережает, а затем запаздывает относительно фазы соответствующего гармонического колебания (тонкая кривая).

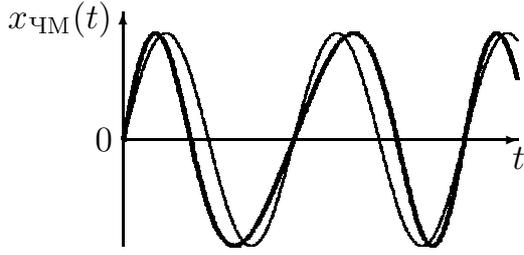


Рис. 5.7 ФМ-сигнал

Обратимся к однотоновым ЧМ-сигналам. Подставим в (5.17) $s(t) = \cos \Omega t + \Phi_0$ и для мгновенных значений ЧМ-сигнала получим выражение

$$\begin{aligned} x_{\text{ЧМ}}(t) &= A_m \cos \left[\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\omega \int_0^t \cos(\Omega t + \Phi_0) dt \right] = \\ &= A_m \cos \left[\omega_0 t + \varphi_0 + \beta \sin(\Omega t + \Phi_0) \right]. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Величина $\beta = \Delta\omega/\Omega$ представляет *девиацию фазы ЧМ-сигнала* и называется *индексом частотной модуляции* однотонового ЧМ-сигнала.

Итак, однотоновые ФМ- и ЧМ-сигналы имеют одну и ту же аналитическую форму представления. Это позволяет рассматривать оба сигнала в рамках единой модели модулированного по углу колебания (УМ-сигнала). Девиации фазы и частоты поразному зависят от частоты модулирующего сигнала Ω (рис. 5.8): у однотонового модулированного по фазе колебания девиация фазы $\Delta\Psi$ не зависит от частоты модулирующего сигнала, а девиация частоты пропорциональна Ω (рис. 5.8,а), у однотонового модулированного по частоте сигнала девиация частоты $\Delta\omega$ не зависит от частоты модулирующего сигнала, а девиация фазы $\Delta\Psi$ обратно пропорциональна Ω (рис. 5.8,б).

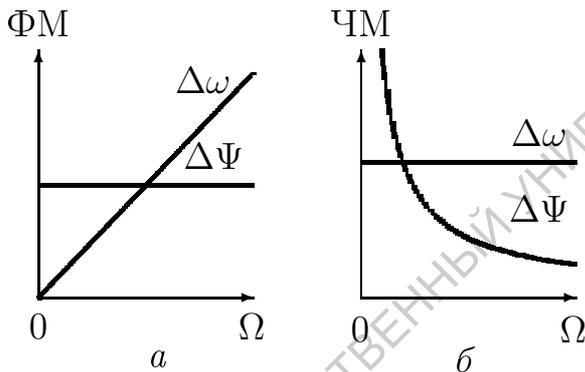


Рис. 5.8. Зависимости $\Delta\omega$ и $\Delta\Psi$ от частоты Ω модулирующего колебания для ФМ-сигнала (а) и ЧМ-сигнала (б)

у однотонового модулированного по частоте сигнала девиация частоты $\Delta\omega$ не зависит от частоты модулирующего сигнала, а девиация фазы $\Delta\Psi$ обратно пропорциональна Ω (рис. 5.8,б).

5.2.2. Спектральное представление УМ-сигналов с малым индексом модуляции

Обратимся к соотношению (5.19) и, принимая $\beta \ll 1$, $\sin(\beta s(t)) \simeq \beta s(t)$, $\cos(\beta r(t)) \simeq 1$, преобразуем его к виду:

$$\begin{aligned} x_{\text{ЧМ}}(t) &= A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cos[\beta \sin(\Omega t + \Phi_0)] - \\ &\quad - A_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \sin[\beta \sin(\Omega t + \Phi_0)] = \\ &= A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \beta A_m \sin(\Omega t + \Phi_0) \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{\beta A_m}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0] - \\
&\quad - \frac{\beta A_m}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi_0] = \\
&= A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{\beta A_m}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0] + \\
&\quad + \frac{\beta A_m}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi_0 + \pi]. \quad (5.20)
\end{aligned}$$

Как следует из (5.20), спектр однотонового УМ-сигнала с малым индексом модуляции содержит всего три составляющие: несущее колебание с амплитудой A_m и симметричные относительно него боковые составляющие с одинаковой амплитудой $\beta A_m/2$ и с частотами $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$. Амплитудный спектр однотонового УМ-колебания изображен на рис. 5.9,а и не отличается от аналогичного спектра однотонового АМ-колебания. С учетом дополнительного (на 180°) запаздывания нижнего бокового колебания полный спектр принимает вид, показанный на рис. 5.9,б. Полученные фазовые соотношения можно проанализировать с помощью векторной диаграммы (рис. 5.10).

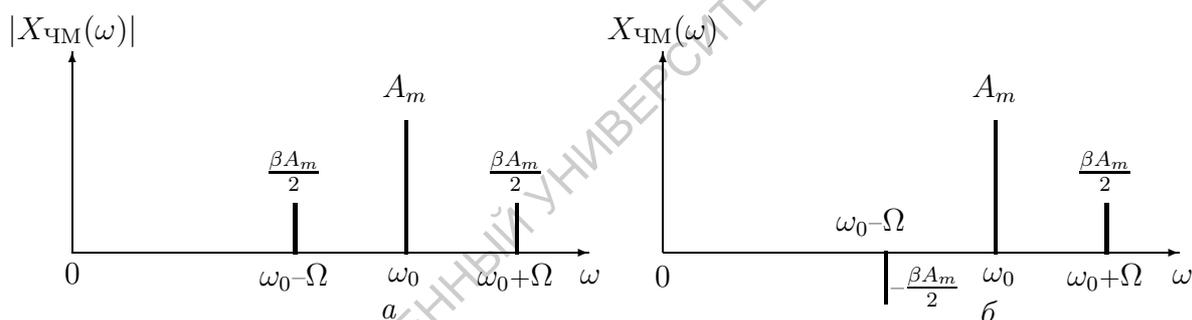


Рис. 5.9. Амплитудный (а) и полный (б) спектры УМ-сигнала с малым индексом модуляции

Как и на векторной диаграмме однотонового АМ-сигнала (см. рис. 5.3), вектор колебания с верхней боковой частотой вращается против часовой стрелки, а вектор колебания с нижней боковой частотой – по часовой стрелке вокруг конца вектора A_m , но из-за задержки на 180° вектор нижнего бокового колебания меняет направление на противоположное (на рис. 5.10 изображен пунктиром). Сумма векторов боковых колебаний не является коллинеарной с A_m и во все моменты времени перпендикулярна вектору несущего колебания (рис. 5.10), а результирующий вектор $x_{чм}(t)$ будет периодически качаться во-

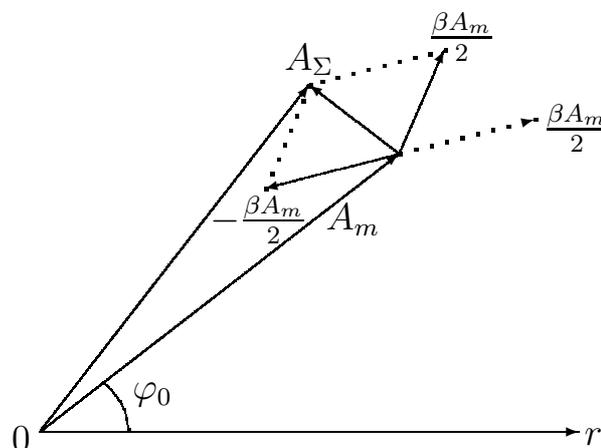


Рис. 5.10. Векторная диаграмма УМ-сигнала с малым индексом модуляции

круг вектора A_m . Таким образом, мгновенная фаза $x_{\text{чМ}}(t)$ периодически изменяется со временем, и имеет место угловая модуляция. Длина вектора $x_{\text{чМ}}(t)$, по определению УМ-колебания, должна оставаться постоянной. На векторной диаграмме (см. рис. 5.10) она изменяется, так как для большей наглядности рисунка длины векторов боковых колебаний выбраны чрезмерно большими, и условие $\beta \ll 1$ не выполняется.

5.2.3. Спектральное представление УМ-сигналов с произвольным индексом модуляции

Обратимся снова к соотношению (5.19) и, не нарушая общности анализа, положим $\Phi_0 = 0$:

$$x_{\text{чМ}}(t) = A_m \cos [\beta \sin \Omega t] \cos (\omega_0 t + \varphi_0) - A_m \sin [\beta \sin \Omega t] \sin (\omega_0 t + \varphi_0). \quad (5.21)$$

Функции $\cos [\beta \sin \Omega t]$ и $\sin [\beta \sin \Omega t]$ – периодические функции с периодом $T/4 = \pi/2\Omega$, и их можно разложить в ряды Фурье. При разложении функции $\cos [\beta \sin \Omega t]$ амплитуды нечетных гармоник обращаются в нуль, а для C_{2k} получаем выражение:

$$C_{2k} = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} \cos (\beta \sin \Omega t) \cos 2k\Omega t \, dt.$$

Если ввести замену переменных $\Omega t = \Theta$, то

$$C_{2k} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos (\beta \sin \Theta) \cos 2k\Theta \, d\Theta \quad (5.22)$$

и совпадает с известной формулой интегрального представления функций Бесселя четного порядка $J_{2k}(\beta)$. Таким образом, разложение функции $\cos [\beta \sin \Omega t]$ имеет вид

$$\cos [\beta \sin \Omega t] = \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k}(\beta) \cos (2k\Omega t). \quad (5.23)$$

При разложении функции $\sin [\beta \sin \Omega t]$ в нуль обращаются амплитуды четных гармоник, а для C_{2k+1} имеем выражение

$$C_{2k+1} = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} \sin (\beta \sin \Omega t) \sin (2k+1)\Omega t \, dt,$$

которое заменой переменных $\Omega t = \Theta$ сводится к формуле интегрального представления функций Бесселя нечетного порядка, т.е.

$$C_{2k+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin (\beta \sin \Theta) \cos (2k+1)\Theta \, d\Theta = J_{2k+1}(\beta).$$

В результате получаем следующее разложение функции $\sin [\beta \sin \Omega t]$:

$$\sin [\beta \sin \Omega t] = \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\beta) \sin [(2k+1)\Omega t]. \quad (5.24)$$

Подставляя (5.23) и (5.24) в (5.21), получим:

$$\begin{aligned} x_{\text{ЧМ}}(t) = & A_m \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k}(\beta) \cos (2k\Omega t) \cos (\omega_0 t + \varphi_0) + \\ & + A_m \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\beta) \sin [(2k+1)\Omega t] \sin (\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (5.25)$$

После внесения $\cos (\omega_0 t + \varphi_0)$ и $\sin (\omega_0 t + \varphi_0)$ под знаки сумм и использования тригонометрических уравнений

$$\begin{aligned} \cos (2k\Omega t) \cos (\omega_0 t + \varphi_0) &= \frac{1}{2} \cos (\omega_0 t + \varphi_0 - 2k\Omega t) + \frac{1}{2} \cos (\omega_0 t + \varphi_0 + 2k\Omega t); \\ \sin [(2k+1)\Omega t] \sin (\omega_0 t + \varphi_0) &= \frac{1}{2} \cos (\omega_0 t + \varphi_0 - (2k+1)\Omega t) - \\ & - \frac{1}{2} \cos (\omega_0 t + \varphi_0 + (2k+1)\Omega t) \end{aligned}$$

однотональный частотно-модулированный сигнал с произвольным индексом модуляции принимает окончательный вид

$$x_{\text{ЧМ}}(t) = A_m \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \cos [(\omega_0 + k\Omega)t + \varphi_0]. \quad (5.26)$$

При выводе этого соотношения было также учтено, что $J_{-k}(\beta) = (-1)^k J_k(\beta)$, т.е. $J_{-2k}(\beta) = J_{2k}(\beta)$, $J_{-(2k+1)}(\beta) = -J_{(2k+1)}(\beta)$.

Функции Бесселя изображены на рис. 5.11 и представляют собой медленно затухающие квазипериодические функции.

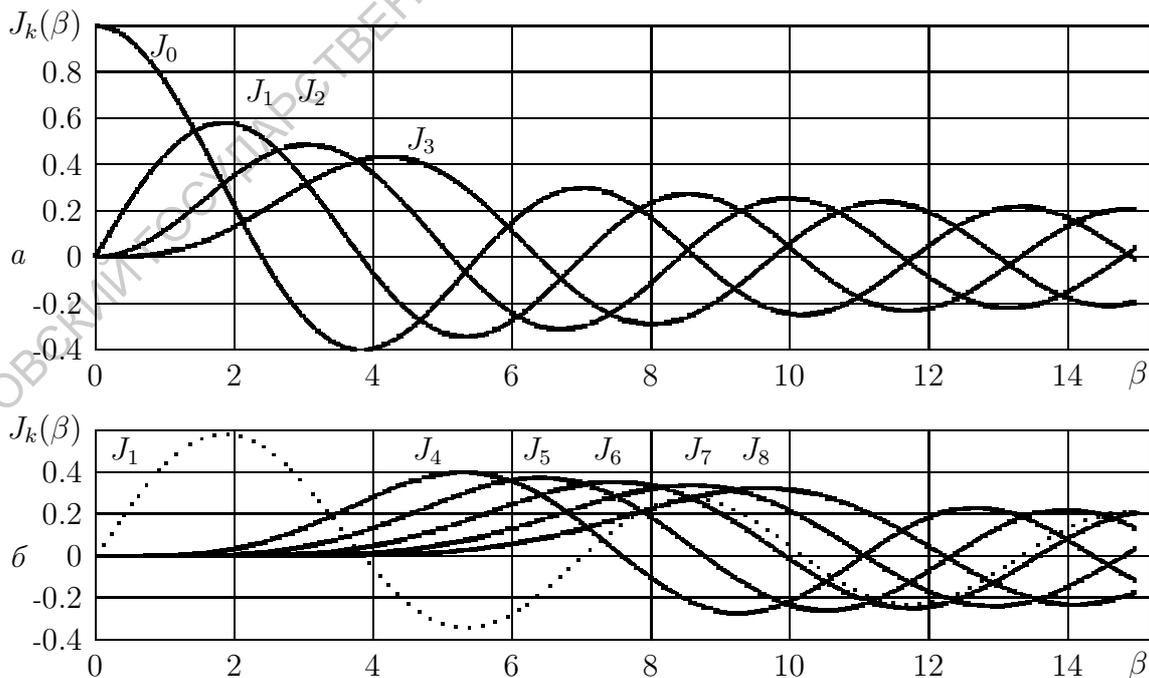


Рис. 5.11. Функции Бесселя нулевого – третьего порядка (а) и четвертого – восьмого порядка (б)

- Итак, спектр даже однотонального модулированного по частоте (или в общем случае по углу) колебания содержит бесконечное число боковых гармоник, попарно симметричных относительно несущей частоты колебания. У однотональных колебаний спектр эквидистантный. Амплитуды всех составляющих, в том числе и несущей, пропорциональны значениям функций Бесселя.

Значения β , при которых функции Бесселя нулевого, первого и второго порядка обращаются в нуль, представлены в табл. 5.1, а значения функций Бесселя $J_0(\beta)$, $J_1(\beta) - J_6(\beta)$ при фиксированных значениях β – в табл. 5.2.

Таблица 5.1
Значения первых пяти корней функций Бесселя $J_0(\beta)$, $J_1(\beta)$ и $J_2(\beta)$

β	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
$J_0(\beta)$	2.405	5.52	8.65	11.79	14.93
$J_1(\beta)$	3.83	7.01	10.17	13.31	16.47
$J_2(\beta)$	5.13	8.41	11.62	14.79	17.96

Таблица 5.2
Значения функций Бесселя $J_0(\beta)$, $J_1(\beta) - J_6(\beta)$ при фиксированных значениях β

β	$J_0(\beta)$	$J_1(\beta)$	$J_2(\beta)$	$J_3(\beta)$	$J_4(\beta)$	$J_5(\beta)$	$J_6(\beta)$
$\beta = 0.5$	0.938	0.242	0.03	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$
$\beta = 1.0$	0.765	0.44	0.114	0.02	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$
$\beta = 1.5$	0.511	0.558	0.232	0.06	0.008	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$
$\beta = 2.0$	0.224	0.576	0.352	0.13	0.034	0.007	$\rightarrow 0$
$\beta = 2.5$	-0.04	0.497	0.446	0.241	0.097	0.29	0.007

Интересно, что при больших значениях β существенную для расчетов величину имеют только те функции Бесселя, порядок которых k не превышает $\beta + 1$, т.е. реальная ширина спектра УМ-сигнала составляет $2(\beta + 1)\Omega = 2(\Delta\omega + \Omega) \simeq 2\Delta\omega = 2\beta\Omega$ и в 2β раз превышает ширину спектра аналогичного однотонального АМ-сигнала. Спектры двух УМ-сигналов для $A_m = 1$ при $\beta = 1$ и $\beta = 2.5$ представлены на рис. 5.12, а, б соответственно. Отметим, что амплитуда несущей может быть не только много меньше амплитуд боковых колебаний, но и при $\beta = 2.405, 5.52, \dots$ (см. табл. 5.1) вообще отсутствует в спектре УМ-колебания.

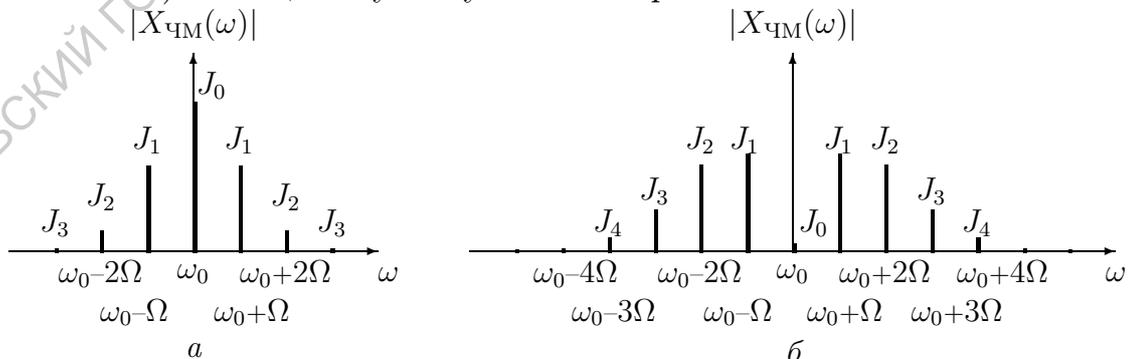


Рис. 5.12. Спектры УМ-сигналов при $\beta = 1$ (а) и $\beta = 2.5$ (б)

- Итак, ширина спектра однотонального УМ-колебания при больших индексах модуляции близка к удвоенной девиации частоты и не зависит от частоты модулирующего сигнала.

- Одновременное присутствие многих составляющих, содержащих информацию о модулирующем сигнале, позволяет обеспечить высокую достоверность при передаче сообщений и осуществить высококачественное радиовещание, а постоянство амплитуды УМ-сигналов, точнее независимость амплитуды УМ-колебания от передаваемого сообщения, обеспечивает помехоустойчивость приема.
- Необходимая широкополосность УМ-сигналов может быть обеспечена только при достаточно высокой частоте несущего колебания, т.е. в области метровых или более коротких волн. Поэтому ЧМ-колебания (их проще создавать и демодулировать) используются при трансляции стереопередач в УКВ-диапазоне и звукового сопровождения телевизионных передач.

5.2.4. Структура спектров УМ-сигналов при негармонической модуляции

Рассмотрим особенности структуры многотональных УМ-колебаний на примере бигармонической частотной модуляции при малых индексах модуляции. Пусть

$$s(t) = A_1 \cos(\Omega_1 t) + A_2 \cos(\Omega_2 t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} x_{\text{ЧМ}}(t) &= A_m \cos[\omega_0 t + \varphi_0 + \beta_1 \sin(\Omega_1 t) + \beta_2 \sin(\Omega_2 t)] = \\ &= A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cos[\beta_1 \sin(\Omega_1 t) + \beta_2 \sin(\Omega_2 t)] - \\ &\quad - A_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \sin[\beta_1 \sin(\Omega_1 t) + \beta_2 \sin(\Omega_2 t)], \end{aligned} \quad (5.27)$$

где $\beta_1 = A_1 \Delta\omega / \Omega_1$ и $\beta_2 = A_2 \Delta\omega / \Omega_2$ – парциальные индексы модуляции. Учитывая, что при малых величинах β выполняются соотношения $\sin \beta \simeq \beta$, $\cos \beta \simeq 1 - \beta^2/2$, приведем соотношение (5.26) к виду:

$$\begin{aligned} x_{\text{ЧМ}}(t) &= A_m \left(1 - \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{4}\right) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \\ &\quad + \frac{A_m \beta_1}{2} \left(\cos[(\omega_0 + \Omega_1)t + \varphi_0] - \cos[(\omega_0 - \Omega_1)t + \varphi_0]\right) + \\ &\quad + \frac{A_m \beta_2}{2} \left(\cos[(\omega_0 + \Omega_2)t + \varphi_0] - \cos[(\omega_0 - \Omega_2)t + \varphi_0]\right) + \\ &\quad + \frac{A_m \beta_1^2}{8} \left(\cos[(\omega_0 + 2\Omega_1)t + \varphi_0] + \cos[(\omega_0 - 2\Omega_1)t + \varphi_0]\right) + \\ &\quad + \frac{A_m \beta_2^2}{8} \left(\cos[(\omega_0 + 2\Omega_2)t + \varphi_0] + \cos[(\omega_0 - 2\Omega_2)t + \varphi_0]\right) + \\ &\quad + \frac{A_m \beta_1 \beta_2}{2} \left(\cos[(\omega_0 + \Omega_1 - \Omega_2)t + \varphi_0] + \cos[(\omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2)t + \varphi_0]\right) - \\ &\quad - \frac{A_m \beta_1 \beta_2}{2} \left(\cos[(\omega_0 + \Omega_1 + \Omega_2)t + \varphi_0] + \cos[(\omega_0 - \Omega_1 - \Omega_2)t + \varphi_0]\right). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Спектральная диаграмма УМ-сигнала при двухтональной модуляции представлена на рис. 5.13. Как следует из диаграммы, при бигармоническом модулирующем сигнале спектр УМ-сигнала значительно богаче, чем при одотональной угловой модуляции.

- Главная особенность спектра двухтонального УМ-сигнала состоит в том, что в отличие от многотональных АМ-сигналов в нем присутствуют колебания с *комбинационными частотами* вида $\omega_0 \pm \Omega_1 \pm \Omega_2$, свидетельствующие о взаимодействии составляющих.

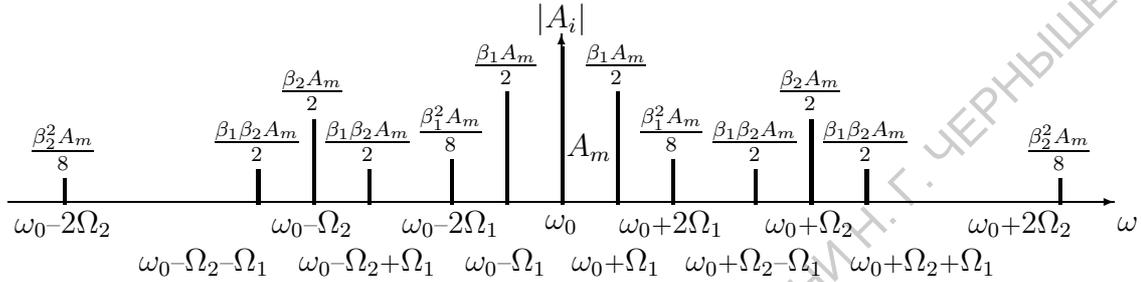


Рис. 5.13. Спектр УМ-колебания при двухтональном модулирующем сигнале

В заключение рассмотрим еще один класс ЧМ-сигналов – радиоимпульсы с частотно-модулированным заполнением. Использование таких сигналов в радиолокационных системах способствует значительному повышению их чувствительности.

5.2.5. Радиоимпульсы с линейной частотной модуляцией и их спектры

Рассмотрим прямоугольный импульс с глубокой внутриимпульсной частотной модуляцией по линейному закону – ЛЧМ-импульс. Его текущая частота задается формулой

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{\tau}t \quad \text{при} \quad |t| \leq \tau/2, \quad (5.29)$$

где ω_0 – несущая частота; $\Delta\omega$ – девиация частоты; τ – длительность импульса, а мгновенное значение описывается соотношением

$$x_{\text{ЛЧМ}}(t) = A_m \cos \left(\int \omega(t) dt + \varphi_0 \right).$$

Полагая $\varphi_0 = 0$, окончательно получим:

$$x_{\text{ЛЧМ}} = \begin{cases} 0, & t < -\tau/2, \\ A_m \cos \left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{2\tau} t^2 \right), & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}, \\ 0, & t > \tau/2. \end{cases} \quad (5.30)$$

Наибольший интерес представляют ЛЧМ-импульсы с большой базой $D = \Delta f \tau = \frac{1}{2\pi} \Delta\omega \tau \gg 1$ ($D = 100$ и больше). Это пример сложных сигналов (рис. 5.14).

ЛЧМ-импульсы обладают замечательными свойствами. Во-первых, с

помощью специальной линии задержки, у которой $t_{\text{зад}}$ обратно пропорционально частоте поступающего сигнала, можно существенно "сжать" ЛЧМ-импульс во времени. Действительно, если начало импульса с частотой $\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$ задержать на 0.8τ и, постепенно уменьшая задержку, обеспечить $t_{\text{зад}} = 0.3\tau$ для середины импульса с частотой ω_0 , то можно получить результирующий импульс с длительностью порядка 0.2τ и тем самым увеличить амплитуду выходного сигнала и чувствительность приемной системы.

Вторая особенность ЛЧМ-сигналов состоит в структуре их спектров.

Спектральная плотность ЛЧМ-импульсов получается при вычислении интеграла Фурье от (5.30):

$$\begin{aligned} \dot{X}_{\text{ЛЧМ}}(\omega) &= A_m \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{2\tau} t^2\right) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{A_m}{2} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{j[(\omega_0 - \omega)t + \Delta\omega t^2 / (2\tau)]} dt + \frac{A_m}{2} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j[(\omega_0 + \omega)t + \Delta\omega t^2 / (2\tau)]} dt. \end{aligned}$$

Первый интеграл представляет спектральную плотность с максимумом в области положительных частот, быстро осциллирующую в области отрицательных частот, а второй, напротив, имеет спектральный максимум в области отрицательных частот и быстро затухает в области положительных частот. Пренебрегая перекрытием этих спектров и ограничивая рассмотрение областью положительных частот, получим:

$$\dot{X}_{\text{ЛЧМ}}(\omega) \cong \frac{A_m}{2} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{j[(\omega_0 - \omega)t + \Delta\omega t^2 / (2\tau)]} dt. \quad (5.31)$$

Показатель этой экспоненты можно дополнить до полного квадрата и представить в виде $j\frac{\pi}{2}x^2 - \mu$, где μ – постоянная:

$$j[(\omega_0 - \omega)t + \frac{\Delta\omega}{2\tau} t^2] = j\frac{\Delta\omega}{2\tau} \left[t^2 + \frac{2\tau}{\Delta\omega} (\omega_0 - \omega)t + \frac{(\omega_0 - \omega)^2}{\Delta\omega^2} \tau^2 \right] - \frac{(\omega_0 - \omega)^2}{2\Delta\omega} \tau.$$

Обозначим $x = \sqrt{\frac{2\Delta f}{\tau}} \left(t + \frac{\omega_0 - \omega}{\Delta\omega} \tau \right)$. Тогда

$$\dot{X}_{\text{ЛЧМ}}(\omega) \cong \frac{A_m}{2} \sqrt{\frac{\tau}{2\Delta f}} e^{-j(\omega_0 - \omega)^2 \tau / (2\Delta\omega)} \int_{-x_1}^{x_2} e^{j\pi x^2 / 2} dx,$$

где $-x_1$ и x_2 соответствуют $-\tau/2$ и $\tau/2$, т.е.

$$x_1 = \sqrt{\frac{2\Delta f}{\tau}} \left(-\frac{\tau}{2} + \frac{\omega_0 - \omega}{\Delta\omega} \tau \right) = -\sqrt{\frac{D}{2}} \left(t + 2\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega} \right), \quad (5.32)$$

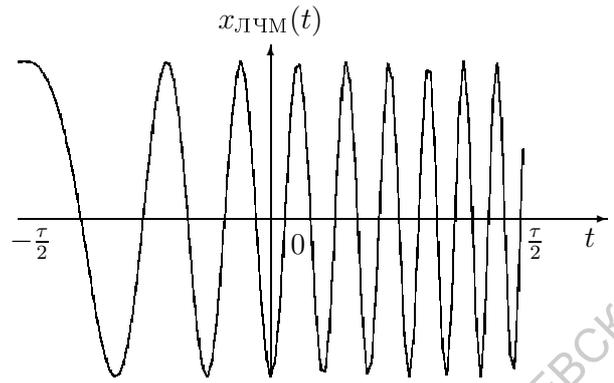


Рис. 5.14. Временная развертка ЛЧМ-импульса

$$x_2 = \sqrt{\frac{2\Delta f}{\tau}} \left(\frac{\tau}{2} + \frac{\omega_0 - \omega}{\Delta\omega} \tau \right) = \sqrt{\frac{D}{2}} \left(t - 2\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega} \right), \quad (5.33)$$

$D = \Delta f \tau$ – база сигнала. Как известно,

$$\int_0^y e^{j\pi x^2/2} dx = \int_0^y \cos \frac{\pi}{2} x^2 dx + j \int_0^y \sin \frac{\pi}{2} x^2 dx = C(y) + jS(y),$$

где $C(y)$ – косинус-интеграл, а $S(y)$ – синус-интеграл Френеля.

Графики интегралов Френеля изображены на рис. 5.15. Интегралы Френеля представляют нечетные функции, т.е. $C(-y) = -C(y)$, $S(-y) = -S(y)$, и с увеличением аргумента сначала быстро возрастают, а затем асимптотически стремятся к ± 0.5 (пунктирные прямые на рис. 5.15). Аргументы этих функций в соответствии с (5.32) и (5.33) являются линейными функциями частоты и в диапазоне $(\omega_0 - \Delta\omega/2) \div (\omega_0 + \Delta\omega/2)$ изменяются линейно от 0 до $\sqrt{2D}$ (x_1) и от $\sqrt{2D}$ до 0 (x_2). Поэтому для больших значений D можно считать, что $C(y) = S(y) = -0.5$ при $y < 0$ и $C(y) = S(y) = 0.5$ при $y > 0$.

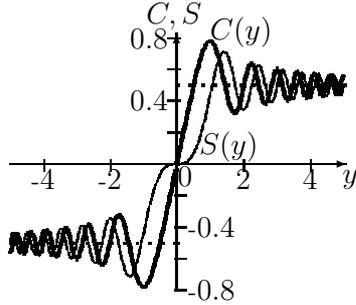


Рис. 5.15. Графики косинус- и синус-интегралов Френеля

Используя интегралы Френеля, получим для спектральной плотности ЛЧМ-импульса окончательное выражение:

$$\begin{aligned} \dot{X}_{\text{ЛЧМ}}(\omega) &= \frac{A_m}{2} \sqrt{\frac{\tau}{2\Delta f}} e^{-j(\omega_0 - \omega)^2 \tau / (2\Delta\omega)} \times \\ &\times [C(x_1) + C(x_2) + jS(x_1) + jS(x_2)]. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Если представить $\dot{X}_{\text{ЛЧМ}}(\omega)$ в экспоненциальной форме

$$\dot{X}_{\text{ЛЧМ}}(\omega) = |X_{\text{ЛЧМ}}(\omega)| e^{j\varphi(\omega)},$$

то для амплитудного и фазового спектров ЛЧМ-сигнала имеем

$$|X_{\text{ЛЧМ}}(\omega)| = A_m \sqrt{\frac{\tau}{8\Delta f}} \sqrt{[C(x_1) + C(x_2)]^2 + [S(x_1) + jS(x_2)]^2}, \quad (5.35)$$

$$\varphi_{\text{ЛЧМ}}(\omega) = -\frac{(\omega_0 - \omega)^2}{2\Delta\omega} \tau + \arctg \frac{S(x_1) + S(x_2)}{C(x_1) + C(x_2)}. \quad (5.36)$$

Графики зависимостей $|X_{\text{ЛЧМ}}(\omega)|$ и $\varphi_{\text{ЛЧМ}}(\omega)$ для двух значений D , рассчитанные по формулам (5.35) и (5.36), представлены на рис. 5.16. Они показывают, что с увеличением базы D колебания амплитудного спектра ЛЧМ-сигнала уменьшаются, а его огибающая приближается к прямоугольной с шириной, равной девиации частоты $\Delta\omega$. Формула для фазового спектра состоит из двух слагаемых и первое слагаемое имеет вид квадратичной параболы, на графиках показано только второе слагаемое, которое при больших D постоянно в пределах $\Delta\omega$ и стремится к $\pi/4$.

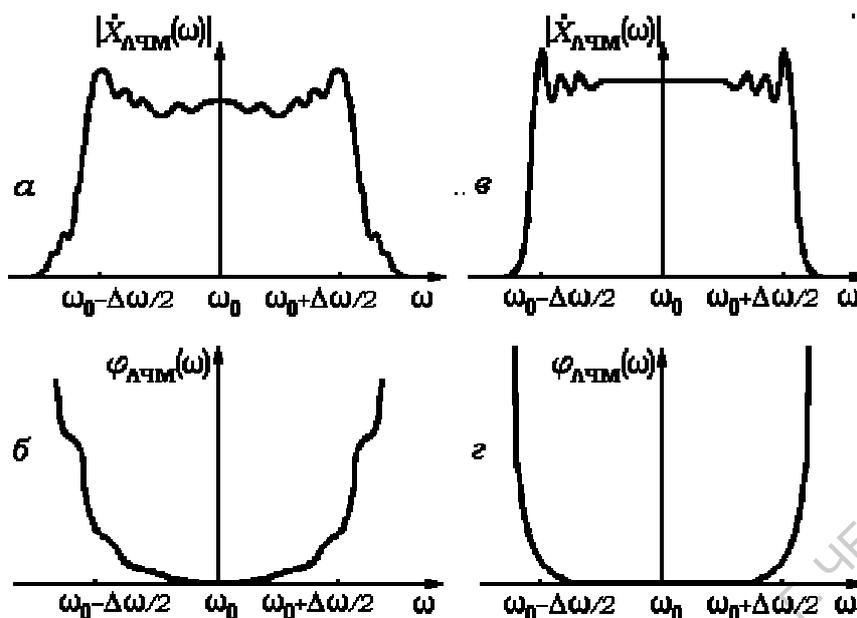


Рис. 5.16. Амплитудные спектры ЛЧМ-сигналов при $D=20$ (а), $D=200$ (е) и осциллирующие составляющие фазовых спектров при $D=20$ (б) и $D=200$ (з)

Таким образом, ЛЧМ-сигналы при больших базах имеют важную особенность: огибающие спектров и временных реализаций идентичны. Как отмечалось выше, этим свойством обладают также гауссовы импульсы и периодические последовательности дельта-импульсов.

5.3. Телевизионные сигналы и их спектры

Как отмечалось в 1.1, в реальных радиосигналах присутствуют случайные компоненты, содержащие сообщения, и детерминированные элементы, позволяющие распознать передаваемые сигналы.

Полный телевизионный сигнал тоже содержит детерминированную и случайную составляющие. Детерминированная компонента несет информацию о несущей частоте телевизионного канала и содержит управляющие импульсы для построчного и покадрового восстановления изображений. Случайная компонента содержит три вида информации: распределение яркости в различных точках экрана, сведения о цветовой окраске элементов изображения и сигналы звукового сопровождения.

5.3.1. Пространственные спектры изображений и временные спектры телевизионных сигналов

Спектры пространственных гармоник изображений. Пусть передаваемое двумерное изображение с распределением яркости $E'(x, y)$ неподвижно, а его размеры ограничены по ширине ($0 \leq x \leq X$) и высоте ($0 \leq y \leq Y$) техническими возможностями аппаратуры. Функцию $E'(x, y)$, заданную в указанной области, можно периодизировать в направлениях x и y с периодами X и Y , т.е. "сконструировать" периодическую по x и y функцию $E(x, y)$, существующую для $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$ и совпадающую с $E'(x, y)$ для $0 \leq x \leq X$, $0 \leq y \leq Y$.

Представим распределение яркости вдоль прямой, параллельной оси Ox и проходящей через точку (x, y) виде ряда Фурье²

$$E(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} E_i(y) \cos(2\pi i x / X + \varphi_i),$$

где $E_i(y)$ – амплитуда i -й гармоники; φ_i – ее фаза. Разлагая функцию $E_i(y)$ в ряд Фурье по оси Oy

$$E_i(y) = \sum_{k=0}^{\infty} E_{ik} \cos(2\pi k y / Y + \varphi_k),$$

где φ_k – фаза k -й гармоники, получим:

$$E(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} E_{ik} \cos(2\pi i x / X + \varphi_i) \cos(2\pi k y / Y + \varphi_k), \quad (5.37)$$

$$E_{ik} = \frac{4}{XY} \int_0^X \int_0^Y E'(x, y) \cos(2\pi i x / X + \varphi_i) \cos(2\pi k y / Y + \varphi_k) dx dy,$$

$$E_{00} = \frac{1}{XY} \int_0^X \int_0^Y E'(x, y) dx dy. \quad (5.38)$$

Формулы (5.37) и (5.38) представляют разложение изображения в спектр пространственных гармоник. В этом легко убедиться, если ввести пространственные частоты $F_x = 1/X$ и $F_y = 1/Y$ и построить трехмерную спектральную функцию $E_{ik}(iF_x, kF_y)$ для $0 \leq i, k < \infty$ в виде множества отрезков, длина которых пропорциональна E_{ik} .

Итак, 1) спектры изображений дискретные. Величины частот пространственных гармоник зависят от размеров изображения и неоднородности распределения яркости: если изображение состоит из горизонтальных полос различной яркости, то в (5.37) $i=0$ и спектр содержит только гармоники с частотами kF_y . Если же изображение состоит из вертикальных полос, то $k=0$ и в спектре остаются гармоники с частотами iF_x ;

2) содержание передаваемого изображения содержат амплитуды E_{ik} и фазы φ_i, φ_k пространственных гармоник;

3) компонента E_{00} характеризует среднюю яркость объекта. Когда $E'(x, y) = \text{const}$, пространственный спектр вырождается в E_{00} .

Переход к временным спектрам электрических сигналов. Формирование электрических сигналов, адекватных изображениям, осуществляется в различных фотоэлектрических преобразователях, например в видекодах. В современных системах телевидения распространено последовательное построчное и покадровое разложение изображений (рис. 5.17). При этом электронный луч, начиная с левого верхнего угла, с боль-

² Аналогичное разложение впервые получено в работе: Mertz P., Gray F. A theory of scanning and its relation to the characteristics of the transmitted signal in telephotography and television // Bell Syst. Techn. Journal. 1934. V.13, N.1–4. P.464–515.

шой скоростью перемещается по горизонтали от начала до конца строки и обратно (период строчной развертки T_c) и одновременно, но более медленно, по вертикали (период кадровой развертки T_k). Чтобы обратный ход луча не оставлял светящийся след, в конце каждой строки и каждого кадра необходимы сигналы, гасящие обратный ход развертки, т.е. полный видеосигнал $U(t)$ формируется в виде перемежаемых гасящими строчными и кадровыми импульсами сигналов строк, мгновенные значения которых пропорциональны яркости $E'(x(t), y(t))$.

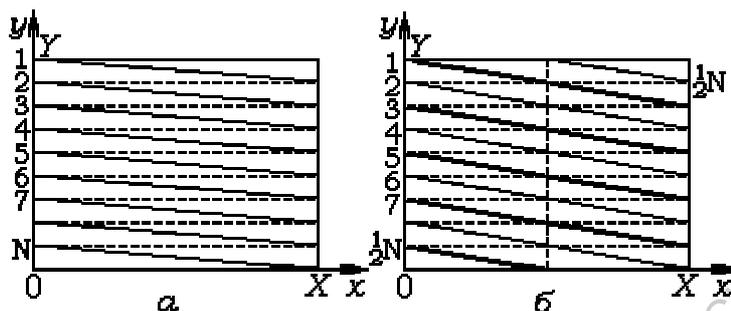


Рис. 5.17. Построчная (а) и чересстрочная (б) развертка изображений. Обратный ход развертки изображен пунктирными линиями

Структура гасящих строчных импульсов для двух строк, одна из которых соответствует плавному изменению яркости, а другая – чередованию белых и черных полос, представлена на рис. 5.18, а гасящие кадровые импульсы будут описаны ниже. Максимальной яркости (уровню белого) обычно соответствует минимальная величина видеосигнала, уровень черного выбирается так, чтобы обеспечивалась нулевая яркость изображения, а амплитуды гасящих импульсов превышали уровень черного. Во время сигнала гашения дополнительно передаются импульсы, синхронизирующие строчную и кадровую развертки.

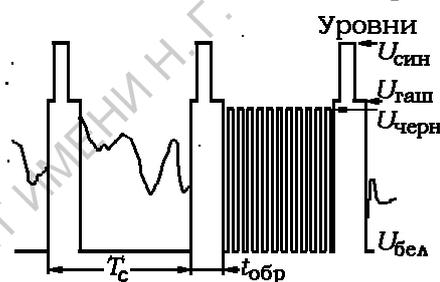


Рис. 5.18. Структура гасящих строчных импульсов

Пусть электронный луч равномерно перемещается вдоль оси Ox со скоростью v_x , а вдоль оси Oy – со скоростью v_y . Поскольку $X/v_x = T_c$, а $Y/v_y = T_k$, где T_c – период строчной; а T_k – период кадровой развертки, имеем

$$2\pi i \frac{x(t)}{X} = 2\pi i \frac{v_x}{X} t = 2\pi i f_c t, \quad 2\pi k \frac{y(t)}{Y} = 2\pi k \frac{v_y}{Y} t = 2\pi k f_k t.$$

Подставляя эти выражения в (5.37) и используя тригонометрическое тождество

$$\begin{aligned} & \cos(2\pi i f_c t + \varphi_i) \cos(2\pi k f_k t + \varphi_k) = \\ & = \frac{1}{2} [\cos(2\pi(i f_c + k f_k)t + \varphi_i + \varphi_k) + \cos(2\pi(i f_c - k f_k)t + \varphi_i - \varphi_k)], \end{aligned}$$

получим:

$$U(t) = \Phi[E'(x, y)] = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{U_{ik}}{2} \cos(2\pi(i f_c + k f_k)t + \varphi_{ik}), \quad (5.39)$$

где U_{ik} и φ_{ik} – амплитуды и фазы спектральных составляющих ($\varphi_{ik} = \varphi_i + \varphi_k$ для $k > 0$ и $\varphi_{ik} = \varphi_i - \varphi_k$ для $k < 0$). Разложение (5.39) является неполным, так как не содержит дискретные спектральные составляющие периодических последовательностей гасящих и синхронизирующих импульсов.

Таким образом, в фотоэлектрических преобразователях двумерное распределение яркости изображения $E'(x, y)$ превращается в одномерный электрический сигнал $U(t)$. Спектр сигнала $U(t)$ для неподвижного изображения (рис. 5.19) остается линейчатым, но обладает более сложной структурой. Частоты спектра определяются параметрами развертки. Около составляющих с частотами if_c группируются узкие боковые полосы с частотами $if_c \pm kf_k$. Амплитуды гармоник являются теперь суперпозициями случайных составляющих, зависящих от сюжета изображения, и детерминированного спектра импульсов развертки. Поэтому $U(t)$ сюжетов из горизонтальных полос в отличие от пространственных спектров изображений содержат полный спектр, но амплитуды гармоник с частотами kF_y значительно больше остальных. Средняя яркость сюжета пропорциональна амплитуде спектральной составляющей с нулевой частотой.

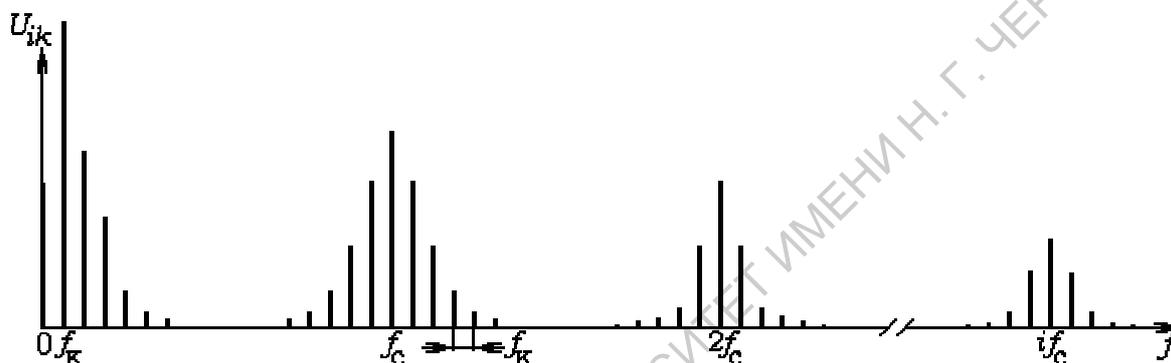


Рис. 5.19. Амплитудный спектр $U(t)$ неподвижного изображения

Спектры электрических сигналов подвижных изображений.

При передаче подвижных изображений спектральные линии смещаются. Если, например, изображение перемещается на высоту кадра за секунду, то отклонение частоты f_k составляет 1 Гц, а при движении объекта в направлении строки со скоростью 2 строки в секунду изменение частоты сигнала не превышает 2 Гц. Аналогичные эффекты имеют место при быстрой смене сюжетов изображения. Дискретный характер спектра практически не изменяется, но каждая спектральная линия занимает некоторую полосу частот. Так как средняя яркость изображений тоже непрерывно изменяется с очень низкой частотой, в спектре телевизионного сигнала появляются так называемые "нулевые" частоты в интервале от 0 до $2 \div 3$ Гц.

Для оценки усредненных с учетом большого числа разнообразных сюжетов спектральных характеристик сигналов используются понятия энергетического спектра $G(f)$ и корреляционной функции $R(\tau)$.

В соответствии с теорией (см. раздел 3.3.1) имеем

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T U(t)U(t - \tau) dt \right) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f\tau} df,$$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau.$$

Как показывают расчеты, для реальных параметров телевизионных изображений коэффициенты корреляции между соседними элементами

одной строки составляют 0.98, между ближайшими элементами соседних строк – 0.95, между ближайшими элементами кадров – 0.92, а энергетическая плотность сигналов быстро убывает с ростом частоты (рис. 5.20).

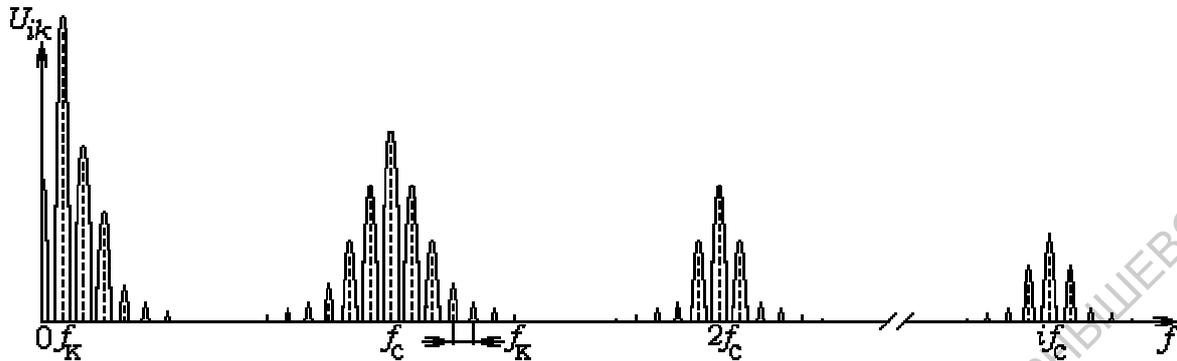


Рис. 5.20. Спектральная плотность мощности электрического сигнала

Для реальных изображений основная энергия спектра сосредоточена в области низких частот: составляющие спектра с частотами от 0 до 0.6 МГц, что соответствует $\cong 10\%$ полной полосы частот сигнала, содержат более 90% полной мощности сигнала. Столь высокую степень корреляции можно использовать для предсказания значений сигналов и сокращения объема передаваемой информации.

5.3.2. Принципы формирования сигналов изображения и полосы частот телевизионных сигналов

Рассмотрим формирование изображений для принятого в России стандарта в системе СЕКАМ: формат кадра $X : Y = 4 : 3$, номинальное число строк $N = 625$ ($T_c = 64$ мкс, $f_c = 15625$ Гц), число кадров в секунду – 25, полукадров – 50, и проведем обоснование выбранной частоты кадров.

Максимальная частота видеосигналов. Пусть минимальный размер деталей изображения $\delta = 1$ пиксель (pícel) соответствует ширине строки телевизионного изображения. Тогда по вертикали укладывается 625, по горизонтали $\frac{4}{3} \cdot 625 \cong 830$ пикселей, а общее число элементов в кадре $\cong 520000$. Наивысшая частота сигнала получается, когда белые и черные пиксели чередуются, т.е. сигнал распределения яркости вдоль строки представляет последовательность прямоугольных импульсов со скважностью 2. Для передачи столь мелких деталей оказывается достаточно использовать только первую гармонику.

Составим из чередующихся белых и черных пикселей изображение, напоминающее шахматную доску. Чтобы такое изображение повторялось 50 раз в секунду, необходим синусоидальный сигнал, частоту которого можно рассчитать по формуле

$$f_{max} = 625 \cdot 415 \cdot 50 \cong 13 \text{ МГц.}$$

Эта частота гармоник видеосигнала и определяет полосу частот телевизионных каналов. Как следует из формулы, ее можно сократить, уменьшая число строк N или число кадров в секунду. Но уменьшение N вызывает ухудшение качества изображений, а уменьшение числа кадров –

мерцание экрана³. Возникающее противоречие между необходимостью сокращать полосу частот и качеством изображений устраняется при использовании чересстрочной развертки (см. рис. 5.17, б), когда изображение формируется из двух полей. Первое поле образуют нечетные строки, второе – четные. Прочертив половину последней нечетной строки, луч перемещается в середину верхнего края кадра и прочерчивает ее вторую половину, а затем последовательно все четные строки. Дойдя до нижнего правого угла раstra, электронный луч возвращается в верхний левый угол и процесс развертки повторяется. Полукадровые и кадровые гасящие импульсы (рис. 5.21) содержат врезки с периодом строчной развертки и так называемые уравнивающие импульсы, следующие с интервалом, равным половине длительности строки, и синхронизирующие развертку в полукадрах.

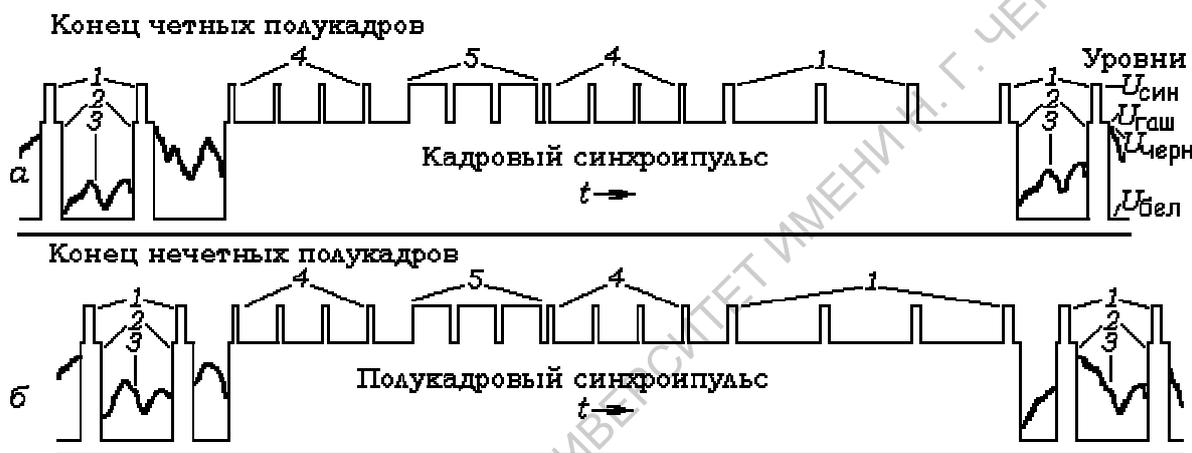


Рис. 5.21. Структура кадрового (а) и полукадрового (б) импульсов: 1 – строчные синхроимпульсы; 2 – гасящие строчные импульсы; 3 – видеосигнал; 4 – уравнивающие импульсы; 5 – кадровые синхроимпульсы; 6 – строчные синхроимпульсы

За секунду формируется 50 полей, и длительность формирования одного поля составляет 20 мс. При послесвечении экрана $\cong 20$ мс каждое новое поле из нечетных строк совмещается с предыдущим полем из четных строк, и наоборот, т.е. создается впечатление построчной развертки, но из-за уменьшения числа строк в поле развертки максимальная частота гармоник видеосигнала сокращается вдвое ($f_{max} = 6.5$ МГц). Реально в развертке изображения участвуют 575–589 строк, а остальные образуют полукадровый и кадровый гасящие импульсы и $f_{max} \cong 6$ МГц.

Минимальные частоты гармоник видеосигнала составляют единицы герц (средняя яркость изображения) и 50 Гц (частота полей). Ввиду трудности передачи по радиоканалам сверхнизких частот, в качестве минимальной для видеосигнала выбирается частота 50 Гц, а передача изменений средней яркости изображений осуществляется косвенным методом путем амплитудной модуляции строчных гасящих импульсов.

Звуковое сопровождение осуществляется ЧМ-сигналом (максимальная девиация ± 50 кГц).

³ Для яркости экрана $30 \div 100$ кд/м² и послесвечения 0.02 с критическая частота мерцаний 46 Гц.

Сигналы цветности и их спектры. Не вдаваясь в детали цветового зрения, отметим, что красный (Red), зеленый (Green) и синий (Blue) цвета являются независимыми и любой цвет можно получить в виде комбинации этих *основных* цветов. Яркостный сигнал белого цвета (E_Y) является следующей комбинацией основных:

$$E_Y = 0.299E_R + 0.587E_G + 0.114E_B.$$

и для передачи любых цветов достаточно использовать два дополнительных цветоразностных сигнала: $E_{R-Y} = E_R - E_Y = 0.701E_R - 0.587E_G - 0.114E_B$ и $E_{B-Y} = E_B - E_Y = -0.299E_R - 0.587E_G + 0.886E_B$. Тогда, например, сигнал зеленого цвета определяется соотношением $E_G = E_Y - 0.51E_{R-Y} - 0.19E_{B-Y}$.

Трехцветность характеризует только крупные детали изображений, передаваемые относительно низкими видеочастотами. Мелкие детали с видеочастотами от 1.5 МГц различаются только по яркости и воспринимаются как черно-белые. В связи с этим для получения цветного изображения необходимо в каждой строке кроме яркостного сигнала передать два цветоразностных сигнала, расположенных в полосе частот от 50 Гц до 1.5 МГц и по структуре почти не отличающихся от яркостного сигнала. Так как эта область занята яркостным сигналом, цветоразностные сигналы переносятся в область более высоких частот, где гармоники яркостного сигнала имеют пренебрежимо малые амплитуды. Для этого поднесущая – гармоническое колебание с частотой 3–4 МГц – модулируется по амплитуде или частоте цветоразностными сигналами. В американской системе НТСИ для этого квадратурные компоненты поднесущей с частотой 3.58 МГц, изменяющиеся по законам косинуса и синуса, одновременно модулируются двумя цветоразностными сигналами. В российско-французской системе СЕКАМ цветоразностные сигналы передаются поочередно (E_{R-Y} – в нечетных, E_{B-Y} – в четных строках) и на разных поднесущих $f_{0R} = 282f_c = 4.40625$ МГц, $f_{0B} = 272f_c = 4.250$ МГц (рис. 5.22) посредством частотной модуляции (девиации частот $\Delta f_R = \pm 280$ кГц и $\Delta f_B = \pm 230$ кГц). Индексы ЧМ оказываются меньше 0.5 и спектры ЧМ-сигналов практически не отличаются от спектров при АМ. Полный спектр телевизионного сигнала представлен на рис. 5.22.

Итак, для создания полноцветных изображений нужны одновременно два цветоразностных сигнала, в то время как передается один. Недостающая информация восполняется с помощью задержки другого сигнала, передаваемого в предыдущей строке, на время T_c . Отсюда и название системы *Sequentiel couleurs a mémoire* – “Последовательные цвета с запоминанием”. Применение линии задержки ведет к тому, что сигналы строк попарно повторяются.

Цветовая синхронизация осуществляется с помощью сигналов опозна-

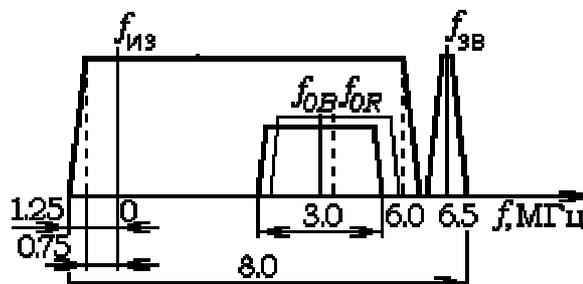


Рис. 5.22. Полосы частот телевизионного сигнала

вания в виде пакетов поднесущих, модулированных импульсами трапецеидальной формы и пакетов немодулированной поднесущей на задних площадках строчных гасящих импульсов.

5.3.3. Передача телевизионных сигналов по радиоканалам



Рис. 5.23. Огибающая АМ-радиосигнала изображения

Радиосигнал вещательного телевидения состоит из радиосигналов изображения и звукового сопровождения. Первый образуется в результате амплитудной модуляции синусоидального колебания с частотой $f_{из}$ полным видеосигналом, а второй – при частотной модуляции колебания с частотой $f_{зв}$. Огибающая АМ-сигнала представлена на рис. 5.23. Если размах синхронизирующих импульсов принять за 100% ($U_{син}$), то амплитуда несущей, соответствующая видеосигналу, изменяется от 10 ÷ 15% ($U_{бел}$) до 75 ÷ 80% ($U_{черн}$). (Напомним, что амплитуда синхронизирующих импульсов превышает уровень гасящих обратный ход ($U_{гаш}$) и зависит от среднего уровня яркости сюжета).

Обычный АМ-сигнал содержит две боковые полосы (см. 5.2) и занимает спектр вдвое шире, чем модулирующий сигнал (12 ÷ 13 МГц). Для сокращения спектра частот нижняя боковая полоса частично подавляется. Как известно, подавление одной боковой полосы вызывает паразитную фазовую модуляцию и нелинейные искажения, которые проявляются тем слабее, чем выше частоты гармоник изображения. Поэтому частоты сигнала $U(t)$ от 50 Гц до 1.25 МГц, содержащие до 95% мощности сигнала, передаются двумя боковыми полосами (см. рис. 5.22), а искажения более высоких частот из-за отсутствия второй боковой полосы остаются практически незаметными.

Если $f_{зв} - f_{из} = 6.5$ МГц, то номинальная ширина полосы частот радиоканала составляет 8 МГц. Для передачи таких широкополосных сигналов приходится использовать ультракоротковолновый (дециметровый или сантиметровый) диапазон волн.

Глава 6

Узкополосные сигналы и их спектры

В предыдущих главах рассматривалось разложение сигналов на гармонические составляющие и только в 4.3 обсуждалось восстановление низкочастотных сигналов по спектрам комплексных частот. Но более актуальна задача определения временных реализаций и низкочастотных огибающих для радиочастотных сигналов, как правило, узкополосных, из-за ограниченности полос пропускания радиосистем.

- Будем называть сигнал *узкополосным*, если его частотный спектр сконцентрирован в узкой полосе частот вокруг ω_0 , удаленной от начала координат.

Примером узкополосных радиосигналов могут служить АМ-сигналы (см. гл. 5). Теоретически их спектры симметричны относительно частоты несущего колебания и низкочастотную огибающую найти нетрудно. Однако на выходе частотно-избирательных систем спектры радиосигналов могут стать несимметричными, и задача определения временной реализации выходного сигнала и его огибающей усложняется.

Настоящая глава посвящается построению идеализированных моделей и низкочастотных представлений узкополосных сигналов, изучению их свойств и основных характеристик.

6.1. Вещественные модели узкополосных сигналов

Пусть задан сигнал $s(t)$, спектр которого сосредоточен в узкой полосе частот от ω_1 до ω_2 , причем $2\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$, т.е. спектр концентрируется вокруг $\pm\omega_0$, удаленной от начала координат. Два распределения спектральной плотности узкополосных сигналов представлены на рис. 6.1. Мгновенные значения соответствующей функции $s(t)$ нетрудно найти, используя формулу обратного преобразования Фурье:

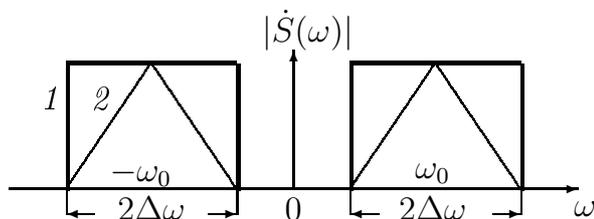


Рис. 6.1. Два распределения $|\dot{S}(\omega)|$: 1 – прямоугольное $S(\omega) = \text{const}$; 2 – треугольное

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (6.1)$$

При этом на распределение спектральной плотности $\dot{S}(\omega)$ не накладывается никаких ограничений.

Пусть спектральная плотность сигнала постоянна в узкой полосе частот (рис. 6.1) и удовлетворяет соотношению

$$\dot{S}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\omega_0 - \Delta\omega, \\ S_0, & -\omega_0 - \Delta\omega < \omega < -\omega_0 + \Delta\omega, \\ 0, & -\omega_0 + \Delta\omega < \omega < \omega_0 - \Delta\omega, \\ S_0, & \omega_0 - \Delta\omega < \omega < \omega_0 + \Delta\omega, \\ 0, & \omega > \omega_0 + \Delta\omega. \end{cases} \quad (6.2)$$

Математическая модель сигнала, обладающего спектральной плотностью (6.2), принимает вид:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0 - \Delta\omega}^{-\omega_0 + \Delta\omega} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (6.3)$$

Изменяя в первом интеграле порядок интегрирования и объединяя экспоненциальные функции по формуле Эйлера, получим:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{S_0}{\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \cos \omega t d\omega = \frac{S_0}{\pi} \frac{\sin \omega t}{t} \Big|_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} = \\ &= \frac{S_0}{\pi t} [\sin(\omega_0 + \Delta\omega)t - \sin(\omega_0 - \Delta\omega)t] = \frac{2S_0\Delta\omega}{\pi} \frac{\sin \Delta\omega t}{\Delta\omega t} \cos \omega_0 t. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Математическую модель сигнала $\bar{s}(t)$ с линейно убывающей $|\dot{S}(\omega)|$ (рис. 6.1) можно получить в виде

$$\bar{s}(t) = \frac{S_0\Delta\omega}{\pi} \frac{\sin^2 \Delta\omega t/2}{(\Delta\omega t/2)^2} \cos \omega_0 t. \quad (6.5)$$

Колебания $s(t)$ и $\bar{s}(t)$ определены для всех $-\infty < t < \infty$ и имеют весьма сложную структуру. Если $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$, то $s(t)$ (или $s_1(t)$) удовлетворяет следующему соотношению:

$$s(t) = A_s(t) \cos \omega_0 t,$$

где ω_0 — некая средняя частота в интервале $\Delta\omega$, называемая *опорной частотой* узкополосного сигнала; $A_s(t)$ — медленно (по сравнению с $\cos \omega_0 t$) изменяющаяся во времени амплитуда. Вид $A_s(t)$ зависит от величины $\Delta\omega$ и распределения $\dot{S}(\omega)$ в спектре сигнала.

На рис. 6.2 представлены узкополосные сигналы для двух распределений $\dot{S}(\omega)$, изображенных на рис. 6.1. Хотя эти сигналы обладают одинаковой $\Delta\omega$, их огибающие $A_s(t)$ различаются.

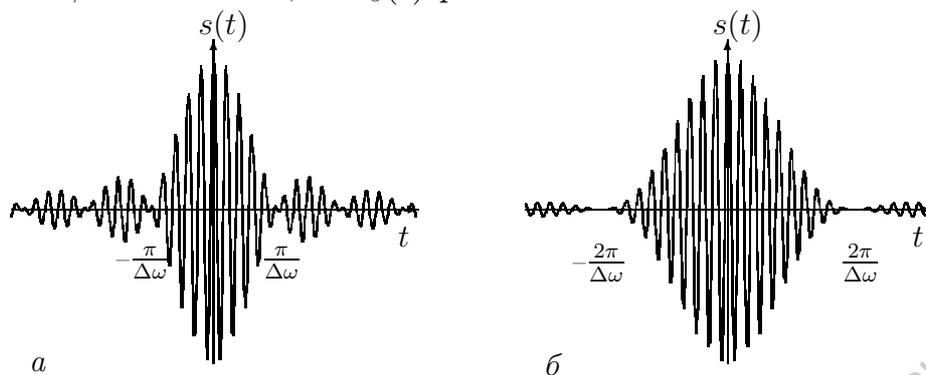


Рис. 6.2. Временные изменения узкополосных сигналов: *а* – для прямоугольного; *б* – для треугольного распределения $\dot{S}(\omega)$

Построенная модель узкополосного сигнала является упрощенной. Полная математическая модель должна учитывать медленные изменения не только амплитуды, но и фазы колебаний:

$$s(t) = A_s(t) \cos \Psi(t) = A_s(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad (6.6)$$

где $A_s(t)$, $\varphi(t)$ и $\Psi(t)$ – медленно изменяющиеся амплитуда, начальная и мгновенная фазы узкополосного сигнала. Условия ”медленности” записываются в виде

$$\frac{dA_s(t)}{dt} \ll \omega_0 A_s(t); \quad \frac{d\Psi(t)}{dt} \ll \omega_0.$$

Математическую модель узкополосного сигнала можно построить иначе. Поскольку $A_s(t)$ – медленная функция времени, ее спектр сосредоточен в окрестности $\omega = 0$, т.е. является низкочастотным. При умножении $A_s(t)$ на $\cos \omega_0 t$ или на $\sin \omega_0 t$, где ω_0 – высокая по сравнению со всеми гармониками $A_s(t)$ частота, низкочастотный спектр $A_s(t)$ смещается в соответствии с теоремой о смещении в область высоких частот, а колебания

$$s_1(t) = A_{1s}(t) \cos \omega_0 t \quad \text{и} \quad s_2(t) = A_{2s}(t) \sin \omega_0 t$$

в равной степени приобретают все признаки узкополосного сигнала, отличаясь лишь начальной фазой высокочастотного колебания. Наиболее общее выражение можно получить, используя линейную комбинацию последних:

$$s(t) = A_{\text{сфин}}(t) \cos \omega_0 t - A_{\text{сквд}}(t) \sin \omega_0 t. \quad (6.7)$$

Колебания $A_{\text{сфин}}(t) \cos \omega_0 t$ и $A_{\text{сквд}}(t) \sin \omega_0 t$ называются *квадратурными компонентами* узкополосного сигнала, а функции $A_{\text{сфин}}(t)$ и $A_{\text{сквд}}(t)$ – его *синфазной* и *квадратурной* амплитудами. Сопоставляя (6.7) с (6.6), получим:

$$A_{\text{сфин}}(t) = A_s(t) \cos \varphi(t), \quad A_{\text{сквд}}(t) = A_s(t) \sin \varphi(t).$$

Для реального узкополосного сигнала функции $A_{\text{ссин}}(t)$ и $A_{\text{сквд}}(t)$ можно определить экспериментально, используя вспомогательные сигналы $\cos \omega_0 t$, $\sin \omega_0 t$, перемножитель сигналов и фильтр нижних частот. При этом

$$\begin{aligned} s(t) \cos \omega_0 t &= A_{\text{ссин}}(t) \cos^2 \omega_0 t - A_{\text{сквд}}(t) \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t = \\ &= \frac{A_{\text{ссин}}(t)}{2} + \frac{A_{\text{ссин}}(t)}{2} \cos 2\omega_0 t - \frac{A_{\text{сквд}}(t)}{2} \sin 2\omega_0 t \Rightarrow \text{фильтр} \Rightarrow \frac{A_{\text{ссин}}(t)}{2}, \\ s(t) \sin \omega_0 t &= A_{\text{ссин}}(t) \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t - A_{\text{сквд}}(t) \sin^2 \omega_0 t = \frac{A_{\text{ссин}}(t)}{2} \sin 2\omega_0 t - \\ &- \frac{A_{\text{сквд}}(t)}{2} + \frac{A_{\text{сквд}}(t)}{2} \cos 2\omega_0 t \Rightarrow \text{фильтр} \Rightarrow -\frac{A_{\text{сквд}}(t)}{2}. \end{aligned}$$

На выходе фильтра возникают низкочастотные колебания, пропорциональные синфазной или квадратурной амплитуде, т.е. формируется *низкочастотное представление* узкополосного сигнала.

Заметим, что опорная частота выбирается произвольно и поэтому экспериментально найденные значения $A_{\text{ссин}}(t)$ и $A_{\text{сквд}}(t)$, а следовательно, и низкочастотное представление оказываются неоднозначными: даже незначительное изменение опорной частоты приведет к появлению новых значений $A_{\text{ссин}}(t)$ и $A_{\text{сквд}}(t)$.

Итак, построены две вещественные модели узкополосных сигналов и обоснована физическая база для введения низкочастотных представлений. Но произвол в выборе опорной частоты вызывает неоднозначность в определении $A_s(t)$ и $\Psi(t)$ или $A_{\text{ссин}}(t)$ и $A_{\text{сквд}}(t)$.

Эту неоднозначность удастся устранить за счет некоторого усложнения моделей. При введении комплексного описания узкополосных сигналов появляется возможность использовать хорошо разработанный аппарат аналитических функций и аналитических сигналов.

6.2. Комплексное представление узкополосных сигналов

Комплексное представление узкополосных сигналов является естественным развитием метода комплексных амплитуд: вместо комплексных амплитуд используются медленно изменяющиеся комплексные функции времени $\dot{A}_s(t)$ и

$$s(t) = \text{Re}[\dot{A}_s(t)e^{j\omega_0 t}], \quad (6.8)$$

где ω_0 – опорная частота; $\dot{A}_s(t) = A_s(t)e^{j\varphi(t)}$ – комплексная амплитуда. Функция $\dot{A}_s(t)$ называется еще *комплексной огибающей*, а вещественная неотрицательная функция $A_s(t)$ – *физической огибающей* узкополосного сигнала $s(t)$. Комплексная огибающая содержит все необходимые сведения об узкополосном сигнале.

Рассмотрим действительную и мнимую части комплексной огибающей:

$$\text{Re}[\dot{A}_s(t)] = A_s(t) \cos \varphi(t) = A_{\text{ссин}}(t),$$

$$\operatorname{Im}[\dot{A}_s(t)] = A_s(t) \sin \varphi(t) = A_{\text{СКВД}}(t). \quad (6.9)$$

- Действительная компонента комплексной огибающей узкополосного сигнала совпадает с его синфазной амплитудой, мнимая – с квадратурной амплитудой, а начальная фаза сигнала удовлетворяет равенству

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{Im}[\dot{A}_s(t)]}{\operatorname{Re}[\dot{A}_s(t)]} \right] = \operatorname{arctg} \left[\frac{A_{\text{СКВД}}(t)}{A_{\text{СИН}}(t)} \right]. \quad (6.10)$$

Еще один важный параметр узкополосного сигнала – его мгновенную частоту можно найти, дифференцируя полную фазу $\Psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$ по времени:

$$\omega_s(t) = \omega_0 + \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \left[\frac{A_{\text{СКВД}}(t)}{A_{\text{СИН}}(t)} \right] = \omega_0 + \frac{A'_{\text{СИН}} A_{\text{СКВД}} - A_{\text{СИН}} A'_{\text{СКВД}}}{A_{\text{СИН}}^2 + A_{\text{СКВД}}^2}, \quad (6.11)$$

где A' – производные по времени.

6.2.1. Физическая огибающая узкополосного сигнала и ее свойства

Физическая огибающая является модулем комплексной огибающей узкополосного сигнала и связана с его синфазной и квадратурной амплитудами равенством

$$A_s(t) = \sqrt{A_{\text{СИН}}^2(t) + A_{\text{СКВД}}^2(t)}. \quad (6.12)$$

Рассмотрим основные свойства физической огибающей.

1. Величины мгновенных значений физической огибающей в отличие от комплексной огибающей не зависят от выбора опорной частоты.

Покажем это. Пусть узкополосный сигнал задан формулой (6.8). Если в качестве опорной частоты вместо ω_0 выбрать частоту $\omega'_0 = \omega_0 + \delta\omega$, то (6.8) принимает вид

$$s(t) = \operatorname{Re}[\dot{A}_s(t)e^{j\omega'_0 t}] = \operatorname{Re}[\dot{A}_s(t)e^{j\delta\omega t}e^{j\omega_0 t}].$$

Новая функция комплексной огибающей $\dot{A}_{s1}(t) = \dot{A}_s(t)e^{j\delta\omega t}$, а ее модуль (физическая огибающая) остается неизменным, так как $|e^{j\delta\omega t}| = 1$.

2. Физическая огибающая узкополосного сигнала определяет его мгновенную амплитуду.

Обратимся к формуле (6.12) и продифференцируем квадрат физической огибающей:

$$A_s(t) \frac{dA_s(t)}{dt} = A_{\text{СИН}}(t) \frac{dA_{\text{СИН}}(t)}{dt} + A_{\text{СКВД}}(t) \frac{dA_{\text{СКВД}}(t)}{dt}.$$

При любых t , когда $A_{\text{СКВД}}(t) = 0$, синфазная составляющая, т.е. исходный

сигнал, совпадает с физической огибающей и наступает равенство их временных производных. К тому же для всех t

$$|s(t)| \leq A_s(t).$$

Равенство достигается в моменты времени, когда $\cos(\omega_0 t + \varphi(t)) = \pm 1$.

Таким образом, физическая огибающая $A_s(t)$ и исходный сигнал $s(t)$ никогда не пересекаются и имеют общие касательные в точках, где $A_{\text{СКВД}}(t) = 0$. Физическая огибающая $A_s(t)$ действительно "огibtает" узкополосный сигнал $s(t)$ и служит его мгновенной амплитудой. Однако для полного описания $s(t)$, кроме физической огибающей, необходимо учитывать $\varphi(t)$, т.е. использовать комплексную огибающую сигнала $\dot{A}_s(t)$.

6.2.2. Взаимная связь спектральных плотностей узкополосного сигнала и его комплексной огибающей

Пусть $\dot{S}(\omega)$ – спектральная плотность узкополосного сигнала $s(t)$; $\dot{G}(\omega)$ – спектральная плотность его комплексной огибающей $\dot{A}_s(t)$. Спектры сигналов были рассмотрены в 6.1, поэтому акцентируем внимание на спектральных плотностях огибающих.

Представим $\dot{S}(\omega)$ в виде \mathbf{F} -преобразования от $s(t) = \text{Re}[\dot{A}_s(t)e^{j\omega_0 t}]$ и воспользуемся известным соотношением $\text{Re}[\dot{A}] = \frac{\dot{A} + \dot{A}^*}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}[\dot{A}_s(t)e^{j\omega_0 t}]e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}_s(t)e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}_s^*(t)e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt. \end{aligned}$$

Последние интегралы представляют \mathbf{F} -преобразования одной и той же функции $\dot{A}_s(t)$, смещенные в окрестности частот $\pm\omega_0$, т.е.

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2}\dot{G}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\dot{G}^*(\omega + \omega_0). \quad (6.13)$$

Таким образом, спектральная плотность узкополосного сигнала образуется в результате смещения низкочастотного спектра комплексной огибающей в окрестность опорной частоты $\pm\omega_0$. Формула (6.13) допускает решение и обратной задачи: по заданному спектру узкополосного сигнала можно найти спектральную плотность его комплексной огибающей.

6.3. Аналитический сигнал и комплексная огибающая узкополосного сигнала. Преобразование Гильберта

Если каждой точке $z = u + jv$ области D комплексной плоскости можно поставить в соответствие комплексное число w , то математики говорят, что в области D однозначно определена функция комплексного переменного, называемая *аналитической функцией*. В теоретической радиоэлектронике обычно используются функции, аналитические в верхней полуплоскости, т.е. при $v \geq 0$, и вводятся в рассмотрение *аналитические сигналы* – комплексные функции, зависящие от действительного аргумента $u = t$ и равные пределу аналитической функции при стремлении мнимой части ее аргумента к нулю. Таким образом, аналитический сигнал $\hat{z}(t)$ представляет весьма частный случай аналитической функции, определенной только для вещественных значений ее аргумента.

- В отличие от других комплексных функций действительная и мнимая части аналитического сигнала не могут выбираться произвольно и единственным способом связаны друг с другом парой интегральных преобразований Гильберта. Преобразование Гильберта от физического сигнала $z(t)$ называется *сопряженным* $z(t)$ и обозначается через $\hat{z}(t)$:

$$\hat{z}(t) = \mathbf{H}[z(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z(\tau)}{t - \tau} d\tau \Rightarrow \text{прямое преобразование}, \quad (6.14)$$

$$z(t) = \mathbf{H}^{-1}[\hat{z}(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{z}(\tau)}{\tau - t} d\tau \Rightarrow \text{обратное преобразование}. \quad (6.15)$$

Поскольку подынтегральные выражения в (6.14) и (6.15) при $t = \tau$ имеют особенность (обращаются в бесконечность в точке $t = \tau$), интегралы в обоих случаях понимают в смысле главного значения по Коши:

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-\infty}^{\tau - \varepsilon} + \int_{\tau + \varepsilon}^{+\infty} \right).$$

6.3.1. Свойства преобразований Гильберта

Сформулируем основные свойства преобразований Гильберта, необходимые при работе с аналитическими сигналами.

1. Линейность: $\mathbf{H}[\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i(t)] = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{H}[z_i(t)] = \sum_{i=1}^n \alpha_i \hat{z}_i(t)$.
2. Ортогональность: $\int_{-\infty}^{\infty} z(t) \hat{z}(t) dt = 0$.

3. Временной сдвиг: $\mathbf{H}[z(t - \alpha)] = \hat{z}(t - \alpha)$.
4. Масштабирование времени: $\mathbf{H}[z(\alpha t)] = \hat{z}(\alpha t)$.
5. Двукратное преобразование Гильберта: $\mathbf{H}[\mathbf{H}[z(t)]] = -z(t)$.
6. H -преобразования гармонических функций. Пусть $\dot{z}(t) = \cos \omega_0 t$. Введем новую переменную $u = t - \tau$ и представим $\cos \omega_0(t - u)$ в виде суммы $\cos \omega_0 t \cos \omega_0 u + \sin \omega_0 t \sin \omega_0 u$:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}[\cos \omega_0 t] &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega_0 \tau}{t - \tau} d\tau = \frac{\cos \omega_0 t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega_0 u}{u} du + \frac{\sin \omega_0 t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_0 u}{u} du = \\ &= \sin \omega_0 t, \quad (\text{так как } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0, \text{ а } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi)^{\dagger}. \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления дают $\mathbf{H}[\sin \omega_0 t] = -\cos \omega_0 t$.

6.3.2. Спектральная плотность аналитического сигнала

Пусть спектральная плотность физического сигнала известна: $\mathbf{F}[z(t)] = \dot{Z}(\omega)$. Чтобы определить аналогичную характеристику для аналитического сигнала ($\mathbf{F}[\hat{z}(t)]$), следует построить спектральную плотность $\hat{Z}(\omega)$ сопряженного сигнала $\hat{z}(t)$.

Будем искать $\hat{Z}(\omega)$, рассматривая сопряженный сигнал $\hat{z}(t)$ в виде свертки физического сигнала $z(t)$ и функции $s(t) = 1/(\pi t)$. Как показано в 3.4.1,

$$\dot{S}(\omega) = \mathbf{F}\left[\frac{1}{\pi t}\right] = -j \operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} -j, & \omega > 0, \\ j, & \omega < 0. \end{cases}$$

Сопряженный сигнал $\hat{z}(t) = \mathbf{H}[z(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z(\tau)}{t - \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) s(t - \tau) d\tau$ представляет собой свертку $z(t)$ и $s(t) = 1/(\pi t)$. Его спектральная плотность равна произведению спектральных плотностей сомножителей,

$$\hat{Z}(\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) \dot{Z}(\omega) = \begin{cases} -j \dot{Z}(\omega), & \omega > 0, \\ j \dot{Z}(\omega), & \omega < 0, \end{cases} \quad (6.16)$$

и оказывается мнимой, а ее модуль совпадает с модулем спектральной плотности исходного физического сигнала.

- Преобразование Гильберта сигнала $z(t)$ сохраняет модуль спектральной плотности и изменяет аргумент:
 - при $\omega < 0$ происходит сдвиг по фазе на $+\pi/2$,
 - при $\omega > 0$ – сдвиг по фазе на $-\pi/2$.

[†] $Si(t) = \int_0^t \sin x/x dx$ представляет интегральный синус. $Si(t) \rightarrow \pi/2$ при $t \rightarrow \infty$.

Спектральная плотность аналитического сигнала в силу линейности преобразования Фурье является суммой спектральных плотностей физического и сопряженного сигналов, т.е.

$$\begin{aligned}\dot{Z}(\omega) &= \mathbf{F}[\dot{z}(t)] = \dot{Z}(\omega) + j\hat{Z}(\omega) = [1 + \operatorname{sgn}(\omega)]\dot{Z}(\omega) = \\ &= \begin{cases} 2\dot{Z}(\omega), & \omega > 0, \\ 0, & \omega < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Итак, спектральная плотность аналитического сигнала является одно-сторонней. Она отлична от нуля только в области положительных частот и обладает удвоенным по сравнению с физическим сигналом модулем.

Спектральное описание аналитических сигналов позволяет построить H -преобразование свертки двух аналитических сигналов.

Поскольку фурье-преобразование свертки двух сигналов удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{F}[x(t) * y(t)] = \dot{X}(\omega)\dot{Y}^*(\omega),$$

то, считая оба сигнала аналитическими и используя (6.16), получим:

$$\mathbf{F}[x(t) * y(t)] = \dot{X}(\omega)[-j\operatorname{sgn}(\omega)\dot{Y}(\omega)] = \dot{X}(\omega)\hat{Y}(\omega).$$

Используя обратное преобразование Фурье, получим:

$$\mathbf{H}[x(t) * y(t)] = x(t) * \hat{y}(t) = \hat{x}(t) * y(t).$$

Важное следствие этого преобразования – так называемое ”свойство модуляции” можно получить с учетом H -преобразований гармонических функций:

- если $x(t)$ – низкочастотный сигнал с ограниченным спектром, то справедливы следующие H -преобразования:

$$\mathbf{H}[x(t) \cos \omega_0 t] = x(t) \sin \omega_0 t,$$

$$\mathbf{H}[x(t) \sin \omega_0 t] = -x(t) \cos \omega_0 t.$$

Взаимная зависимость $z(t)$ и $\hat{z}(t)$, односторонний характер спектральной плотности аналитических сигналов и ”свойство модуляции” играют очень важную роль в теории узкополосных сигналов.

6.3.3. Аналитические сигналы и низкочастотное представление узкополосных колебаний

Аналитические сигналы не только не противоречат комплексным представлениям узкополосных сигналов, но и позволяют ввести общее определение параметров в соотношениях (6.10) – (6.12). Действительно, задание и аналитического сигнала, и комплексной модели узкополосного сигнала эквивалентно заданию двух вещественных функций. При построении

комплексных моделей к вещественной части в виде физического сигнала добавлялась произвольная мнимая составляющая (квадратурная компонента), что и приводило к неопределенности в определении комплексной огибающей, мгновенной частоты и мгновенной фазы. Если же в качестве квадратурной компоненты использовать функцию, сопряженную с физическим сигналом, то комплексная модель становится аналитическим сигналом, а существовавшая до сих пор неоднозначность полностью устраняется.

В терминах аналитических сигналов узкополосное колебание можно представить в виде

$$\dot{s}(t) = s(t) + j\hat{s}(t) = A_s(t)e^{j\Psi_s(t)}, \quad (6.18)$$

где $A_s(t)$ – огибающая узкополосного колебания:

$$A_s(t) = \sqrt{s^2(t) + \hat{s}^2(t)};$$

$\Psi(t)$ – мгновенная фаза колебания:

$$\Psi(t) = \operatorname{arctg} \left[\frac{\hat{s}(t)}{s(t)} \right].$$

Отсюда для мгновенной частоты узкополосного колебания получаем соотношение

$$\omega_s(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = \frac{\hat{s}'(t)s(t) - s'(t)\hat{s}(t)}{A_s^2(t)} = \omega_1 + \omega_2(t),$$

причем слагаемое ω_1 не зависит от времени и может рассматриваться в качестве опорной частоты узкополосного сигнала.

Проиллюстрируем эти выводы на примере, рассмотренном в первом разделе. По известному спектру получено аналитическое выражение сигнала в виде $s(t) = A_0 \frac{\sin \Delta\omega t}{\Delta\omega t} \cos \omega_0 t$. По свойству модуляции сопряженный сигнал $\hat{s}(t) = A_0 \frac{\sin \Delta\omega t}{\Delta\omega t} \sin \omega_0 t$. Отсюда огибающая узкополосного сигнала $A_s(t) = A_0 \frac{\sin \Delta\omega t}{\Delta\omega t}$, мгновенная фаза $\Psi(t) = \omega_0 t$, мгновенная частота $\omega_s(t) = \omega_0$, а низкочастотное представление обладает постоянной спектральной плотностью в диапазоне от 0 до $\omega_0/2$.

Итак, преобразование Гильберта узкополосного сигнала $s(t)$, спектр которого сосредоточен в диапазоне частот от ω_1 до ω_2 , а $\omega_2 - \omega_1 \ll \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, позволяет вычислить сопряженный колебанию $s(t)$ сигнал $\hat{s}(t)$ и построить аналитический сигнал $\dot{s}(t) = s(t) + j\hat{s}(t)$, огибающая которого является низкочастотным представлением узкополосного сигнала. Обратное фурье-преобразование $s(t)$ дает возможность определить его спектральную плотность $\dot{S}(\omega)$ и рассчитать спектр низкочастотного представления.

Часть II

ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ И СИСТЕМ

Возрастание роли математических и физических методов в теории радиоэлектронных цепей и систем происходит одновременно по нескольким направлениям. В теории систем активно формируются новые модели: вероятностные и дискретные модели непрерывных систем, модели с прерывистым характером протекающих процессов. Совершенствуются классические методы описания и анализа радиосистем с использованием новейших достижений математики и физики. Так методы взаимности и дуальности приобрели более широкое толкование, а области применения методов контурных токов и узловых напряжений значительно расширились благодаря введению матричных, а затем топологических структур.

На смену эмпирическим и приближенным графоаналитическим методам пришли методы численного моделирования на ЭВМ. Если еще в 50-х гг. эксперимент инициировал развитие теории, то теперь теория становится основой для расчетов и экспериментов. Развитие технологической и элементной базы радиоэлектроники уже позволило реализовать многие теоретические результаты – инверсию сопротивлений, световодную связь, цифровую модуляцию радиочастотных и оптических волн, голографию.

Вторая часть учебного пособия посвящена изучению классических математических моделей радиоэлектронных цепей и систем, анализу путей и способов их совершенствования

Изложение начинается с классификации радиосистем и рассмотрения основных структурных элементов и их идеализированных моделей. Далее анализируются различные методы расчета электрических цепей с известной структурой. Основу изложения составляют методы топологических и сигнальных графов, матричные методы контурных токов и узловых напряжений, метод переменных состояния.

Седьмая глава содержит методы описания и анализа радиоэлектронных систем с неизвестной внутренней структурой. Рассматриваются временные (динамические) и частотные характеристики систем, их взаимосвязь и области эффективного применения. Значительное место уделяется использованию интеграла свертки для описания линейных систем. В заключение излагаются основы теории наиболее распространенных систем с неизвестной внутренней структурой – четырехполюсников.

Глава 7

Методы описания и расчета радиочепей

7.1. Общие сведения о радиоэлектронных цепях и системах

Радиоэлектронные цепи и радиосистемы. В электротехнике и радиоэлектронике под электрической цепью понимают совокупность элементов, образующую путь (пути) прохождения электрического тока.

Радиоэлектронные (электронные¹) цепи являются разновидностью электрических цепей и содержат в качестве конструктивных компонентов кроме источников сигналов, резисторов, катушек индуктивности и конденсаторов различные электронные элементы – диоды и транзисторы, электронные лампы, микросхемы и т.п. Радиоэлектронные цепи, как правило, состоят из известных пассивных и активных элементов, соединенных между собой известными способами.

Наличие элементов и способы их соединения чаще всего изображаются в виде графической модели, называемой *принципиальной электрической схемой* цепи². Точки соединения элементов цепи называются *узлами*, а двухполюсники, включенные между узлами и состоящие только из последовательно соединенных элементов – *ветвями*.

Радиоэлектронные системы представляют собой комплексы из взаимосвязанных устройств, цепей и отдельных элементов и чаще всего изображаются структурными или *функциональными схемами* в виде совокупностей "черных ящиков", имеющих один или несколько входов, на которые поступают сигналы, несущие сообщения или управляющую информацию, и один или несколько выходов для съема преобразованных сигналов. При этом внутренняя структура таких подсистем может быть

¹ Электротехника. Основные понятия. Гост 19880-74. М.: Изд-во стандартов, 1974.

² Схема (от греч. schéma – наружный вид, форма, набросок) – чертеж, на котором условными графическими обозначениями показаны составные части радиоэлектронной цепи (системы) и соединения или связи между ними. Схемы в зависимости от назначения подразделяют на общие, принципиальные, структурные, функциональные, монтажные и другие.

Принципиальная электрическая схема цепи – это чертеж, на котором условными графическими изображениями показаны составные элементы цепи и порядок их соединения между собой. Монтажная электрическая схема в отличие от принципиальной изображает взаимное расположение не только элементов, но и монтажных (соединительных) проводов.

неизвестной или даже вообще не существенной. Примером последних служат интегральные микросхемы, выполняющие определенные функции вне зависимости от внутренней структуры.

Радиосистемы обладают рядом специфических системных свойств или критериев, к которым относятся *структурированность, иерархичность, целостность, сложность поведения* и другие³. Принципиальная сложность радиосистем приводит к построению для каждой из них ряда неадекватных моделей, раскрывающих вполне определенные аспекты системы. Отсюда вытекает *множественность возможных описаний*, позволяющая формировать наиболее полное представление о системе.

Преобразование сигналов в радиоэлектронной системе с точки зрения теории систем трактуется как отображение одного множества сигналов на другое. Отображаемая область есть пространство входов, а пространство выходов выбирается так, чтобы оно включало образы всех входных сигналов. Совокупность отображающей функции, области ее определения и области выходных сигналов – это математическая модель системы. Указанные отображения, а значит, и математические модели систем, в общем случае не реализуемы, ибо требуют знания всех пар вход-выход. Исключение составляют только линейные преобразования.

Если рассматривать сигналы, действующие на входах и выходах как координаты векторов $\vec{x}_{\text{вх}}(t)$ и $\vec{x}_{\text{вых}}(t)$, то связь этих векторов выражается операторным уравнением:

$$\vec{x}_{\text{вых}}(t) = \mathbf{T} \vec{x}_{\text{вх}}(t), \quad (7.1)$$

где \mathbf{T} – оператор системы, представленной в виде *многополюсника*; $\vec{x}_{\text{вых}}(t)$ – *выходная реакция* или *отклик* системы на входное воздействие $\vec{x}_{\text{вх}}(t)$. В простейших случаях радиосистема имеет один порт⁴, т.е. является *двухполюсником*, или один входной и один выходной порты, т.е. представляет собой *четырёхполюсник*.

Операторное описание справедливо и для радиоэлектронных цепей.

Системный оператор \mathbf{T} описывает причинно-следственную связь между откликом и воздействием и может быть задан матричным или функциональным уравнением, реализован в вероятностной форме, может содержать операции дифференцирования и интегрирования. Операторы двухполюсников (генераторов, антенн или других источников сигналов, а также пассивных элементов) характеризуют связи между протекающими токами и напряжениями на зажимах, т.е. описывают их сопротивления или проводимости. Операторы четырехполюсников представляют входные и выходные сопротивления или проводимости, а также передаточные функции, характеризующие преобразование сигналов.

Классификация радиоэлектронных цепей и систем. Радиоэлектронные цепи и системы классифицируют по различным признакам.

³ *Структурированность* – возможность описать систему через установление сети связей и отношений внутри нее; *иерархичность* – части системы могут рассматриваться как подсистемы, а части подсистем – как еще более мелкие системы; *целостность* – наличие общего назначения и принципиальная невозможность сведения ее свойств к сумме свойств частей; *сложность поведения* – наличие переплетающихся и перекрывающихся взаимосвязей между переменными, при которых изменение одной переменной влечет изменение многих других переменных.

⁴ *Портом* или *парными зажимами* называют два зажима, токи которых равны по величине и противоположны по направлению.

Цепь или система может быть активной или пассивной, линейной или нелинейной, инерционной или безынерционной, стационарной или нестационарной (параметрической), сосредоточенной или распределенной в пространстве, детерминированной или стохастической.

Радиосистема называется *детерминированной*, если каждому детерминированному воздействию отвечает один или конечное число (в случае мультистабильности) детерминированных откликов (выходных сигналов). В стохастических системах каждому детерминированному воздействию соответствует одна из реализаций случайного сигнала с конечной вероятностью ее появления.

Радиоэлектронная цепь (система) называется *активной* или *пассивной* в зависимости от присутствия в ней сторонних источников энергии.

Радиоэлектронная цепь (система) называется *линейной*, если протекающие в ней процессы удовлетворяют *принципу суперпозиции* и описываются линейными уравнениями.

- *Принцип суперпозиции* (от позднелат. *superpositio* – наложение) – фундаментальный физический принцип, согласно которому отклик системы на сумму воздействий равняется сумме откликов на отдельные воздействия:

$$\mathbf{T} \sum_k^N \alpha_k x_k(t) = \sum_k^N \alpha_k \mathbf{T} x_k(t). \quad (7.2)$$

Принцип суперпозиции широко используется в различных областях естествознания и существенно облегчает исследования, так как позволяет определить реакцию линейной цепи или системы на произвольный сигнал как сумму известных откликов на элементарные воздействия. Существуют различные способы разложения произвольного воздействия на элементарные сигналы. В качестве "элементарных" обычно используются функции включения Хевисайда, обобщенные дельта-функции Дирака или гармонические функции различных частот.

Наряду с приведенным встречается более узкое определение линейной системы как составленной из элементов, параметры которых *не зависят от величин воздействий*, т.е. от величин напряжений или токов. Это определение удобно использовать, если внутренняя структура системы известна и ее можно представить в виде соединения конкретных элементов. К сожалению, такое представление не всегда возможно, и более общая терминология предпочтительнее.

Радиоэлектронная цепь (система) называется *нелинейной*, если ее отклик на возмущение *нелинейно* зависит от амплитуды воздействия и принцип суперпозиции не выполняется. Простейшая и вместе с тем очень распространенная модель нелинейной системы – *квадратичная нелинейность*, операторное уравнение которой имеет вид

$$x_{\text{ВЫХ}}(t) = \mathbf{T} x_{\text{ВХ}}(t) = \alpha x_{\text{ВХ}}^2(t), \quad (7.3)$$

где α – коэффициент пропорциональности. В более общем случае нелинейные системы описываются полиномиальными операторами.

Строго говоря, все физические системы нелинейны, так как с ростом амплитуд воздействий реальные элементы в большей или меньшей степени проявляют нелинейные свойства. Но в определенных границах из-

менения переменных, характеризующих физический процесс, реальную систему можно *линеаризовать*, т.е. представить линейной моделью. Линейные модели физических систем сыграли замечательную роль в становлении основных разделов физики и широко используются в современной науке благодаря тому, что, по крайней мере теоретически, допускают аналитическое решение любой линейной задачи.

Отклик цепи (системы) $x_{\text{вых}}(t)$ может быть функцией не только воздействия $x_{\text{вх}}(t)$, но и его временных производных. При этом

$$x_{\text{вых}}(t) = \mathbf{T}[x_{\text{вх}}(t)] = a_0 x_{\text{вх}} + a_1 \frac{dx_{\text{вх}}}{dt} + a_2 \frac{d^2 x_{\text{вх}}}{dt^2} + a_3 \frac{d^3 x_{\text{вх}}}{dt^3} + \dots,$$

т.е. выходной сигнал содержит информацию о "предыстории" входного воздействия, а цепь (система) называется *инерционной*. Безынерционные системы, как и линейные, являются идеализацией. Например, электронная лампа или транзистор на низких частотах являются безынерционными, а для более высоких – инерционными, так как носители заряда имеют конечную подвижность и изменения тока запаздывают относительно изменений напряжения.

Радиоэлектронная цепь (система) называется *стационарной* или *инвариантной во времени*, если отклик системы удовлетворяет операторному уравнению (7.1) вне зависимости от того, как выбрано начало отсчета времени t_0 , т.е. при любом значении t_0 :

$$x_{\text{вых}}(t - t_0) = \mathbf{T} x_{\text{вх}}(t - t_0).$$

Цепь (система) называется *нестационарной* или *параметрической*, если инвариантность ее свойств относительно начала отсчета времени отсутствует.

Стационарные системы описываются уравнениями с постоянными во времени коэффициентами, а параметрические – уравнениями, в которых хотя бы один коэффициент зависит от времени. Следует подчеркнуть, что инвариантность по отношению к выбору начала отсчета времени и инерционность системы – не связанные понятия: инерционность системы вовсе не влечет неинвариантность во времени.

Линейные стационарные цепи обладают фундаментальными свойствами:

- 1) между откликом и воздействием существует прямая пропорциональная связь (линейная зависимость);
- 2) в отклике линейной цепи никогда не возникают новые спектральные компоненты, отсутствовавшие во входном воздействии, а по реакции и оператору системы можно однозначно восстановить входной сигнал (в нестационарных системах не выполняется).

Наконец, радиосистемы можно разделить на сосредоточенные и распределенные в пространстве в зависимости от соотношения длин волн, действующих в них сигналов и геометрических размеров систем. Как известно, длина волны λ и частота сигнала f связаны простым соотношением: $\lambda = c/f$, где c – скорость распространения электромагнитных волн. Для частоты сигналов, заданной в мегагерцах, длина волны в метрах равна $\lambda(\text{м}) = 300/f(\text{МГц})$.

Если геометрические размеры системы значительно меньше λ , то колебания во всех точках системы происходят синфазно и система называется *сосредоточенной*. Физические системы, размеры которых соизмеримы с длиной волны или превышают ее, называются *распределенными*

или *волновыми*. Отклики в подобных системах зависят как от времени, так и от координат.

Длины волн сигналов радиовещательных станций составляют десятки и сотни метров, и тогда радиоприемники – сосредоточенные системы. Радиолокационные станции или радиотелескопы работают на более коротких волнах и их геометрические размеры оказываются сопоставимыми с рабочими длинами волн, т.е. являются распределенными в пространстве. Более того, если, к примеру, телевизор можно считать сосредоточенной системой, то кабель, соединяющий его с антенной, имеет длину, сопоставимую с λ телесигналов, и является распределенной системой.

Практически любая радиоэлектронная система является одновременно активной, нелинейной, инерционной и, как правило, содержит элементы с распределенными параметрами. Последовательно разлагая систему на подсистемы, а каждую подсистему на ее составные части и т.д., можно получить множество "элементарных" функциональных узлов, каждый из которых выполняет единственную операцию и может быть представлен эквивалентной электрической или радиоэлектронной цепью.

При описании различных радиосистем используются и другие критерии классификации: наличие или отсутствие рассеяния энергии (диссипации), число степеней свободы – независимых переменных, полностью описывающих систему и т.д.

7.2. Элементы радиоэлектронных цепей

Передача сигналов сопровождается разнообразными преобразованиями, накоплением электрической и магнитной энергии, а также ее рассеянием. При описании таких процессов можно выделить, по крайней мере мысленно, *идеализированные элементы*, каждый из которых обладает только одним из этих свойств, а всякий реальный структурный элемент цепи можно представить *моделью* (схемой замещения), состоящей из *идеализированных элементов*. Реальные элементы могут быть электронными, например, в виде полупроводниковых структур, а соответствующие цепи – радиоэлектронными. Условные графические изображения идеализированных пассивных элементов (сопротивления, емкости и индуктивности) представлены на рис. 7.1.

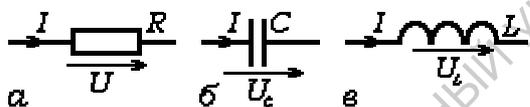


Рис. 7.1. Условные изображения: сопротивления (а), емкости (б), индуктивности (в)

турный элемент цепи можно представить *моделью* (схемой замещения), состоящей из *идеализированных элементов*. Реальные элементы могут быть электронными, например, в виде полупроводниковых структур, а соответствующие цепи – радиоэлектронными. Условные графические изображения идеализированных пассивных элементов (сопротивления, емкости и индуктивности) представлены на рис. 7.1.

7.2.1. Сопротивления и резисторы

Идеализированный элемент, в котором энергия электрического тока необратимо переходит в тепловую или другую неэлектрическую энергию, называется *сопротивлением* (рис. 7.1, а). В системе единиц СИ сопротивление R измеряется в омах (Ом). Обратная величина $G = 1/R$ называется *проводимостью* и измеряется в сименсах (См). Проводимостью в 1 См обладает участок цепи с сопротивлением 1 Ом.

В реальной радиосхеме все ее элементы в той или иной степени рассеи-

вают энергию, т.е. обладают сопротивлением, но существуют и специальные структурные элементы – *резисторы* (от лат. resisto – сопротивляюсь), изготовленные в виде законченных промышленных изделий. Резисторы позволяют регулировать токи и напряжения в заданных участках цепей и нередко составляют большую часть деталей радиоустройств.

Резисторы подразделяются на проволочные, тонкослойные (в том числе пленочные) и композиционные. Проволочные резисторы обычно имеют вид спиралей и обладают индуктивностью (рис. 7.2, а). Для постоянного и переменного тока низкой частоты непроволочные резисторы ведут себя как сопротивления. На радиочастотах начинает влиять емкость выводов резистора (рис. 7.2, б), и сопротивление переменному току уменьшается (обобщенная схема замещения приведена на рис. 7.2, в).

Резисторы могут быть линейными (R не зависит от величины тока) или нелинейными. Нелинейными резисторами являются некоторые газоразрядные приборы, полупроводниковые диоды, варисторы и т.п. Свойства реального резистора описывает его *вольт-амперная характеристика* (ВАХ) – зависимость тока I от приложенного напряжения U , представляемая формулой, таблицей или графиком (рис. 7.3). ВАХ линейного резистора – прямая линия, проходящая через начало координат, а единственный параметр – проводимость G соответствует угловому коэффициенту прямой. У нелинейного резистора каждому значению напряжения U_0 соответствуют две проводимости: статическая и динамическая или дифференциальная (рис. 7.3).

Статической проводимостью нелинейного резистора $G(U_0)$ называется отношение тока I_0 к постоянному напряжению U_0 в выбранной на ВАХ рабочей точке A (статический режим).

Дифференциальной проводимостью нелинейного резистора $G_{\text{диф}}(U_0)$ называется отношение малых приращений тока I и напряжения U , характеризующее наклон ВАХ в выбранной рабочей точке A : $G_{\text{диф}}(U_0) = \frac{dI}{dU}|_{U=U_0}$. Статическое сопротивление нелинейного резистора положительно, а динамическое сопротивление может быть и отрицательным.

В резистивных цепях напряжение $U(t)$ и ток $I(t)$ связаны законом Ома при любой форме переменных:

$$U(t) = RI(t) \quad \text{или} \quad I(t) = GU(t), \quad (7.4)$$

а мгновенная мощность, рассеиваемая в сопротивлении R , удовлетворяет соотношениям:

$$P = I_0^2 R = \frac{U_0^2}{R} = U_0^2 G \quad \text{для постоянного тока,} \quad (7.5)$$

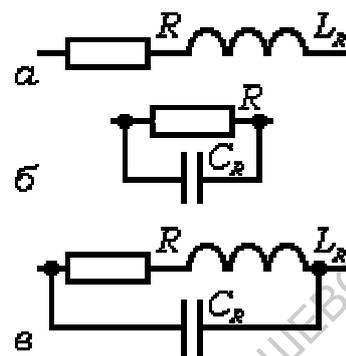


Рис. 7.2. Схемы замещения: а – проволочного; б – непроволочного резисторов; в – обобщенная схема для радиочастот

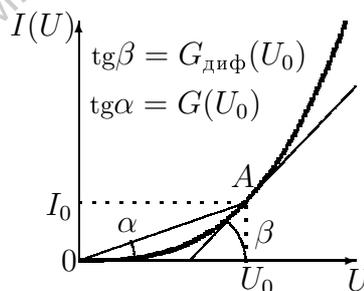


Рис. 7.3. ВАХ нелинейного резистора

$$P = \frac{I_m^2}{2}R = \frac{U_m^2}{2R} = \frac{U_m^2}{2}G \quad \text{для переменного тока,} \quad (7.6)$$

где I_m – амплитуда гармонического тока; U_m – амплитуда напряжения. Подчеркнем еще раз, что

- формы сигналов (негармонического тока и связанного с ним напряжения) совпадают *только в линейных резистивных цепях*. В нелинейной цепи или в линейной цепи, содержащей емкость или индуктивность, формы тока и напряжения будут различаться для любых сигналов, кроме гармонических (см. 1.4).

7.2.2. Электрические емкости и конденсаторы

Идеализированный элемент, обладающий способностью накапливать электрический заряд и запасать энергию электрического поля, называется *электрической емкостью* (см. рис. 7.1,б), а выпускаемые промышленностью радиоэлементы, способные выполнять те же функции – *конденсаторами*. Емкости и конденсаторы могут быть линейными и нелинейными. В качестве нелинейных широко используются специальные полупроводниковые диоды – *варикапы*⁵.



Рис. 7.4. Схема замещения конденсаторов

Простейшая схема замещения конденсатора изображена на рис. 7.4 и содержит сопротивление, учитывающее токи утечки в диэлектрических пленках, разделяющих обкладки конденсатора. На высоких частотах эта схема усложняется введением дополнительных элементов.

В системе единиц СИ емкость C измеряется в фарадах (Ф). Элемент цепи обладает емкостью в 1 Ф, если при электрическом заряде $q = 1$ кулон (Кл) на нем возникает напряжение $U = 1$ В. Емкость C , ее заряд q и напряжение U связаны соотношением

$$q = CU, \quad (7.7)$$

а зависимость $q(U)$ называется *вольт-кулонной характеристикой* конденсатора. У нелинейных конденсаторов каждому значению напряжения $U = U_0$ соответствуют статическая $C(U_0)$ и дифференциальная $C_{\text{диф}}(U_0) = dq/dU(U_0)$ емкости. У линейных конденсаторов $C(U_0) = C_{\text{диф}}(U_0)$.

При описании цепей переменного тока наряду с q удобно использовать $I = dq/dt$. Если C неизменна во времени и не зависит от величины приложенного напряжения $U(t)$, то из (7.7) имеем

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU}{dt}, \quad (7.8)$$

$$U(t) = U(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(t) dt, \quad (7.9)$$

где $U(t_0)$ – начальное напряжение.

Формула (7.8) представляет дифференциальное уравнение емкости.

⁵ Варикапы – обратно смещенные электронно-дырочные переходы, обладающие барьерной емкостью, величина которой уменьшается с ростом напряжения смещения.

Ток в цепи реального конденсатора содержит дополнительную составляющую U/R_C , обусловленную утечкой в диэлектрике, а дифференциальное уравнение (математическая модель) конденсатора принимает вид:

$$I = C \frac{dU}{dt} + \frac{1}{R_C} U. \quad (7.10)$$

Поскольку ток и напряжение конденсатора связаны дифференциальным соотношением, временные изменения напряжения и тока могут заметно различаться.

Пусть в цепи конденсатора задан ток $I(t) = I_0 \sigma(t)$. Тогда согласно (7.9) $U(t) = U(t_0) + I_0 t / C$ и линейно нарастает с t . Если же $I(t) = I_m \cos \omega t$, то $U(t) = \frac{1}{C\omega} \sin \omega t$. Отметим, что изменение напряжения в обоих случаях запаздывает относительно изменений тока, и электрическая емкость в известном смысле характеризует инерционность цепи к изменению тока.

Для гармонических сигналов, заданных в комплексной форме, напряжение $\dot{U}(t) = \dot{U}_m \exp(j\omega t)$, где \dot{U}_m – комплексная амплитуда, и ток $\dot{I}(t) = j\omega C \dot{U}_m \exp(j\omega t) = \dot{I}_m \exp(j\omega t)$ описываются одинаковыми гармоническими функциями $\exp(j\omega t)$, а их комплексные амплитуды оказываются пропорциональными, т.е. выполняется закон Ома:

$$\frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{1}{j\omega C} = \dot{Z}_C,$$

где \dot{Z}_C – комплексное сопротивление емкости гармоническому току с частотой ω . Его модуль $|\dot{Z}_C| = X_C = \frac{1}{\omega C}$ называется емкостным сопротивлением.

Закон Ома можно ввести и для негармонических сигналов, но только в виде отношения операторных изображений. Если с помощью \mathbf{L} -преобразований определить изображения $U(s)$ и $I(s)$, то операторное сопротивление емкости $Z_C(s) = U(s)/I(s) = 1/sC$, а операторная проводимость конденсатора (не путать с емкостью!) $Y_C(s)$ принимает вид

$$Y_C(s) = sC + G_C, \quad (7.11)$$

где $G_C = 1/R_C$ – резистивная проводимость.

Когда емкость конденсатора зависит от времени (параметрический элемент $C(t)$), то для тока выполняется соотношение

$$I(t) = \frac{d(C(t)U(t))}{dt} = C(t) \frac{dU}{dt} + U(t) \frac{dC}{dt},$$

а комплексная амплитуда тока удовлетворяет равенству

$$\dot{I}_m = j\omega C(t) \dot{U}_m + \dot{U}_m \frac{dC}{dt}.$$

Рассмотрим энергетические характеристики емкостного элемента. С учетом (7.8) мгновенная мощность $P_C = UI = CU dU/dt$ и может быть положительной или отрицательной в зависимости от знаков U и dU/dt . При совпадении знаков происходит запасание энергии и рост заряда q . Энергия, запасенная в C за время $t - t_0$, удовлетворяет соотношению:

$$W(t) = \int_{t_0}^t U(t) I(t) dt = C \int_{t_0}^t U(t) \frac{dU}{dt} dt = \frac{1}{2} CU^2(t) - \frac{1}{2} CU^2(t_0). \quad (7.12)$$

7.2.3. Индуктивности и катушки индуктивности. Связанные индуктивности

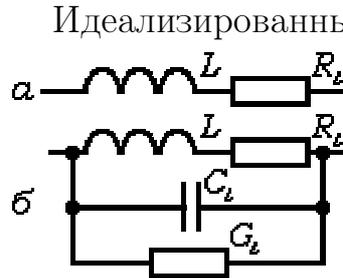


Рис. 7.5. Схемы замещения катушек индуктивности: *a* – для средних частот; *б* – для высоких частот

Идеализированный элемент, обладающий способностью запастись энергией магнитного поля, называется *индуктивностью* (см. рис. 7.1, *в*), а соответствующий реальный радиоэлемент – *катушкой индуктивности*. Катушки индуктивности могут обладать линейной и нелинейной индуктивностью (например, при введении ферритовых сердечников). Простейшая схема замещения катушки индуктивности для низких частот изображена на рис. 7.5, *a* и включает сопротивление обмотки. На высоких частотах возрастают потери на излучение и парциальные межвитковые емкости, а схема замещения усложняется (рис. 7.5, *б*).

В системе единиц СИ индуктивность L измеряется в генри (Гн). Участок цепи обладает индуктивностью в 1 Гн, если при протекании тока $I = 1$ А в нем образуется магнитный поток $\Phi = 1$ вебер (Вб).

При изменении тока, а следовательно, и магнитного потока $\Phi = LI$, в индуктивности возникает переменная ЭДС самоиндукции $E = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$. Напряжение на индуктивности U по закону Кирхгофа равно по величине и противоположно по знаку ЭДС в цепи. Отсюда

$$U = L\frac{dI}{dt}, \quad (7.13)$$

$$I(t) = I(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t U(t)dt, \quad (7.14)$$

где $I(t_0)$ – начальное значение тока.

Формула (7.13) представляет дифференциальное уравнение идеализированного индуктивного элемента. Реальная катушка индуктивности обладает конечным сопротивлением R_L , а ее дифференциальное уравнение принимает вид

$$U = L\frac{dI}{dt} + R_L I. \quad (7.15)$$

Комплексное \dot{Z}_L и операторное $Z_L(s)$ сопротивления индуктивности строятся по тому же алгоритму, что и емкостные сопротивления:

$$\dot{Z}_L = j\omega L, \quad |\dot{Z}_L| = X_L = \omega L, \quad Z_L(s) = sL.$$

Реактивное сопротивление индуктивности $X_L = \omega L$ называется *индуктивным сопротивлением*.

Индуктивность, как и емкость, характеризует инерционность цепи. За время $t - t_0$ индуктивность накапливает энергию

$$W(t) = \int_{t_0}^t U(t)I(t)dt = L \int_{t_0}^t I(t)\frac{dI}{dt}dt = \frac{1}{2}LI^2(t) - \frac{1}{2}LI^2(t_0). \quad (7.16)$$

Связанные индуктивности. Все представленные радиоэлементы

были двухполюсными. Рассмотрим теперь четырехполюсные элементы – *связанные индуктивности* (рис. 7.6, а). Две индуктивности L_1 и L_2 образуют единый радиоэлемент, когда магнитный поток каждой из них пересекает витки другой и между ними возникает *взаимная индуктивность* M .

Пусть связанные индуктивности L_1 и L_2 находятся под воздействием тока I_1 . Тогда в первой индуктивности наводится ЭДС самоиндукции, пропорциональная L_1 , а во второй – ЭДС взаимной индукции, пропорциональная M . Мгновенные значения напряжения U_2 на индуктивности L_2 удовлетворяют соотношению

$$U_2 = M \frac{dI_1}{dt},$$

где M – взаимная индуктивность. В более общем случае, когда на L_1 воздействует ток I_1 , а на L_2 – ток I_2 , напряжения U_1 и U_2 на индуктивностях удовлетворяют следующим равенствам:

$$U_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} \pm M \frac{dI_2}{dt}, \quad (7.17)$$

$$U_2 = L_2 \frac{dI_2}{dt} \pm M \frac{dI_1}{dt}, \quad (7.18)$$

Знаки "±" перед M определяются взаимным направлением токов в индуктивностях. При *согласованном включении* индуктивностей токи протекают в одинаковом направлении (от начала к концу), суммарный магнитный поток увеличивается, и M имеет положительный знак. Когда же токи протекают навстречу друг другу (*встречное включение*), суммарный магнитный поток уменьшается, и M имеет отрицательный знак.

Взаимное влияние индуктивностей описывается не только параметром M , но и безразмерными коэффициентами. Пусть на L_1 подано напряжение U_1 . Оно создает ток I_1 в L_1 , а ток I_1 – напряжение U_2 на L_2 . Тогда

$$U_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt}, \quad U_2 = M \frac{dI_1}{dt}, \quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{M}{L_1} = k_1.$$

Коэффициент k_1 характеризует отношение части магнитного потока индуктивности L_1 , связанной с индуктивностью L_2 , к полному потоку индуктивности L_1 ($0 \leq k_1 \leq 1$) и называется *коэффициентом передачи* из первичной цепи во вторичную. Если же напряжение U_1 приложено к индуктивности L_2 , то $\frac{U_2}{U_1} = \frac{M}{L_2} = k_2$. Это – коэффициент передачи из вторичной цепи в первичную.

Взаимное влияние индуктивно связанных цепей наиболее полно описывает коэффициент связи

$$k = \sqrt{k_1 k_2} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (7.19)$$

Связанные общим магнитным потоком индуктивности можно представить T -образной схемой замещения (рис. 7.6, б), в которой магнитная

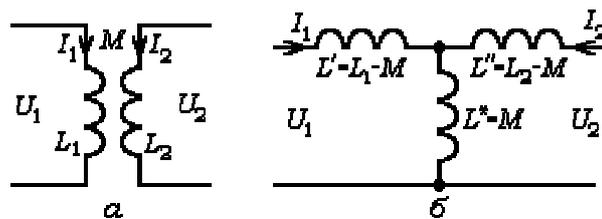


Рис. 7.6. Связанные индуктивности (а) и T -образная схема замещения (б)

связь индуктивностей отсутствует. При согласованном включении индуктивностей (рис. 7.6,а) уравнения имеют вид

$$U_1 = L' \frac{dI_1}{dt} + L^* \frac{d(I_1 + I_2)}{dt} = (L_1 - M) \frac{dI_1}{dt} + M \frac{d(I_1 + I_2)}{dt} = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}, \quad (7.20)$$

$$U_2 = L'' \frac{dI_2}{dt} + L^* \frac{d(I_1 + I_2)}{dt} = (L_2 - M) \frac{dI_2}{dt} + M \frac{d(I_1 + I_2)}{dt} = L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} \quad (7.21)$$

и полностью совпадают с уравнениями (7.17) и (7.18).

7.2.4. Независимые источники напряжения и тока

Источники электрических сигналов подразделяются на источники напряжения и тока. Источники могут быть независимыми (ЭДС и токи не зависят от напряжений и токов в других участках цепи) или зависимыми (управляемыми напряжением или током в других участках цепи).

Идеализированным источником напряжения называется активный элемент с нулевым внутренним сопротивлением, напряжение на выводах которого не зависит от величины протекающего тока.

Идеализированным источником тока называется активный элемент

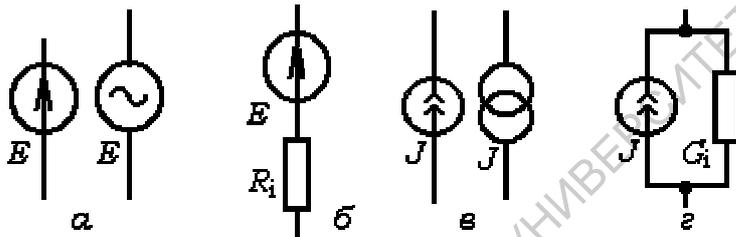


Рис. 7.7. Идеализированные источники напряжения (а) и тока (в) и схемы замещения реальных источников напряжения (б) и тока (г)

с бесконечно большим внутренним сопротивлением, ток которого не зависит от напряжения на выводах. Условное графическое изображение идеализированных источников напряжения и тока показано на рис. 7.7,а,в соответственно.

Идеализированные источ-

ники не осуществимы, так как должны обладать бесконечной энергией. Схемы замещения реальных источников можно представить в виде соединения идеализированных источников и сопротивлений (рис. 7.7,б,г).

Рассмотрим цепь, состоящую из реального источника сигналов и

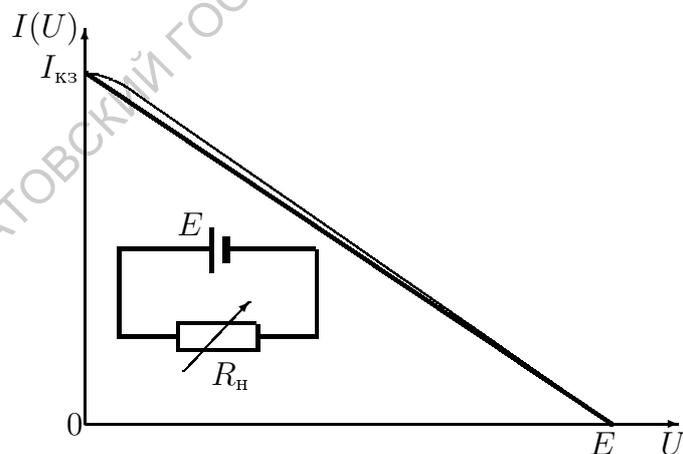


Рис. 7.8. Схема соединений и нагрузочная характеристика источника сигналов

сопротивления нагрузки R_n , величина которого изменяется от 0 до ∞ (рис. 7.8). Если $R_n = 0$, выводы источника сигналов оказываются замкнутыми и ток в цепи короткого замыкания достигает наибольшего значения $I_{кз}$. Для разомкнутого источника ($R_n \rightarrow \infty$) ток в цепи отсутствует, а наибольшего значения достигает напряжение на его выводах. Это напряжение E называется *электродвижу-*

щей силой (ЭДС) источника сигналов. При других R_n ток и напряжение принимают промежуточные значения. Зависимость тока от напряжения на выводах источника можно представить графически в виде *внешней* или *нагрузочной характеристики* источника (рис. 7.8). Нагрузочные характеристики реальных источников нелинейны (тонкая кривая) и испытывают насыщение в окрестности точки ($U = 0, I = I_{кз}$). Считая нагрузочную характеристику линейной (жирная линия), представим ее уравнение в отрезках:

$$\frac{U}{E} + \frac{I}{I_{кз}} = 1 \quad \text{или} \quad U = E - \frac{E}{I_{кз}} I.$$

Отношение $E/I_{кз}$ имеет размерность сопротивления и называется *внутренним сопротивлением источника* R_i . Тогда

$$E = U + IR_i \quad \text{или} \quad I = \frac{E}{R_i + R_n}. \quad (7.22)$$

Последовательное соединение идеализированного источника напряжения E и внутреннего сопротивления R_i будем называть *последовательной схемой замещения* реального источника сигналов или *схемой замещения с источником напряжения* (см. рис. 7.7,б).

Если (7.22) разделить на $R_i = E/I_{кз}$, то получим следующее соотношение

$$J = I_{кз} = I + \frac{U}{R_i} = I + UG_i \quad \text{или} \quad U = \frac{J}{G_i + G_n}, \quad (7.23)$$

где $G_i = 1/R_i$ – внутренняя проводимость источника; $I/U = G_n$ – проводимость нагрузки. Параллельное соединение идеализированного источника тока J и внутренней проводимости G_i будем называть *параллельной схемой замещения* реального источника или *схемой замещения с источником тока* (см. рис. 7.7,г).

- Реальный источник сигналов представим последовательной схемой замещения с идеализированным источником напряжения или параллельной схемой с идеализированным источником тока. Это означает, что по известным параметрам источника напряжения можно рассчитать параметры эквивалентного источника тока, и наоборот:

$$J = \frac{E}{R_i}, \quad G_i = \frac{1}{R_i}; \quad E = \frac{J}{G_i}, \quad R_i = \frac{1}{G_i}.$$

7.2.5. Зависимые (управляемые) источники напряжения и тока

Некоторые электронные устройства, например электронные усилители, при теоретическом анализе удобно представлять эквивалентными источниками напряжения или тока, но зависимыми или управляемыми входными сигналами. Условное графическое изображение управляемых источников напряжения и тока показано на рис. 7.9.

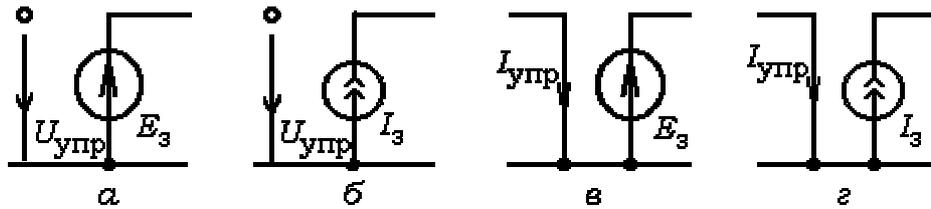


Рис. 7.9. Схемы источников напряжения (а, б) и тока (в, г), управляемых напряжением (а, в) или током (б, г)

Различают четыре разновидности управляемых источников: источники напряжения, управляемые напряжением $E_3 = f(U_{\text{упр}})$ (рис. 7.9,а) или током $E_3 = f(I_{\text{упр}})$ (рис. 7.9,в), и источники тока, управляемые напряжением $J_3 = f(U_{\text{упр}})$ (рис. 7.9,б) или током $J_3 = f(I_{\text{упр}})$ (рис. 7.9,г). Зависимости E_3 и J_3 от управляющих сигналов обычно считаются линейными и характеризуются коэффициентами пропорциональности $\mu = E_3/U_{\text{упр}}$ и $\gamma = E_3/I_{\text{упр}}$ (для источников напряжения, управляемых напряжением (ИНУН) и током (ИНУТ) соответственно), $S = J_3/U_{\text{упр}}$ и $\beta = J_3/I_{\text{упр}}$ (для источников тока, управляемых напряжением (ИТУН) и током (ИТУТ) соответственно). Особенность управляемых источников состоит в том, что *зависимые параметры источников U_3 и J_3 отличны от нуля только при наличии конечного управляющего сигнала.*

Зависимые (управляемые) источники тока используются при построении схем замещения электронных ламп и транзисторов.

7.2.6. Идеализированные операционные усилители как управляемые источники напряжения

Операционным усилителем (ОУ) называется выполненный по микроэлектронной технологии усилитель с дифференциальным входом и однофазным выходом, обладающий высоким коэффициентом усиления и низким выходным сопротивлением (рис. 7.10,а).

Сигнал, поступающий на *неинвертирующий* вход (+) усилителя, усиливается без изменения полярности постоянного или фазы переменного напряжения,

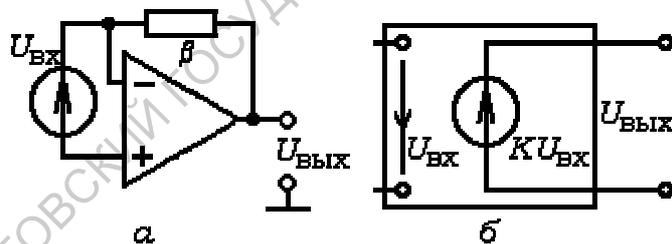


Рис. 7.10. Операционный усилитель (а) и схема его замещения зависимым источником напряжения (б)

а сигнал, поступающий на *инвертирующий* вход (−), приобретает противоположную полярность или сдвиг по фазе на 180° . Из-за большого коэффициента усиления по напряжению ОУ выполняют линейные преобразования сигналов только при ничтожно малых уровнях сигнала, и в реальных устройствах ОУ используются с цепями глубокой отрицательной обратной связи (условно представлена на рис. 7.10,а элементом β).

Под *идеализированным ОУ* обычно понимают линейный ОУ, обладающий бесконечно большим коэффициентом усиления по напряжению.

Под *идеализированным ОУ* обычно понимают линейный ОУ, обладающий бесконечно большим коэффициентом усиления по напряжению.

Отрицательная обратная связь ограничивает коэффициент усиления конечным значением K . Тогда $U_{\text{вых}} = KU_{\text{вх}}$. Поскольку выходное сопротивление ОУ мало, его можно рассматривать как источник напряжения с ЭДС $E_3 = U_{\text{вых}}$, зависимой от "управляющего" напряжения $U_{\text{упр}} = U_{\text{вх}}$ (рис. 7.10,б). Характеристический параметр такого ИНУН совпадает с коэффициентом усиления ОУ ($\mu = K$).

7.2.7. Дуальная эквивалентность радиоэлектронных элементов

Построенные модели радиоэлектронных элементов обладают важным свойством *дуальности* (от лат. dualis - двойственный, раздвоенный), которая проявляется в аналогичности дифференциальных и алгебраических уравнений, описывающих пассивные и активные радиоэлементы.

Напомним уравнения реальных конденсаторов и катушек индуктивности (7.10) и (7.15):

$$I = C \frac{dU}{dt} + G_C, \quad U = L \frac{dI}{dt} + R_L,$$

где G_C – резистивная проводимость конденсатора; R_L – резистивное сопротивление катушки индуктивности. Эти уравнения совпадают, при замене в одном из них U на I , I на U , L на C , R_L на G_C . Аналогичная связь существует между алгебраическими уравнениями для источников напряжения и тока (формулы (7.22) и (7.23)).

- Электрические цепи или устройства называются *дуальными*, если они описываются одинаковыми интегродифференциальными или алгебраическими уравнениями и инвариантны относительно замены параллельно соединенных последовательно соединенными элементами с дуальными параметрами, источников напряжения – источниками тока, напряжений – токами и наоборот.

Основой подобных обобщений служит табл. 7.1 дуальной эквивалентности переменных и параметров радиоэлементов (C' и L' – параметры емкости и индуктивности, соответствующие L и C в дуальной схеме).

Таблица 7.1

Дуальные параметры и дуальные переменные

Последовательное соединение	R	L	$j\omega L$	C	$j\omega C$	E	R_i	U	I
Параллельное соединение	G	C'	$j\omega C'$	L'	$j\omega L'$	J	G_i	I	U

Принцип дуальности удастся обобщить на более сложные радиоэлектронные цепи и системы, в частности колебательные, благодаря чему он широко используется в различных областях физики и способствует упрощению математических выкладок. Например, исследование динамики напряжений и токов в цепи с изменяющейся индуктивностью можно заменить более простым анализом дуальных переменных в цепи с изменяющейся емкостью.

7.3. Методы расчета линейных цепей

Физические процессы в цепи, составленной из известных элементов, определяются временным изменением напряжений U_i и токов I_i в ее ветвях (i – условный номер ветви). При заданных источниках сигналов и начальных условиях на реактивных элементах уравнения для напряжений и токов строятся на основе законов Кирхгофа. Закон Кирхгофа для токов отражает принцип сохранения заряда и утверждает, что алгебраическая сумма токов пассивных элементов I_{ik} и источников тока J_{mk} в любом i -м узле цепи равна нулю. Закон Кирхгофа для напряжений постулирует обращение в нуль суммы ЭДС E_{lj} и напряжений U_{nj} на пассивных элементах любого j -го замкнутого контура:

$$\sum_m J_{mk} + \sum_i I_{ik} = 0, \quad \sum_\ell E_{lj} + \sum_n U_{nj},$$

где k – номер узла; i – номер ветви; j – номер контура. Электрическая схема, содержащая N ветвей, описывается $2N$ равенствами: N для U_i и N для I_i . Система из $2N$ уравнений избыточна, так как одни и те же напряжения и токи входят многократно. Число решаемых уравнений можно уменьшить, если учесть топологические характеристики⁶ цепи (наличие узлов и способы их соединения) и построить систему независимых уравнений. Существуют различные методы построения систем независимых уравнений. Чтобы упростить сравнение их эффективности, будем использовать в расчетах по возможности одну и ту же электрическую цепь.

7.3.1. Топология цепей

Пусть задана радиоэлектронная цепь (рис. 7.11,а), состоящая из семи пассивных элементов, представленных комплексными сопротивлениями Z_i , и двух источников сигналов.

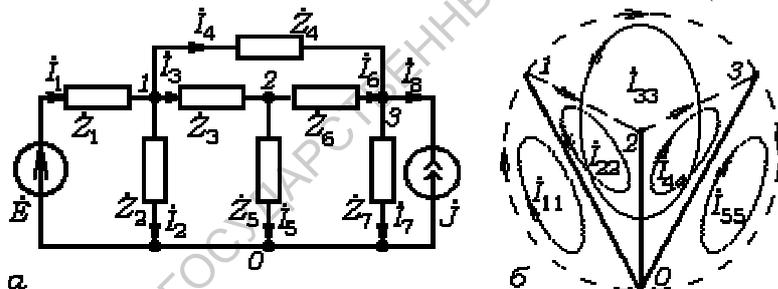


Рис. 7.11. Электрическая схема цепи (а) и ее топологический граф (б)

Графическое изображение этой цепи (рис. 7.11,б) в виде совокупности узлов (обозначены цифрами 0, 1, 2, 3) и ветвей (изображены

жирными и пунктирными линиями) без указания параметров элементов, называется *топологическим графом* цепи или просто *графом*. Фрагменты графа в виде связанных совокупностей узлов и ветвей называются *подграфами*. При этом элементы ветвей замещаются отрезками непересекающихся линий произвольной формы. Граф может быть *пла-*

⁶ Топология (от греч. τόπος – место и logos – учение) – раздел математики, изучающий топологические свойства фигур, т.е. свойства, не изменяющиеся при деформациях, производимых без разрывов и склеиваний. Окружность, эллипс, контур многоугольника имеют одинаковые топологические свойства, так как могут быть деформированы друг в друга.

нарным, когда при изображении на плоскости его ветви не пересекаются, или объемным. Если стрелками на ветвях указать направления действительных или предполагаемых токов, то получим *направленный* топологический граф. Построение топологического графа по электрической схеме цепи не вызывает трудностей и позволяет облегчить ввод информации при расчете на ЭВМ.

Замкнутая последовательность ветвей, вдоль которой каждый узел встречается один раз, называется *контуром*.

Связанный подграф, содержащий все узлы исходного графа и не имеющий контуров, называется *деревом графа*. Ветви, входящие в дерево (на рис. 7.11,б показаны жирными линиями), называются *ребрами*, а не входящие – *хордами* или *связями*. Обычно связанный подграф выбирают таким образом, чтобы наибольшее число ребер сходилось к одному (коренному или базовому) узлу (узел θ). Отсюда и название – дерево графа.

В рассматриваемом графе 4 узла, и любое дерево графа должно содержать 3 ребра. Принимая в качестве опорного последовательно 1, 2 и 3 узлы, можно построить 24 различных дерева⁷.

Дерево графа не содержит контуров, но добавление любой связи (рис. 7.11,б, пунктирные линии) приводит к появлению контура. Контур, включающий только одну связь и произвольное число ребер дерева, называется *главным* или *особым контуром*. Количество главных контуров равно числу связей графа. Радиоэлектронная цепь (рис. 7.11) содержит 16 контуров (в их числе контуры, составленные из элементов \dot{E} , \dot{Z}_1 , \dot{Z}_4 , \dot{Z}_6 , \dot{Z}_5 и \dot{J} , \dot{Z}_4 , \dot{Z}_3 , \dot{Z}_5) и только 5 главных контуров.

Замкнутая линия (планарного графа) или замкнутая поверхность (объемного графа), разделяющая граф на две части, называется *сечением*. Сумма токов, втекающих через сечение, и вытекающих через него, равна нулю. Сечения, пересекающие только одно ребро дерева и произвольное число связей, называются *главными* или *особыми сечениями*. Количество главных сечений графа равно числу ребер дерева.

7.3.2. Метод топологических графов

Метод топологических графов разработан в середине 50-х гг. XX в. Самуилом Мэзоном [9]. Основу метода составляет закон передачи, получивший название "формулы Мэзона" и позволяющий определять реакции сложных цепей *без составления систем уравнений*.

В методе топологических графов в качестве отклика на известное воздействие вычисляется основная топологическая характеристика – *передача цепи \dot{T}* , равная отношению искомой переменной к величине заданного сигнала и отражающая топологию цепи. При этом предполагается, что искомая переменная фиксируется измерительным прибором (амперметром или вольтметром). В сложных цепях сигнал от источника к измерительному прибору приходит разными путями. Формула Мэзона учитывает эту множественность путей передачи. Если цепь содержит несколько источников, то передачи цепи строятся поочередно для каждого из них, а затем полученные реакции суммируются. Рассмотрим топологический закон передачи подробнее.

⁷ Эти деревья предлагается построить самостоятельно.

1. Простая непересекающаяся последовательность ветвей между двумя узлами графа, в которой каждый узел встречается только один раз, называется *топологическим путем* или просто *путем* между этими узлами, а топологический путь, опирающийся на узлы источника сигнала и содержащий ветвь измерительного прибора, – *путем передачи*.

2. Произведения проводимостей ветвей k -го пути или i -го пути передачи называются *величиной пути* \dot{P}_k или *величиной пути передачи* \dot{T}_i .

3. Произведение проводимостей ветвей дерева графа называется *величиной дерева графа*, а сумма величин всех деревьев графа – *определителем графа* $\dot{\Delta}$.

Проводимости ветвей, величины путей и деревьев для гармонических сигналов представляются в комплексной, а для негармонических сигналов – в операторной форме. В последнем случае временные функции откликов формируются в результате обратного преобразования Лапласа.

При вычислении \dot{P}_k и $\dot{\Delta}$ источники напряжения и амперметры замещаются коротким замыканием узлов, а источники тока и вольтметры исключаются. Определитель графа, содержащий только один узел, независимо от того, присоединена к нему замкнутая ветвь или нет, равен единице. При вычислении \dot{T}_i проводимость измерительного прибора приравнивается единице, а \dot{T}_i принимает положительный или отрицательный знак в зависимости от того, какое показание прибора вызывает ток в i -м пути передачи – положительное или отрицательное.

Если в цепи (рис. 7.11,а) заместить источник тока вольтметром, то возникнут два пути передачи $\dot{T}_1 = \dot{Y}_1 \dot{Y}_3 \dot{Y}_6$ и $\dot{T}_2 = \dot{Y}_1 \dot{Y}_4$, где $\dot{Y}_i = 1/\dot{Z}_i$, а между узлами с номерами 1 и 0 существует 6 путей: $\dot{P}_1 = \dot{Y}_1$, $\dot{P}_2 = \dot{Y}_2$, $\dot{P}_3 = \dot{Y}_3 \dot{Y}_5$, $\dot{P}_4 = \dot{Y}_3 \dot{Y}_6 \dot{Y}_7$, $\dot{P}_5 = \dot{Y}_4 \dot{Y}_7$, $\dot{P}_6 = \dot{Y}_4 \dot{Y}_6 \dot{Y}_5$.

4. *Алгебраическим дополнением* k -го пути $\dot{\Delta}'_k$ или i -го пути передачи $\dot{\Delta}'_i$ называется определитель цепи, остающийся после замыкания всех ветвей k -го пути или i -го пути передачи (включая измерительный прибор). Так алгебраическое дополнение пути передачи \dot{T}_1 равно 1, а пути передачи \dot{T}_2 имеет вид: $\dot{Y}_3 + \dot{Y}_5 + \dot{Y}_6$.

5. *Передача цепи* $\dot{\mathbf{T}}$ от источника сигнала к измерительному прибору удовлетворяет соотношению (*топологический закон Мэсона*):

$$\dot{\mathbf{T}} = \frac{1}{\dot{\Delta}} \sum_i \dot{T}_i \dot{\Delta}'_i. \quad (7.24)$$

При вычислении определителей сложных графов поиск деревьев затруднен и целесообразно использовать разложение определителей по узловым парам, по узлам или по ветвям [9]. Тогда

$$\dot{\Delta} = \sum_k \dot{P}_k \dot{\Delta}'_k, \quad (7.25)$$

а топологический закон Мэсона принимает вид

$$\dot{\mathbf{T}} = \frac{\sum_i \dot{T}_i \dot{\Delta}'_i}{\sum_k \dot{P}_k \dot{\Delta}'_k}. \quad (7.26)$$

Топологический закон передачи можно распространить на более сложные схемы, содержащие электронные лампы или транзисторы [6], но в этих случаях используются специальные топологические элементы с односторонней проводимостью – *унисторы*. Другие примеры использования топологического метода Мэсона рассмотрены ниже.

7.3.3. Метод направленных сигнальных графов

Сигнальный граф цепи или устройства, как и топологический граф, представляет совокупность узлов и ветвей, но теперь каждый узел отображает некоторую переменную (напряжение или ток), а каждая ветвь – *причинно-следственную связь* между переменными. Ветвями графа являются линии произвольной формы, ориентированные с помощью стрелок от *независимых узлов* или *источников* (причины) к *зависимым узлам* или *стокам* (следствия), и количественно характеризуются величинами *передачи ветви* T_{ij} , где j – номер узла, соответствующего источнику рассматриваемой ветви, а i – ее стоку. Ветвь с передачей T_{ij} начинается и заканчивается в узле с номером i , т.е. представляет собой *петлю*. Передачи различных ветвей одного и того же графа могут иметь различную размерность. Поскольку переменные являются сигналами, действующими в цепи, граф называется *сигнальным*. Каждой цепи могут соответствовать несколько различных сигнальных графов.

Рассмотрим простейшую схему, состоящую из источника напряжения с ЭДС E (внутреннее сопротивление R_i) и сопротивления нагрузки R_H (рис. 7.12, а). Она описывается системой двух уравнений:

$$I = E / (R_i + R_H), \quad U = IR_H$$

с тремя переменными E, I, U , из которых одна (E) является независимой, а две другие – зависимыми. Один из возможных сигнальных графов цепи представлен на рис. 7.12, б. Он содержит три узла и две ветви с коэффициентами передачи $T_1 = 1 / (R_i + R_H)$ и $T_2 = R_H$.

Ту же цепь описывает сигнальный граф, изображенный на рис. 7.12, в. Здесь введены четыре переменные $E, E - U, I, U$.

Переменная $E - U$ определяется через E и U с помощью входящих в узел ветвей с коэффициентами передачи $T_1 = 1$ и $T_4 = -1$. Переменная I возникает в результате действия переменной $E - U$ и служит источником переменной U . Они связаны друг с другом ветвями графа с коэффициентами передачи $T_2 = 1 / R_i$ и $T_3 = R_H$ соответственно. Нетрудно видеть, что оба сигнальных графа дают одно и то же значение U на нагрузке.

Хотя представленные графы содержат всего один источник, анализируя последние, можно заметить, что физическая переменная в любом зависимом узле определяется алгебраической суммой переменных только от входящих в узел ветвей. В общем случае цепь содержит несколько источников, в том числе и зависи-

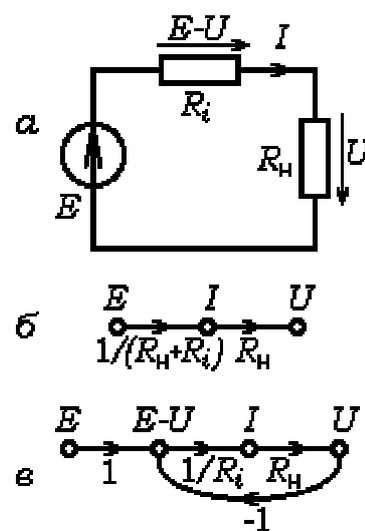


Рис. 7.12. Электрическая схема цепи (а) и ее сигнальные графы (б и в)

мых, и разветвленному сигнальному графу соответствует система алгебраических уравнений

$$x_i = \sum_k T_{ik} x_k,$$

где x_i – зависимые переменные, а среди x_k оказываются как зависимые, так и независимые переменные.

При использовании сигнальных графов исключается процедура составления уравнений, а реакции на известные воздействия определяются по правилам, установленным для направленных сигнальных графов. Существует два способа упрощения графа: последовательное исключение смешанных узлов, представляющих стоки одних и истоки других переменных и вычисление передачи по формуле Мэзона.

Правила упрощения сигнальных графов основываются на использовании структурных свойств их уравнений. На рис. 7.13 показано объединение одинаково направленных (a , b , $в$) и противоположно направленных ($г$) ветвей. В последнем случае контур преобразуется в петлю, а затем исключается и петля. Менее распространено правило расщепления узлов и инверсии отдельных ветвей. Отметим, что правила упрощения чаще всего необратимы, так что обратное преобразование отсутствует.

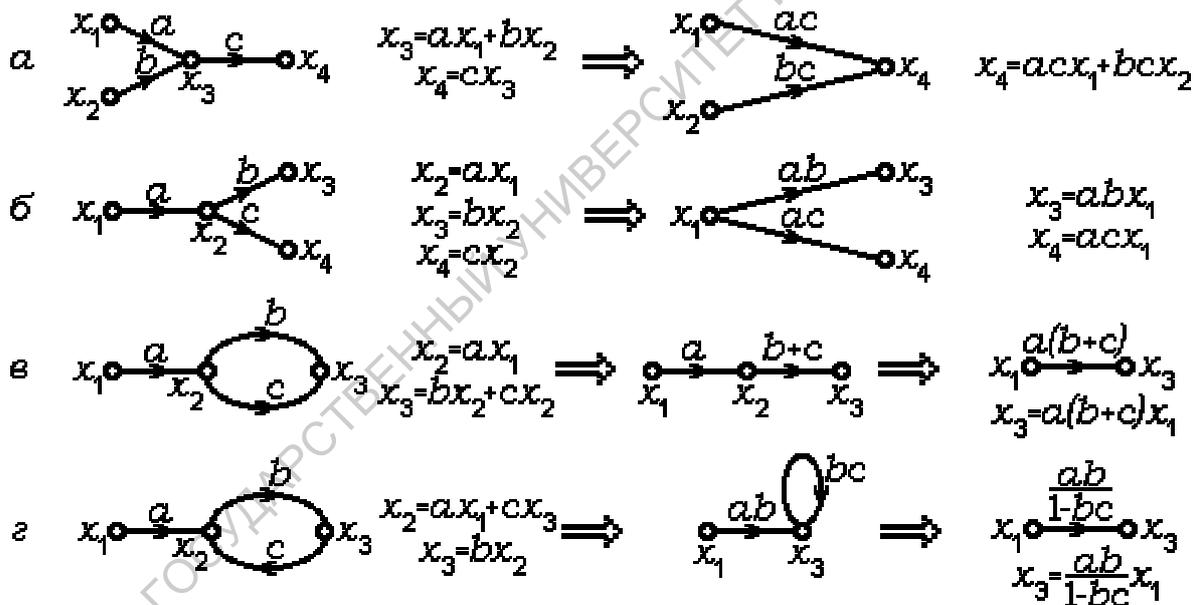


Рис. 7.13. Упрощение сигнальных графов: исключение смешанных узлов (a , $б$), объединение параллельных ветвей и устранение смешанного узла ($в$), преобразование контура в петлю и исключение петли ($г$)

При разрешении графа по формуле Мэзона (7.24) *передаточная функция* или *передача* цепи \mathbf{T} от узла источника к узлу искомой зависимой переменной описывается тем же соотношением, которое использовалось в методе топологических графов, но методы вычисления определителя цепи и алгебраических дополнений изменяются. Каждый путь передачи от узла источника к узлу стока представляет направленную последовательность ветвей, причем величина пути передачи определяется произведением передач его ветвей, а разные пути отличаются наличием хотя бы одного нового узла.

Определитель сигнального графа вычисляется по формуле

$$\Delta = \left[\prod_n (1 - L_n) \right]^* , \quad (7.27)$$

где L_n – передача n -го контура, т.е. произведение передач ветвей, образующих контур, а символ * указывает на необходимость исключить все произведения передач касающихся контуров.

Алгебраическим дополнением i -го пути передачи Δ_i является определитель цепи, остающийся после исключения контуров, касающихся пути передачи:

$$\Delta_i = \left[\prod_n (1 - L_n) \right]^{**} ,$$

где первый символ * указывает на необходимость исключить произведения передач касающихся контуров, а второй символ * – на необходимость удалить передачи контуров, касающихся i -го пути передачи. Таким образом, формула Мэсона для сигнальных графов принимает вид

$$\dot{\mathbf{T}} = \frac{\sum_i T_i [\prod_n (1 - L_n)]^{**}}{[\prod_n (1 - L_n)]^*} . \quad (7.28)$$

Использование (7.28) детально рассмотрено в 7.3.4 и 7.3.5.

Отметим, что метод сигнальных графов удобен не только при описании радиоэлектронных цепей и радиосистем с неизвестной структурой, но и при решении систем линейных алгебраических уравнений.

Наряду с методами топологических и сигнальных графов расчет цепей можно выполнить классическими методами контурных токов и узловых напряжений. Построения контурных и узловых уравнений отличаются простотой и наглядностью, но итоговые математические модели в виде матричных уравнений начиная с третьего-четвертого порядка оказываются громоздкими. Расчет значительно упрощается при использовании топологических и сигнальных графов.

7.3.4. Метод контурных токов

Метод контурных токов представляет совокупность процедур, позволяющих определять токи во всех элементах электрической схемы путем решения уравнений только для главных контуров.

Обратимся к электрической схеме, показанной на рис. 7.11,а. Она содержит четыре узла, восемь ветвей, в том числе ветви источников гармонического напряжения \dot{E} и гармонического тока \dot{J} .

Дерево графа (см. рис. 7.11,б, жирные линии) содержит три ребра. Дерево может быть иным, но число ребер при этом не изменится. Количество контуров определяется числом связей и равно пяти. Число связей можно уменьшить путем преобразования реальных источников тока⁸ в источники напряжения.

⁸ Если одна из ветвей цепи содержит идеализированный источник тока, т.е. внутренняя проводимость источника G_i отсутствует, то данная ветвь графа принимается за связь с известным значением контурного тока, и число контурных уравнений уменьшается на единицу.

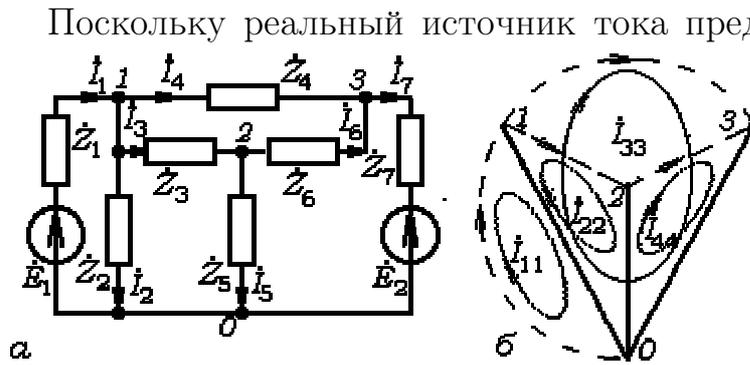


Рис. 7.14. Электрическая схема цепи с источниками напряжения (а) и ее топологический граф (б)

Поскольку реальный источник тока представляет параллельное соединение двух ветвей, а реальный источник напряжения – последовательное соединение источника ЭДС и сопротивления (см. 7.2.4), преобразование каждого реального источника тока в источник напряжения приводит к уменьшению числа связей на единицу. Электрическая схема преобразованной цепи (новый источник напряжения обозначен \dot{E}_2) и ее граф изображены на рис. 7.14, а, б соответственно. Теперь схема содержит четыре связи (рис. 7.14, б, пунктирные линии) и, следовательно, четыре независимых контура.

Используя второй закон Кирхгофа и учитывая направление ЭДС относительно выбранных направлений токов, запишем четыре контурных уравнения

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 \dot{I}_1 + \dot{Z}_2 \dot{I}_2 &= \dot{E}_1, \\ -\dot{Z}_2 \dot{I}_2 + \dot{Z}_3 \dot{I}_3 + \dot{Z}_5 \dot{I}_5 &= 0, \\ -\dot{Z}_2 \dot{I}_2 + \dot{Z}_4 \dot{I}_4 + \dot{Z}_7 \dot{I}_7 &= -\dot{E}_2, \\ -\dot{Z}_5 \dot{I}_5 + \dot{Z}_6 \dot{I}_6 + \dot{Z}_7 \dot{I}_7 &= -\dot{E}_2. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Если токи в связях принять за контурные и обозначить их символами \dot{I}_{11} , \dot{I}_{22} , \dot{I}_{33} , \dot{I}_{44} , то контурные уравнения (7.29) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{11} \dot{I}_{11} - \dot{Z}_{12} \dot{I}_{22} - \dot{Z}_{13} \dot{I}_{33} &= \dot{E}_1, \\ -\dot{Z}_{21} \dot{I}_{11} + \dot{Z}_{22} \dot{I}_{22} + \dot{Z}_{23} \dot{I}_{33} - \dot{Z}_{24} \dot{I}_{44} &= 0, \\ -\dot{Z}_{31} \dot{I}_{11} + \dot{Z}_{32} \dot{I}_{22} + \dot{Z}_{33} \dot{I}_{33} + \dot{Z}_{34} \dot{I}_{44} &= -\dot{E}_2, \\ -\dot{Z}_{42} \dot{I}_{22} + \dot{Z}_{43} \dot{I}_{33} + \dot{Z}_{44} \dot{I}_{44} &= -\dot{E}_2, \end{aligned} \quad (7.30)$$

где $\dot{Z}_{11} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2$, $\dot{Z}_{22} = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \dot{Z}_5$, $\dot{Z}_{33} = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_4 + \dot{Z}_7$, $\dot{Z}_{44} = \dot{Z}_5 + \dot{Z}_6 + \dot{Z}_7$ – собственные сопротивления соответствующих контуров, $\dot{Z}_{ij} = \dot{Z}_{ji}$ – взаимные сопротивления i -го и j -го контуров. Взаимные сопротивления положительны, когда направления i -го и j -го контурных токов совпадают.

Искомые токи в остальных ветвях графа представляют алгебраические суммы контурных токов. Так, в ветви дерева, соединяющей первый узел с нулевым, одновременно протекают три, а в остальных ветвях – по два контурных тока. С учетом их направлений имеем

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{11} - \dot{I}_{22} - \dot{I}_{33}, \quad \dot{I}_5 = \dot{I}_{22} - \dot{I}_{44}, \quad \dot{I}_7 = \dot{I}_{33} + \dot{I}_{44}.$$

В общем случае схема может содержать большое число контуров, и контурные уравнения целесообразно записывать в матричной форме:

$$\|\dot{\mathbf{Z}}\| \|\dot{\mathbf{I}}\| = \|\dot{\mathbf{E}}\|,$$

где $\|\dot{\mathbf{Z}}\|$ – квадратная матрица, составленная из собственных и взаимных сопротивлений контуров; $|\dot{\mathbf{I}}|$ и $|\dot{\mathbf{E}}|$ – столбцевые матрицы контурных токов и источников напряжения соответственно.

Итак, для определения токов и напряжений в элементах цепи вместо восьми уравнений Кирхгофа достаточно разрешить всего четыре контурных уравнения, и объем проводимых вычислений значительно сокращается. Систему уравнений (7.30) можно представить сигнальным графом (рис. 7.15). Для этого выразим в каждом из уравнений (7.30) ток \dot{I}_{ii} в виде линейной комбинации остальных переменных:

$$\begin{aligned}\dot{I}_{11} &= \frac{1}{\dot{Z}_{11}}\dot{E}_1 + \frac{\dot{Z}_{12}}{\dot{Z}_{11}}\dot{I}_{22} + \frac{\dot{Z}_{13}}{\dot{Z}_{11}}\dot{I}_{33}, \\ \dot{I}_{22} &= \frac{\dot{Z}_{12}}{\dot{Z}_{22}}\dot{I}_{11} - \frac{\dot{Z}_{23}}{\dot{Z}_{22}}\dot{I}_{33} + \frac{\dot{Z}_{24}}{\dot{Z}_{22}}\dot{I}_{44}, \\ \dot{I}_{33} &= -\frac{1}{\dot{Z}_{33}}\dot{E}_2 + \frac{\dot{Z}_{13}}{\dot{Z}_{33}}\dot{I}_{11} - \frac{\dot{Z}_{23}}{\dot{Z}_{33}}\dot{I}_{22} - \frac{\dot{Z}_{34}}{\dot{Z}_{33}}\dot{I}_{44}, \\ \dot{I}_{44} &= -\frac{1}{\dot{Z}_{44}}\dot{E}_2 + \frac{\dot{Z}_{24}}{\dot{Z}_{44}}\dot{I}_{22} - \frac{\dot{Z}_{34}}{\dot{Z}_{44}}\dot{I}_{33}.\end{aligned}\quad (7.31)$$

Так как численные значения определителя графа, путей передачи и их алгебраических дополнений в формуле Мэсона (7.28) определяются величинами проводимостей, в (7.31) следует преобразовать сопротивления \dot{Z}_{ij} в соответствующие проводимости $\dot{Y}_{ij} = 1/\dot{Z}_{ij}$. Тогда получим

$$\begin{aligned}\dot{I}_{11} &= \dot{Y}_{11}\dot{E}_1 + \frac{\dot{Y}_{11}}{\dot{Y}_{12}}\dot{I}_{22} + \frac{\dot{Y}_{11}}{\dot{Y}_{13}}\dot{I}_{33}, \\ \dot{I}_{22} &= \frac{\dot{Y}_{22}}{\dot{Y}_{12}}\dot{I}_{11} - \frac{\dot{Y}_{22}}{\dot{Y}_{23}}\dot{I}_{33} + \frac{\dot{Y}_{22}}{\dot{Y}_{24}}\dot{I}_{44}, \\ \dot{I}_{33} &= -\dot{Y}_{33}\dot{E}_2 + \frac{\dot{Y}_{33}}{\dot{Y}_{13}}\dot{I}_{11} - \frac{\dot{Y}_{33}}{\dot{Y}_{23}}\dot{I}_{22} - \frac{\dot{Y}_{33}}{\dot{Y}_{34}}\dot{I}_{44}, \\ \dot{I}_{44} &= -\dot{Y}_{44}\dot{E}_2 + \frac{\dot{Y}_{44}}{\dot{Y}_{24}}\dot{I}_{22} - \frac{\dot{Y}_{44}}{\dot{Y}_{34}}\dot{I}_{33}.\end{aligned}\quad (7.32)$$

Используя систему уравнений (7.32) и формулу Мэсона (7.28), построим аналитическое выражение контурного тока \dot{I}_{11} .

Сигнальный граф (рис. 7.15) содержит девять контуров:

$$\begin{aligned}\dot{L}_1 &= \frac{\dot{Y}_{11}\dot{Y}_{22}}{\dot{Y}_{12}^2}, \quad \dot{L}_2 = \frac{\dot{Y}_{22}\dot{Y}_{33}}{\dot{Y}_{23}^2}, \quad \dot{L}_3 = \frac{\dot{Y}_{11}\dot{Y}_{33}}{\dot{Y}_{13}^2}, \quad \dot{L}_4 = \frac{\dot{Y}_{33}\dot{Y}_{44}}{\dot{Y}_{34}^2}, \quad \dot{L}_5 = \frac{\dot{Y}_{22}\dot{Y}_{44}}{\dot{Y}_{24}^2}, \\ \dot{L}_6 &= -\frac{\dot{Y}_{22}\dot{Y}_{33}\dot{Y}_{11}}{\dot{Y}_{12}\dot{Y}_{23}\dot{Y}_{13}}, \quad \dot{L}_7 = -\frac{\dot{Y}_{11}\dot{Y}_{22}\dot{Y}_{33}}{\dot{Y}_{12}\dot{Y}_{23}\dot{Y}_{13}}, \quad \dot{L}_8 = -\frac{\dot{Y}_{33}\dot{Y}_{44}\dot{Y}_{22}}{\dot{Y}_{23}\dot{Y}_{34}\dot{Y}_{24}}, \quad \dot{L}_9 = -\frac{\dot{Y}_{44}\dot{Y}_{33}\dot{Y}_{22}}{\dot{Y}_{24}\dot{Y}_{34}\dot{Y}_{23}}.\end{aligned}$$

Из них только \dot{L}_1 и \dot{L}_4 не касаются друг друга, поэтому определитель графа описывается выражением

$$\dot{\Delta} = 1 - \dot{L}_1 - \dot{L}_2 - \dot{L}_3 - \dot{L}_4 - \dot{L}_5 - \dot{L}_6 - \dot{L}_7 - \dot{L}_8 - \dot{L}_9 + \dot{L}_1\dot{L}_4.$$

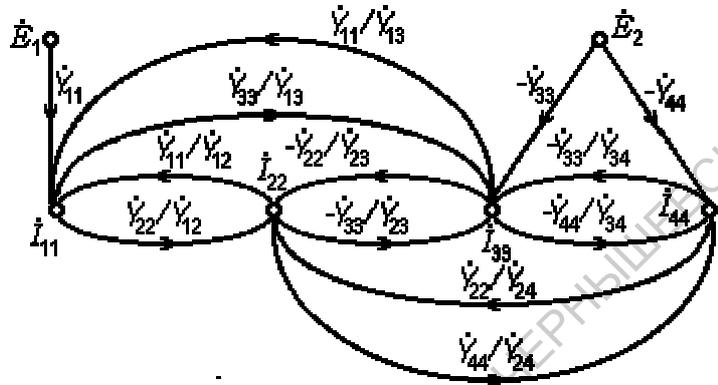


Рис. 7.15. Сигнальный граф радиоэлектронной цепи, представленной на рис. 7.14, а

От истока \dot{E}_1 к узлу \dot{I}_{11} ведет единственный путь $\dot{T}_{11} = \dot{Y}_{11}$. Его алгебраическое дополнение получается вычеркиванием из определителя контуров $\dot{L}_1, \dot{L}_3, \dot{L}_6$ и \dot{L}_7 , касающихся пути \dot{T}_{11} , т.е.

$$\dot{\Delta}_{11} = 1 - \dot{L}_2 - \dot{L}_4 - \dot{L}_5 - \dot{L}_8 - \dot{L}_9.$$

От истока \dot{E}_2 к узлу \dot{I}_{11} ведут шесть путей:

$$\dot{T}_{21} = -\dot{Y}_{33} \frac{\dot{Y}_{11}}{\dot{Y}_{13}}, \quad \dot{T}_{22} = \dot{Y}_{33} \frac{\dot{Y}_{22} \dot{Y}_{11}}{\dot{Y}_{23} \dot{Y}_{12}}, \quad \dot{T}_{23} = \dot{Y}_{33} \frac{\dot{Y}_{44} \dot{Y}_{22} \dot{Y}_{11}}{\dot{Y}_{34} \dot{Y}_{24} \dot{Y}_{12}},$$

$$\dot{T}_{24} = -\dot{Y}_{44} \frac{\dot{Y}_{33} \dot{Y}_{22} \dot{Y}_{11}}{\dot{Y}_{34} \dot{Y}_{23} \dot{Y}_{12}}, \quad \dot{T}_{25} = -\dot{Y}_{44} \frac{\dot{Y}_{22} \dot{Y}_{11}}{\dot{Y}_{24} \dot{Y}_{12}}, \quad \dot{T}_{26} = \dot{Y}_{44} \frac{\dot{Y}_{33} \dot{Y}_{11}}{\dot{Y}_{34} \dot{Y}_{13}}.$$

Их алгебраические дополнения соответственно равны

$$\dot{\Delta}_{21} = 1 - \dot{L}_5, \quad \dot{\Delta}_{22} = \dot{\Delta}_{23} = \dot{\Delta}_{24} = \dot{\Delta}_{25} = \dot{\Delta}_{26} = 1.$$

Тогда

$$\dot{I}_{11} = \frac{1}{\dot{\Delta}} \left[\dot{E}_1 \dot{Y}_{11} \dot{\Delta}_{11} + \dot{E}_2 [\dot{T}_{21} (1 - \dot{L}_5) + \dot{T}_{22} + \dot{T}_{23} + \dot{T}_{24} + \dot{T}_{25} + \dot{T}_{26}] \right]. \quad (7.33)$$

Аналогично вычисляются остальные контурные токи. Вычисление контурных токов по формулам вида (7.33) проще, чем путем решения системы уравнений даже невысокого (четвертого) порядка.

7.3.5. Метод узловых напряжений

Метод узловых напряжений представляет совокупность процедур, позволяющих рассчитать напряжения на элементах электрической схемы, разрешая уравнения, записанные только для главных сечений.

Обратимся к электрической схеме, представленной на рис. 7.11,а. Ее дерево графа (рис. 7.11,б) содержит три ребра, соединяющие узлы с номерами 1, 2, 3 с базовым узлом 0. Посторим три главных сечения, окружая узлы с номерами 1, 2, 3 замкнутыми линиями, и обозначим независимые узловые напряжения на ребрах графа через $\dot{U}_{01}, \dot{U}_{02}, \dot{U}_{03}$.

При составлении узловых уравнений источники напряжения целесообразно преобразовать в эквивалентные источники тока, а для пассивных элементов ввести комплексные проводимости $\dot{Y}_i = 1/\dot{Z}_i$, т.е. использовать дуально эквивалентные элементы. Тогда электрическая схема принимает вид, показанный на рис.

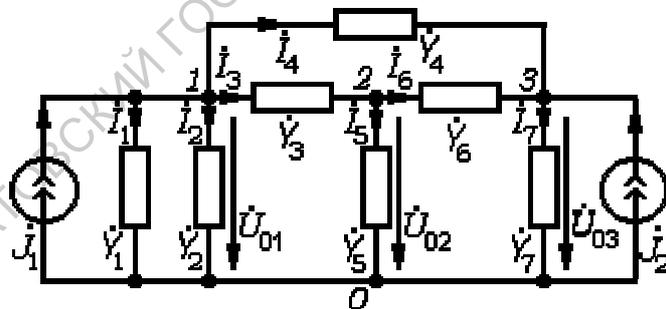


Рис. 7.16. Электрическая схема цепи с источниками тока, эквивалентная цепи на рис. 7.14,а

$$\dot{I}_1 = \dot{Y}_1 \dot{U}_{01}, \quad \dot{I}_2 = \dot{Y}_2 \dot{U}_{01}, \quad \dot{I}_3 = \dot{Y}_3 (\dot{U}_{01} - \dot{U}_{02}), \quad \dot{I}_4 = \dot{Y}_4 (\dot{U}_{01} - \dot{U}_{03}),$$

$$\dot{I}_5 = \dot{Y}_5 \dot{U}_{02}, \quad \dot{I}_6 = \dot{Y}_6 (\dot{U}_{02} - \dot{U}_{03}), \quad \dot{I}_7 = \dot{Y}_7 \dot{U}_{03}. \quad (7.34)$$

образно преобразовать в эквивалентные источники тока, а для пассивных элементов ввести комплексные проводимости $\dot{Y}_i = 1/\dot{Z}_i$, т.е. использовать дуально эквивалентные элементы. Тогда электрическая схема принимает вид, показанный на рис. 7.16, а токи в ветвях удовлетворяют соотношениям

Используя (7.34), можно записать уравнения Кирхгофа для токов в узлах 1, 2 и 3 в виде

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{I}_4 &= \dot{Y}_1 \dot{U}_{01} + \dot{Y}_2 \dot{U}_{01} + \dot{Y}_3(\dot{U}_{01} - \dot{U}_{02}) + \dot{Y}_4(\dot{U}_{01} - \dot{U}_{03}) = \dot{J}_1, \\ \dot{I}_3 - \dot{I}_5 - \dot{I}_6 &= \dot{Y}_3(\dot{U}_{01} - \dot{U}_{02}) - \dot{Y}_5 \dot{U}_{02} - \dot{Y}_6(\dot{U}_{02} - \dot{U}_{03}) = 0, \\ -\dot{I}_4 - \dot{I}_6 + \dot{I}_7 &= -\dot{Y}_4(\dot{U}_{01} - \dot{U}_{03}) - \dot{Y}_6(\dot{U}_{02} - \dot{U}_{03}) + \dot{Y}_7 \dot{U}_{03} = \dot{J}_2. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Таким образом, при расчете цепи (рис. 7.11,а) методом узловых напряжений вместо восьми уравнений Кирхгофа или четырех контурных уравнений достаточно разрешить всего три узловых уравнения.

Уравнения (7.35) принимают более компактный вид, если ввести собственные проводимости узлов \dot{Y}_{ii} и междуузловые проводимости \dot{Y}_{ij} . Тогда

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{11} \dot{U}_{01} - \dot{Y}_{12} \dot{U}_{02} - \dot{Y}_{13} \dot{U}_{03} &= \dot{J}_1, \\ -\dot{Y}_{21} \dot{U}_{01} + \dot{Y}_{22} \dot{U}_{02} - \dot{Y}_{23} \dot{U}_{03} &= 0, \\ -\dot{Y}_{31} \dot{U}_{01} - \dot{Y}_{32} \dot{U}_{02} + \dot{Y}_{33} \dot{U}_{03} &= \dot{J}_2, \end{aligned} \quad (7.36)$$

где $\dot{Y}_{11} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 + \dot{Y}_4$, $\dot{Y}_{22} = \dot{Y}_3 + \dot{Y}_5 + \dot{Y}_6$, $\dot{Y}_{33} = \dot{Y}_4 + \dot{Y}_6 + \dot{Y}_7$ – собственные проводимости соответствующих узлов; $\dot{Y}_{ij} = \dot{Y}_{ji}$ – проводимости, включенные между i и j узлами. Междуузловые проводимости имеют знак минус, когда i -е и j -е узловые напряжения направлены к опорному узлу или от него, и знак плюс, если одно из них направлено к опорному узлу, а другое от него.

В общем случае дерево графа содержит большое число ветвей, и узловые уравнения целесообразно записывать в матричной форме:

$$\|\dot{\mathbf{Y}}\| |\dot{\mathbf{U}}| = |\dot{\mathbf{J}}|,$$

где $\|\dot{\mathbf{Y}}\|$ – квадратная матрица, составленная из собственных и междуузловых проводимостей; $|\dot{\mathbf{U}}|$ и $|\dot{\mathbf{J}}|$ – столбцовые матрицы узловых напряжений и источников тока соответственно. Воспользуемся электрической схемой (рис. 7.16) для иллюстрации возможностей методов топологических и сигнальных графов.

Расчет цепи (рис. 7.16) методом топологических графов. Получим аналитическое выражение узлового напряжения \dot{U}_{02} . Для этого поочередно по формуле (7.26) вычислим две передачи цепи $\dot{\mathbf{T}}_1 = \dot{U}_{02}/\dot{J}_1$ и $\dot{\mathbf{T}}_2 = \dot{U}_{02}/\dot{J}_2$, а затем рассмотрим $\dot{U}_{02} = \dot{\mathbf{T}}_1 \dot{J}_1 + \dot{\mathbf{T}}_2 \dot{J}_2$. Начнем с определителя топологического графа.

Будем искать $\dot{\Delta}$ в виде разложения по узловой паре с номерами 2 и 0. Существуют пять путей, соединяющих эти узлы:

$$\dot{P}_1 = \dot{Y}_5, \dot{P}_2 = \dot{Y}_3(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2), \dot{P}_3 = \dot{Y}_6 \dot{Y}_7, \dot{P}_4 = \dot{Y}_3 \dot{Y}_4 \dot{Y}_7, \dot{P}_5 = \dot{Y}_4 \dot{Y}_6(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2).$$

При вычислении алгебраического дополнения первого пути закорачивается \dot{P}_1 , и топологический граф принимает вид, представленный на рис. 7.17. Его определитель, (т.е. алгебраическое дополнение $\dot{\Delta}'_1$) получим путем разложения по узловой паре с номерами 1 и 0. Здесь существуют два пути $\dot{P}'_1 = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3$, $\dot{P}'_2 = \dot{Y}_4(\dot{Y}_6 + \dot{Y}_7)$.

Их алгебраические дополнения получаются при закорачивании путей и соответственно равны $\dot{\Delta}_1'' = \dot{Y}_4 + \dot{Y}_6 + \dot{Y}_7$, $\dot{\Delta}_2'' = 1$. Тогда

$$\dot{\Delta}'_1 = \dot{P}'_1 \dot{\Delta}_1'' + \dot{P}'_2 \dot{\Delta}_2'' = (\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3)(\dot{Y}_4 + \dot{Y}_6 + \dot{Y}_7) + \dot{Y}_4(\dot{Y}_6 + \dot{Y}_7).$$

При вычислении алгебраического дополнения второго пути закорачивается \dot{P}_2 . Тогда узлы 1 и 2 стягиваются к узлу 0, а оставшийся подграф представляет

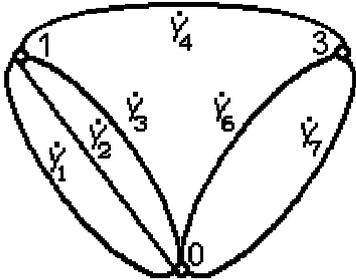


Рис. 7.17.
Топологический граф цепи (рис. 7.16)

параллельное соединение трех проводимостей, т.е. $\dot{\Delta}'_2 = \dot{Y}_4 + \dot{Y}_6 + \dot{Y}_7$. Алгебраическое дополнение третьего пути оказывается параллельным соединением четырех проводимостей, т.е. $\dot{\Delta}'_3 = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 + \dot{Y}_4$, а алгебраические дополнения двух последних путей имеют единичную величину, так как подграфы, оставшиеся после закорачивания четвертого и пятого путей, стягиваются в точку. В соответствии с (7.25)

величина определителя удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \dot{\Delta} &= \dot{P}_1 \dot{\Delta}'_1 + \dot{P}_2 \dot{\Delta}'_2 + \dot{P}_3 \dot{\Delta}'_3 + \dot{P}_4 \dot{\Delta}'_4 + \dot{P}_5 \dot{\Delta}'_5 = \\ &= \dot{Y}_5(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3)(\dot{Y}_4 + \dot{Y}_6 + \dot{Y}_7) + \dot{Y}_4 \dot{Y}_5(\dot{Y}_6 + \dot{Y}_7) + \dot{Y}_3(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2)(\dot{Y}_4 + \dot{Y}_6 + \dot{Y}_7) + \\ &\quad + \dot{Y}_6 \dot{Y}_7(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 + \dot{Y}_4) + \dot{Y}_3 \dot{Y}_4 \dot{Y}_7 + \dot{Y}_4 + \dot{Y}_6(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2) = \\ &= \dot{Y}_{11} \dot{Y}_{22} \dot{Y}_{33} - 2\dot{Y}_{12} \dot{Y}_{13} \dot{Y}_{23} - \dot{Y}_{12}^2 \dot{Y}_{33} - \dot{Y}_{23}^2 \dot{Y}_{11} - \dot{Y}_{13}^2 \dot{Y}_{22}. \end{aligned} \quad (7.37)$$

От источника \dot{J}_1 к вольтметру, включенному параллельно \dot{Y}_5 , ведут два пути передачи $\dot{\mathbf{T}}'_1 = \dot{Y}_3$ и $\dot{\mathbf{T}}''_1 = \dot{Y}_4 \dot{Y}_6$ (проводимость вольтметра принята равной единице). Алгебраическое дополнение первого пути (подграф, остающийся после закорачивания \dot{Y}_3 и вольтметра) представляет параллельное соединение трех проводимостей \dot{Y}_4 , \dot{Y}_6 и \dot{Y}_7 , а при закорачивании второго пути подграф стягивается в точку и его алгебраическое дополнение равно единице. В итоге передача

$$\dot{\mathbf{T}}_1 = \frac{\dot{U}_{02}}{\dot{J}_1} = \frac{\dot{Y}_3(\dot{Y}_4 + \dot{Y}_6 + \dot{Y}_7) + \dot{Y}_4 \dot{Y}_6}{\dot{\Delta}} = \frac{\dot{Y}_{12} \dot{Y}_{33} + \dot{Y}_{13} \dot{Y}_{23}}{\dot{\Delta}}.$$

Аналогичным образом вычисляется передача от второго источника \dot{J}_2

$$\dot{\mathbf{T}}_2 = \frac{\dot{U}_{02}}{\dot{J}_2} = \frac{\dot{Y}_6(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 + \dot{Y}_4) + \dot{Y}_3 \dot{Y}_4}{\dot{\Delta}} = \frac{\dot{Y}_{12} \dot{Y}_{13} + \dot{Y}_{11} \dot{Y}_{23}}{\dot{\Delta}}.$$

Результирующее выражение узлового напряжения \dot{U}_{02} принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{U}_{02} &= \frac{1}{\dot{\Delta}} \left[(\dot{Y}_{12} \dot{Y}_{33} + \dot{Y}_{13} \dot{Y}_{23}) \dot{J}_1 + (\dot{Y}_{11} \dot{Y}_{23} + \dot{Y}_{12} \dot{Y}_{13}) \dot{J}_2 \right] = \\ &= \frac{(\dot{Y}_{13} \dot{Y}_{23} + \dot{Y}_{12} \dot{Y}_{33}) \dot{J}_1 + (\dot{Y}_{13} \dot{Y}_{12} + \dot{Y}_{11} \dot{Y}_{23}) \dot{J}_2}{\dot{Y}_{11} \dot{Y}_{22} \dot{Y}_{33} - 2\dot{Y}_{12} \dot{Y}_{13} \dot{Y}_{23} - \dot{Y}_{12}^2 \dot{Y}_{33} - \dot{Y}_{23}^2 \dot{Y}_{11} - \dot{Y}_{13}^2 \dot{Y}_{22}}. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Аналогично вычисляются узловые напряжения \dot{U}_{01} и \dot{U}_{03} .

Решение уравнений (7.36) методом сигнальных графов. Представим уравнения (7.36) в виде

$$\begin{aligned} \dot{U}_{01} &= \frac{1}{\dot{Y}_{11}} \dot{J}_1 + \frac{\dot{Y}_{12}}{\dot{Y}_{11}} \dot{U}_{02} + \frac{\dot{Y}_{13}}{\dot{Y}_{11}} \dot{U}_{03}, \\ \dot{U}_{02} &= \frac{\dot{Y}_{12}}{\dot{Y}_{22}} \dot{U}_{01} + \frac{\dot{Y}_{23}}{\dot{Y}_{22}} \dot{U}_{03}, \\ \dot{U}_{03} &= \frac{1}{\dot{Y}_{33}} \dot{J}_2 + \frac{\dot{Y}_{13}}{\dot{Y}_{33}} \dot{U}_{01} + \frac{\dot{Y}_{23}}{\dot{Y}_{33}} \dot{U}_{02} \end{aligned} \quad (7.39)$$

и построим соответствующий сигнальный граф (рис. 7.18). Аналитическое выражение узлового напряжения \dot{U}_{02} будем находить по формуле Мэсона (7.28). Начнем с определителя сигнального графа.

Сигнальный граф (рис. 7.18) содержит пять контуров:

$$\begin{aligned} \dot{L}_1 &= \frac{\dot{Y}_{12}^2}{\dot{Y}_{11}\dot{Y}_{22}}, \quad \dot{L}_2 = \frac{\dot{Y}_{23}^2}{\dot{Y}_{22}\dot{Y}_{33}}, \\ \dot{L}_3 &= \frac{\dot{Y}_{13}^2}{\dot{Y}_{11}\dot{Y}_{33}}, \quad \dot{L}_4 = \frac{\dot{Y}_{12}\dot{Y}_{13}\dot{Y}_{23}}{\dot{Y}_{22}\dot{Y}_{11}\dot{Y}_{33}}, \\ \dot{L}_5 &= (\dot{Y}_{12}\dot{Y}_{13}\dot{Y}_{23})/(\dot{Y}_{11}\dot{Y}_{33}\dot{Y}_{22}). \end{aligned}$$

Все контуры касаются друг друга, поэтому определитель графа описывается выражением

$$\begin{aligned} \dot{\Delta} &= 1 - \dot{L}_1 - \dot{L}_2 - \dot{L}_3 - \dot{L}_4 - \dot{L}_5 = \\ &= 1 - \frac{\dot{Y}_{12}^2}{\dot{Y}_{11}\dot{Y}_{22}} - \frac{\dot{Y}_{23}^2}{\dot{Y}_{22}\dot{Y}_{33}} - \frac{\dot{Y}_{13}^2}{\dot{Y}_{11}\dot{Y}_{33}} - \frac{\dot{Y}_{12}\dot{Y}_{13}\dot{Y}_{23}}{\dot{Y}_{22}\dot{Y}_{11}\dot{Y}_{33}} - \frac{\dot{Y}_{12}\dot{Y}_{13}\dot{Y}_{23}}{\dot{Y}_{11}\dot{Y}_{33}\dot{Y}_{22}} = \\ &= \frac{\dot{Y}_{11}\dot{Y}_{22}\dot{Y}_{33} - 2\dot{Y}_{12}\dot{Y}_{13}\dot{Y}_{23} - \dot{Y}_{12}^2\dot{Y}_{33} - \dot{Y}_{23}^2\dot{Y}_{11} - \dot{Y}_{13}^2\dot{Y}_{22}}{\dot{Y}_{11}\dot{Y}_{22}\dot{Y}_{33}}. \end{aligned}$$

От истока \dot{J}_1 к узлу \dot{U}_{02} ведут два пути $\dot{T}_{11} = \frac{\dot{Y}_{12}}{\dot{Y}_{11}\dot{Y}_{22}}$, $\dot{T}_{12} = \frac{\dot{Y}_{13}\dot{Y}_{23}}{\dot{Y}_{33}\dot{Y}_{22}}$, а от истока \dot{J}_2 к узлу \dot{U}_{02} — два пути $\dot{T}_{21} = \frac{\dot{Y}_{23}}{\dot{Y}_{33}\dot{Y}_{22}}$, $\dot{T}_{22} = \frac{\dot{Y}_{13}\dot{Y}_{12}}{\dot{Y}_{11}\dot{Y}_{22}}$. Так как каждый путь передачи касается всех контуров, алгебраические дополнения путей передачи равны единице, а результирующее выражение узлового напряжения \dot{U}_{02} принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{U}_{02} &= \frac{1}{\dot{\Delta}} \left[\left(\frac{\dot{Y}_{13}\dot{Y}_{23}}{\dot{Y}_{33}\dot{Y}_{22}} + \frac{\dot{Y}_{12}}{\dot{Y}_{11}\dot{Y}_{22}} \right) \dot{J}_1 + \left(\frac{\dot{Y}_{13}\dot{Y}_{12}}{\dot{Y}_{11}\dot{Y}_{22}} + \frac{\dot{Y}_{23}}{\dot{Y}_{33}\dot{Y}_{22}} \right) \dot{J}_2 \right] = \\ &= \frac{(\dot{Y}_{13}\dot{Y}_{23} + \dot{Y}_{12}\dot{Y}_{33})\dot{J}_1 + (\dot{Y}_{13}\dot{Y}_{12} + \dot{Y}_{11}\dot{Y}_{23})\dot{J}_2}{\dot{Y}_{11}\dot{Y}_{22}\dot{Y}_{33} - 2\dot{Y}_{12}\dot{Y}_{13}\dot{Y}_{23} - \dot{Y}_{12}^2\dot{Y}_{33} - \dot{Y}_{23}^2\dot{Y}_{11} - \dot{Y}_{13}^2\dot{Y}_{22}}. \end{aligned} \quad (7.40)$$

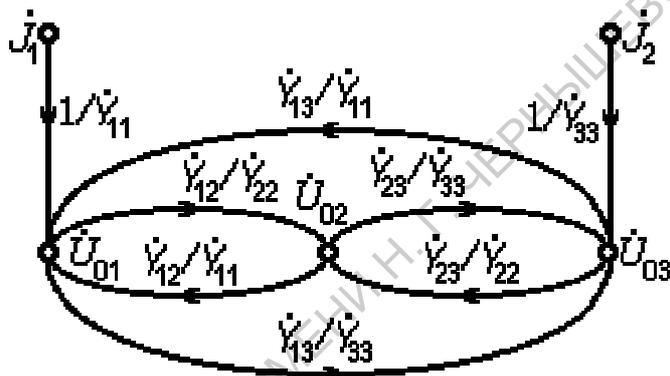


Рис. 7.18. Сигнальный граф радиоэлектронной цепи (рис. 7.16)

Аналитические выражения (7.38) и (7.40) совпадают, но способы получения заметно различаются и по математическому аппарату, и по трудоемкости. В первом случае не предполагается построение и решение системы алгебраических уравнений, а определение передач топологического графа сводится к простым арифметическим вычислениям. Во втором случае построение системы алгебраических уравнений обязательно.

Расчеты узловых напряжений методами топологических и сигнальных графов проще, чем по формулам (7.35), так как не требуют вычислений матриц высокого порядка.

7.3.6. Особенности применения методов контурных токов и узловых напряжений

Не существует явных преимуществ одного метода перед другим, и целесообразность их применения определяется структурой топологического графа. Более того, используя принцип дуальности, для любой линейной цепи можно построить такую дуальную цепь [11], чтобы изменения контурных токов в одной из них и узловых напряжений в другой описывались одинаковыми системами уравнений. Построенные выше системы контурных и узловых уравнений, хотя и описывают одну и ту же схему, но дуальными не являются. Их топология, а следовательно, и сферы применения, заметно различаются. .

1. Если число связей меньше числа независимых узлов, то количество контурных уравнений меньше, чем узловых, и метод контурных токов предпочтительнее.

2. В методе контурных токов все реальные источники тока трансформируются в источники напряжения, а ветви идеализированных источников тока выбираются в качестве связей с известными значениями контурных токов, что позволяет существенно сократить число контурных уравнений.

3. В методе узловых напряжений все источники напряжения преобразуются в эквивалентные источники тока, а ветви с идеализированными источниками напряжения включаются в дерево графа. При этом в качестве опорного выбирается узел, к которому подключено наибольшее число источников сигналов. Решение узловых уравнений становится особенно простым, когда все источники сигналов сходятся в опорном узле.

4. Как уже отмечалось, расчет линейных цепей методами контурных токов и узловых напряжений при гармонических воздействиях удобно проводить с помощью комплексных амплитуд, полагая, что все источники сигналов имеют одинаковую частоту. В тех случаях, когда их частоты различны, используется метод суперпозиции. Задача поочередно решается для совокупности источников одной частоты, источники напряжения с другими частотами замещаются короткими замыканиями, а источники тока – разрывами. Искомое решение задачи представляется в виде суммы полученных частных решений.

5. При негармонических воздействиях контурные или узловые уравнения принимают вид операторных или интегродифференциальных уравнений и расчет усложняется.

Рассмотрим обе возможности на примере несколько упрощенной,

по сравнению с рис. 7.11,а, схемы, представленной на рис. 7.19,а и содержащей две индуктивности, емкость, три сопротивления и единственный источник напряжения. Ее топологический граф (рис. 7.19,б) имеет три контура. При произвольной форме $E_1(t)$ операторные уравнения контурных токов принимают вид

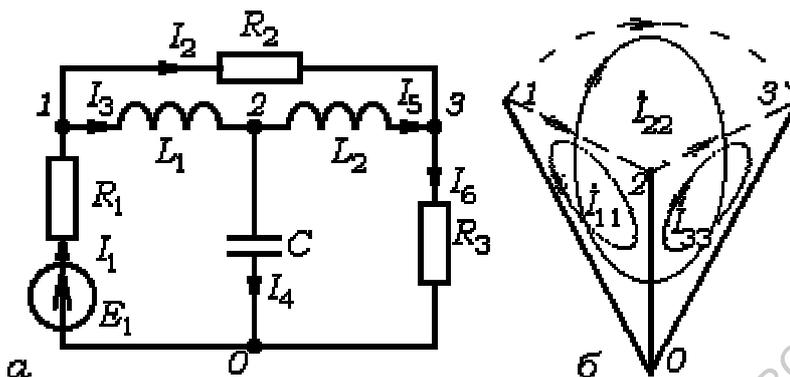


Рис. 7.19 Схема(а) и топологический граф (б) цепи

где s – комплексная частота.

$$\begin{aligned} (R_1 + sL_1 + \frac{1}{sC})I_{11}(s) + R_1I_{22}(s) - \frac{1}{sC}I_{33} &= E_1(s), \\ R_1I_{11}(s) + (R_1 + R_2 + R_3)I_{22}(s) + R_3I_{33}(s) &= E_1(s), \\ -\frac{1}{sC}I_{11}(s) + R_2I_{22}(s) + (R_3 + sL_2 + \frac{1}{sC})I_{33}(s) &= 0, \end{aligned} \quad (7.41)$$

где s – комплексная частота.

Получена система трех алгебраических уравнений, которую можно разрешить одним из известных методов, например методом сигнальных графов. Однако полученные решения будут всего лишь лапласовскими изображениями искомых функций, а для определения временных зависимостей еще необходимо выполнить процедуры обратного преобразования Лапласа.

Если емкостные и индуктивные элементы описывать дифференциальными уравнениями, то контурные уравнения превращаются в интегро-дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} R_1(I_{11} + I_{22}) + L_1 \frac{dI_{11}}{dt} + \frac{1}{C} \int (I_{11} - I_{33}) dt &= E_1(t), \\ (R_1 + R_2 + R_3)I_{22} + R_1I_{11} + R_3I_{33} &= E_1(t), \\ L_2 \frac{dI_{33}}{dt} + R_3(I_{33} + I_{22}) + \frac{1}{C} \int (I_{33} - I_{11}) dt &= 0. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Дифференцируя первое и третье уравнения (7.42), можно получить два дифференциальных уравнения второго порядка. Совместное решение такой системы уравнений оказывается еще более сложным, чем соответствующих операторных уравнений.

Подобные задачи наиболее эффективно описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, получивших название *уравнений состояния*. Они могут быть разрешены аналитически или численными методами.

7.4. Описание радиоэлектронных цепей методом переменных состояния

Состояние физической системы в произвольный момент времени полностью определяется накопленной к этому времени энергией и результатами воздействия внешних источников сигналов.

Переменные, характеризующие изменения энергии, будем называть *переменными состояниями*. В радиоэлектронике относительные изменения электрической энергии $W_э$ пропорциональны изменениям напряжения U_C на емкости $dW_э/W_э = 2dU_C/U_C$, а изменения магнитной энергии $W_м$ – изменениям тока I_L в индуктивности $dW_м/W_м = 2dI_L/I_L$ (см. 7.2, формулы (7.12) и (7.16)). Поэтому в качестве переменных состояния в радиоэлектронике чаще всего используются U_C и I_L . Скорости изменения переменных состояния являются функциями текущего состояния и величин внешних воздействий, а математическая модель принимает вид системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}_1[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)], \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{F}_2[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)],\end{aligned}\quad (7.43)$$

где $\mathbf{x}(t)$ – вектор переменных состояния (U_C, I_L); $\mathbf{u}(t)$ – вектор внешних возмущений (независимых источников напряжения и тока); $\mathbf{y}(t)$ – вектор выходных (формируемых системой) сигналов. Первое из уравнений (7.43) называется *уравнением переменных состояния*, второе – *выходным уравнением*. Область определения $\mathbf{x}(t)$ называется *пространством состояний* исследуемой системы. Метод переменных состояния оперирует с конечномерными пространствами состояний. В общем случае вектор-функции $\mathbf{F}_1[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]$ и $\mathbf{F}_2[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)]$ могут быть нелинейными.

Если заданы начальное состояние и все независимые источники, то система уравнений позволяет определить $\mathbf{y}(t)$ и $\mathbf{x}(t)$, т.е. токи и напряжения элементов цепи в любой момент времени.

Существуют различные методы построения уравнений состояния [5, 6]. Простейший способ состоит в использовании законов Кирхгофа. Поскольку переменными в контурных уравнениях являются токи в связях, а переменными в узловых уравнениях – узловые напряжения, желательно так выбирать дерево графа, чтобы в него вошли все емкости C_k , где k – номер ребра дерева, и источники напряжения (или большинство), а в связи – большая часть индуктивностей L_i (i – номер связи) и источников тока. Тогда в контурные уравнения, представляющие суммы напряжений на всех элементах контуров, входят падения напряжения на индуктивностях $L_i \frac{dI_i}{dt}$, (где I_i – величина i -го контурного тока), а в узловое уравнение – токи емкостных элементов $C_k \frac{dU_k}{dt}$ (где U_k – узловое напряжение k -го узла).

Построим уравнения состояния для линейной цепи, изображенной на рис. 7.19,а. Цепь содержит три реактивных элемента и, следовательно, описывается тремя переменными состояниями. Пусть искомым выходным сигналом является ток I_2 . Тогда математическая модель должна содержать четыре уравнения. Это могут быть контурные и узловое уравнения. Используем все (три) контурные уравнения и узловое уравнение для 2-го узла.

Обозначая $I_3 = I_{L1}$ и $I_5 = I_{L2}$ через x_1 и x_2 , а U_C через x_3 , получим:

$$\begin{aligned}L_1 \frac{dx_1}{dt} + R_1 x_1 + R_1 I_2 + x_3 &= E_1, \\ R_1 x_1 + R_3 x_2 + (R_1 + R_2 + R_3) I_2 &= E_1, \\ L_2 \frac{dx_2}{dt} + R_3 x_2 + R_3 I_2 - x_3 &= 0, \\ C \frac{dx_3}{dt} + x_2 - x_1 &= 0.\end{aligned}\quad (7.44)$$

Полная система уравнений в нормальной форме имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{A}{L_1} [(R_2 + R_3)(E_1 - R_1x_1) + R_1R_3x_2] - \frac{x_3}{L_1}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{A}{L_2} [R_1R_3x_1 - R_3E_1 + (R_1 + R_2)R_3x_2] + \frac{x_3}{L_2}, \\ \frac{dx_3}{dt} &= \frac{1}{C}(x_1 - x_2), \\ I_2 &= A[E_1 - R_1x_1 - R_3x_2], \end{aligned} \quad (7.45)$$

где $A = 1/(R_1 + R_2 + R_3)$. Левые части первых трех уравнений содержат только производные переменных состояния, а правые части представляют алгебраические выражения от переменных состояния и входных возмущений. Решения уравнений состояния полностью определяют динамику системы и временные функции откликов. Здесь интересны два частных случая.

1. Задано лишь начальное состояние системы, а источники возбуждения отсутствуют. Результатом анализа являются не только выходной сигнал и связанные с ним колебания, но и динамика элементов, запаасающих энергию и определяющих эти колебания, т.е. полное описание физических процессов в системе.

2. Заданы независимые источники сигналов при нулевом начальном состоянии. Метод опять дает полную информацию о поведении цепи, причем в дополнение к вектору выходных сигналов становится известной динамика элементов, запаасающих энергию.

Аналитически задачи обычно решаются в два этапа. Сначала исключаются внешние воздействия и определяются только собственные колебания, возникающие за счет запасенной энергии – *собственный отклик системы при нулевом входном воздействии*. Такие решения, как известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, для линейных систем имеют вид экспоненциальных функций времени. Затем вычисляется отклик на внешнее воздействие при нулевых начальных условиях. Понятно, что в диссипативных системах по истечении определенного интервала времени собственные колебания полностью затухают, а отклик на внешнее воздействие, характеризующий установившийся процесс, определяются формой внешнего воздействия.

Сформулируем основные результаты.

- Метод переменных состояния позволяет создавать математические модели линейных и нелинейных радиоэлектронных цепей в виде систем дифференциальных уравнений первого порядка,
- Количество переменных состояния, полностью описывающих радиосистему, равно числу независимых энергоемких элементов.
- Для решения уравнений состояния на ЭВМ разработаны численные методы и специализированные комплексы программ.

Решения уравнений состояния для конкретных задач будут рассмотрены ниже при исследовании физических процессов, протекающих в радиосистемах.

Глава 8

Методы описания и анализа линейных радиосистем

Разнообразие радиоэлектронных систем, их структуры и алгоритмов функционирования никак не способствует разработке обобщенных методов описания. Наиболее универсальным является представление в виде многополюсника, когда векторы воздействий и реакций связаны операторным уравнением, а число внешних портов служит мерой сложности радиосистемы.

Многополюсники можно рассматривать как системы с N портами, а преобразование сигналов поочередно исследовать на отдельных портах при заданных воздействиях на тех же или любых других парных входах. При этом каждой паре воздействие – отклик отвечает скалярное операторное уравнение вида (7.1), а система сводится к эквивалентному набору двух- или четырехполюсных цепей и описывается квадратной матрицей порядка N , составленной из скалярных операторов. В такой интерпретации удастся провести анализ радиосистем во временной и частотной области при произвольной форме воздействий, т.е. построить описание систем с неизвестной внутренней структурой с помощью временных и частотных характеристик.

8.1. Анализ линейных систем во временной области.

Временные характеристики систем

Анализ физических процессов в радиоэлектронных системах в конечном счете сводится к исследованию временных изменений откликов на импульсные или непрерывные воздействия в течение длительного времени (теоретически от нуля до ∞). Если состав и внутренняя структура системы заданы, то известны и ее основные параметры, а необходимые временные функции можно получить, составляя и интегрируя дифференциальные уравнения, представляющие, по существу, алгоритм или правило определения временной функции выходного сигнала по заданной функции воздействия.

Когда внутренняя структура не известна, задача усложняется. Теперь для определения свойств системы и характера физических процессов, протекающих в ней, возможно использовать лишь временные функции откликов на известные внешние воздействия, а отношения этих сигналов

трактовать как временную или динамическую характеристику системы.

В реальных условиях радиосистемы могут находиться под воздействием сигналов произвольной формы, но временные (динамические) характеристики целесообразно вводить для элементарных воздействий в виде функций включения $\sigma(t)$ и импульсных функций $\delta(t)$, а необходимые отклики на воздействия произвольной формы получать с помощью интегральных представлений (см. 1.3).

Элементарные импульсные воздействия хороши уже тем, что допускают анализ физических процессов на качественном уровне. Действительно, функция включения переводит систему из равновесного в возбужденное состояние, а дельта-функция только на мгновение выводит ее из равновесного состояния. Отклики на эти воздействия характеризуют *переходные процессы* в системе, показывающие, как быстро совершается переход из одного стационарного состояния в другое, сопровождается ли этот переход колебательными процессами, остается ли система в возбужденном состоянии или возвращается в первоначальное стационарное состояние.

8.1.1. Переходные характеристики

Пусть на входе некоторого четырехполосника, лишенного начальных запасов энергии, задан сигнал в виде функции Хевисайда $x(t) = \sigma(t)$. Тогда согласно (7.1) его реакция $x_{\text{вых}}(t)$ удовлетворяет равенству¹

$$x_{\text{вых}}(t) = \mathbf{T}\sigma(t) = g(t). \quad (8.1)$$

- Отклик $g(t)$ линейной системы на элементарное воздействие в виде функции Хевисайда $\sigma(t)$ будем называть *переходной характеристикой* системы.

Переходные характеристики линейных систем легко измерить осциллографическим методом или с помощью персонального компьютера с аналого-цифровым преобразователем и представить в виде таблиц. Такое представление широко используется в современной радиоэлектронике. Подчеркнем еще раз, что для определения $g(t)$ не нужно знать внутреннюю структуру системы. Если же ее структура известна, то $g(t)$ можно рассчитать аналитически.

Рассмотрим реакцию линейной системы, описываемой тем же оператором \mathbf{T} , на воздействия произвольной формы. Для этого представим воздействие $x(t)$ в виде интегрального разложения по функциям Хевисайда (см. 1.3.1, формула (1.16)), а реакцию линейной системы $x_{\text{вых}}(t)$ – соотношением

$$x_{\text{вых}}(t) = \mathbf{T} \left(x(0)\sigma(t) + \int_0^t x'(\tau)\sigma(t-\tau)d\tau \right).$$

Учитывая, что каждой функции Хевисайда на входе соответствует $g(t)$ на выходе, получим выражение для отклика на произвольное воздействие в виде свертки производной входного сигнала $x'(t)$ и переходной характеристики радиосистемы $g(t)$:

¹ Четырехполосник может быть образован, например, i -м и k -м портами многополосника в качестве входного и выходного соответственно.

$$x_{\text{вых}}(t) = x(0)g(t) + \int_0^t x'(\tau)g(t - \tau)d\tau. \quad (8.2)$$

Это интеграл Дюамеля.

Интегрируя последнее соотношение по частям ($\int u dv = uv - \int v du$) при условиях $u = g(t - \tau)$, $dv = (dx/d\tau)d\tau$, можно получить другое представление реакции линейной цепи (другую форму записи интеграла Дюамеля):

$$x_{\text{вых}}(t) = x(t)g(0) + \int_0^t x(t)g'(t - \tau)d\tau, \quad g'(t) = \frac{dg}{dt}. \quad (8.3)$$

Когда конфигурация системы не известна, но известны изображения переходной функции и производной входного сигнала, отклик линейной системы на произвольное воздействие можно рассчитать аналитически:

$$x_{\text{вых}}(t) = \mathbf{L}^{-1}(x'(s)g(s)).$$

Для стационарных линейных систем переходные характеристики инвариантны относительно сдвига во времени, а в параметрических системах являются функциями двух переменных – текущего времени t и момента t_0 переключения из нулевого в "единичное" состояние, т.е. $g(t, t_0)$.

8.1.2. Импульсные характеристики

Обратимся к формуле (7.1) и рассмотрим в качестве элементарного воздействия дельта-функцию Дирака $\delta(t)$. Тогда

$$h(t) = \mathbf{T}\delta(t). \quad (8.4)$$

- Отклик $h(t)$ линейной системы на элементарное воздействие в виде дельта-функции Дирака $\delta(t)$ будем называть *импульсной характеристикой* системы.

Импульсная $h(t)$ и переходная $g(t)$ характеристики линейной системы так же, как и функции $\delta(t)$ и $\sigma(t)$, связаны соотношениями

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt}, \quad g(t) = \int_{-\infty}^t h(t)dt, \quad (8.5)$$

т.е. импульсная характеристика является производной от переходной, а переходная – интегралом от импульсной. Импульсные характеристики линейных систем являются удобными моделями откликов на кратковременные импульсные воздействия: чем короче входной импульс, тем ближе реакция системы к $h(t)$. При известной внутренней структуре цепи или системы $h(t)$ можно рассчитать аналитически.

Чтобы найти отклик линейной цепи на произвольное воздействие $x(t)$ по известной импульсной характеристике, используем интегральное разложение входного сигнала по функциям Дирака (см. 1.3.2, формула (1.19)).

Если входное воздействие в форме интеграла наложения (1.18) подставить в уравнение (8.1) и использовать определение импульсной характеристики, то для отклика линейной цепи на произвольное воздействие получим

$$x_{\text{ВЫХ}}(t) = \mathbf{T} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (8.6)$$

Из формулы (8.6) следует, что выходной сигнал линейной системы является сверткой двух функций: входного сигнала $x(t)$ и импульсной характеристики $h(t)$. Вследствие коммутативности интеграла свертки $x_{\text{ВЫХ}}(t)$ можно записать в виде

$$x_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau. \quad (8.7)$$

Более того, (8.6) совпадает с интегралом Дюамеля (8.3); если использовать (8.5) и учесть, что $x(t)g(0)$ представляет суммарную реакцию цепи на дельта-воздействия в интервале времени $(-\infty, 0)$.

Соотношения (8.6) и (8.7) не отвечают принципу причинности. Поскольку сигнал на выходе линейной цепи или системы не может появиться до поступления входного сигнала, верхний предел интегралов следует ограничить текущим значением t . Указанные ограничения справедливы для любой физической системы и иногда называются "принципом физической реализуемости" системы.

С учетом введенных ограничений (8.6) и (8.7) принимают вид

$$x_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau;$$

$$x_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^t x(t - \tau) h(\tau) d\tau.$$

Значения $x_{\text{ВЫХ}}(t)$ в момент времени t зависят от величин входного сигнала в предшествующие моменты времени, т.е. являются результатом суммирования всех предшествующих значений $x(t)$ с масштабными коэффициентами $h(t)$.

Итак, отклик на заданное воздействие при неизвестной конфигурации линейной системы можно найти по известной временной характеристике (импульсной или переходной), измеренной экспериментально или рассчитанной аналитически. Эти временные характеристики вещественны, равноценны, содержат основные сведения о свойствах системы и определяют изменения формы и параметров сигналов. Выбор временной характеристики, а значит, и способа представления, зависит от вида используемых воздействий и предполагаемого способа интерпретации.

Временные характеристики линейных цепей можно обобщить на случай многомерных воздействий и откликов, вводя парциальные переходные g_{ij} или импульсные h_{ij} характеристики и используя описанную выше методику, а для систем с известной внутренней структурой – на случай ненулевых начальных условий в емкостных и индуктивных элементах.

8.2. Анализ линейных систем в частотной области. Системные функции

Взаимная однозначность временных функций сигналов и их фурье-образов или лапласовских изображений позволяет построить аналитическое описание линейных радиосистем в частотной области.

В предыдущей главе уже были построены уравнения основных пассивных и активных элементов. Емкости и индуктивности во временной области описывались дифференциальными соотношениями, а остальные элементы – алгебраическими выражениями. Было показано, что временные описания емкостей и индуктивностей можно заменить частотными, если построить комплексные или операторные сопротивления, а вместо напряжений и токов использовать их комплексные амплитуды или операторные изображения. Такое описание линейных систем будем называть *описанием в частотной области*.

Построению описаний в частотной области целесообразно предварить рассмотрение некоторых общих свойств операторов линейных систем.

8.2.1. Собственные функции оператора линейной системы

Как известно, *собственной функцией оператора \mathbf{T} линейной системы* называется решение $x(t)$ операторного уравнения

$$\mathbf{T}x(t) = \dot{\lambda}x(t), \quad (8.8)$$

где $\dot{\lambda}$ – вещественное или комплексное число, которое называется *собственным значением* оператора \mathbf{T} . Каждому собственному значению оператора соответствует своя собственная функция.

Поскольку оператор \mathbf{T} устанавливает связь отклика линейной цепи с воздействием и эта связь задается комплексным числом $\dot{\lambda}$, по крайней мере, один сигнал (воздействие или отклик) должен быть комплексным.

1. Предположим, что собственной функцией оператора \mathbf{T} является гармоническое колебание и рассмотрим вместо мгновенных значений входного и выходного сигналов их комплексные амплитуды. Тогда $x(t) = A_m e^{j\omega t}$, а выходной сигнал удовлетворяет соотношению

$$\dot{x}_{\text{ВЫХ}}(t) = \mathbf{T}x(t) = \dot{\lambda}A_m e^{j\omega t} = \dot{A}_{m\text{ВЫХ}} e^{j\omega t}. \quad (8.9)$$

С другой стороны, отклик линейной цепи на любое, в том числе и гармоническое воздействие $A_m e^{j\omega t}$, описывается формулой (8.7). Поэтому

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\text{ВЫХ}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \\ &= A_m \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)}h(\tau)d\tau = A_m e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \dot{\lambda}A_m e^{j\omega t}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Итак, гармоническое воздействие с частотой ω действительно является собственной функцией оператора \mathbf{T} линейной цепи. Собственное значение оператора для гармонической функции $e^{j\omega t}$ равно отношению комплексных амплитуд отклика и воздействия, является функцией от частоты воздействия и называется *комплексной функцией передачи линейной цепи*.

Как видно из (8.10), комплексная функция передачи $\dot{H}(j\omega)$ представляет прямое преобразование Фурье импульсной характеристики линейной цепи. Справедливо и обратное преобразование Фурье, т.е.

$$\dot{H}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt, \quad h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{H}(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (8.11)$$

2. Рассмотрим в качестве собственной функции операторного уравнения (8.1) экспоненциальную функцию $x(t) = e^{st}\sigma(t)$, где $s = \sigma + j\omega$ – комплексная частота, $\sigma(t)$ – функция Хевисайда. Подставляя $x(t)$ в (8.1) и учитывая, что $\sigma(t) = 0$ при $t < 0$, получим:

$$x_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_0^{\infty} e^{s(t-\tau)}h(\tau)d\tau = e^{st} \int_0^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau. \quad (8.12)$$

Собственное значение оператора \mathbf{T} зависит от комплексной частоты s и представляет \mathbf{L} -изображение импульсной характеристики $h(t)$ линейной цепи. Обозначим его через $H(s)$ и по аналогии с комплексной функцией передачи будем называть *передаточной функцией в операторной форме* или *системной функцией* линейной цепи (системы). Тогда

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st}dt, \quad h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H(s)e^{st}ds. \quad (8.13)$$

Итак, функции $\dot{H}(j\omega)$ и $H(s)$ представляют *описания линейных систем в частотной области*, а формулы (8.11) и (8.13) устанавливают взаимно-однозначные соответствия временных и частотных описаний.

8.2.2. Частотные характеристики цепей и систем

Комплексные функции $\dot{H}(j\omega)$ характеризуют поведение цепи, находящейся под воздействием гармонического сигнала любой частоты. Они не зависят ни от времени, ни от комплексной амплитуды воздействия и определяются только внутренней структурой системы. Физический смысл и размерность функций зависят от размерностей воздействий и реакций. Отношение комплексных амплитуд входного напряжения $\dot{U}_{\text{мвх}}$ и тока $\dot{I}_{\text{мвх}}$ называется *комплексной функцией входного сопротивления*:

$$\dot{Z}_{\text{вх}}(j\omega) = \dot{U}_{\text{мвх}}/\dot{I}_{\text{мвх}},$$

обратное отношение – *комплексной функцией входной проводимости*:

$$\dot{Y}_{\text{вх}}(j\omega) = \dot{I}_{\text{мвх}}/\dot{U}_{\text{мвх}},$$

а отношения $\dot{U}_{m\text{ВЫХ}}/\dot{I}_{m\text{ВХ}}$ и $\dot{I}_{m\text{ВЫХ}}/\dot{U}_{m\text{ВХ}}$ – комплексными функциями передаточного сопротивления и передаточной проводимости соответственно. Еще две комплексные функции являются безразмерными и характеризуют передачу напряжения и тока.

Комплексной передаточной функцией напряжения \dot{K}_U (тока \dot{K}_I) будем называть отношение комплексных амплитуд напряжения (тока) на выходе и на входе:

$$\dot{K}_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_{m\text{ВЫХ}}}{\dot{U}_{m\text{ВХ}}}, \quad \dot{K}_I(j\omega) = \frac{\dot{I}_{m\text{ВЫХ}}}{\dot{I}_{m\text{ВХ}}}. \quad (8.14)$$

Комплексные функции полностью определяются заданием их модулей и аргументов или вещественных и мнимых частей. Модули комплексных функций представляют отношения вещественных амплитуд, а аргументы – разности начальных фаз реакций и воздействий, т.е.

$$\dot{H}(j\omega) = |\dot{H}(j\omega)|e^{j\varphi_H}, \quad |\dot{H}(j\omega)| = \frac{|\dot{x}_{\text{ВЫХ}}|}{|\dot{x}_{\text{ВХ}}|}, \quad \varphi_H(\omega) = \varphi_{x\text{ВЫХ}} - \varphi_{x\text{ВХ}}.$$

Вещественные и мнимые составляющие имеют вид

$$\text{Re}[\dot{H}(j\omega)] = |\dot{H}(j\omega)| \cos \varphi_H, \quad \text{Im}[\dot{H}(j\omega)] = |\dot{H}(j\omega)| \sin \varphi_H.$$

Это – частотные характеристики систем. Зависимость $|\dot{H}(j\omega)|$ называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ); $\varphi_H(\omega)$ – фазо-частотной характеристикой (ФЧХ), а $\text{Re}[\dot{H}(j\omega)]$ и $\text{Im}[\dot{H}(j\omega)]$ – вещественной и мнимой частотными характеристиками системы. АЧХ и ФЧХ обычно используются для представления безразмерных коэффициентов передачи напряжений и токов, а вещественные и мнимые частотные характеристики – для сопротивлений и проводимостей.

Если состав и внутренняя структура цепи известны, то частотные характеристики рассчитываются одним из рассмотренных выше способов, например методом узловых напряжений или топологических графов. Но когда внутренняя конфигурация цепи или системы не известна, для выявления свойств системы необходимо измерять частотные характеристики во всем частотном диапазоне от 0 до ∞ .

Рассмотрим свойства комплексных функций передачи на примере

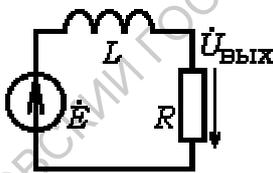


Рис. 8.1. RL -цепь

простой RL -цепи (рис. 8.1). Тогда

$$\dot{K}_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_{m\text{ВЫХ}}}{\dot{E}_m} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2} - j \frac{\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2},$$

где $\tau = L/R$ – константа, имеющая размерность времени, или иначе

$$\dot{K}_U(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} e^{-j\omega\tau}. \quad (8.15)$$

Итак, модуль и вещественная часть комплексной функции являются четными, а аргумент и мнимая часть – нечетными функциями частоты. $\varphi(j\omega) = -\arctg\omega\tau$. Это свойство комплексных функций следует из условий физической реализуемости систем.

Частотные характеристики RL -цепи представлены на рис. 8.2. Мо-

дуть коэффициента передачи (АЧХ) с ростом частоты монотонно уменьшается и на частоте $\omega_1 = 1/\tau$ принимает значение $|\dot{K}_U| = 1/\sqrt{2} \cong 0.7$. Это означает, что мощность выходного сигнала на частоте ω_1 составляет половину мощности входного сигнала, а интервал частот от 0 до ω_1 можно назвать *полосой пропускания системы на уровне половинной мощности*. ФЧХ (рис. 8.2, б) показывает, что выходной сигнал отстает по фазе от входного сигнала, причем для малых значений ω отставание пропорционально частоте сигнала.

Наряду с АЧХ и ФЧХ иногда используются амплитудно-фазовые частотные характеристики. Для этого модуль и аргумент передаточной функции напряжения или тока выступают в роли полярного радиуса и полярного угла, отсчитываемого против направления часовой стрелки. Конец вектора при монотонном возрастании частоты вычерчивает кривую, называемую *годографом* радиуса-вектора передаточной функции (рис. 8.3). Для заданных частот точки годографа позволяют определять значения модуля и аргумента или (при введении дополнительной декартовой системы) вещественной и мнимой составляющих комплексной передаточной функции. Годографом передаточной функции RL -цепи является полуокружность, в чем нетрудно убедиться, суммируя квадраты ее вещественной и мнимой составляющих.

8.2.3. Логарифмические единицы отношений и логарифмические частотные характеристики

Отличительной чертой многих радиоэлектронных устройств является обширный динамический диапазон. Например, коэффициент усиления операционных усилителей в разных участках частотного диапазона может отличаться в тысячи раз. В таких случаях коэффициент передачи удобно представлять в логарифмическом масштабе. Кстати, при построении АЧХ и ФЧХ в широких частотных диапазонах на оси частот тоже целесообразно использовать логарифмический масштаб.

Логарифмы модулей передаточных функций по основаниям e или 10, т.е. $\ln|\dot{K}(j\omega)|$ и $\lg|\dot{K}(j\omega)|$, характеризуют отношения сигналов и измеряются в специальных единицах – непер (Нп) и бел (Б)².

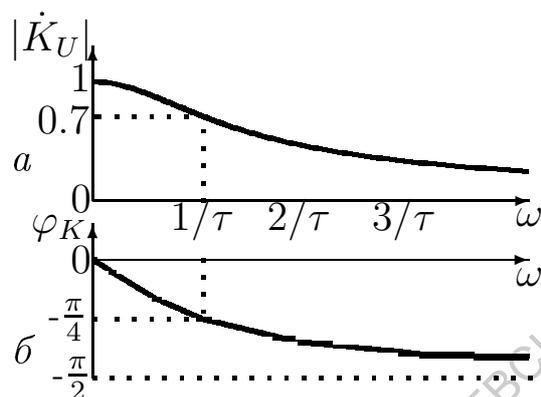


Рис. 8.2. Частотные характеристики RL -цепи: а – АЧХ, б – ФЧХ

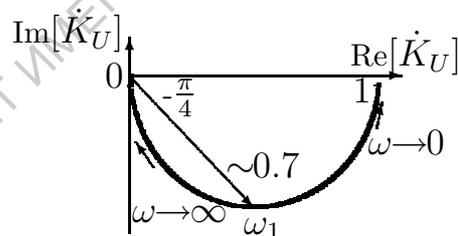


Рис. 8.3. Амплитудно-фазовая характеристика RL -цепи

² Единица "непер" названа в честь шотландского математика XVI века Дж. Непера – изобретателя логарифмов, а "бел" – в честь американского инженера А. Белла –

Величине в 1 Нп отвечает отношение напряжений (токов) в e раз:

$$1 \text{ Нп} = \ln \left[\frac{|\dot{U}_{m\text{ВЫХ}}|}{|\dot{U}_{m\text{ВХ}}|} \right].$$

Для квадратичных относительно напряжений и токов величин (энергии, мощности, плотности потока электромагнитного поля и т.д.) имеем

$$1 \text{ Нп} = 0.5 \ln |P_{\text{ВЫХ}}/P_{\text{ВХ}}|,$$

т.е. величине в 1 Нп соответствует отношение мощностей в $e^2 \cong 7.39$ раз. При этом положительные значения свидетельствуют об усилении сигналов, а отрицательные значения – об ослаблении.

Величине в 1 Б соответствуют следующие соотношения:

$$1 \text{ Б} = 2 \lg \left[\frac{|\dot{U}_{m\text{ВЫХ}}|}{|\dot{U}_{m\text{ВХ}}|} \right] \quad \text{или} \quad 1 \text{ Б} = \lg [P_{\text{ВЫХ}}/P_{\text{ВХ}}].$$

Более распространена дольная единица – *децибел* (дБ): 1 дБ = 0.1 Б:

$$1 \text{ дБ} = 20 \lg \left[\frac{|\dot{U}_{m\text{ВЫХ}}|}{|\dot{U}_{m\text{ВХ}}|} \right] \quad \text{или} \quad 1 \text{ дБ} = 10 \lg [P_{\text{ВЫХ}}/P_{\text{ВХ}}],$$

т.е. ослаблению в –1 дБ соответствует уменьшение мощности в 1.259 раза и напряжения или тока в 1.122 раза, а ослаблению в –10 дБ – уменьшение мощности в 10 раз и напряжения (тока) в 3.162 раза³.

Эти единицы, и прежде всего децибелы, используются в радиоэлектронике при переходе к логарифмической шкале.

Построение логарифмических частотных характеристик начнем с простой RL -цепи (см. рис. 8.1). Ее коэффициент передачи имеет единственный полюс. Логарифмируя модуль $\dot{K}_U(\omega)$ в (8.15) и представляя АЧХ в децибелах, получим:

$$20 \lg |\dot{K}_U(j\omega)| = -20 \lg \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}.$$

При $\omega\tau \ll 1$ имеем $20 \lg |\dot{K}_U| = 0$, а при $\omega\tau \gg 1$

$$20 \lg |\dot{K}_U| \cong -20 \lg \omega\tau = 20 \lg(1/\tau) - 20 \lg \omega.$$

График функции $20 \lg |\dot{K}_U|$ изображен на рис. 8.4 и имеет две прямолинейные асимптоты (жирные линии)

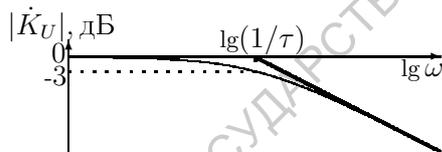


Рис. 8.4. Логарифмическая АЧХ RL -цепи

– горизонтальную на уровне 0 дБ при $\omega\tau \ll 1$ и наклонную с наклоном –6дБ на октаву при $\omega\tau \gg 1$ (если $|\dot{K}_U| = 1/2$, то $20 \lg 1/2 \cong -6$ дБ). Максимальное отклонение логарифмической АЧХ от асимптот возникает в области их пересечения, на

частоте $\omega = 1/\tau$ и составляет $20 \lg \sqrt{2} \cong -3$ дБ.

В общем случае комплексная передаточная функция является отношением многочленов (см. 4.3) и содержит конечное число полюсов и нулей, а модуль частотной характеристики принимает вид

$$|\dot{K}_U(j\omega)| = \frac{\sqrt{1+(\omega\tau')^2} \sqrt{1+(\omega\tau'')^2} \sqrt{1+(\omega\tau''')^2} \dots}{\sqrt{1+(\omega\tau_1)^2} \sqrt{1+(\omega\tau_2)^2} \sqrt{1+(\omega\tau_3)^2} \dots},$$

изобретателя телефона и одного из основателей фирмы Bell Telephone Labs.

³ Выбор логарифмической шкалы важен еще потому, что громкость сигналов и яркость изображений возрастают почти пропорционально логарифму интенсивности сигналов. Им соответствуют внесистемные логарифмические единицы СИ *фон* и *фот*.

где τ', τ'', \dots – постоянные, имеющие размерность времени и соответствующие нулям, а τ_1, τ_2, \dots – полюсам передаточной функции. Представляя это соотношение в логарифмической форме, получим кусочно-линейную аппроксимацию АЧХ рассматриваемого устройства:

$$20 \lg|\dot{K}_U| = 20 \lg\sqrt{1 + (\omega\tau')^2} + 20 \lg\sqrt{1 + (\omega\tau'')^2} + 20 \lg\sqrt{1 + (\omega\tau''')^2} + \dots - \\ - 20 \lg\sqrt{1 + (\omega\tau_1)^2} - 20 \lg\sqrt{1 + (\omega\tau_2)^2} - 20 \lg\sqrt{1 + (\omega\tau_1)^3} - \dots$$

Рассмотрим еще один частный случай. Пусть, например, модуль комплексной частотной характеристики описывается соотношением

$$|\dot{K}_U(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{1 + (\omega\tau_1)^2} \sqrt{1 + (\omega\tau_2)^2}},$$

причем $\tau_1 > \tau_2$. В логарифмическом масштабе имеем

$$20 \lg|\dot{K}_U| = 20 \lg\omega - 20 \lg\sqrt{1 + (\omega\tau_1)^2} - 20 \lg\sqrt{1 + (\omega\tau_2)^2}.$$

В области частот, где $\omega\tau_{1,2} \ll 1$ (рис. 8.5), $20 \lg|\dot{K}_U| \cong 20 \lg\omega$, и коэффициент передачи растет со скоростью 6 дБ на октаву. С ростом частоты увеличивается вклад второго, а затем и третьего слагаемых, описывающих ослабление передачи со скоростью -6 дБ на октаву. Когда $\omega\tau_1 \gg 1$, но $\omega\tau_2 \ll 1$, $20 \lg|\dot{K}_U| \cong 20 \lg\omega - 20 \lg\omega\tau_1 = 20 \lg\omega + 20 \lg(1/\tau_1) - 20 \lg\omega = 20 \lg(1/\tau_1)$,

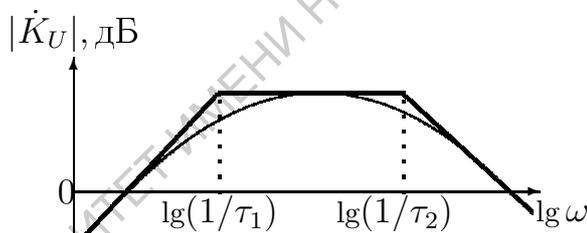


Рис. 8.5. Логарифмическая АЧХ и ее асимптоты (жирная линия)

и коэффициент передачи стабилизируется (горизонтальная асимптота на рис. 8.5). При $\omega\tau_2 \gg 1$ сумма трех слагаемых приводит к выражению

$$20 \lg|\dot{K}_U| \cong 20 \lg(1/\tau_1) + 20 \lg(1/\tau_2) - 20 \lg\omega,$$

и коэффициент передачи монотонно уменьшается.

Асимптотические характеристики позволяют простыми способами оценить широкополосность цепи или системы и неравномерность АЧХ. Аналогичным образом можно построить и аппроксимировать с помощью асимптот логарифмические ФЧХ, но такая аппроксимация используется значительно реже.

8.2.4. Системные функции цепей

Если входное воздействие $x_{\text{вх}}(t)$ и выходная реакция $x_{\text{вых}}(t)$ цепи представлены \mathbf{L} -изображениями $X_{\text{вх}}(s)$ и $X_{\text{вых}}(s)$, то $H(s) = X_{\text{вых}}(s)/X_{\text{вх}}(s)$ называется *системной функцией* цепи. Для сложных многоконтурных цепей системные функции представляют отношения многочленов порядка m и n относительно частоты s с вещественными коэффициентами:

$$H(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}.$$

Обозначим корни числителя через s_{0i} , корни знаменателя — через s_j и напомним основные понятия, введенные в 4.3. При $s = s_{0i}$ функция

$H(s)$ обращается в нуль. Это означает, что передача в цепи отсутствует, и s_{0i} называются *нулями функции $H(s)$* . При $s = s_j$ в нуль обращается знаменатель дроби, а $H(s) \rightarrow \infty$. Поэтому s_j называются *полюсами функции*. Нули и полюсы операторных функций могут быть простыми или кратными, а из условия вещественности коэффициентов a_i и b_j – только вещественными или комплексно-сопряженными. Если $m > n$, то функция цепи имеет полюс в бесконечности кратности $(m - n)$. а $H(s)$ в результате деления числителя на знаменатель превращается в сумму многочлена порядка $(m - n)$ и правильной дроби.

Используя теорему о разложении многочленов на сомножители, представим системную функцию цепи в виде:

$$H(s) = H_0 \frac{(s - s_{01})(s - s_{02}) \cdots (s - s_{0(m-1)})(s - s_m)}{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_{n-1})(s - s_n)}, \quad (8.16)$$

где H_0 – постоянный масштабный коэффициент. Множители $(s - s_{0i})$ называются *множителями нулей*, а $(s - s_j)$ – *множителями полюсов*. Правильную дробь вида (8.16) можно представить суммой простых дробей (см. 4.3).

Задание полюсов, нулей и масштабного коэффициента H_0 полностью определяет системную функцию цепи. Поэтому ее удобно представлять графически на плоскости комплексной частоты $s = \sigma + j\omega$, изображая полюса звездочками, а нули – кружками, как это сделано в 4.3 для изображений сигналов. Такое представление называется *полюсно-нулевым* или *картой нулей и полюсов системной функции*.

В ряде случаев целесообразно использовать другую интерпретацию

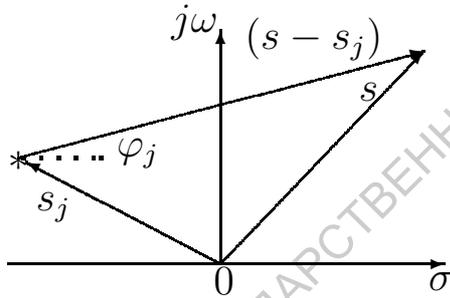


Рис. 8.6. Векторное представление множителей полюсов и нулей функции $H(s)$

– векторное представление $H(s)$ на плоскости комплексной частоты. Пусть вектор $s - s_j$ (рис. 8.6) соединяет полюс s_j с концом вектора s . Обозначая длину вектора через ρ_j и угол, образуемый этим вектором, с положительным направлением оси σ , через φ_j , получим $s - s_j = \rho_j e^{j\varphi_j}$. Аналогичные обозначения для других множителей нулей и полюсов позволяют осуществить простую геометрическую интерпретацию операторной функции $H(s)$ в виде

$$H(s) = H_0 \frac{\rho_{01}\rho_{02}\rho_{03} \cdots}{\rho_1\rho_2\rho_3 \cdots} e^{j(\varphi_{01} + \varphi_{02} + \varphi_{03} + \dots - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \dots)}.$$

Комплексные и системные передаточные функции тесно связаны друг с другом и имеют одни и те же значения полюсов и нулей. Если в системной функции заменить s на $j\omega$, то получим комплексную функцию системы, и наоборот. Комплексной функции, как и системной, можно сопоставить векторное представление, но при этом все векторы $j\omega - s_j$ будут заканчиваться на оси $j\omega$.

8.2.5. Определение откликов линейных систем на произвольные воздействия через комплексные и операторные функции

Пусть воздействие $x(t)$ является полигармоническим. Функция $x(t)$ должна удовлетворять условиям Дирихле, а при непериодическом воздействии и условию абсолютной интегрируемости. Комплексные амплитуды спектра периодического сигнала $\dot{C}_{k\text{ВХ}}$ или спектральная плотность непериодического сигнала $\dot{X}(\omega)$ при прохождении через линейную систему изменяются в соответствии с ее коэффициентом передачи, т.е. для комплексных амплитуд гармоник выходного сигнала имеем

$$\dot{C}_{k\text{ВЫХ}} = \dot{K}(j\omega_k)\dot{C}_{k\text{ВХ}},$$

где ω_k – частота k -й гармоники воздействия, а сам выходной сигнал $x_{\text{ВЫХ}}(t)$ представляет реальную часть их суммы

$$x_{\text{ВЫХ}}(t) = \text{Re} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{K}(j\omega_k)\dot{C}_{k\text{ВХ}}e^{j\omega_k t} \right). \quad (8.17)$$

Итак, для определения реакции линейной системы через $\dot{K}(j\omega)$ сигнал $x(t)$ разлагается в ряд или интеграл Фурье по гармоническим функциям. Для каждой составляющей $x(t)$ в соответствии с $\dot{K}(j\omega)$ вычисляется комплексная амплитуда выходного сигнала, а $x_{\text{ВЫХ}}(t)$ получается как результат обратного преобразования Фурье.

Частотный состав спектров входного и выходного сигналов одинаков, хотя соотношения комплексных амплитуд гармоник обычно различаются. В силу линейности отклик не содержит гармонических составляющих, отсутствовавших во входном воздействии, а составляющие, для которых $\dot{K}(j\omega)=0$, будут подавлены. Поэтому частотный состав спектра отклика линейной системы может оказаться беднее, чем у воздействия.

Операторное описание цепей и систем является более универсальным и позволяет определять отклики на произвольные воздействия $x(t)$, минуя разложения на составляющие. Поскольку $H(s)$ является изображением $h(t)$, а реакция $x_{\text{ВЫХ}}(t)$ на произвольное воздействие $x(t)$, согласно (8.6), определяется сверткой воздействия с импульсной характеристикой $h(t)$, изображение $X_{\text{ВЫХ}}(s)$, по теореме об изображении свертки двух функций (см. 4.2, формула (4.20)), равно произведению изображений сомножителей:

$$X_{\text{ВЫХ}}(s) = K(s)X(s).$$

В частном случае это соотношение описывает метод определения передаточной характеристики $g(t)$ по заданной функции системы. Поскольку $\mathbf{L}[\sigma(t)] = 1/s$, для операторного изображения $g(t)$ имеем

$$\mathbf{L}[g(t)] = K(s)/s, \quad g(t) = \mathbf{L}^{-1}[K(s)/s]. \quad (8.18)$$

Итак, определение реакции линейной системы с известной конфигурацией на произвольное воздействие $x(t)$ операторным методом сводится к вычислению операторной функции $K(s)$, изображения $X(s)$ входного сигнала и построению изображения выходного сигнала в виде $K(s)X(s)$. Чтобы превратить это операторное изображение во временную функцию

отклика системы необходимо использовать один из методов восстановления оригиналов (см. 4.3). Надо отметить, что операторный метод теоретически пригоден для систем любой сложности, но процесс определения временных функций отклика может оказаться громоздким.

Таким образом, описание и анализ характеристик радиоэлектронных систем возможны и во временной, и в частотной области. Выбор конкретного вида описания диктуется лишь простотой вычислений и удобством анализа полученных результатов.

Заметим, что измеренные во всем возможном диапазоне частот АЧХ и ФЧХ передаточной функции позволяют построить ее полюсно-нулевое представление. Для этого АЧХ и ФЧХ строятся в логарифмическом масштабе, а величины нулей и полюсов передаточной функции соответствуют пересечениям их асимптот. Так как множители полюсов и нулей составляют системную функцию $H(s)$, то $\mathbf{L}^{-1}[H(s)]$ представляет импульсную характеристику $h(t)$, а $\mathbf{L}^{-1}[H(s)/s]$ – ее переходную характеристику $g(t)$. Временные методы анализа особенно полезны при исследовании реакций одной и той же цепи на различные воздействия.

8.3. Основы теории четырехполюсников

До сих пор двухпортовые цепи и системы рассматривались без учета нагрузки. Предполагалось, что выходные напряжения относятся к разомкнутым клеммам выходного порта, а выходные токи – к коротко замкнутым. Полученные характеристики (временные или частотные) описывали взаимосвязь выходных и входных сигналов в зависимости от внутренней структуры системы.

В радиоэлектронике двухпортовые цепи и системы (четыреполюсники) используются, как правило, для передачи сигналов от источника к потребителю (нагрузке), т.е. рассматриваются нагруженные четырехполюсники. Связь выходного и входного сигналов нагруженного четырехполюсника в общем случае выражается дифференциальным уравнением, которое можно построить и разрешить только для цепей с заданной структурой. Теория четырехполюсников исследует системы с неизвестной конфигурацией и оперируя только входными и выходными напряжениями и токами, позволяет оценивать общие свойства, в том числе условия передачи наибольшей мощности от источника сигналов к нагрузке.

Математическую основу теории четырехполюсников составляют матричное описание и анализ в частотной области с использованием комплексных функций цепей.

8.3.1. Матричные уравнения линейных четырехполюсников. Первичные параметры

Пусть к четырехполюснику подключен источник синусоидального напряжения. Обозначим комплексные амплитуды входного напряжения через \dot{U}_{m1} , входного тока – через \dot{I}_{m1} , а комплексные ампли-

туды выходного напряжения и тока – через \dot{U}_{m2} и \dot{I}_{m2} соответственно.

Из этих четырех комплексных переменных можно составить шесть парных комбинаций для воздействий, т.е. построить шесть эквивалентных вариантов матричного описания четырехполюсника (табл. 8.1).

Таблица 8.1

Матричные описания четырехполюсников

Воздействия	$\dot{U}_{m1}, \dot{U}_{m2}$	$\dot{I}_{m1}, \dot{I}_{m2}$	$\dot{U}_{m2}, \dot{I}_{m2}$	$\dot{U}_{m1}, \dot{I}_{m1}$	$\dot{U}_{m2}, \dot{I}_{m1}$	$\dot{U}_{m1}, \dot{I}_{m2}$
Реакции	$\dot{I}_{m1}, \dot{I}_{m2}$	$\dot{U}_{m1}, \dot{U}_{m2}$	$\dot{U}_{m1}, \dot{I}_{m1}$	$\dot{U}_{m2}, \dot{I}_{m2}$	$\dot{U}_{m1}, \dot{I}_{m2}$	$\dot{U}_{m2}, \dot{I}_{m1}$
Матрица параметров	Y	Z	A	B	H	G

Эти матричные описания представляют простейшие математические модели четырехполюсников, а элементы матриц называются *первичными параметрами*. Правильнее было бы назвать их *функциональными параметрами*, так как комплексные величины матричных элементов зависят от частоты воздействия.

Различные матричные описания имеют разные сферы применения: при каскадном соединении четырехполюсников используются матрицы **A** или **B**; при параллельном соединении – **Y**-описание. **H**-матрицы удобны при описании параметров транзисторов, и в некоторых справочниках *h*-элементы указываются наряду с другими параметрами. В дальнейшем изложении будут использоваться три матричных описания **Y**, **A** и **B**.

Y-матрица. Пусть на входе и выходе линейного четырехполюсника (рис. 8.7) действуют комплексные напряжения \dot{U}_{m1} и \dot{U}_{m2} соответственно. Тогда

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{m1} \\ \dot{I}_{m2} \end{bmatrix} = \mathbf{Y} \begin{bmatrix} \dot{U}_{m1} \\ \dot{U}_{m2} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dot{I}_{m1} = \dot{Y}_{11}\dot{U}_{m1} + \dot{Y}_{12}\dot{U}_{m2}, \\ \dot{I}_{m2} = \dot{Y}_{21}\dot{U}_{m1} + \dot{Y}_{22}\dot{U}_{m2}. \end{cases} \quad (8.19)$$

Для пассивного линейного четырехполюсника $\dot{Y}_{12} = \dot{Y}_{21}$, так как, согласно *теореме взаимности* [10], ЭДС, действующая в ветви *I* (в данном случае на входе четырехполюсника), создает в ветви *II* (в данном случае на выходе) такой же ток, какой возникает в ветви *I* при включении той же ЭДС в ветви *II*, т.е. *линейный пассивный четырехполюсник является взаимным или обратимым*. Если же у пассивного линейного четырехполюсника $\dot{Y}_{11} = \dot{Y}_{22}$, то он называется *симметричным*.

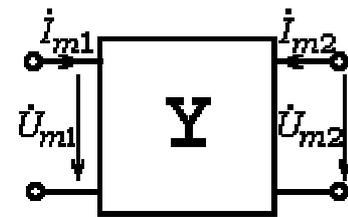


Рис. 8.7 Y-матрица

В силу линейности результат одновременного действия напряжений \dot{U}_{m1} и \dot{U}_{m2} можно считать суперпозицией реакций на каждое из воздействий в отдельности:

$$\dot{I}_{m1} = \dot{I}'_{m1} + \dot{I}''_{m1}, \quad \dot{I}_{m2} = \dot{I}'_{m2} + \dot{I}''_{m2},$$

где $\dot{I}'_{m1} = \dot{Y}_{11}\dot{U}_{m1}$, $\dot{I}''_{m1} = \dot{Y}_{12}\dot{U}_{m2}$, $\dot{I}'_{m2} = \dot{Y}_{21}\dot{U}_{m1}$, $\dot{I}''_{m2} = \dot{Y}_{22}\dot{U}_{m2}$. Тогда все первичные параметры четырехполюсника имеют размерность проводимости: $\dot{Y}_{11} = \dot{I}_{m1}/\dot{U}_{m1} \Big|_{U_{m2}=0}$ – входная проводимость; $\dot{Y}_{12} = \dot{I}_{m1}/\dot{U}_{m2} \Big|_{U_{m1}=0}$

и $\dot{Y}_{21} = \dot{I}_{m2}/\dot{U}_{m1} \Big|_{U_{m2}=0}$ – передаточные проводимости; $\dot{Y}_{22} = \dot{I}_{m2}/\dot{U}_{m2} \Big|_{U_{m1}=0}$ – выходная проводимость четырехполюсника.

Как следует из этих формул, для экспериментального определения частотных функций Y -параметров достаточно поочередно задать $U_{m1}(\omega)$ и $U_{m2}(\omega)$ (второй вход закорачивается) и, изменяя частоту воздействия, измерить амплитуды токов $I_{m1}(\omega)$ и $I_{m2}(\omega)$, а также сдвиги фаз последних относительно воздействий.

Зная Y -параметры, можно представить четырехполюсник с неизвестной внутренней структурой эквивалентной схемой и определить его свойства (линейность или нелинейность, активность или пассивность и т.д.).

Обратимся к уравнениям (8.19). Каждое из них можно изобразить в виде параллельного соединения проводимости и зависимого источника тока (рис. 8.8,а). При этом входной и выходной порты четырехполюсника оказываются полностью изолированными друг от друга. Чтобы восстановить реально существующую связь, дополним первое уравнение двумя слагаемыми $\pm \dot{Y}_{12} \dot{U}_{m1}$, а второе – слагаемыми $\pm \dot{Y}_{12} (\dot{U}_{m1} - U_{m2})$. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{m1} &= (\dot{Y}_{11} + \dot{Y}_{12}) \dot{U}_{m1} - \dot{Y}_{12} (\dot{U}_{m1} - \dot{U}_{m2}), \\ \dot{I}_{m2} &= (\dot{Y}_{21} - \dot{Y}_{12}) \dot{U}_{m1} + (\dot{Y}_{12} + \dot{Y}_{22}) \dot{U}_{m2} + \dot{Y}_{12} (\dot{U}_{m1} - \dot{U}_{m2}), \end{aligned}$$

и соответствующую ей эквивалентную схему (рис. 8.8,б). Это электрическая схема активного четырехполюсника. При $\dot{Y}_{21} = \dot{Y}_{12}$ зависимый источник тока исключается, а эквивалентная схема удовлетворяет условию взаимности и состоит только из пассивных элементов.

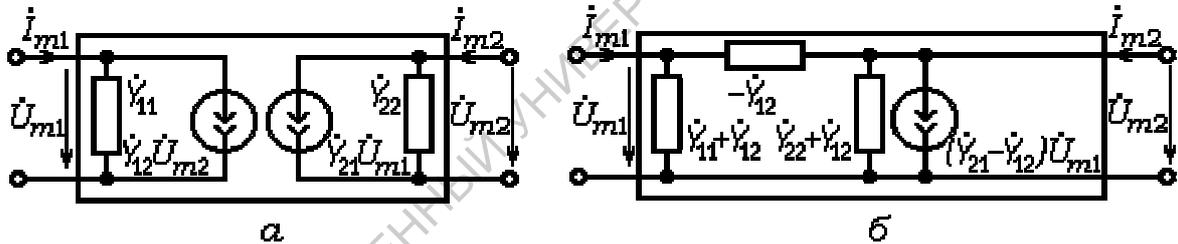


Рис. 8.8. Схемы замещения четырехполюсника с Y -параметрами: а – с двумя зависимыми источниками, б – с одним зависимым источником

A-матрица. Связь A- и Y-параметров. Когда четырехполюсник выполняет роль передаточного звена между источником сигналов и нагрузкой, целесообразно считать заданными ток и напряжение на нагрузке (\dot{I}_{m2} и \dot{U}_{m2}), направление тока \dot{I}_{m2} изменить на противоположное (рис. 8.9), а четырехполюсник описывать матрицей параметров **A**:

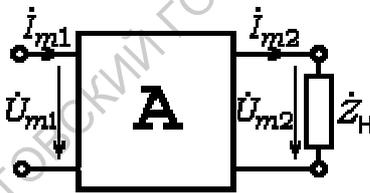


Рис. 8.9 A-матрица

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{m1} \\ \dot{I}_{m1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \dot{U}_{m2} \\ \dot{I}_{m2} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} \dot{U}_{m1} &= \dot{A}_{11} \dot{U}_{m2} + \dot{A}_{12} \dot{I}_{m2}, \\ \dot{I}_{m1} &= \dot{A}_{21} \dot{U}_{m2} + \dot{A}_{22} \dot{I}_{m2}, \end{aligned} \quad (8.20)$$

где \dot{A}_{ij} – коэффициенты трансформации: напряжений ($\dot{A}_{11} = \left. \frac{\dot{U}_{m1}}{\dot{U}_{m2}} \right|_{\dot{I}_{m2}=0}$), входного напряжения в выходной ток ($\dot{A}_{12} = \left. \frac{\dot{U}_{m1}}{\dot{I}_{m2}} \right|_{U_{m2}=0}$), входного тока

в выходное напряжение ($\dot{A}_{21} = \frac{\dot{I}_{m1}}{\dot{U}_{m2}} \Big|_{I_{m2}=0}$) и токов ($\dot{A}_{22} = \frac{\dot{I}_{m1}}{\dot{I}_{m2}} \Big|_{U_{m2}=0}$). При таком описании первичные параметры имеют различную размерность, причем два из них (\dot{A}_{11} и \dot{A}_{22}) оказываются безразмерными.

Для вывода связи между А- и Y-параметрами четырехполюсника воспользуемся уравнениями (8.19). С учетом противоположного направления тока \dot{I}_{m2} представим второе уравнение (8.19) в виде

$$\dot{U}_{m1} = - \left(\dot{Y}_{22}/\dot{Y}_{21} \right) \dot{U}_{m2} - \left(1/\dot{Y}_{21} \right) \dot{I}_{m2}. \quad (8.21)$$

Подставляя (8.21) в первое уравнение (8.19), получим:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{m1} &= \dot{Y}_{11} \left[\left(-\dot{Y}_{22}/\dot{Y}_{21} \right) \dot{U}_{m2} + \left(-1/\dot{Y}_{21} \right) \dot{I}_{m2} \right] + \dot{Y}_{12} \dot{U}_{m2} = \\ &= - \left(\Delta\dot{Y}/\dot{Y}_{21} \right) \dot{U}_{m2} - \left(\dot{Y}_{11}/\dot{Y}_{21} \right) \dot{I}_{m2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$\dot{A}_{11} = -\dot{Y}_{22}/\dot{Y}_{21}$, $\dot{A}_{12} = -1/\dot{Y}_{21}$, $\dot{A}_{21} = -\Delta\dot{Y}/\dot{Y}_{21}$, $\dot{A}_{22} = -\dot{Y}_{11}/\dot{Y}_{21}$, где $\Delta\dot{Y}$ – определитель матрицы \mathbf{Y} . Для линейного пассивного (обратного) четырехполюсника

$$\Delta\dot{A} = \dot{Y}_{11}\dot{Y}_{22}/\dot{Y}_{21}^2 - \Delta\dot{Y}/\dot{Y}_{21}^2 = \dot{Y}_{12}/\dot{Y}_{21} = 1 \quad \left(\dot{Y}_{12} = \dot{Y}_{21} \right).$$

В-матрица. Связь В-, А- и Y-параметров. Используем тот же четырехполюсник (см. рис. 8.9) для передачи сигналов в противоположном направлении (рис. 8.10). Тогда

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{m2} \\ \dot{I}_{m2} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \dot{U}_{m1} \\ \dot{I}_{m1} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} \dot{U}_{m2} &= \dot{B}_{11}\dot{U}_{m1} + \dot{B}_{12}\dot{I}_{m1}, \\ \dot{I}_{m2} &= \dot{B}_{21}\dot{U}_{m1} + \dot{B}_{22}\dot{I}_{m1}. \end{aligned}$$

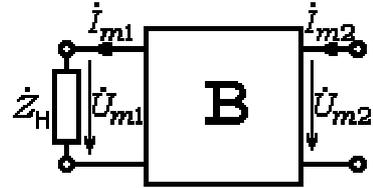


Рис. 8.10 В-матрица

При этом направления токов \dot{I}_{m1} и \dot{I}_{m2} изменяются на противоположные, а уравнения (8.20) принимают вид:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{m1} &= \dot{A}_{11}\dot{U}_{m2} - \dot{A}_{12}\dot{I}_{m2}, \\ -\dot{I}_{m1} &= \dot{A}_{21}\dot{U}_{m2} - \dot{A}_{22}\dot{I}_{m2}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Разрешая (8.22) относительно \dot{U}_{m2} и \dot{I}_{m2} , получим:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{m2} &= \left(-\dot{A}_{22}\dot{U}_{m1} - \dot{A}_{12}\dot{I}_{m1} \right) / \left(-\Delta\dot{A} \right) = \dot{A}_{22}\dot{U}_{m1} + \dot{A}_{12}\dot{I}_{m1}, \\ \dot{I}_{m2} &= \left(-\dot{A}_{11}\dot{I}_{m1} - \dot{A}_{21}\dot{U}_{m1} \right) / \left(-\Delta\dot{A} \right) = \dot{A}_{21}\dot{U}_{m1} + \dot{A}_{11}\dot{I}_{m1}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Отсюда

$$\dot{B}_{11} = \dot{A}_{22}, \quad \dot{B}_{12} = \dot{A}_{12}, \quad \dot{B}_{21} = \dot{A}_{21}, \quad \dot{B}_{22} = \dot{A}_{11}. \quad (8.24)$$

8.3.2. Вторичные параметры четырехполюсников

Вторичными параметрами четырехполюсников будем называть алгебраические выражения, составленные из первичных параметров. К ним относятся комплексные входное и выходное сопротивления или проводимости и постоянная передачи.

Комплексное входное сопротивление нагруженного четырехполюсника при произвольной нагрузке $\dot{Z}_H = \dot{U}_{m2}/\dot{I}_{m2}$ можно получить из матричных уравнений (8.20) в виде

$$\dot{Z}_{\text{вх.н}} = \dot{U}_{m1}/\dot{I}_{m1} = (\dot{A}_{11}\dot{Z}_H + \dot{A}_{12}) / (\dot{A}_{21}\dot{Z}_H + \dot{A}_{22}), \quad (8.25)$$

а комплексное выходное сопротивление четырехполюсника – из матричных уравнений (8.23) при условии, что внутреннее сопротивление источника сигнала известно и равно \dot{Z}_H . Тогда

$$\dot{Z}_{\text{вых.н}} = (\dot{A}_{22}\dot{Z}_H + \dot{A}_{12}) / (\dot{A}_{21}\dot{Z}_H + \dot{A}_{11}). \quad (8.26)$$

Комплексные сопротивления (8.25) и (8.26) зависят не только от первичных параметров четырехполюсника, но и от внешних сопротивлений (\dot{Z}_H и \dot{Z}_H), поэтому их трудно рассматривать в качестве вторичных параметров. Однако из (8.25) и (8.26) можно построить истинные вторичные параметры, характеризующие только четырехполюсник, если рассмотреть его входное и выходное сопротивления в режимах холостого хода (хх) и короткого замыкания (кз):

$$\dot{Z}_{\text{вх.хх}} = \dot{A}_{11} / \dot{A}_{21}, \quad \dot{Z}_{\text{вх.кз}} = \dot{A}_{12} / \dot{A}_{22}, \quad (8.27)$$

$$\dot{Z}_{\text{вых.хх}} = \dot{A}_{22} / \dot{A}_{21}, \quad \dot{Z}_{\text{вых.кз}} = \dot{A}_{12} / \dot{A}_{11}. \quad (8.28)$$

Полученные входные и выходные сопротивления, как и первичные параметры, являются функциями частоты, т.е. представляют комплексные функции четырехполюсника. Их можно определить экспериментально при замыкании ($\dot{U}_{m1}=0$ или $\dot{U}_{m2}=0$) и размыкании ($\dot{I}_{m1}=0$ или $\dot{I}_{m2}=0$) его входа или выхода. Может показаться, что $\dot{Z}_{\text{вх.хх}}$, $\dot{Z}_{\text{вх.кз}}$, $\dot{Z}_{\text{вых.хх}}$ и $\dot{Z}_{\text{вых.кз}}$ представляют чисто академический интерес, так как четырехполюсник всегда соединен с источником с конечным внутренним сопротивлением \dot{Z}_H и нагружен конечным сопротивлением нагрузки \dot{Z}_H . На самом деле эти сопротивления играют существенную роль при выводе условий полного согласования четырехполюсников.

8.3.3. Согласование четырехполюсников. Характеристические параметры

Четырехполюсник в качестве устройства, передающего сигналы от источника к нагрузке, обладает наибольшим КПД, когда он согласован как с нагрузкой, так и с источником сигнала.

Четырехполюсник называется *полностью согласованным*, если его входное сопротивление $\dot{Z}_{\text{вх}}$ равно внутреннему сопротивлению источника сигнала \dot{Z}_H , а выходное $\dot{Z}_{\text{вых}}$ – сопротивлению нагрузки \dot{Z}_H . Поскольку $\dot{Z}_{\text{вх}}$ зависит от сопротивления нагрузки \dot{Z}_H , а $\dot{Z}_{\text{вых}}$ – от внутреннего сопротивления источника сигнала \dot{Z}_H , условия согласования не могут быть выполнены отдельно для \dot{Z}_H и \dot{Z}_H . Будем называть вторичные параметры четырехполюсника, удовлетворяющие условиям его согласования, *характеристическими параметрами четырехполюсника*.

Характеристические сопротивления четырехполюсника. Обозначим характеристические входное и выходное сопротивления через \dot{Z}_{01} и \dot{Z}_{02} и предположим, что $\dot{Z}_{01} = \dot{Z}_и$, а $\dot{Z}_{02} = \dot{Z}_н$, т.е. условия согласования выполняются. Тогда из уравнений (8.25) и (8.26) получаем

$$\begin{aligned}\dot{Z}_{01} \left(\dot{A}_{21} \dot{Z}_{02} + \dot{A}_{22} \right) &= \dot{A}_{11} \dot{Z}_{02} + \dot{A}_{12}, \\ \dot{Z}_{02} \left(\dot{A}_{21} \dot{Z}_{01} + \dot{A}_{11} \right) &= \dot{A}_{22} \dot{Z}_{01} + \dot{A}_{12}.\end{aligned}$$

Выражая $\dot{A}_{21} \dot{Z}_{01} \dot{Z}_{02}$ из этих равенств и приравнявая их, находим:

$$\dot{A}_{11} \dot{Z}_{02} = \dot{A}_{22} \dot{Z}_{01} \quad \text{или} \quad \frac{\dot{A}_{11}}{\dot{A}_{22}} = \frac{\dot{Z}_{01}}{\dot{Z}_{02}}. \quad (8.29)$$

Отсюда

$$\dot{Z}_{01} = \sqrt{\frac{\dot{A}_{11} \dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21} \dot{A}_{22}}}, \quad \dot{Z}_{02} = \sqrt{\frac{\dot{A}_{12} \dot{A}_{22}}{\dot{A}_{21} \dot{A}_{11}}}. \quad (8.30)$$

Сопоставление (8.30) с (8.27) и (8.28) показывает, что

$$\dot{Z}_{01} = \pm \sqrt{\dot{Z}_{вх.кз} \dot{Z}_{вх.хх}}, \quad \dot{Z}_{02} = \pm \sqrt{\dot{Z}_{вых.кз} \dot{Z}_{вых.хх}}. \quad (8.31)$$

Для симметричного четырехполюсника

$$\dot{Z}_{01} = \dot{Z}_{02} = \dot{Z}_0 \equiv \sqrt{\frac{\dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21}}}. \quad (8.32)$$

Таким образом, характеристические входное и выходное сопротивления четырехполюсника представляют средние геометрические значения сопротивлений, возникающих в режимах короткого замыкания и холостого хода и легко измеряемых экспериментально.

Коэффициенты передачи и характеристическая постоянная передачи. Коэффициенты передачи напряжения \dot{A}_{11} и тока \dot{A}_{22} описывали *ненагруженный четырехполюсник*. Для нагруженного согласованного четырехполюсника коэффициенты передачи имеют иной вид и представляют вторичные параметры. Наряду с коэффициентами передачи напряжения $\dot{K}_U = \dot{U}_{m2}/\dot{U}_{m1}$ и тока $\dot{K}_I = \dot{I}_{m2}/\dot{I}_{m1}$ для описания согласованных четырехполюсников используются *коэффициенты затухания* напряжения $\dot{\Gamma}_U = 1/\dot{K}_U$ и тока $\dot{\Gamma}_I = 1/\dot{K}_I$, которые нетрудно получить, подставляя $\dot{Z}_н = \dot{Z}_{02}$ в (8.20) и используя (8.30). Тогда

$$\dot{U}_{m1} = \dot{U}_{m2} \left(\dot{A}_{11} + \sqrt{\frac{\dot{A}_{11} \dot{A}_{12} \dot{A}_{21}}{\dot{A}_{22}}} \right), \quad (8.33)$$

$$\dot{I}_{m1} = \dot{I}_{m2} \left(\dot{A}_{22} + \sqrt{\frac{\dot{A}_{12} \dot{A}_{21} \dot{A}_{22}}{\dot{A}_{11}}} \right). \quad (8.34)$$

Введем новый характеристический параметр – *постоянную передачи*. Для этого рассмотрим $\dot{U}_{m1} \dot{I}_{m1} / \dot{U}_{m2} \dot{I}_{m2}$ и, обозначая логарифм этого отношения через $2\dot{\gamma}$, получим:

$$e^{2\dot{\gamma}} = \frac{\dot{U}_1 \dot{I}_1}{\dot{U}_2 \dot{I}_2} = \left(\dot{A}_{11} + \sqrt{\frac{\dot{A}_{11} \dot{A}_{12} \dot{A}_{21}}{\dot{A}_{22}}} \right) \cdot \left(\dot{A}_{22} + \sqrt{\frac{\dot{A}_{12} \dot{A}_{21} \dot{A}_{22}}{\dot{A}_{11}}} \right) =$$

$$= \left(\sqrt{\dot{A}_{11} \dot{A}_{22}} + \sqrt{\dot{A}_{12} \dot{A}_{21}} \right)^2$$

или

$$e^{\dot{\gamma}} = \sqrt{\dot{A}_{11} \dot{A}_{22}} + \sqrt{\dot{A}_{12} \dot{A}_{21}},$$

$$e^{-\dot{\gamma}} = \frac{1}{e^{\dot{\gamma}}} = 1 / \left(\sqrt{\dot{A}_{11} \dot{A}_{22}} + \sqrt{\dot{A}_{12} \dot{A}_{21}} \right) = \sqrt{\dot{A}_{11} \dot{A}_{22}} - \sqrt{\dot{A}_{12} \dot{A}_{21}}.$$

Отсюда

$$\dot{\gamma} = \ln \left(\sqrt{\dot{A}_{11} \dot{A}_{22}} + \sqrt{\dot{A}_{12} \dot{A}_{21}} \right). \quad (8.35)$$

Комплексная величина $\dot{\gamma}$ называется *характеристической постоянной передачи* четырехполюсника. Поскольку

$$\operatorname{ch} \dot{\gamma} = (e^{\dot{\gamma}} + e^{-\dot{\gamma}}) / 2 = \sqrt{\dot{A}_{11} \dot{A}_{22}}, \quad \operatorname{sh} \dot{\gamma} = (e^{\dot{\gamma}} - e^{-\dot{\gamma}}) / 2 = \sqrt{\dot{A}_{12} \dot{A}_{21}}, \quad (8.36)$$

коэффициенты затухания напряжения и тока принимают вид

$$\dot{\Gamma}_U = \dot{U}_{m1} / \dot{U}_{m2} = \sqrt{\dot{Z}_{01} / \dot{Z}_{02}} (\operatorname{ch} \dot{\gamma} + \operatorname{sh} \dot{\gamma}) = \sqrt{\dot{Z}_{01} / \dot{Z}_{02}} e^{\dot{\gamma}},$$

$$\dot{\Gamma}_I = \dot{I}_{m1} / \dot{I}_{m2} = \sqrt{\dot{Z}_{02} / \dot{Z}_{01}} (\operatorname{ch} \dot{\gamma} + \operatorname{sh} \dot{\gamma}) = \sqrt{\dot{Z}_{02} / \dot{Z}_{01}} e^{\dot{\gamma}}.$$

Для симметричных согласованных четырехполюсников

$$\dot{\gamma} = \ln \left(\dot{A}_{11} + \dot{A}_{12} \right), \quad \dot{\Gamma}_U = \dot{U}_{m1} / \dot{U}_{m2} = e^{\dot{\gamma}}, \quad \dot{\Gamma}_I = \dot{I}_{m1} / \dot{I}_{m2} = e^{\dot{\gamma}}, \quad (8.37)$$

т.е. характеристическая постоянная передачи $\dot{\gamma}$ является *логарифмическим представлением коэффициентов затухания* четырехполюсника.

Подведем итоги рассмотрения.

1. Первичные, вторичные и характеристические параметры четырехполюсников в общем случае представляют комплексные функции частоты воздействия.

2. Взаимные ($\dot{Y}_{12} = \dot{Y}_{21}$, $\Delta \dot{A} = 1$, $\Delta \dot{B} = 1$) линейные четырехполюсники полностью описываются тремя первичными или тремя характеристическими ($\dot{Z}_{01}(\omega)$, $\dot{Z}_{02}(\omega)$ и $\dot{\gamma}(\omega)$) комплексными частотными функциями, а симметричный взаимный четырехполюсник – двумя комплексными частотными функциями. Оба описания эквивалентны и не требуют знания внутренней структуры.

3. Тожественность частотных функций характеристических сопротивлений с частотными функциями нагрузки и источника сигналов практически не достижима. Поэтому полное согласование четырехполюсника с источником сигналов и нагрузкой можно обеспечить лишь на отдельных частотах или, самое большее, в узком диапазоне частот.

4. Частотные описания двухпортовых радиоэлектронных систем квадратными матрицами комплексных функций и совокупностями комплексных характеристических функций являются основой для синтеза радиоэлектронных систем с заданными характеристиками.

8.3.4. Эквивалентные схемы линейных пассивных четырехполюсников

Описание реальных четырехполюсников с неизвестной внутренней структурой матричными и характеристическими параметрами часто оказывается недостаточным, и при решении практических задач четырехполюсники полезно представлять реальными электрическими схемами.

Эквивалентной электрической схемой четырехполюсника будем называть двухпортовую электрическую схему, у которой комплексные амплитуды входных и выходных токов и напряжений совпадают с соответствующими переменными у реального устройства. Поскольку пассивный четырехполюсник полностью описывается тремя матричными или характеристическими параметрами, эквивалентная схема должна содержать не более трех независимых комплексных сопротивлений.

В теории четырехполюсников используются Т-образные, П-образные, а также Г-образные (правая и левая) эквивалентные схемы (рис. 8.11).

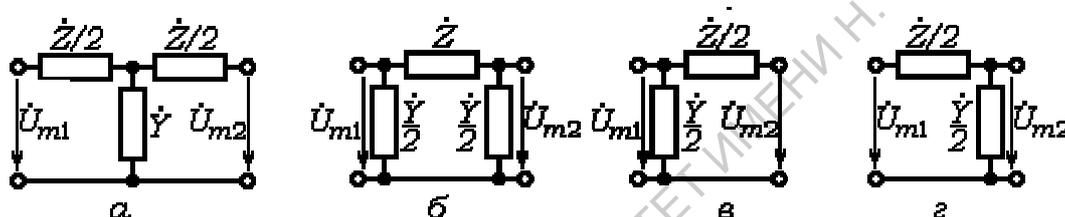


Рис. 8.11. Эквивалентные схемы четырехполюсников: Т-образная (а), П-образная (б), правая (в) и левая (г) Г-образные

Указанные на эквивалентных схемах обозначения сопротивлений и проводимостей не случайны. Если рассмотреть многозвенный участок лестничной структуры, составленный из одинаковых комплексных сопротивлений и проводимостей, то в зависимости от способа разбиения цепи (рис. 8.12) можно получить все приведенные эквивалентные схемы.

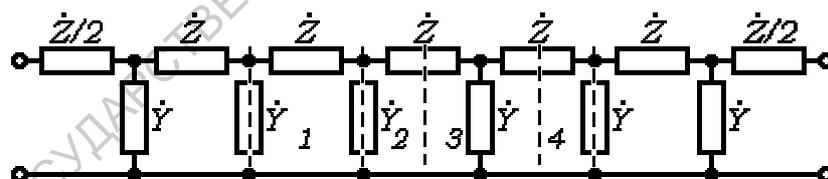


Рис. 8.12. Разбиение многозвенной лестничной цепи на элементарные звенья: 1 – П-звено; 2 – левое Г-звено; 3 – Т-звено; 4 – правое Г-звено

При каскадном соединении одинаковых четырехполюсников и описании их матрицами \mathbf{A} или \mathbf{B} (лестничные структуры) выходное сопротивление предыдущего четырехполюсника является входным сопротивлением последующего, а результирующая характеристическая постоянная передачи $\dot{\gamma}$ оказывается суммой $\dot{\gamma}_i$ составляющих четырехполюсников.

Установим связь комплексных параметров эквивалентных схем четырехполюсников с матричными и характеристическими параметрами.

Т-образная эквивалентная схема. Пусть на входе и выходе четырехполюсника действуют напряжения с комплексными амплитудами \dot{U}_{m1} , \dot{U}_{m2} , а направления токов соответствуют рис. 8.9. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{I}_{m1} &= \dot{I}_{m2} + \left(\frac{\dot{I}_{m2}\dot{Z}_2}{2} + \dot{U}_{m2} \right) \dot{Y} = \dot{Y}\dot{U}_{m2} + \left(1 + \frac{\dot{Y}\dot{Z}_2}{2} \right) \dot{I}_{m2}, \\ \dot{U}_{m1} &= \frac{\dot{I}_{m1}\dot{Z}_1}{2} + \frac{\dot{I}_{m2}\dot{Z}_2}{2} + \dot{U}_{m2} = \frac{\dot{I}_{m2}\dot{Z}_1}{2} + \left(\frac{\dot{I}_{m2}\dot{Z}_2}{2} + \dot{U}_{m2} \right) \frac{\dot{Y}\dot{Z}_1}{2} + \frac{\dot{I}_{m2}\dot{Z}_2}{2} + \dot{U}_{m2} = \\ &= \left(1 + \frac{\dot{Y}\dot{Z}_1}{2} \right) \dot{U}_{m2} + \left(\frac{\dot{Z}_1}{2} + \frac{\dot{Z}_2}{2} + \frac{\dot{Y}\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{4} \right) \dot{I}_{m2}. \end{aligned}$$

Эти уравнения можно представить в матричной форме:

$$\begin{cases} \dot{U}_{m1} = \left(1 + \dot{Y}\dot{Z}_1/2 \right) \dot{U}_{m2} + \left(\dot{Z}_1/2 + \dot{Z}_2/2 + \dot{Y}\dot{Z}_1\dot{Z}_2/4 \right) \dot{I}_{m2}, \\ \dot{I}_{m1} = \dot{Y}\dot{U}_{m2} + \left(1 + \dot{Y}\dot{Z}_2/2 \right) \dot{I}_{m2}. \end{cases} \quad (8.38)$$

Отсюда

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 + \dot{Y}\dot{Z}_1/2 & \dot{Z}_1/2 + \dot{Z}_2/2 + \dot{Y}\dot{Z}_1\dot{Z}_2/4 \\ \dot{Y} & 1 + \dot{Y}\dot{Z}_2/2 \end{bmatrix}. \quad (8.39)$$

Для симметричного четырехполосника ($\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}$) имеем

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 + \dot{Y}\dot{Z}/2 & \dot{Z} + \dot{Y}\dot{Z}^2/4 \\ \dot{Y} & 1 + \dot{Y}\dot{Z}/2 \end{bmatrix}. \quad (8.40)$$

Из трех коэффициентов матрицы \mathbf{A} симметричного четырехполосника наиболее важны коэффициенты передачи напряжения в режиме холостого хода и тока в режиме короткого замыкания:

$$\dot{A}_{11} = \dot{A}_{22} = \text{ch}\dot{\gamma} = 1 + \dot{Y}\dot{Z}/2. \quad (8.41)$$

К тому же из (8.41) легко определить характеристический параметр $\dot{\gamma}$.

Для построения характеристического сопротивления симметричного T-образного четырехполосника используем формулы (8.32). Тогда

$$\dot{Z}_0^T = \sqrt{\frac{\dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21}}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}}{\dot{Y}}} \sqrt{1 + \frac{\dot{Y}\dot{Z}}{4}}. \quad (8.42)$$

П-образная эквивалентная схема. Пусть на входе и выходе четырехполосника по-прежнему действуют напряжения с комплексными амплитудами \dot{U}_{m1} , \dot{U}_{m2} . Тогда

$$\begin{aligned} \dot{U}_{m1} &= \dot{Z} \left(\dot{I}_{m2} + \frac{\dot{U}_{m2}\dot{Y}_2}{2} \right) + \dot{U}_{m2} = \left(1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}_2}{2} \right) \dot{U}_{m2} + \dot{Z}\dot{I}_{m2}, \\ \dot{I}_{m1} &= \frac{\dot{U}_{m1}\dot{Y}_1}{2} + \frac{\dot{U}_{m2}\dot{Y}_2}{2} + \dot{I}_{m2} = \left(\frac{\dot{Y}_1}{2} + \frac{\dot{Y}_2}{2} + \frac{\dot{Z}\dot{Y}_1\dot{Y}_2}{4} \right) \dot{U}_{m2} + \left(1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}_1}{2} \right) \dot{I}_{m2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\mathbf{A}^{\Pi} = \begin{bmatrix} 1 + \dot{Z}\dot{Y}_2/2 & \dot{Z} \\ \dot{Y}_1/2 + \dot{Y}_2/2 + \dot{Z}\dot{Y}_1\dot{Y}_2/4 & 1 + \dot{Z}\dot{Y}_1/2 \end{bmatrix}. \quad (8.43)$$

Для симметричного четырехполюсника ($\dot{Y}_1 = \dot{Y}_2 = \dot{Y}$) имеем

$$\mathbf{A}^{\Pi} = \begin{bmatrix} 1 + \dot{Y}\dot{Z}/2 & \dot{Z} \\ \dot{Y} + \dot{Z}\dot{Y}^2/4 & 1 + \dot{Y}\dot{Z}/2 \end{bmatrix}. \quad (8.44)$$

Коэффициенты передачи напряжения и тока не отличаются от соответствующих коэффициентов Т-образной схемы и удовлетворяют формуле (8.41), а характеристическое сопротивление симметричного Т-четырёхполюсника имеют вид

$$\dot{Z}_0^{\Pi} = \sqrt{\frac{\dot{A}_{12}}{\dot{A}_{21}}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}}{\dot{Y}}} / \sqrt{1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{4}}. \quad (8.45)$$

Г-образные эквивалентные схемы. Несимметричные Г-образные четырехполюсники используются в основном для согласования и обладают разными коэффициентами передачи напряжения и тока. \mathbf{A} -матрицы правого и левого Г-звеньев имеют вид

$$\mathbf{A}^{\text{пр}} = \begin{bmatrix} 1 & \dot{Z}/2 \\ \dot{Y}/2 & 1 + \dot{Y}\dot{Z}/4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{\text{лев}} = \begin{bmatrix} 1 + \dot{Y}\dot{Z}/4 & \dot{Z}/2 \\ \dot{Y}/2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.46)$$

Характеристические сопротивления Г-звеньев строятся из следующих соображений. Правое Г-звено можно рассматривать со стороны входа как П- и со стороны выхода как Т-четырёхполюсник, а левое Г-звено является зеркальным отражением правого. Поэтому для правого Г-звена

$$\dot{Z}_{01}^{\text{пр}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}}{\dot{Y}}} / \sqrt{1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{4}}, \quad \dot{Z}_{02}^{\text{пр}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}}{\dot{Y}}} \sqrt{1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{4}}, \quad (8.47)$$

а для левого Г-звена

$$\dot{Z}_{01}^{\text{лев}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}}{\dot{Y}}} \sqrt{1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{4}}, \quad \dot{Z}_{02}^{\text{лев}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}}{\dot{Y}}} / \sqrt{1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{4}}. \quad (8.48)$$

Часть III

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ И СИСТЕМАХ

Анализ временных и частотных преобразований сигналов при передаче через радиоэлектронные цепи и системы составляет важный раздел теоретической радиоэлектроники.

Третья часть учебного пособия посвящена анализу физических процессов в линейных цепях и системах, в качестве которых рассматриваются простейшие инерционные цепи, одноконтурные и многоконтурные колебательные системы, индуктивно-емкостные и резистивно-емкостные частотные фильтры, а также линии передачи. В замкнутых цепях всегда имеет место циркуляция электромагнитной энергии, что придает физическим процессам волновой характер. Однако при достаточно низкой частоте сигналов длина волны значительно превосходит геометрические размеры цепи, и фазу волны можно считать одинаковой во всех элементах. Переменные, описывающие радиоэлектронную цепь или систему, теряют волновой характер и становятся чисто колебательными, а параметры системы – сосредоточенными в точке. Именно такой подход используется во всех главах настоящего пособия. Распределенные в пространстве параметры вводятся только в главе, посвященной линиям передачи.

Инерционные цепи и одноконтурные колебательные системы рассматриваются как двухполюсники или как ненагруженные четырехполюсники. Частотные фильтры и линии передачи, напротив, считаются нагруженными четырехполюсниками.

Многоконтурные системы в общем случае представляются многополюсниками и описываются матрицами соответствующей размерности. Но их обычно удается заместить эквивалентными одноконтурными схемами и рассматривать как двух- или четырехполюсники.

Главная проблема состоит в выявлении закономерностей преобразования сигналов в зависимости от параметров систем. Для этого используются различные методы описания систем и модели сигналов. Как правило, анализ начинается с построения и решения дифференциальных уравнений, описывающих физические процессы, и завершается трактовкой полученных решений. Передаточные характеристики цепей строятся для элементарных воздействий $\sigma(t)$ и $\delta(t)$ или моделируются комплексными амплитудами гармонических сигналов, а дифференциальные уравнения приводятся к эквивалентным алгебраическим уравнениям во временной или частотной области.

Глава 9

Дифференцирование и интегрирование радиосигналов

Дифференцирование и интегрирование радиосигналов происходят при прохождении сигналов через инерционные цепи с реактивным элементом (индуктивностью или емкостью), обладающим памятью, и относятся к линейным преобразованиям сигналов. Оба преобразования могут быть выполнены в простых RL - или RC -цепях, или в активных устройствах – усилителях с резистивно-емкостной обратной связью.

Физические процессы в инерционных цепях, а значит, и дифференцирование или интегрирование описываются дифференциальными уравнениями первого порядка, которые легко составить и разрешить методом переменных состояний.

9.1. Дифференциальные уравнения инерционных цепей и их решение

Инерционную цепь можно составить из параллельного или последовательного соединения резистора R и реактивного элемента (L или C). Поскольку параллельной RC -цепи дуально эквивалентна последовательная RL -цепь, а параллельной RL -цепи – последовательная RC -цепь, ограничимся рассмотрением последовательных инерционных цепей (рис. 9.1).

Цепь из последовательно соединенных индуктивности L , сопротивления R и источника напряжения $U_{\text{вх}}(t)$ (рис. 9.1,а) описывается соотношением

$$U_{\text{вх}}(t) = U_L + U_R = L \frac{dI}{dt} + RI,$$
 или неоднородным дифференциальным уравнением

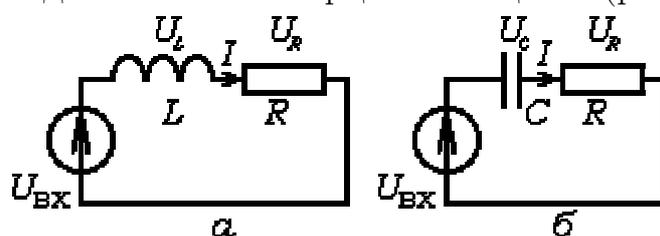


Рис. 9.1. Инерционные RL -цепь (а) и RC -цепь (б)

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{U_{\text{вх}}(t)}{L}. \quad (9.1)$$

Цепь из последовательно соединенных емкости C , сопротивления R и источника напряжения $U_{\text{вх}}(t)$ (рис. 9.1,б) описывается формулами

$$U_{\text{вх}}(t) = U_C + RI, \quad I = C dU_C/dt, \quad (9.2)$$

из которых следует неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC}U_C = \frac{U_{\text{вх}}(t)}{RC}. \quad (9.3)$$

Уравнения (9.1) и (9.3) подобны, а общее решение каждого из них представляет сумму какого-либо частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения (правая часть равна нулю).

Предположим, что $U_{\text{вх}}(t) = 0$, и определим общие решения однородных уравнений или *собственные реакции* RL - и RC -цепей. Согласно теории линейных дифференциальных уравнений эти решения имеют вид $x(t) = A \exp(kt)$, где A – постоянная, определяемая из начальных условий; k – корень соответствующего характеристического уравнения $k + R/L = 0$ или $k + 1/RC = 0$. Отсюда для тока $I(t)$ в RL -цепи и напряжения $U_C(t)$ в RC -цепи имеем

$$I(t) = A'e^{-\frac{R}{L}t} = A'e^{-t/\tau'}, \quad U_C(t) = Ae^{-\frac{1}{RC}t} = Ae^{-t/\tau}. \quad (9.4)$$

Соотношения (9.4) описывают переходные процессы из состояний, заданных начальными условиями, в состояния с нулевыми значениями $I(t)$ и $U_C(t)$, причем за промежуток времени $t = \tau'$ или $t = \tau$ значения $I(t)$ и $U_C(t)$ изменяются в e раз. В инерционных цепях, лишенных начального запаса энергии, $A = 0$, $A' = 0$ и собственные реакции цепей отсутствуют.

- Промежуток времени, в течение которого параметр, характеризующий переходный процесс в радиоэлектронной цепи или системе, изменяется в e раз, называется *постоянной времени* этой цепи или системы.

Таким образом, $\tau' = L/R$ – постоянная времени RL -цепи; $\tau = RC$ – постоянная времени RC -цепи.

Импульсное воздействие на инерционные цепи. Пусть RL - или RC -цепь находится под воздействием скачка напряжения $U_{\text{вх}}(t) = E\sigma(t)$, где $\sigma(t)$ – функция Хевисайда. Будем искать частные решения (9.1) и (9.3) операторным методом. Тогда

$$\left(s + \frac{R}{L}\right)I(s) = \left(s + \frac{1}{\tau'}\right)I(s) = \frac{E}{sL}, \quad \left(s + \frac{1}{RC}\right)U_C(s) = \left(s + \frac{1}{\tau}\right)U_C(s) = \frac{E}{sRC}.$$

а операторные выражения токов и выходных напряжений в RL - и RC -цепи принимают вид

$$I(s) = \frac{E/L}{s(s+1/\tau')}, \quad U_R(s) = \frac{E/\tau'}{s(s+1/\tau')}, \quad U_L(s) = \frac{E}{s} - \frac{E/\tau'}{s(s+1/\tau')} = \frac{E}{s+1/\tau'},$$

$$U_C(s) = \frac{E/\tau}{s(s+1/\tau)}, \quad I(s) = \frac{E/R}{s+1/\tau}, \quad U_R(s) = \frac{E}{s+1/\tau}.$$

Переходя от изображений к оригиналам функций по теореме разложения Хевисайда (см. 4.3), для напряжений на элементах RL - и RC -цепи для $t \geq 0$ получим:

$$U_R(t) = E(1 - e^{-t/\tau'}), \quad U_L(t) = Ee^{-t/\tau'}, \quad (9.5)$$

$$U_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau}), \quad U_R(t) = Ee^{-t/\tau}. \quad (9.6)$$

Временные изменения напряжений на элементах RL - и RC -цепи полностью идентичны, поэтому в дальнейшем достаточно рассматривать только напряжения на элементах RC -цепи.

Графики зависимостей $U_C(t)$ и $U_R(t)$ для двух значений τ изображены на рис. 9.2. Видно, что напряжение $U_C(t)$ при малых значениях τ линейно нарастает, а $U_R(t)$ быстро спадает до нуля: длительность экспоненциального импульса на уровне $0.1E$ составляет 2.3τ . Поэтому $U_R(t)$ можно рассматривать в качестве приближенной модели производной от входного воздействия. Действительно, производной от σ -функции Хевисайда является δ -функция Дирака, и $U_R(t)$ при $\tau \rightarrow 0$ по форме приближается к $\delta(t)$.

Гармоническое воздействие. Так как отклик линейной цепи на гармоническое воздействие тоже гармоническая функция, будем искать частное решение уравнения (9.3) методом комплексных амплитуд.

Пусть $U_{\text{вх}}(t) = U_m \exp(j\omega t)$. Тогда

$$\dot{U}_C = \frac{U_{\text{вх}}}{R + 1/j\omega C} \cdot \frac{1}{j\omega C} = \frac{U_{\text{вх}}}{1 + j\omega\tau} = \frac{U_{\text{вх}}}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} e^{j\varphi}, \quad (9.7)$$

$$\dot{U}_R = \frac{U_{\text{вх}} R}{R + 1/j\omega C} = \frac{U_{\text{вх}} j\omega C R}{1 + j\omega C R} = \frac{U_{\text{вх}} \omega\tau}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} e^{j\varphi'}, \quad (9.8)$$

где $\varphi = -\arctg \omega\tau$, $\varphi' = \arctg 1/\omega\tau$,

$$\sin \varphi' = \cos \varphi = 1/\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}, \quad \cos \varphi' = -\sin \varphi = \omega\tau/\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}.$$

Переходя от комплексных амплитуд к напряжениям в вещественной форме, получим:

$$U_C(t) = \frac{U_m}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \cos(\omega t + \varphi) = U_m \cos \varphi \cos(\omega t + \varphi), \quad (9.9)$$

$$U_R(t) = \frac{U_m \omega\tau}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \cos(\omega t + \varphi') = U_m \sin \varphi \sin(\omega t + \varphi). \quad (9.10)$$

Общее решение уравнения (9.3) для гармонического воздействия равняется сумме общего решения (9.4) однородного уравнения и частного решения (9.9) неоднородного уравнения:

$$U_C(t) = Ae^{-t/\tau} + U_m \cos \varphi \cos(\omega t + \varphi).$$

Оно содержит неизвестную постоянную A , которую можно определить из начальных условий. В момент времени $t = 0$ начальный запас энергии отсутствует. Поэтому

$$U_C(0) = A + U_m \cos^2 \varphi = 0, \quad A = -U_m \cos^2 \varphi,$$

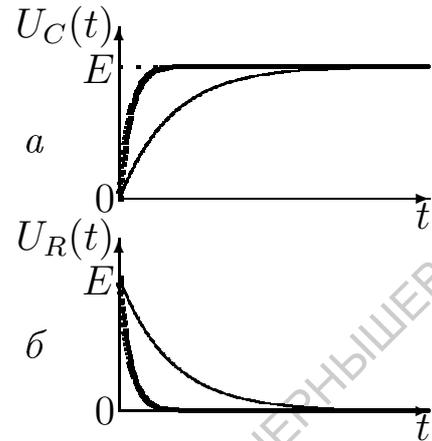


Рис. 9.2. Зависимости $U_C(t)$ (а) и $U_R(t)$ (б) для $\tau = 1c$ (тонкие линии) и $\tau = 0.1c$ (жирные линии)

а временные функции $U_C(t)$ и $U_R(t)$ удовлетворяют равенствам:

$$U_C(t) = U_m \cos \varphi \cos(\omega t + \varphi) - U_m \cos^2 \varphi e^{-t/\tau}, \quad (9.11)$$

$$U_R(t) = U_m \sin \varphi \sin(\omega t + \varphi) + U_m \cos^2 \varphi e^{-t/\tau}. \quad (9.12)$$

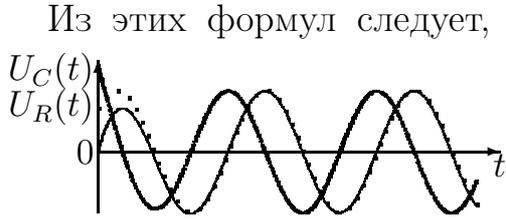


Рис. 9.3. Зависимости $U_C(t)$ (тонкая линия) и $U_R(t)$ (жирная линия) для $\omega = 0.1$ р/с и $\tau = 10$ с. Точками изображено решение однородного уравнения (9.3)

Из этих формул следует, что при гармоническом воздействии напряжения на элементах цепи состоят из двух слагаемых, первое из которых описывает установившийся процесс, а второе – переход из равновесного состояния в установившееся. Для малых τ второе слагаемое быстро затухает, а для больших τ его амплитуда мала, так как $\varphi = -\arctg \omega \tau \rightarrow -\pi/2$, а $\cos^2 \varphi \rightarrow 0$. На рис. 9.3 изображены зависимости, рассчитанные по формулам (9.11) и (9.12) для $\omega = 0.1$ р/с, $\tau = 10$ с ($\varphi = 45^\circ$).

Если на инерционную цепь одновременно воздействуют постоянное $E\sigma(t)$ и переменное $U_m \cos \omega t$ напряжения, то реакцию цепи в установившемся режиме можно получить, рассматривая суммы напряжений U_C и U_R из соотношений (9.6), (9.11) и (9.12) при $t \rightarrow \infty$. Тогда

$$U_C(t) = E + U_m \cos \varphi \cos(\omega t + \varphi), \quad U_R(t) = U_m \sin \varphi \sin(\omega t + \varphi).$$

Комплексные и операторные коэффициенты передачи. Обратимся к соотношениям (9.7), (9.8) и рассмотрим в качестве комплексных коэффициентов передачи инерционной RC -цепи отношения амплитуд

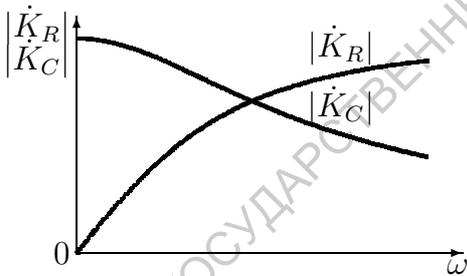


Рис. 9.4. Амплитудно-частотные характеристики RC -цепи

выходных напряжений (на емкости и сопротивлении) к амплитуде входного воздействия. Тогда

$$\dot{K}_C(j\omega) = \frac{\dot{U}_{mC}}{U_m} = \frac{1}{1+j\omega\tau} = |\dot{K}_C(\omega)| e^{j\varphi(\omega)},$$

$$\dot{K}_R(j\omega) = \frac{\dot{U}_{mR}}{U_m} = \frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau} = |\dot{K}_R(\omega)| e^{j\varphi'(\omega)},$$

$$|\dot{K}_C(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}, \quad |\dot{K}_R(\omega)| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}.$$

Зависимости $|\dot{K}_C(\omega)|$ и $|\dot{K}_R(\omega)|$ представлены на рис. 9.4. Это амплитудно-частотные характеристики цепи. Коэффициент передачи $|\dot{K}_R(\omega)|$ для малых значений частоты сигналов изменяется пропорционально ω , а $\varphi'(\omega) = \arctg(1/\omega\tau)$ в этой области располагается в окрестности $\pi/2$. Как было показано в 3.3 (пп. 11 и 12), такое преобразование амплитуд и фаз спектральных гармоник имеет место при дифференцировании сигналов. Поэтому напряжение U_R можно рассматривать в качестве производной входного сигнала при $\omega\tau \ll 1$.

Согласно второй АЧХ $|\dot{K}_C(\omega)|$ при малых значениях ω остается неизменным, а при $\omega\tau \gg 1$ убывает пропорционально $1/\omega$. Такое преобразование амплитуд и фаз спектральных гармоник имеет место при интегрировании сигналов. Поэтому напряжение U_C для $\omega\tau \gg 1$ можно рассматривать в качестве интеграла от входного сигнала.

ФЧХ $\varphi(\omega) = -\arctg \omega\tau$ в области низких частот обладают линейной зависимостью вносимого сдвига фаз от $\omega\tau$. Это свойство инерционных RC-цепей служит основой для создания фазовращателей.

Формулы для операторных коэффициентов передачи легко получить, замещая $j\omega$ комплексной частотой s в $\dot{K}_C(j\omega)$ и $\dot{K}_R(j\omega)$. Тогда

$$K_C(s) = \frac{1}{1 + s\tau}, \quad K_R(s) = \frac{s\tau}{1 + s\tau}.$$

9.2. Фазосдвигающие RC-цепи и активные системы

Инерционные цепи сдвигают фазу выходного сигнала относительно входного. Изменяя величину R , вносимый сдвиг фаз удается регулировать, но изменение сдвига фаз сопровождается изменением модуля коэффициента передачи, поэтому в качестве фазовращателей используются активные устройства, состоящие из RC-цепи и операционного усилителя (рис. 9.5).

Рассмотрим комплексный коэффициент передачи устройства $\dot{K}_U = \dot{U}_{\text{ВЫХ}}/\dot{U}_{\text{ВХ}}$. Считая ОУ линейным и предполагая,

что входные токи отсутствуют, а потенциалы инвертирующего входа

(-) и неинвертирующего входа (+) одинаковы, представим комплексные амплитуды входного и выходного напряжений и разность потенциалов входов ОУ в виде:

$$\dot{U}_{\text{ВХ}} = \dot{I}_1(R_1 + 1/j\omega C), \quad \dot{U}_{\text{ВЫХ}} = \dot{U}_{\text{ВХ}} + 2R\dot{I}_2, \quad \dot{I}_1 R_1 + \dot{I}_2 R = 0.$$

Из этих соотношений имеем

$$\dot{U}_{\text{ВЫХ}} = \dot{U}_{\text{ВХ}} - 2R\dot{I}_1 = \dot{U}_{\text{ВХ}} \left(1 - \frac{2j\omega CR_1}{1 + j\omega CR_1} \right)$$

$$\text{или} \quad \dot{U}_{\text{ВЫХ}}(1 + j\omega CR) = \dot{U}_{\text{ВХ}}(1 - j\omega CR).$$

Отсюда

$$\dot{K}_U = \frac{1 - j\omega CR}{1 + j\omega CR} = |\dot{K}_U| e^{j\varphi_K},$$

$$\text{где } |\dot{K}_U| = \frac{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}} = 1, \quad \varphi_K = -2\arctg \omega CR.$$

Таким образом, рассмотренное устройство (радиоэлектронная цепь с ОУ) представляет собой простой фазовращатель с хорошими параметрами: при изменении R от 0 до ∞ модуль коэффициента передачи остается постоянным и равен единице, а вносимый сдвиг фаз изменяется от нуля до -180° . Амплитудно-фазовая характеристика фазовращателя имеет вид полуокружности единичного радиуса с центром в начале координат.

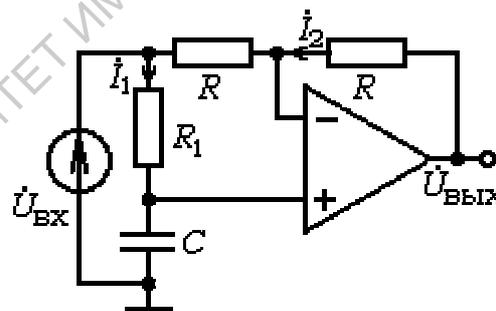


Рис. 9.5. Активный RC-фазовращатель

9.3. Дифференцирующие и интегрирующие RC-цепи и устройства

Радиоэлектронная цепь или система называется *дифференцирующей*, если мгновенные значения напряжения на выходе пропорциональны производной по времени от мгновенных значений напряжения на входе

$$U_{\text{ВЫХ}} = M_1 \frac{dU_{\text{ВХ}}}{dt},$$

и *интегрирующей*, если мгновенные значения напряжения пропорциональны интегралу от мгновенных значений напряжения на входе

$$U_{\text{ВЫХ}} = M_2 \int_0^t dU_{\text{ВХ}} dt,$$

где M_1 и M_2 – некоторые коэффициенты пропорциональности. Дифференцирование и интегрирование сигналов осуществляется в инерционных цепях и системах благодаря различной длительности запаздывания отдельных составляющих отклика относительно воздействия.

Обратимся к RC-цепи, изображенной на рис. 9.1,б, и рассмотрим зависимости напряжений на сопротивлении U_R и на емкости U_C от входного сигнала $U_{\text{ВХ}}$.

1. Пусть $U_{\text{ВЫХ}} = U_R$. Тогда $U_{\text{ВЫХ}}(t) = IR = U_{\text{ВХ}} - U_C$, а из (9.2) следует

$$\frac{dU_{\text{ВХ}}}{dt} - \frac{dU_{\text{ВЫХ}}}{dt} = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{\tau} \quad \text{или} \quad U_{\text{ВЫХ}}(t) = \tau \frac{dU_{\text{ВХ}}}{dt} - \tau \frac{dU_{\text{ВЫХ}}}{dt}. \quad (9.13)$$

Первое слагаемое в правой части равенства пропорционально производной входного сигнала, т.е. имеет место процесс дифференцирования, а второе слагаемое представляет добавку, искажающую результат дифференцирования. Она уменьшается с уменьшением постоянной времени $\tau = RC$, но одновременно уменьшается и величина выходного сигнала. Идеальное дифференцирование невозможно.

2. Пусть $U_{\text{ВЫХ}} = U_C = \frac{1}{C} \int I dt$. Из уравнения (9.2) имеем $I = (U_{\text{ВХ}} - U_C)/R$ и $U_{\text{ВЫХ}}$ удовлетворяет соотношению

$$U_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{\tau} \int U_{\text{ВХ}}(t) dt - \frac{1}{\tau} \int U_{\text{ВЫХ}}(t) dt. \quad (9.14)$$

Первое слагаемое в правой части равенства пропорционально интегралу от входного сигнала, т.е. имеет место процесс интегрирования. Второе слагаемое представляет добавку, искажающую результат интегрирования. Она уменьшается с ростом постоянной времени τ , но одновременно уменьшается и величина выходного сигнала.

Точность дифференцирования и интегрирования зависят от многих факторов. Для наиболее важных импульсных процессов точность дифференцирования и интегрирования можно оценить по величине отношения постоянной времени цепи τ к длительности импульсного сигнала.

Пусть на входе RC -цепи действует импульсный сигнал прямоугольной формы с амплитудой U_0 и длительностью $t_{и}$. Представим его наложением двух сдвинутых во времени функций Хевисайда (см. 1.2.4):

$$U(t) = U_0\sigma(t) - U_0\sigma(t - t_{и}). \quad (9.15)$$

Отклики $U_R(t)$ и $U_C(t)$ на это воздействие, согласно (9.6), имеют вид

$$U_R(t) = U_0e^{-t/\tau}\sigma(t) - U_0e^{-(t-t_{и})/\tau}\sigma(t - t_{и}), \quad (9.16)$$

$$U_C(t) = U_0(1 - e^{-t/\tau})\sigma(t) - U_0(1 - e^{-(t-t_{и})/\tau})\sigma(t - t_{и}). \quad (9.17)$$

Прежде всего отметим, что при $\tau > t_{и}$ напряжение $U_R(t)$, а при $\tau < t_{и}$ напряжение U_C воспроизводят входной сигнал (рис. 9.6) с небольшими искажениями (тонкие линии), т.е. дифференцирование и интегрирование сигналов не происходит.

Дифференцирование.

При $\tau \ll t_{и}$ (рис. 9.6,а) $U_R(t)$ представляет два экспоненциальных импульса, разделенных временем $t_{и}$ и соответствующих δ -функциям Дирака, которые возникают в указанные моменты времени при строгом дифференцировании.

Дифференцирование укорачивает импульсы, сохраняет только их фронты и поэтому называется еще *укорочением* или *обострением* импульсов, а цепи – *обостряющими*. Экспоненциальные (укороченные) импульсы принято считать удовлетворительными моделями δ -функций, а цепь *дифференцирующей*, если

$$\tau/t_{и} < 0.1.$$

Замещая в (9.13) $dU_{\text{вых}}/dt$ отношением конечных приращений и выбирая $t_{и}$ в качестве Δt , получим:

$$U_{\text{вых}}(t) + \frac{\tau}{t_{и}}U_{\text{вых}} = \tau \frac{dU_{\text{вх}}}{dt}, \quad U_{\text{вых}}(t) \cong \tau \frac{dU_{\text{вх}}}{dt}.$$

Более точное дифференцирование сигналов можно осуществить в системах из дифференцирующей RC -цепи и операционного усилителя (ОУ).

Пусть входной сигнал подключен к инвертирующему входу ОУ (рис. 9.7) через емкость C , его неинвертирующий вход заземлен, а цепь обратной связи составляет сопротивление R . Считая ОУ идеальным (входные токи отсутствуют, а потенциалы входов одинаковы), получим:

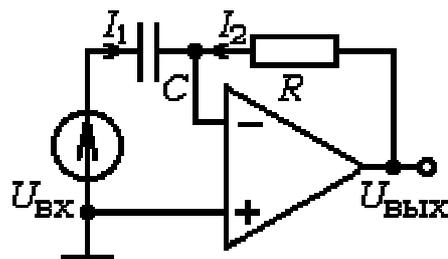


Рис. 9.7. Дифференцирующее устройство с ОУ

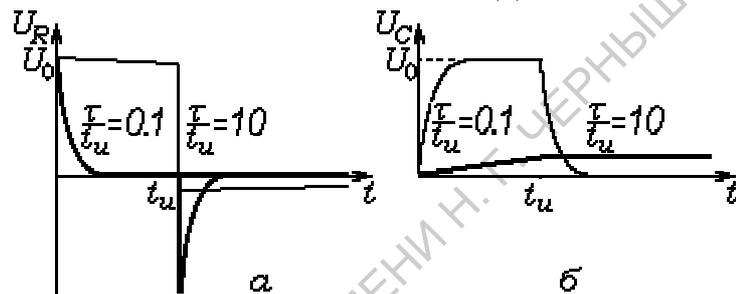


Рис. 9.6. Реакции RC -цепи на воздействие в виде прямоугольного импульса при $\tau < t_{и}$ и $\tau > t_{и}$. Жирные линии соответствуют удовлетворительному дифференцированию (а) и интегрированию (б)

$$I_1 = -I_2, \quad C \frac{dU_{\text{ВХ}}}{dt} = -\frac{U_{\text{ВЫХ}}}{R} \quad \text{или} \quad U_{\text{ВЫХ}}(t) = -RC \frac{dU_{\text{ВХ}}}{dt},$$

что соответствует точному дифференцированию. Полученные результаты вполне объяснимы. В RC -цепи ток, а значит, и $U_{\text{ВЫХ}}$, пропорциональны $dU_{\text{ВХ}}/dt$ пока $U_R \ll U_{\text{ВХ}}$. В дифференцирующих устройствах с линейными ОУ пропорциональность тока в цепи обратной связи (и $U_{\text{ВЫХ}}$) и $dU_{\text{ВХ}}/dt$ выполняется постоянно.

В реальных системах хорошее дифференцирование достигается в ограниченном диапазоне частот при усложнении цепи обратной связи [9,16].

Интегрирование. При $\tau \gg t_{\text{и}}$ экспоненциальные члены $\exp(-t/\tau)$ можно аппроксимировать приближенной формулой $\exp(-t/\tau) \cong 1 - t/\tau$, а соотношение (9.17) представить в виде

$$U_C(t) \cong U_0 \frac{t}{\tau} \sigma(t) - U_0 \frac{t - t_{\text{и}}}{\tau} \sigma(t - t_{\text{и}}).$$

Из этой формулы видно, что напряжение $U_C(t)$ в пределах импульса линейно нарастает, а с окончанием импульса начинает спадать. Такое изменение $U_C(t)$ соответствует точному интегрированию прямоугольного импульса (см. рис. 9.6,б) и заключается в *удлинении* импульса и *сглаживании* его фронтов, поэтому интегрирующие цепи называются еще *удлиняющими* или *сглаживающими*. Как и в случае дифференцирования введем условие, при выполнении которого результат интегрирования еще возможно считать удовлетворительным.

Используя теорему о среднем для интеграла ошибки интегрирования в (9.14) и полагая $t_{\text{и}} U_{\text{ВЫХ,ср}}/\tau < U_{\text{ВЫХ}}/10$, можно получить:

$$\tau/t_{\text{и}} > 10.$$

Наиболее точное интегрирование сигналов осуществляется в системах, содержащих интегрирующую RC -цепь и операционный усилитель, и объясняется вышерассмотренными причинами. Если входной сигнал подается на инвертирующий вход ОУ через сопротивление R (рис. 9.8), а в цепи обратной связи используется емкость C , то для идеального ОУ име-

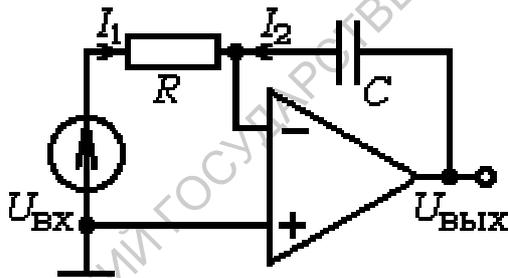


Рис. 9.8. Интегрирующее устройство с ОУ

ем

$$I_1 = -I_2, \quad \frac{U_{\text{ВХ}}}{R} = -C \frac{dU_{\text{ВЫХ}}}{dt}$$

или $U_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{RC} \int U_{\text{ВХ}} dt$, что соответствует точному интегрированию.

Таким образом, в радиоэлектронных цепях с ОУ в отличие от инерционных электрических цепей вращение фазы гармонических колебаний, а также дифференцирование и интегрирование произвольных сигналов, реализуется наиболее точно.

Глава 10

Собственные и вынужденные колебания в одноконтурных резонансных цепях

В отличие от инерциальных RL - и RC -цепей физические процессы в радиоэлектронных цепях и системах, содержащих индуктивные и емкостные элементы одновременно, отличаются более сложной динамикой и разнообразием колебательных процессов. В простейшем случае в радиоэлектронной цепи, содержащей одну индуктивность и одну емкость (консервативная колебательная цепь), возникают собственные гармонические колебания, а периодические внешние воздействия вызывают резонансные явления, имеющие огромное значение для многих областей не только радиоэлектроники, но и естествознания в целом.

Возникновение периодических, в частности гармонических колебаний, почти всегда сопровождается попеременным превращением энергии одного вида в энергию другого вида. В механике потенциальная энергия, запасенная в поле силы тяжести или упругой деформации пружины, превращается в кинетическую энергию движущейся массы (маятника или маховика), а в электрическом колебательном контуре энергия электрического поля, запасенная в емкости C , переходит в энергию магнитного поля, запасаемую в индуктивности L . Если колебательная система консервативная, то ее полная энергия не изменяется во времени и колебания могут продолжаться сколь угодно долго.

В реальных физических системах колебания сопровождаются постоянным переходом запасаемой энергии в тепловую, т.е. с течением времени происходит *диссипация* (от лат. *dissipatio* – рассеяние) энергии. В механических системах за диссипацию отвечают различные виды трения, а в радиоэлектронике – активные сопротивления проводников, утечки в диэлектриках, потери на излучение и т.п.

Соединения реальных катушек индуктивности и конденсаторов можно представить в виде простых электрических схем, если считать катушки индуктивности и конденсаторы лишенными потерь и заместить их идеализированными элементами L и C , а все потери в элементах цепи объединить в виде сопротивления R .

Модели, составленные из идеализированных L , C и R элементов, позволяют абстрагироваться от многих свойств реальных колебательных систем и рассмотреть физические процессы в наиболее общем виде, не отвлекаясь на частности.

Реальные LCR -контур, настроенные на невысокие частоты, по-видимому, можно считать наилучшей физической моделью колебательных систем с одной степенью свободы. Для этого есть несколько причин. Во-первых, в качестве переменных, описывающих колебательный процесс, выступают электрические сигналы, удобные для измерений. Во-вторых, в LCR -контуре легко изменять параметры колебательной системы и устанавливать нужные частоту колебаний и показатель затухания. В третьих, с помощью электромеханических аналогий на радиотехнических моделях оказывается возможным изучать общие закономерности различных колебательных процессов в механике, акустике, гидродинамике, определить частотные и импедансные характеристики колебательных систем, разработать эффективные методы подавления паразитных колебаний, оценивать прочность конструкций и т.д.

В настоящей главе колебания в диссипативных радиоэлектронных системах с одной степенью свободы будут проанализированы на примере линейного LCR -контур.

10.1. Дифференциальное уравнение LCR -контур и его решение

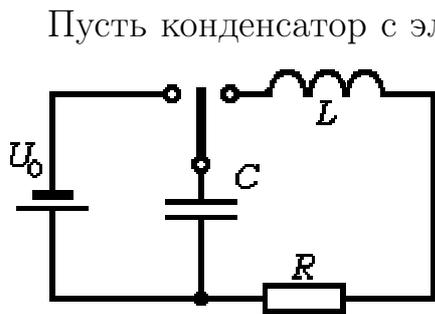


Рис. 10.1. Возбуждение колебаний в LCR -контуре

Пусть конденсатор с электрической емкостью C , заряженный до напряжения U_0 , замкнут через цепь, состоящую из катушки с индуктивностью L и резистора с сопротивлением R (рис. 10.1). В цепи возникает переменный ток $I(t) = dq/dt$, где q – заряд конденсатора. Амплитуда тока с течением времени падает до нуля, когда вся запасенная в емкости энергия перейдет в тепло.

Падения напряжений на индуктивности L , сопротивлении R и емкости C в произвольный момент времени удовлетворяют

соотношениям

$$U_L(t) = L \frac{d^2q}{dt^2} = L \frac{dI}{dt}, \quad U_R = R \frac{dq}{dt} = RI, \quad U_C(t) = \frac{1}{C}q = \frac{1}{C} \int I(t)dt,$$

а их сумма, равная нулю, представляет линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0. \quad (10.1)$$

Дифференцируя это уравнение по t и умножая на $1/L$, получим:

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = 0$$

или

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 2\alpha \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = 0, \quad (10.2)$$

где $\alpha = R/2L$ – показатель затухания; $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – круговая частота собственных колебаний в системе без потерь. В теории колебаний такое

уравнение называется уравнением линейного осциллятора с вязким (линейным) трением.

Если правая часть уравнения отлична от нуля и содержит функцию времени, то дифференциальное уравнение становится неоднородным. Неоднородное дифференциальное уравнение описывает *вынужденные колебания* в диссипативном колебательном контуре.

Будем искать решение уравнения (10.2) в виде $I(t) = Ae^{kt}$. Подставляя $I(t)$ в (10.2), получим характеристическое уравнение для k :

$$k^2 + 2\alpha k + \omega_0^2 = 0. \quad (10.3)$$

Оно имеет корни

$$k_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm \beta, \quad (10.4)$$

а общее решение дифференциального уравнения (10.2) принимает вид

$$I(t) = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t} = e^{-\alpha t} (A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t}). \quad (10.5)$$

Для определения постоянных A_1 и A_2 используем начальные условия задачи: при $t = 0$ цепь замыкается. Начальный ток $I = 0$, а скорость его изменения отлична от нуля и $L \frac{dI}{dt} = -U_0$. Тогда

$$I(0) = A_1 + A_2 = 0, \text{ т.е. } A_2 = -A_1,$$

$$L \left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} = A_1 k_1 + A_2 k_2 = 2\beta L A_1 = -U_0, \text{ т.е. } A_1 = -\frac{U_0}{2\beta L},$$

и при заданных начальных условиях

$$I(t) = -\frac{U_0}{2\beta L} e^{-\alpha t} (e^{\beta t} - e^{-\beta t}) = -\frac{U_0}{\beta L} e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \beta t. \quad (10.6)$$

Итак, переменные $I(t)$ и $\frac{dI}{dt}(t)$, описывающие состояние колебательной системы в произвольный момент времени, однозначно определяются ее начальным состоянием.

10.2. Собственные колебания в LCR-контуре

Характер собственных колебаний в LCR-контуре зависит от соотношения запасенной и рассеиваемой в контуре энергий, которое нетрудно оценить, сравнивая параметры L и R или ω_0^2 и α^2 . При этом появляются незатухающие (при $\alpha = 0$) и затухающие (при $\alpha^2 < \omega_0^2$) колебания или апериодические процессы (при $\alpha^2 \geq \omega_0^2$), которые будут рассмотрены ниже.

10.2.1. Собственные колебания в контуре без потерь

Пусть $\alpha = 0$, т.е. колебательная система консервативная. При этом корни уравнения (10.3) становятся мнимыми ($\beta = \pm j\omega_0$), а решение (10.6) принимает вид

$$I(t) = -(U_0/\omega_0 L) \sin \omega_0 t, \quad (10.7)$$

где ω_0 – частота собственных колебаний консервативного контура. Напряжения на индуктивности и емкости удовлетворяют соотношениям

$$U_L(t) = L \frac{dI}{dt} = -U_0 \cos \omega_0 t, \quad (10.8)$$

$$U_C(t) = \frac{1}{C} \int I(t) dt = \frac{U_0}{LC\omega_0^2} \cos \omega_0 t = U_0 \cos \omega_0 t.$$

Таким образом,

1) собственные колебания в консервативном колебательном контуре описываются гармоническими функциями,

2) амплитуда колебаний однозначно определяется начальными условиями задачи, а частота – параметрами элементов контура, отвечающих за накопление энергии, и не зависит от начальных условий,

3) ток и напряжения на реактивных элементах контура сдвинуты по фазе на $\pi/2$, т.е. максимум магнитной энергии соответствует нулевой электрической энергии и наоборот.

10.2.2. Собственные колебания в контуре с малым затуханием

Пусть $\alpha^2 < \omega_0^2$. Тогда корни характеристического уравнения (10.3) становятся комплексно сопряженными. Обозначим $\beta = \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \pm j\omega$. Частоту ω будем называть *круговой частотой собственных колебаний диссипативного контура*. Собственные колебания тока, согласно (10.6) описываются формулой

$$I(t) = -\frac{U_0}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin \omega t, \quad (10.9)$$

а колебания напряжения на емкости C можно получить из (10.9) в виде

$$U_C(t) = -\frac{U_0}{\omega LC} \int e^{-\alpha t} \sin \omega t dt.$$

Обозначая неопределенный интеграл через \mathbf{J} и дважды применяя к \mathbf{J} интегрирование по частям, получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= -\frac{1}{\omega} e^{-\alpha t} \cos \omega t + c_1 - \frac{\alpha}{\omega} \int e^{-\alpha t} \cos \omega t dt = \\ &= -\frac{1}{\omega} e^{-\alpha t} \cos \omega t + c_1 - \frac{\alpha}{\omega} \left(\frac{1}{\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t + c_2 + \frac{\alpha}{\omega} \mathbf{J} \right), \end{aligned}$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования. Отсюда

$$\mathbf{J} = -\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} e^{-\alpha t} (\omega \cos \omega t + \alpha \sin \omega t) + c.$$

Полагая $\omega / \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} = \omega / \omega_0 = \sin \varphi$, получим $\alpha / \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} = \alpha / \omega_0 = \cos \varphi$,

$$\mathbf{J} = -\frac{e^{-\alpha t}}{\omega_0} (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) + c = -\frac{e^{-\alpha t}}{\omega_0} \sin (\omega t + \varphi) + c,$$

где $c = \frac{\omega^2}{\omega^2 + \alpha^2} (c_1 - \frac{\alpha c_2}{\omega})$ – линейная комбинация постоянных интегрирования; φ – задержка по фазе напряжения $U_C(t)$ относительно тока $I(t)$. Напряжение $U_C(t)$ с учетом найденного для \mathbf{J} выражения принимает вид

$$U_C(t) = \frac{U_0}{\omega \sqrt{LC}} e^{-\alpha t} \sin (\omega t + \varphi) + c_0,$$

где $c_0 = \frac{U_0}{\sqrt{LC}(\omega^2 + \alpha^2)}(\alpha c_2 - \omega c_1)$. Постоянную интегрирования c_0 можно найти из начальных условий задачи: $U_C = U_0$ при $t = 0$. Используя введенные выше обозначения $\sin \varphi = \omega / (\omega^2 + \alpha^2)$ и $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$, получим:

$$U_C(0) = \frac{U_0 \omega_0}{\omega} \sin \varphi + c_0 = U_0 + c_0.$$

Таким образом, $c_0 = 0$, а напряжение на емкости принимает вид

$$U_C(t) = \frac{U_0 \omega_0}{\omega} e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi), \quad (10.10)$$

где $\varphi = \arctg(\omega/\alpha)$. Временные изменения тока и напряжения на емкости для различных значений α представлены на рис. 10.2.

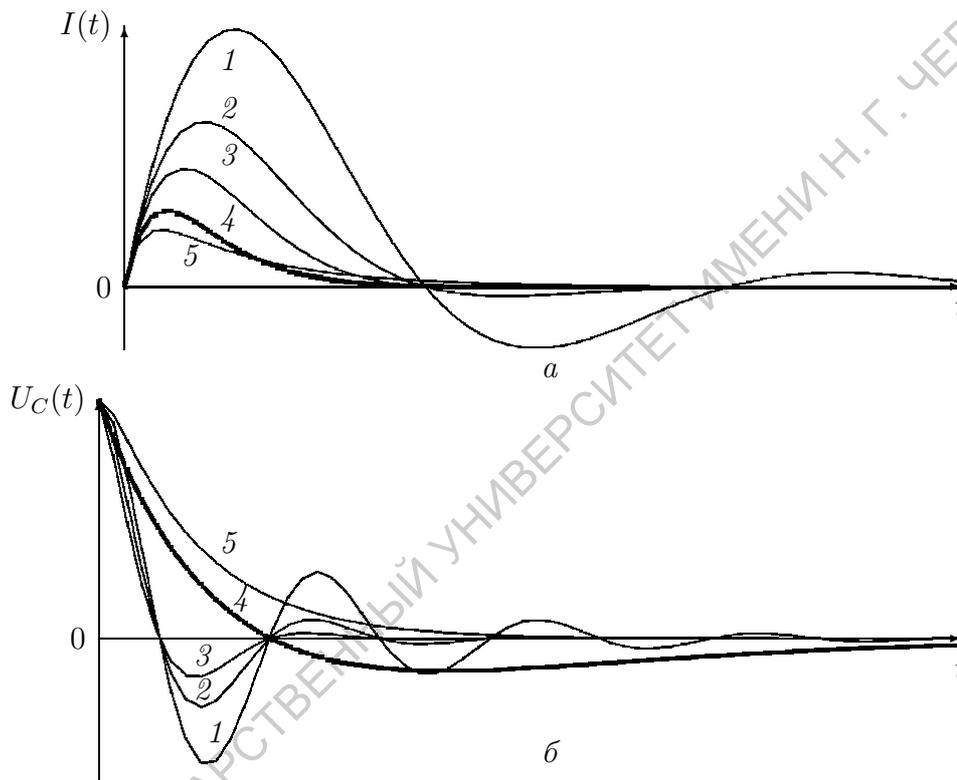


Рис. 10.2. Изменения тока (а) и напряжения на емкости (б) в диссипативном контуре при различных значениях показателя затухания α :
 1 - $\alpha = 0.2\omega_0$ ($R = 0.4\rho$); 2 - $\alpha = 0.4\omega_0$ ($R = 0.8\rho$); 3 - $\alpha = 0.6\omega_0$ ($R = 1.2\rho$);
 4 - $\alpha = \omega_0$ ($R = 2\rho$); 5 - $\alpha = 1.5\omega_0$ ($R = 3\rho$)

Как следует из формул (10.9) и (10.10) и рис. 10.2 (кривые 1), в диссипативной системе при малых значениях α амплитуда колебаний уменьшается со временем по экспоненциальному закону, и процесс затухания носит *колебательный характер*. Ток и напряжение многократно изменяют знак прежде, чем достигают пренебрежимо малой величины.

Выразим α и ω_0 через первичные параметры контура. Тогда

$$\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{или} \quad R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Величина $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ имеет размерность сопротивления и называется *характеристическим сопротивлением LCR-контура*.

Так как для переменного тока с частотой ω_0 комплексные сопротивления реактивных элементов L и C соответственно равны $j\omega_0 L$ и $1/j\omega_0 C$,

- характеристическое сопротивление LCR -контура представляет среднее геометрическое или среднее пропорциональное из сопротивлений реактивных элементов контура на частоте ω_0 :

$$\sqrt{\frac{j\omega_0 L}{j\omega_0 C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho. \quad (10.11)$$

Формулу для характеристического сопротивления контура можно несколько видоизменить, если учесть, что $\sqrt{LC} = 1/\omega_0$. Тогда

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}. \quad (10.12)$$

10.2.3. Аperiodические процессы при критическом и закритическом затухании

1. Пусть $\alpha^2 = \omega_0^2$. Будем называть такое затухание критическим. Тогда $\beta = 0$, $R = 2\rho$, а характеристическое уравнение (10.3) имеет единственный корень $k = -\alpha$ кратности 2.

Так как $\beta = 0$, решение (10.6) содержит неопределенность типа $0/0$. Чтобы избавиться от нее, воспользуемся правилом Лопиталья. Тогда

$$I(t) = \frac{U_0}{L} t e^{-\alpha t}, \quad (10.13)$$

$$U_C(t) = \frac{1}{C} \int I(t) dt = U_0 (1 + \alpha t) e^{-\alpha t}. \quad (10.14)$$

Зависимости от времени тока и напряжения на емкости C при критическом затухании представлены на рис. 10.2 кривыми 4.

2. Пусть $\alpha^2 > \omega_0^2$. В этом случае корни характеристического уравнения (10.3) вещественны и различны, сопротивление потерь удовлетворяет соотношению

$$R > 2\rho,$$

а решение дифференциального уравнения – соотношению (10.6). Как видно из рис. 10.2 (кривые 5), напряжение на емкости монотонно убывает, а ток в контуре сначала нарастает, а затем убывает до нуля, т.е. имеет место *aperиодический процесс*. Можно показать, что падение напряжения на емкости C удовлетворяет соотношению

$$U_C(t) = \frac{U_0 \omega_0}{\beta} e^{-\alpha t} \operatorname{sh}\left(\beta t + \operatorname{arcsch}\left(\frac{\beta}{\omega_0}\right)\right).$$

Аperiodические движения широко используются в различных областях техники для подавления колебательных процессов (например, в стрелочных электроизмерительных приборах), причем "оптимальное демпфирование" достигается при $R = 1.2\rho$.

В заключение сформулируем общие свойства собственных колебаний в диссипативном колебательном контуре.

1. Ток и напряжения в диссипативном контуре затухают во времени, периодически изменяя знак, когда затухание меньше критического, или изменяя знак не более одного раза, когда затухание больше или равно критическому. Другими словами, система, получив начальное возмущение, устремляется к состоянию равновесия¹, при котором переменная и ее производная (ток и напряжение) равны нулю. Приближение к состоянию равновесия может происходить аperiodически или путем периодического уменьшения амплитуды отклонения от состояния равновесия.

2. Колебательное и аperiodическое изменение переменных разделяет равенство $R = 2\rho$. Этому соотношению можно дать физическую трактовку, если воспользоваться соотношением (10.12) и представить одно ρ как индуктивное ($\omega_0 L$), а другое – как емкостное ($1/(\omega_0 C)$) сопротивления на частоте ω_0 (см. 7.2). Тогда условие критичности колебаний принимает вид

$$R = 2\rho = \omega_0 L + \frac{1}{\omega_0 C}. \quad (10.15)$$

- Процессы в диссипативном контуре имеют *колебательный характер*, когда сумма модулей реактивных сопротивлений превышает сопротивление потерь, и *aperiodический характер*, когда она меньше сопротивления потерь.

3. Амплитуды переменных однозначно определяются начальными условиями задачи, а частота колебаний не зависит от начальных условий и является функцией не только реактивных параметров контура, но и его затухания. Частота собственных колебаний диссипативного контура ω меньше, чем у консервативного контура (ω_0), т.е. перекачка энергии между реактивными элементами замедляется с увеличением α . Если диссипация колебаний мала (сопротивление потерь $R \rightarrow 0$), то $\omega \rightarrow \omega_0$.

4. Сдвиги по фазе между током диссипативного контура и напряжениями на его реактивных элементах, согласно (10.10), отличаются от $\pi/2$: напряжение на емкости опережает ток на угол φ , а напряжение на индуктивности отстает от тока.

10.2.4. Основные параметры колебательных систем

В процессе изучения собственных колебаний введены различные параметры колебательных систем. Было бы желательно установить их взаимосвязь и определить физический смысл.

Сопоставим энергию, запасенную в контуре, с энергией потерь. Пусть при замыкании контура в нем возникает переменный ток с амплитудой I_m . Тогда запасенная в индуктивности энергия W описывается соотношением $W = LI_m^2/2$. Мощность потерь P , возникающих в сопротивлении

¹В состоянии равновесия в колебательном контуре напряжения на его элементах и токи в цепи равны нулю, т.е. какие-либо динамические процессы отсутствуют, и система находится в состоянии покоя.

R , удовлетворяет равенству $P = RI_m^2/2$, а полная энергия потерь за период колебаний имеет вид $W_{\Pi} = P \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi RI_m^2}{\omega_0}$.

- Безразмерная величина, превышающая в 2π раз отношение полной энергии к энергии, рассеиваемой системой за период колебаний, называется *добротностью* колебательной системы:

$$Q = 2\pi \frac{W}{W_{\Pi}} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\rho}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R}. \quad (10.16)$$

Безразмерный параметр $d = R/\rho = 1/Q$ называется *затуханием*.

Обратимся теперь к показателю затухания α . С помощью формулы (10.9) рассмотрим два следующих друг за другом наибольших отклонения в одну сторону. При малых диссипациях можно считать, что эти отклонения разделены промежутком времени, равным периоду T . Тогда

$$\ln \frac{I(t)}{I(t+T)} = \alpha T = \Theta.$$

Параметр Θ характеризует скорость затухания колебаний и называется логарифмическим *декрементом затухания* (от лат. decrementum – уменьшение, убыль). Раскрывая α , можно установить связь декремента затухания с затуханием d в виде

$$\Theta = (R/2L)(2\pi/\omega_0) = \pi d.$$

10.2.5. Дифференциальное уравнение LCR -контура в безразмерном виде

Дифференциальное уравнение LCR -контура можно привести к безразмерному виду, пригодному для описания колебаний иной физической природы (механических, акустических, оптических), если в качестве независимой переменной использовать "безразмерное" время $\tau = \omega_0 t$. Переходя к новой переменной в уравнении (10.2) и вводя вместо I безразмерную $x = I/I_{max}$, где $I_{max} = U_0/\omega_0 L$ согласно (10.9), получим:

$$\omega_0^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{\omega_0 R}{L} \frac{dx}{d\tau} + \omega_0^2 x = 0.$$

Отсюда

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{R}{\rho} \frac{dx}{d\tau} + x = 0.$$

С учетом введенных обозначений получаем дифференциальное уравнение в безразмерном виде:

$$\ddot{x} + d\dot{x} + x = 0. \quad (10.17)$$

10.3. Графическое представление колебаний на фазовой плоскости

Как показано в 10.1, состояние LCR -контура в любой момент времени описывается двумя переменными $I(t)$, $I'(t)$ и однозначно определяется двумя начальными условиями задачи – током $I(0)$ и его временной производной $I'(0)$. Общее решение дифференциального уравнения (10.2) можно представить геометрически на плоскости состояний или *фазовой плоскости* $x(t) = I(t)$, $y(t) = \dot{x}(t) = I'(t)$ семейством ориентированных фазовых траекторий. Совокупность фазовых траекторий при различных начальных условиях (рис.10.3) образует *фазовый портрет системы*.

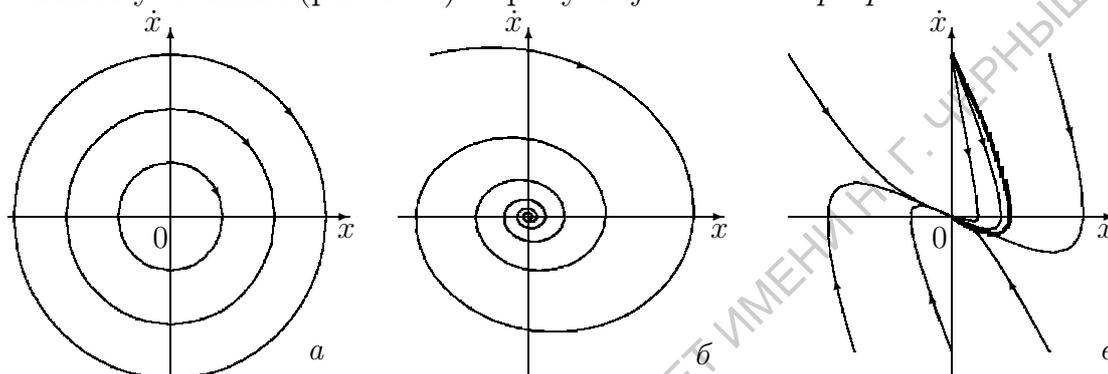


Рис. 10.3. Фазовые портреты консервативного (а) и диссипативного (б, в) контуров: б – при малом затухании; в – при закритическом затухании

10.3.1. Структура фазового пространства

Для построения фазовых портретов LCR -контуров дифференциальное уравнение (10.2) целесообразно заменить эквивалентной системой двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x} = y, \quad (10.18)$$

$$\dot{y} = -2\alpha y - \omega_0^2 x. \quad (10.19)$$

При делении второго уравнение на первое получим дифференциальное уравнение интегральных кривых на фазовой плоскости:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\alpha y + \omega_0^2 x}{y}. \quad (10.20)$$

Уравнение (10.20) определяет наклон касательной к фазовой траектории, проходящей через заданную точку, а результат его интегрирования дает фазовую траекторию $y(x)$, соответствующую заданным начальным условиям.

Рассмотрим характерные особенности фазовых портретов.

1. Все точки фазовой плоскости можно разделить на обыкновенные и особые. Через каждую обыкновенную точку (x, y) проходит единственная фазовая траектория и, согласно (10.20), ей соответствует определенный и единственный наклон касательной. В особых точках направление

касательной становится неопределенным. В настоящей главе особые точки классифицируются по характеру фазовых траекторий в их окрестности. Через особую точку либо не проходит ни одна интегральная кривая, либо больше одной. Нигде кроме особых точек фазовые траектории не пересекаются.

2. Точки фазовой плоскости, для которых одновременно $\dot{x} = 0$ и $\dot{y} = 0$ называются *состояниями равновесия*. Производная (10.20) в этих точках имеет неопределенное значение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}.$$

Таким образом, можно утверждать, что *особые точки фазового пространства соответствуют состояниям равновесия*.

3. Линейный диссипативный колебательный контур обладает единственным состоянием равновесия, расположенным на фазовой плоскости в начале координат, а величина диссипации влияет только на характер установления равновесия, т.е. определяет поведение фазовых траекторий в окрестности особой точки.

Динамика физических процессов в колебательном контуре, а значит и характер фазовых траекторий, определяются структурой корней уравнения (10.3), которые могут быть мнимыми, комплексно сопряженными или вещественными. Как было показано, наличие пары комплексно сопряженных корней свидетельствует о колебательном характере процесса установления состояния равновесия, а наличие двух вещественных отрицательных корней – об апериодическом затухании. В результате возникают три вида особых точек (см. рис. 10.3).

4. Вне оси абсцисс переменная $y = \dot{x}$ отлична от нуля, и с течением времени изображающая точка в верхней полуплоскости движется слева направо ($\dot{x} > 0$ и переменная $x(t)$ возрастает), а в нижней полуплоскости – справа налево ($\dot{x} < 0$ и переменная $x(t)$ убывает). Все фазовые траектории пересекают ось абсцисс (если точка пересечения не является особой) под прямым углом, так как переменная x сохраняет свое значение в окрестности $y = \dot{x} = 0$.

5. Периодическим колебаниям на фазовой плоскости соответствуют замкнутые траектории.

Рассмотрим конкретный вид фазовых портретов, представляющих процессы в консервативном и диссипативном контурах.

10.3.2. Фазовые портреты консервативных LC -контуров

Полагая в (10.20) $\alpha = 0$, получим:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega_0^2 x}{y} \quad \text{или} \quad y dy = -\omega_0^2 x dx. \quad (10.21)$$

Интегрируя, находим:

$$\frac{y^2}{\omega_0^2} + \frac{x^2}{1} = K \quad \text{или} \quad \frac{y^2}{K\omega_0^2} + \frac{x^2}{K} = 1, \quad (10.22)$$

Это уравнение эллипса. Длины его большой и малой осей зависят от величины K – постоянной интегрирования, которая в свою очередь определяется начальными условиями задачи.

Если при построении интегральных кривых использовать вместо (10.2) дифференциальное уравнение (10.17) в безразмерном виде, то эллипс вырождается в окружность радиуса ρ :

$$x^2 + y^2 = \rho^2 = K.$$

Наличие замкнутых фазовых траекторий свидетельствует о существовании периодических процессов, а наличие траекторий в виде эллипсов и окружностей – о гармоническом характере колебаний. Изображающая точка совершает вращательное движение по часовой стрелке (см. рис. 10.3,а). С уменьшением K радиус окружности ρ тоже уменьшается, и при $K=0$ окружность вырождается в точку в начале координат.

- Особая точка, в окрестности которой интегральные кривые не имеют особенностей и охватывают ее, называется *центром*.

10.3.3. Фазовые портреты диссипативных LCR -контуров

Диссипативный контур с малым затуханием. Обратимся к уравнению (10.2) и будем искать его решение в виде

$$x(t) = u(t)e^{-\alpha t}, \quad (10.23)$$

где $u(t)$ – вспомогательная функция. Подставляя $x(t)$,

$$\dot{x} = (\dot{u} - \alpha u)e^{-\alpha t}, \quad \ddot{x} = (\ddot{u} - 2\alpha\dot{u} + \alpha^2 u)e^{-\alpha t}$$

в уравнение (10.2) и учитывая, что $e^{-\alpha t} \neq 0$, получим:

$$\ddot{u} + (\omega_0^2 - \alpha^2)u = 0.$$

Это уравнение можно привести к безразмерному виду, если ввести "безразмерное" время $\tau = \omega t = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}t$. Тогда получим дифференциальные уравнения колебательного контура:

$$\ddot{u} + u = 0 \quad \text{или} \quad \frac{du}{d\tau} = v, \quad \frac{dv}{d\tau} = -u.$$

Интегральными кривыми на плоскости uOv оказываются окружности $u^2 + v^2 = \rho^2 = K$ или в параметрической форме $u = \rho \cos \tau$, $v = \rho \sin \tau$.

Возвращаясь к переменным (x, y) , получим:

$$x = \rho e^{-\alpha t} \cos \omega t, \quad y = -\omega \rho e^{-\alpha t} \sin \omega t.$$

Вводя переменную $\varphi = \omega t$, получим в полярных координатах уравнение логарифмической спирали (см. рис. 10.3,б)

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= \rho e^{-\alpha\varphi/\omega} \cos \varphi \\ y(\varphi) &= -\rho e^{-\alpha\varphi/\omega} \sin \varphi \end{aligned} \quad \text{или} \quad r(\varphi) = \rho e^{-\alpha\varphi/\omega}. \quad (10.24)$$

Итак, система, получив начальное возмущение, устремляется к состоянию равновесия, сохраняя колебательный характер движения, а изображающая точка, как и в случае консервативного контура, совершает вращательное движение по часовой стрелке вокруг начала координат, но ее радиус-вектор постоянно уменьшается. Фазовые траектории имеют вид логарифмических спиралей.

- Особая точка, асимптотическая для спиральных траекторий, называется *фокусом*. Фокус, к которому при $t \rightarrow \infty$ сходятся траектории, называется *устойчивым*, а фокус от которого расходятся траектории, – *неустойчивым*.

Диссипативный контур обладает положительным затуханием, и фокус устойчивый. Рассматривая проекции изображающей точки на оси координат, можно получить кривые, аналогичные линиям 1, представленным на рис. 10.2.

Диссипативный контур с критическим и закритическим затуханием. Согласно (10.4) критическому затуханию соответствует единственный вещественный и отрицательный корень характеристического уравнения, а закритическому затуханию – два вещественных и отрицательных корня. Начнем рассмотрение с закритического случая.

Пусть показатель затухания выбран так, что корни характеристического уравнения вещественны и различны:

$$k_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad k_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}.$$

Тогда решение системы дифференциальных уравнений (10.18) имеет вид

$$x(t) = Ae^{k_1 t} + Be^{k_2 t}, \quad (10.25)$$

где A и B – некоторые постоянные, зависящие от начальных условий. Дифференцируя (10.25) по времени, получим:

$$y(t) = \dot{x}(t) = k_1 A e^{k_1 t} + k_2 B e^{k_2 t}. \quad (10.26)$$

Чтобы построить уравнения фазовых траекторий, разрешим уравнения (10.25) и (10.26) относительно $e^{k_1 t}$ и $e^{k_2 t}$. Тогда

$$e^{k_1 t} = \frac{y - k_2 x}{(k_1 - k_2)A}, \quad e^{k_2 t} = \frac{y - k_1 x}{(k_2 - k_1)B}.$$

Приравнявая логарифмы последних выражений, находим:

$$\ln [(y - k_1 x)^{k_1}] = \ln [(y - k_2 x)^{k_2}] + \ln c$$

или

$$y - k_1 x = c(y - k_2 x)^{k_2/k_1},$$

где $c = [(k_2 - k_1)B] / [(k_1 - k_2)^{k_2/k_1} A^{k_2/k_1}]$ – постоянная, зависящая от величины корней характеристического уравнения и начальных условий задачи.

Введем новые переменные $u = y - k_2 x$ и $v = y - k_1 x$. Тогда последнее равенство принимает вид

$$v = cu^{k_2/k_1}. \quad (10.27)$$

Итак, фазовый портрет диссипативного колебательного контура при закритическом затухании в системе координат uOv представляет семейство парабол, фокусные расстояния которых определяются начальными условиями (рис. 10.4,а). Все параболы касаются оси Ou при $v = 0$.

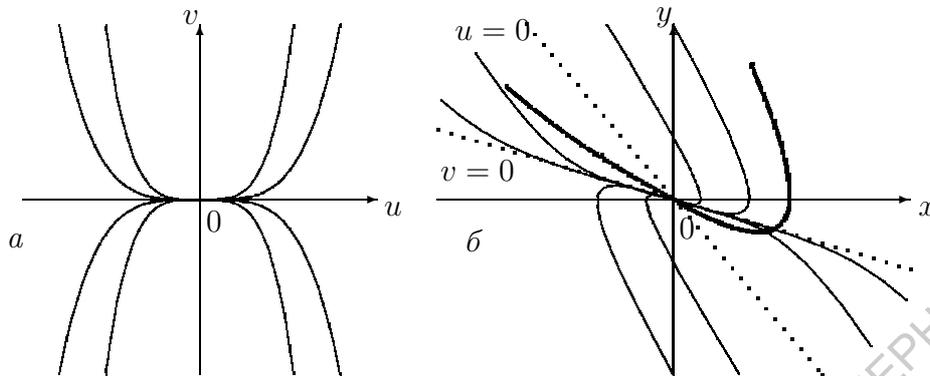


Рис. 10.4. Фазовые портреты диссипативного LCR -контура в uv -координатах (а) и xy -координатах (б)

Вдоль прямых $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ скорости перемещения изображающей точки соответственно равны k_2 и k_1 , т.е. оси системы координат uOv отвечают направлениям наибольшего и наименьшего сжатия фазовых переменных. На плоскости xOy (рис. 10.4,б) линии $u = 0$ и $v = 0$ превратятся в пару неортогональных прямых с отрицательными угловыми коэффициентами (пунктирные линии), а фазовые траектории – в семейство парабол, построенных в косоугольной системе координат (тонкие линии). Если $\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \rightarrow 0$, то затухание приближается к критическому и на плоскости uOv сжатие по обоим направлениям оказывается одинаковым. На рис. 10.4,б жирными линиями изображены фазовые траектории диссипативного колебательного контура с критическим затуханием при двух различных значениях начальных условий.

- Особая точка, асимптотическая для аperiодических траекторий, называется *узлом*. Узел, к которому при $t \rightarrow \infty$ сходятся траектории, называется *устойчивым*, а узел, от которого расходятся траектории, – *неустойчивым*.

Диссипативный контур обладает положительным затуханием, и узел устойчивый. Рассматривая проекции изображающей точки на оси координат, можно получить кривые, аналогичные представленным линиями 2 – 5 на рис. 10.2.

10.4. Вынужденные колебания в LCR -контурах

До сих пор анализировались собственные колебания. При этом LCR -контур считался изолированным от внешних воздействий. Исследуем колебания, возникающие в результате внешнего (стороннего) воздействия источника сигнала на систему.

При рассмотрении вынужденных колебаний предполагается, что

- характеристики внешнего воздействия не зависят от свойств колебательной системы, а параметры колебательной системы – от структуры и параметров воздействия.

Эти ограничения необходимы, чтобы исключить взаимное влияние источника воздействия и колебательной системы. При нарушении любого из них приходится учитывать взаимодействие источника колебаний и колебательной системы, и задача усложняется.

10.4.1. Последовательные и параллельные контуры. Дуальные колебательные системы

Источник внешнего воздействия можно включить либо в разрыв цепи из последовательно соединенных конденсатора и катушки индуктивности и, объединяя все сопротивления потерь, составить последовательный LCR -контур (рис. 10.5, *а*), либо параллельно конденсатору с емкостью C (проводимостью утечки пренебрегают) и катушке индуктивности в виде последовательного соединения L и сопротивления обмотки R (рис. 10.5, *б*), т.е. образовать параллельный колебательный контур. Подобный параллельный контур не удобен для теоретического анализа и целесообразно перейти от последовательного соединения индуктивности L и сопротивления R к параллельному соединению последних (рис. 10.5, *в*).

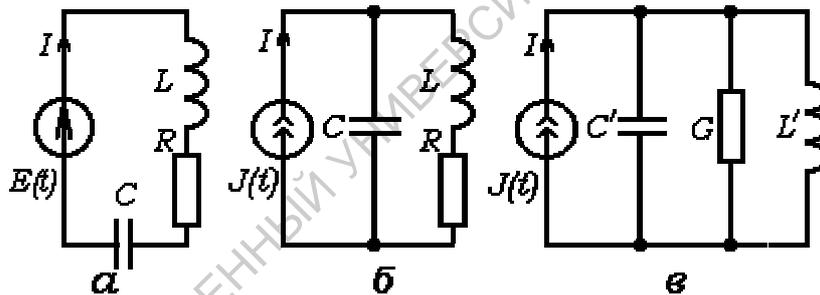


Рис. 10.5. Колебательные контуры: *а* – последовательный; *б* – параллельный; *в* – параллельный и дуальный к (*а*)

Эти представления будут эквивалентны, если

$$\frac{1}{R + j\omega_0 L} = G + \frac{1}{j\omega_0 L'}, \quad 1/j\omega_0 C = 1/j\omega_0 C'$$

или

$$j\omega_0 L' = j\omega_0 L' R G - \omega_0^2 L L' G + R + j\omega_0 L, \quad C' = C.$$

Отсюда

$$G = R/\omega_0^2 L L', \quad L' = L/(1 - R G).$$

Поскольку $R G = R^2/\omega_0^2 L L' \ll 1$, имеем

$$L' = L, \quad C' = C, \quad G = R/\omega_0^2 L^2 = R/\rho^2,$$

где ρ – характеристическое сопротивление контуров.

Получен интересный результат. Поскольку $G = 1/R$, малому сопротивлению обычно соответствует большая проводимость и наоборот. В

данном случае малому сопротивлению R последовательного контура соответствует тоже малая проводимость G эквивалентного параллельного контура, причем и R и G характеризуют потери.

Последовательный (рис. 10.5,а) и параллельный (рис. 10.5,б) контуры дуально эквивалентны, так как описываются подобными интегродифференциальными уравнениями

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = E(t), \quad (10.28)$$

$$C' \frac{dU}{dt} + GU + \frac{1}{L'} \int U dt = J(t), \quad (10.29)$$

но физический смысл параметров и используемых переменных различен. Применяя метод комплексных переменных, для гармонических сигналов можно построить дуальные алгебраические уравнения:

$$(j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}) \dot{I}_m = \dot{Z}_{\text{вх}} \dot{I} = \dot{E}_m,$$

$$(j\omega C' + G + \frac{1}{j\omega L'}) \dot{U}_m = \dot{Y}_{\text{вх}} \dot{U} = \dot{J}_m.$$

Дуальные переменные и параметры в рассматриваемых уравнениях соответствуют введенной выше системе аналогий (см. гл. 7, табл. 7.1).

Как следует из уравнений (10.28) и (10.29), L' выступает в качестве аналога C , C' – в качестве аналога L и т.д., т.е. параметры дуальных элементов имеют различную размерность:

$$R = A_1 G, \quad L = A_2 C', \quad \frac{1}{C} = \frac{A_3}{L'}, \quad \dot{Z}_{\text{вх}} = A_4 \dot{Y}_{\text{вх}}, \quad \text{и т.д.},$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 – некоторые коэффициенты пропорциональности. Коэффициент A_1 рассчитан выше и равен ρ^2 . Рассматривая связь $\dot{Z}_{\text{вх}}$ и $\dot{Y}_{\text{вх}}$ с учетом значения A_1 , можно получить $A_2 = A_3 = A_4 = \rho^2$. Легко показать, что дуальные контуры имеют одинаковые частоты собственных колебаний. Более того, в дуальных контурах для аналогичных воздействий существуют одинаковые физические эффекты.

Внешние воздействия могут обладать произвольной формой, но теоретический анализ целесообразно выполнить для элементарных сигналов, а затем, используя методы анализа во временной и частотной области, строить необходимые отклики на заданные воздействия.

10.4.2. Колебания тока и напряжения на емкости при импульсных воздействиях

1. Ступенчатое воздействие. Пусть на колебательный контур, состоящий из последовательно соединенных индуктивности L , емкости C и сопротивления R , подан сигнал в виде скачка напряжения $U(t) = U_0 \sigma(t)$, где $\sigma(t)$ – функция включения Хевисайда.

Приравняв сумму падений напряжения на элементах цепи $U_0 \sigma(t)$ и обозначая ток в цепи через $I(t)$, получим следующее интегродифференциальное уравнение:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I(t) dt = U_0 \sigma(t).$$

Его решение будем искать в операторной форме при нулевых начальных условиях. Тогда

$$(Ls + R + \frac{1}{Cs}) I(s) = U_0 \frac{1}{s} \quad \text{или} \quad (s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2) I(s) = \frac{U_0}{L}.$$

Отсюда для лапласовских изображений тока $I(s)$ и напряжения на емкости $U_C(s)$ имеем

$$I(s) = \frac{U_0/L}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}, \quad U_C(s) = \frac{1}{Cs} I(s) = \frac{U_0/LC}{s(s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)}. \quad (10.30)$$

Чтобы определить временные функции для этих сигналов, воспользуемся формулами Хевисайда. Многочлен $F_2(s)$ в знаменателях операторных функций (10.30) имеет два корня $s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ и $s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$. Полагая $\alpha^2 < \omega_0^2$, т.е. $s_1 = -\alpha + j\omega$, $s_2 = -\alpha - j\omega$, где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$, по теореме разложения Хевисайда получим:

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{U_0}{L} \left(\frac{1}{F_2'(s_1)} e^{s_1 t} + \frac{1}{F_2'(s_2)} e^{s_2 t} \right) = \frac{U_0}{L} e^{-\alpha t} \left(\frac{1}{2j\omega} e^{j\omega t} + \frac{1}{-2j\omega} e^{-j\omega t} \right) = \\ &= \frac{U_0}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin \omega t \sigma(t), \end{aligned} \quad (10.31)$$

$$\begin{aligned} U_C(t) &= \frac{U_0}{LC} \left(\frac{1}{F_2(0)} + \frac{1}{s_1 F_2'(s_1)} e^{s_1 t} + \frac{1}{s_2 F_2'(s_2)} e^{s_2 t} \right) \sigma(t) = \\ &= U_0 \sigma(t) + \frac{U_0}{LC} e^{-\alpha t} \left(\frac{1}{2j\omega(-\alpha + j\omega)} e^{j\omega t} + \frac{1}{2j\omega(\alpha + j\omega)} e^{-j\omega t} \right) \sigma(t) = \\ &= U_0 \sigma(t) - U_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi) \sigma(t), \end{aligned} \quad (10.32)$$

где $\varphi = \arctg(\omega/\alpha)$.

Выражения (10.31) и (10.32) представляют реакции линейной цепи

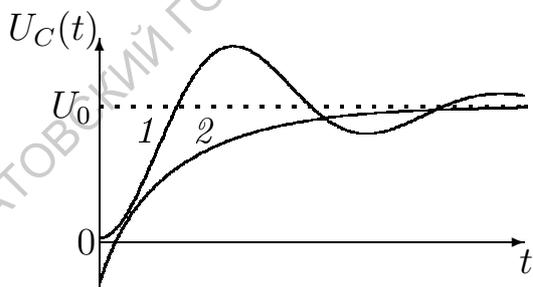


Рис. 10.6. Изменения U_C при ступенчатом возбуждении LCR -контура

(LCR -контура) на воздействие в виде σ -функции, т.е. соответствуют переходным характеристикам контура для тока и напряжения на емкости. Как следует из этих формул, в зависимости от величины затухания переходный процесс для тока характеризуется периодическим или аperiodическим убыванием тока до нуля, а напряжение на емкости содержит постоянную составляющую, равную напряжению источника U_0 (рис. 10.6), и переменную составляющую, затухающую со временем. Поэтому при $\alpha^2 < \omega_0^2$ существуют интервалы времени, когда $U_C(t) > U_0$ (рис. 10.6, кривая 1).

(LCR -контура) на воздействие в виде σ -функции, т.е. соответствуют переходным характеристикам контура для тока и напряжения на емкости. Как следует из этих формул, в зависимости от величины затухания переходный процесс для тока характеризуется периодическим или аperiodическим убыванием тока до нуля, а напряжение на емкости содержит постоянную составляющую, равную напряжению источника U_0 (рис. 10.6), и переменную составляющую, затухающую со временем. Поэтому при $\alpha^2 < \omega_0^2$ существуют интервалы времени, когда $U_C(t) > U_0$ (рис. 10.6, кривая 1).

Сравнивая (10.31) и (10.32) с (10.9) и (10.10), легко убедиться, что ток в контуре и переменная составляющая напряжения изменяются по законам собственных колебаний. Аналогичные результаты получаются в закритическом режиме ($\alpha^2 > \omega_0^2$), но временное изменение U_C (рис. 10.6, кривая 2) становится аperiodическим.

Более полное соответствие вынужденных и собственных колебаний удается обнаружить для воздействия в виде функции Дирака.

2. Дельта-воздействие. Пусть стороннее воздействие на LCR -контур описывается соотношением $U(t) = U_0\delta(t)$. Тогда $\mathbf{L}[\delta(t)] = 1$ и операторное уравнение принимает вид

$$(Ls + R + \frac{1}{Cs})I(s) = U_0 \quad \text{или} \quad (s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2)I(s) = \frac{U_0 s}{L}.$$

Отсюда лапласовские изображения тока $I(s)$ и напряжения на емкости $U_C(s)$

$$I(s) = \frac{U_0 s / L}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}, \quad U_C(s) = \frac{1}{Cs} I(s) = \frac{U_0 / LC}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}. \quad (10.33)$$

Используя теорему разложения Хевисайда, получим для $I(t)$ и $U_C(t)$ в колебательном режиме ($\omega_0^2 > \alpha^2$) следующие выражения:

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{U_0}{L} \left(\frac{s_1}{F_2'(s_1)} e^{s_1 t} + \frac{s_2}{F_2'(s_2)} e^{s_2 t} \right) \sigma(t) = \\ &= \frac{U_0}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin \omega t \sigma(t), \end{aligned} \quad (10.34)$$

$$\begin{aligned} U_C(t) &= \frac{U_0}{LC} \left(\frac{1}{F_2'(s_1)} e^{s_1 t} + \frac{1}{F_2'(s_2)} e^{s_2 t} \right) \sigma(t) = \\ &= U_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi) \sigma(t). \end{aligned} \quad (10.35)$$

Соотношения (10.34) и (10.35) представляют реакции линейной цепи (LCR -контур) на воздействие в виде δ -функции и соответствуют импульсным характеристикам контура для тока и напряжения на емкости. Они совпадают с формулами (10.9) и (10.10), полученными для собственных колебаний, что оказывается важным для практики.

- Сигналы в элементах колебательного контура, соответствующие собственным колебаниям, можно исследовать в режиме вынужденных колебаний при внешнем возбуждении в виде δ -функции, в качестве которой достаточно использовать импульс, длительность которого много меньше периода собственных колебаний.

10.4.3. Вынужденные колебания в LCR-контуре при гармонических воздействиях

Пусть к последовательному LCR-контуре подключен источник гармонического напряжения $E(t) = E_m \sin \bar{\omega}t$, где E_m – амплитуда, $\bar{\omega}$ – частота внешнего воздействия.

Приравнивая сумму падений напряжения на элементах цепи $E(t)$, получим неоднородное дифференциальное уравнение для заряда q или пропорционального ему напряжения на емкости $U_C = q/C$:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E_m \sin \bar{\omega}t. \quad (10.36)$$

Дифференцируя (10.36) по времени, получим дифференциальное уравнение для тока $I = \frac{dq}{dt}$:

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \bar{\omega}E_m \cos \bar{\omega}t. \quad (10.37)$$

Решения этих уравнений различаются, но оба состоят из двух частей: общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Рассмотрим частные решения.

Вынужденные колебания заряда. Умножая обе части уравнения (10.36) на $1/L$, приведем его к виду

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\alpha \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E_m}{L} \sin \bar{\omega}t. \quad (10.38)$$

В соответствии с электромеханической аналогией q является аналогом смещения, L – массы, C – податливости (параметра, обратного коэффициенту жесткости), R – аналогом механического сопротивления, а $\frac{1}{L}E_m \sin \bar{\omega}t$ – аналогом гармонической внешней силы. Уравнение (10.38) обычно фигурирует в теории колебаний в качестве уравнения движения механической колебательной системы при внешнем силовом воздействии.

Будем искать частное решение уравнения (10.38) в виде

$$q(t) = q_m \sin(\bar{\omega}t - \bar{\varphi}). \quad (10.39)$$

Подставляя (10.39) в (10.38), получим:

$$(-\bar{\omega}^2 + \omega_0^2)q_m \sin(\bar{\omega}t - \bar{\varphi}) + 2\alpha\bar{\omega}q_m \cos(\bar{\omega}t - \bar{\varphi}) = \frac{E_m}{L} \sin \bar{\omega}t. \quad (10.40)$$

Представим $\bar{\omega}t$ в виде суммы $(\bar{\omega}t - \bar{\varphi})$ и $\bar{\varphi}$. Тогда соотношение (10.40) превратится в систему двух уравнений относительно q_m и $\bar{\varphi}$:

$$q_m(\omega_0^2 - \bar{\omega}^2) = \frac{E_m}{L} \cos \bar{\varphi}, \quad 2q_m\alpha\bar{\omega} = \frac{E_m}{L} \sin \bar{\varphi}.$$

Отсюда

$$q_m = \frac{E_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \bar{\omega}^2)^2 + 4\alpha^2\bar{\omega}^2}}, \quad \text{tg} \bar{\varphi} = \frac{2\alpha\bar{\omega}}{\omega_0^2 - \bar{\omega}^2}. \quad (10.41)$$

Зависимости амплитуды q_m и фазы $\bar{\varphi}$ вынужденных колебаний заряда от частоты внешнего воздействия представлены на рис. 10.7.

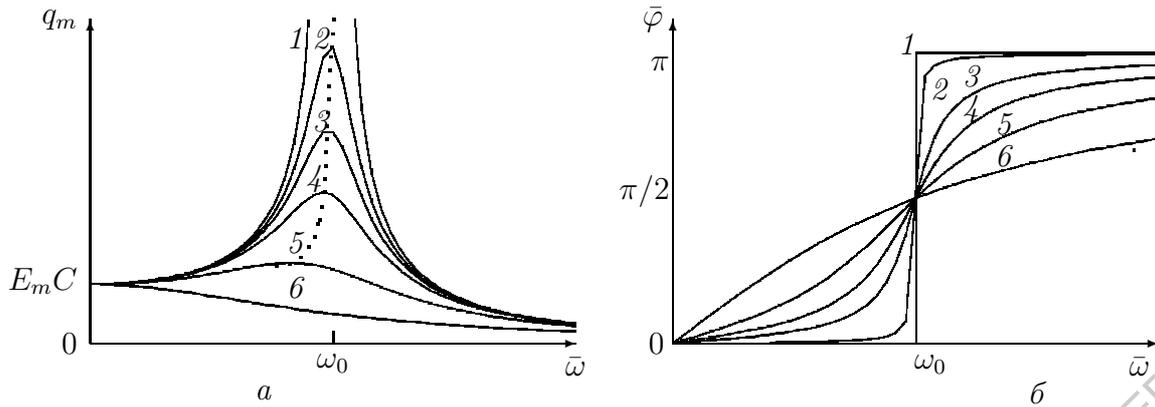


Рис. 10.7. Зависимости амплитуды q_m (а) и фазы $\bar{\varphi}$ (б) вынужденных колебаний заряда от частоты внешнего воздействия $\bar{\omega}$: 1 – $\alpha = 0$ ($Q = \infty$); 2 – $\alpha = 0.05\omega_0$ ($Q = 10$); 3 – $\alpha = 0.07\omega_0$ ($Q = 7$); 4 – $\alpha = 0.1\omega_0$ ($Q = 5$); 5 – $\alpha = 0.2\omega_0$ ($Q = 2.5$); 6 – $\alpha = 0.5\omega_0$ ($Q = 1$)

Исследуя соотношения (10.41) на экстремум, т.е. дифференцируя q_m по $\bar{\omega}$, нетрудно убедиться, что максимум q_m (рис. 10.7, а) достигается при $\bar{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}$. С увеличением α частота $\bar{\omega}$ отличается от ω_0 все сильнее (пунктирная кривая), а максимум q_m становится все менее резким. Фазо-частотная характеристика (рис. 10.6, б) показывает, что колебания заряда запаздывают относительно внешней ЭДС. При малых частотах внешнего воздействия запаздывание мало и возрастает с ростом $\bar{\omega}$. При $\bar{\omega} = \omega_0$ запаздывание составляет четверть периода.

Вынужденные колебания тока. Обратимся к (10.37) и, умножая его на $1/L$, получим неоднородное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2\alpha \frac{dI}{dt} + \omega_0^2 I = \frac{\bar{\omega}}{L} E_m \cos \bar{\omega} t. \quad (10.42)$$

Будем искать его частное решение в виде

$$I(t) = I_m \sin(\bar{\omega} t - \bar{\varphi}'). \quad (10.43)$$

Подставляя (10.43) в (10.42) и записывая $\bar{\omega} t$ в виде суммы $(\bar{\omega} t - \bar{\varphi}')$ и $\bar{\varphi}'$, получим:

$$I_m(\omega_0^2 - \bar{\omega}^2) = -\frac{\bar{\omega}}{L} E_m \sin \bar{\varphi}', \quad 2I_m \alpha \bar{\omega} = \frac{\bar{\omega}}{L} E_m \cos \bar{\varphi}'.$$

Отсюда

$$I_m = \frac{E_m \bar{\omega} / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \bar{\omega}^2)^2 + 4\alpha^2 \bar{\omega}^2}}, \quad \operatorname{tg} \bar{\varphi}' = \frac{\bar{\omega}^2 - \omega_0^2}{2\alpha \bar{\omega}}. \quad (10.44)$$

Зависимости I_m и $\bar{\varphi}'$ от частоты внешнего воздействия представлены в виде графиков на рис. 10.8, а, б соответственно.

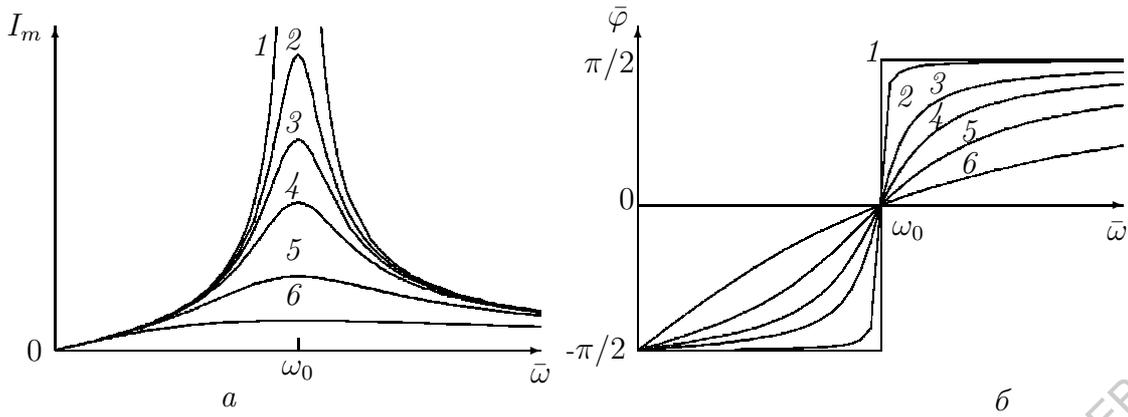


Рис. 10.8. Зависимости амплитуды I_m (а) и фазы $\bar{\varphi}'$ (б) вынужденных колебаний тока от частоты внешнего воздействия $\bar{\omega}$: 1 - $\alpha=0$ ($Q=\infty$); 2 - $\alpha=0.05\omega_0$ ($Q=10$); 3 - $\alpha=0.07\omega_0$ ($Q=7$); 4 - $\alpha=0.1\omega_0$ ($Q=5$); 5 - $\alpha=0.2\omega_0$ ($Q=2.5$); 6 - $\alpha=0.5\omega_0$ ($Q=1$)

В отличие от колебаний заряда максимум амплитуды колебаний тока для любых значений α достигается при $\bar{\omega} = \omega_0$, а запаздывание колебаний относительно внешнего возбуждения на частоте $\bar{\omega} = \omega_0$ не происходит.

Используя общее решение соответствующего однородного уравнения (10.9), представим общее решение неоднородного дифференциального уравнения (10.42) в виде

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t) = I_m \sin(\bar{\omega}t - \bar{\varphi}) + Ae^{-\alpha t} \sin \omega t, \quad (10.45)$$

где $A = U_0/\omega L$, α и ω – константы, описывающие собственные колебания.

Проанализируем полученное решение.

1. Слагаемое $I_2(t) = Ae^{-\alpha t} \sin \omega t$ описывает *переходный процесс* затухания собственных колебаний (рис. 10.9, б, д). Частота этих колебаний определяется параметрами колебательного контура, а амплитуда зависит от начального запаса энергии. По истечении определенного промежутка времени колебания затухают. Даже в тех случаях, когда начальный запас энергии отсутствует, в контуре существуют затухающие собственные колебания, обусловленные скачком тока при подключении внешнего воздействия.

2. Слагаемое $I_1(t) = I_m \sin(\bar{\omega}t - \bar{\varphi})$ описывает *установившийся процесс*. Частота установившихся колебаний не зависит от ω_0 и совпадает с частотой внешнего воздействия (рис. 10.9, а, г), а начальная фаза колебаний, согласно (10.44), зависит и от частоты внешнего воздействия, и от параметров контура. Когда собственные колебания полностью затухают, остается только это слагаемое (рис. 10.9, в, е),

3. Амплитуда установившихся колебаний резко возрастает, когда частота внешнего воздействия приближается к собственной частоте контура.

- Увеличение амплитуды установившихся колебаний до максимума при приближении частоты внешнего воздействия к собственной частоте колебательной системы называется *резонансом*.

4. При малых значениях показателя затухания α резонансная амплитуда может возрасти в сотни или тысячи раз, но время установления

стационарных колебаний большой амплитуды становится огромным, так как резко возрастает длительность затухания собственных колебаний.

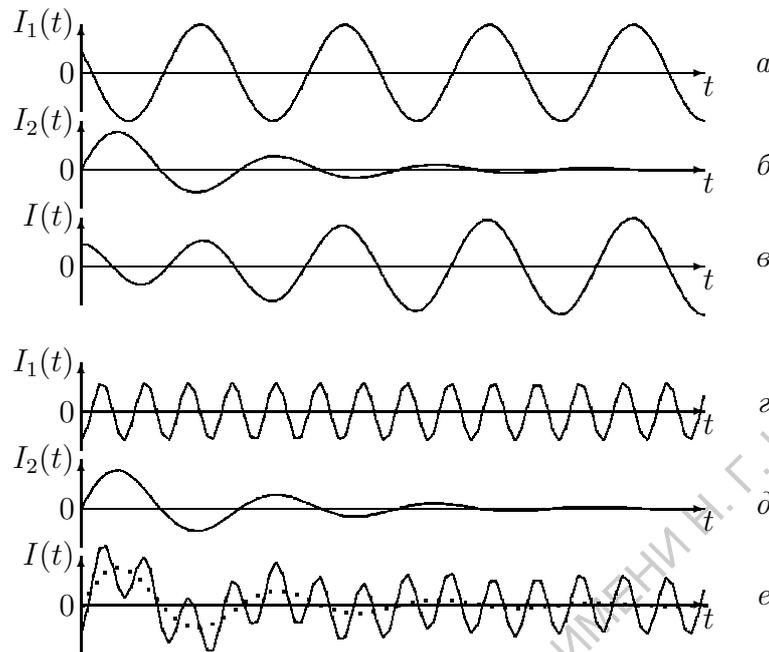


Рис. 10.9. Установление колебаний при $\bar{\omega} = 1.1\omega_0$ (a, b, v) и $\bar{\omega} = 3.65\omega_0$ (z, d, e): a, z – внешние воздействия; b, d – собственные колебания; v, e – результирующие колебания

5. Если внешнее воздействие полигармоническое $E(t) = \sum E_{mi} \sin \bar{\omega}_i t$, то и установившиеся колебания будут полигармоническими, но их спектр отличается от спектра воздействия: колебательный контур тем сильнее реагирует на гармоники сигнала, чем ближе их частоты к собственной частоте колебательной системы (рис. 10.9, v, e) и

$$I_{mi}(\bar{\omega}_i) = \frac{E_{mi}}{L\bar{\omega}_i \sqrt{(\omega_0^2/\bar{\omega}_i^2 - 1)^2 + 4(\frac{\alpha}{\bar{\omega}_i})^2}},$$

где i – условный номер гармоники воздействия.

Особенности резонансных явлений целесообразно рассмотреть отдельно для последовательных и параллельных LCR -контуров. При анализе резонансных явлений интересны установившиеся процессы на частоте воздействия. Используя метод комплексных амплитуд, можно свести дифференциальные уравнения к эквивалентным алгебраическим.

10.4.4. Резонансные явления в последовательном LCR -контуре. Резонанс напряжений

Пусть в последовательный LCR -контур (см. рис. 10.5, a) включен идеализированный источник гармонического напряжения (внутреннее сопротивление источника равно нулю) с ЭДС, удовлетворяющей соотношению

$$\dot{E}(t) = \dot{E}_m e^{j\omega t},$$

где \dot{E}_m – комплексная амплитуда ЭДС. Приравнивая сумму падений напряжения на элементах контура ЭДС источника, получим следующее алгебраическое равенство:

$$\dot{I}_m(j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}) = \dot{E}_m.$$

Входное сопротивление контура и условия резонанса. Отношение комплексных амплитуд ЭДС и тока будем называть *входным* или *эквивалентным* комплексным сопротивлением контура $\dot{Z}_{\text{вх}} = \dot{E}_m / \dot{I}_m$.

Входное сопротивление контура на частоте ω можно представить в виде суммы действительной (резистивной) и мнимой (реактивной) составляющих. Тогда

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}).$$

Резистивная составляющая входного сопротивления $R_{\text{вх}}$ не зависит от частоты ЭДС и равна сопротивлению потерь R ,

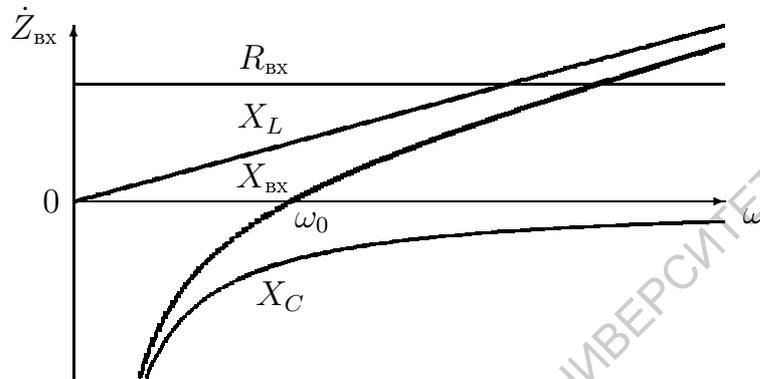


Рис. 10.10. Частотные зависимости сопротивления последовательного контура и его составных элементов

а реактивная составляющая $X_{\text{вх}}$ изменяется от $-\infty$ (при $\omega = 0$) до ∞ (при $\omega \rightarrow \infty$). Частотные зависимости $R_{\text{вх}}$, $X_{\text{вх}}$, а также индуктивного $X_L = \omega L$ и емкостного $X_C = 1/\omega C$ сопротивлений изображены на рис. 10.10. На частоте $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ реактивная составляющая входного

сопротивления $X_{\text{вх}} = \omega L - 1/\omega C$ обращается в нуль, $Z_{\text{вх}} = R$, а комплексная амплитуда тока \dot{I}_m максимальна. Поэтому частоту ω_0 часто называют *резонансной*.

- Условием резонанса в колебательной системе может служить не только равенство частот воздействия и собственных колебаний контура, но и *обращение в нуль реактивной составляющей входного сопротивления*

$$X_{\text{вх}} = 0. \quad (10.46)$$

Это условие оказывается весьма полезным, когда подключаемая к источнику ЭДС цепь содержит большое число реактивных элементов, например, при определении условий резонанса в системах связанных колебательных контуров.

Относительная и обобщенная расстройки. Рассмотрим поведение колебательного контура при расстройке, т.е. когда частота внешнего воздействия не совпадает с резонансной частотой контура. Для этого представим $X_{\text{вх}}$ в виде

$$X_{\text{вх}} = \omega_0 L \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \rho \nu, \quad (10.47)$$

где $\rho = \omega_0 L = \sqrt{L/C}$ – характеристическое сопротивление контура, а $\nu = \omega/\omega_0 - \omega_0/\omega$ – *относительная расстройка частоты* контура. Во всех практически важных случаях относительная расстройка частоты удовлетворяет соотношению $\nu \ll 1$, а при $\omega = \omega_0$ она обращается в нуль. При этом для относительной расстройки часто используются различные приближенные соотношения. Рассмотрим два из них.

1. Если оба слагаемых ν умножить на $\omega_0/\omega \cong 1$, то получим

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \cong 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}. \quad (10.48)$$

2. Выразим ν через абсолютную расстройку частоты $\Delta\omega = \omega - \omega_0$. Тогда, полагая $\omega + \omega_0 \cong 2\omega$, имеем:

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0\omega} = \frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega_0\omega} \cong \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}. \quad (10.49)$$

С учетом введенных обозначений сопротивление контура принимает вид

$$\dot{Z}_{\text{BX}} = R_{\text{BX}} + jX_{\text{BX}} = R + j\rho\nu = R(1 + j\frac{\rho}{R}\nu) = R(1 + jQ\nu) = R(1 + j\xi), \quad (10.50)$$

где Q – добротность контура; $\xi = Q\nu$ – обобщение понятия относительной расстройки с учетом добротности контура, называемое в дальнейшем *обобщенной расстройкой* контура.

Резонанс напряжений. Комплексные амплитуды тока \dot{I}_m и напряжений на сопротивлении \dot{U}_{Rm} , индуктивности \dot{U}_{Lm} и емкости \dot{U}_{Cm} описываются формулами

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{E}_m}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{\dot{E}_m}{R(1 + j\xi)}, \quad \dot{U}_{Rm} = \frac{\dot{E}_m R}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{\dot{E}_m}{1 + j\xi},$$

$$\dot{U}_{Lm} = j\omega L \dot{I}_m = j\frac{\omega}{\omega_0} Q \frac{\dot{E}_m}{1 + j\xi}, \quad \dot{U}_{Cm} = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m = -j\frac{\omega_0}{\omega} Q \frac{\dot{E}_m}{1 + j\xi}, \quad (10.51)$$

а их модули имеют вид

$$I_m = \frac{|\dot{E}_m|}{R\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad U_{Rm} = \frac{|\dot{E}_m|}{\sqrt{1 + \xi^2}},$$

$$U_{Lm} = \frac{|\dot{E}_m|\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{\omega}{\omega_0} Q \frac{|\dot{E}_m|}{\sqrt{1 + \xi^2}},$$

$$U_{Cm} = \frac{|\dot{E}_m|/\omega C}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{\omega_0}{\omega} Q \frac{|\dot{E}_m|}{\sqrt{1 + \xi^2}}. \quad (10.52)$$

Итак, ток в контуре и напряжение на сопротивлении достигают наи-

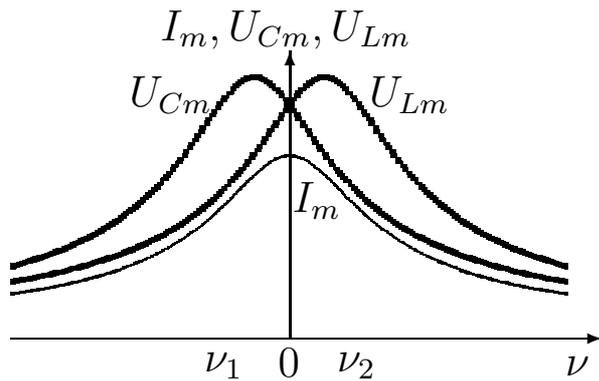


Рис. 10.11. Резонансные кривые для тока I_m и напряжений U_{Lm} и U_{Cm}

больших значений $I_{m\text{рез}} = |\dot{E}_m|/R$, $U_{Rm\text{рез}} = |\dot{E}_m|$ на резонансной частоте ω_0 , а напряжения на реактивных элементах — при небольших отклонениях от частоты ω_0 (рис. 10.11). Чтобы определить эти частоты исследуем на экстремум соотношения (10.52). Приравняв нулю производные $\frac{dU_{Lm}}{d\omega}$ и $\frac{dU_{Cm}}{d\omega}$, получим, что U_{Lm} становится максимальным на частоте $\omega_1 = \omega_0/\sqrt{1-1/2Q^2}$ ($\nu_2 > 0$), а U_{Cm} — на частоте $\omega_2 = \omega_0\sqrt{1-1/2Q^2}$ ($\nu_1 < 0$).

- Эффект увеличения напряжений на реактивных элементах последовательного LCR -контурa в Q раз по сравнению с ЭДС внешнего источника называется *резонансом напряжений*. Наибольшие значения напряжений на реактивных элементах равны по амплитуде, противоположны по знаку и достигаются на различных частотах.

Это позволяет рассматривать последовательный контур как трансформатор малых входных напряжений в Q раз бóльшие выходные.

10.4.5. Резонансные явления в параллельном LCR -контуре. Резонанс токов

Резонансные явления в параллельном контуре можно анализировать на одной из двух моделей, представленных на рис. 10.5, б, в. Начнем с первой. Пусть к параллельному контуру, реактивные элементы которого обладают сопротивлениями потерь R_L и R_C , подключен идеализированный источник тока $\dot{J}(t) = \dot{J}_m e^{j\omega t}$, где \dot{J}_m — комплексная амплитуда (рис. 10.12). Предположим, что \dot{J}_m создает на контуре напряжение с комплексной амплитудой \dot{U}_m . Обозначим комплексные амплитуды токов, протекающих в ветвях контура, через \dot{I}_{Lm} и \dot{I}_{Cm} . Тогда

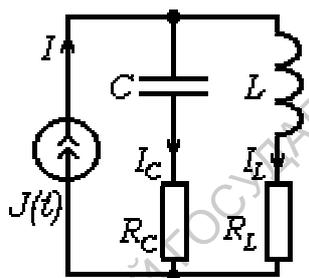


Рис. 10.12. Параллельный контур

$$\dot{I}_{Lm} = \frac{\dot{U}_m}{j\omega L + R_L}, \quad \dot{I}_{Cm} = \frac{\dot{U}_m}{1/j\omega C + R_C}, \quad \dot{J}_m = \dot{I}_{Lm} + \dot{I}_{Cm}.$$

Входное и резонансное сопротивления. Входное или эквивалентное сопротивление параллельного контура $\dot{Z}_{\text{вх}}$ удовлетворяет соотношению

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_{Lm} + \dot{I}_{Cm}} = \frac{(j\omega L + R_L)(1/j\omega C + R_C)}{j(\omega L - 1/\omega C) + R_L + R_C}.$$

Принимая во внимание, что резистивные сопротивления реактивных элементов контура малы, т.е. для $\omega \cong \omega_0$ удовлетворяют неравенствам $\omega L \gg R_L$ и $1/\omega C \gg R_C$, получим:

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \frac{L/C}{j(\omega L - 1/\omega C) + R},$$

где $R = R_L + R_C$. Отсюда

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \frac{\rho^2}{R + j\omega_0 L\nu} = \frac{\rho^2/R}{1 + jQ\nu} = \frac{\rho^2/R}{1 + j\xi}, \quad (10.53)$$

где Q – добротность контура; ν , ξ – относительная и обобщенная расстройки.

Представим входное сопротивление параллельного контура в виде

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}} = \frac{\rho^2/R}{1 + \xi^2} - j\xi \frac{\rho^2/R}{1 + \xi^2}. \quad (10.54)$$

Зависимости резистивной $R_{\text{вх}}$ и реактивной $X_{\text{вх}}$ составляющих входного сопротивления от обобщенной расстройки ξ представлены на рис. 10.13. Как следует из (10.54) и рис. 10.13, $X_{\text{вх}} = 0$ на частоте $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$. Это *резонансная частота* параллельного контура. При $\xi = \pm 1$, т.е. при расстройке $\Delta\omega = \pm Q\omega_0$, реактивная составляющая входного сопротивления достигает экстремальных значений $\mp \rho^2/2R$. Резистивная составляющая входного сопротивления достигает наибольшего значения ρ^2/R на резонансной частоте и с увеличением расстройки монотонно уменьшается.

Резистивное сопротивление

$$R_{\text{вх}} = \rho^2/R = Q\rho = Q^2 R \quad (10.55)$$

называется *резонансным сопротивлением параллельного LCR-контура*.

- Резонансное сопротивление параллельного контура в отличие от резонансного сопротивления последовательного контура (R) велико: оно в Q^2 раз превышает активное сопротивление контура R . Это главное различие параллельного и последовательного LCR-контуров.

Входная проводимость параллельного контура. Обратимся ко второй модели параллельного контура (рис. 10.5,в) и построим входную или эквивалентную проводимость параллельного контура

$$\dot{Y}_{\text{вх}} = \dot{J}_m / \dot{U}_m = G_{\text{вх}} + jB_{\text{вх}} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right). \quad (10.56)$$

Вводя относительную расстройку частоты, можно представить реактивную часть входной проводимости в виде:

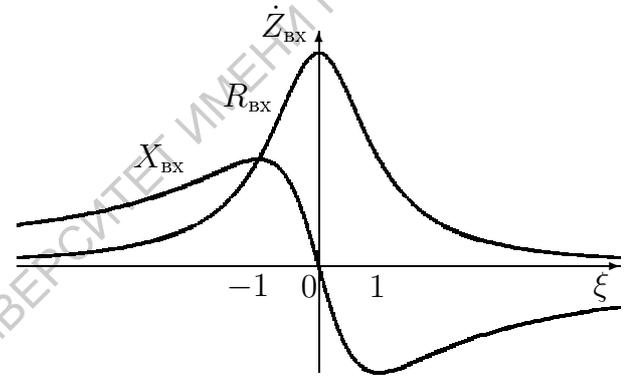


Рис. 10.13. Зависимости $R_{\text{вх}}$ и $X_{\text{вх}}$ параллельного LCR-контура от ξ

$$B_{\text{вх}} = \omega_0 C \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \frac{1}{\rho} \nu,$$

где $\omega_0 C = 1/\rho$ – характеристическая проводимость контура, а для комплексной входной проводимости записать равенство:

$$\dot{Y}_{\text{вх}} = G + j \frac{1}{\rho} \nu = G \left(1 + j \frac{1}{\rho G} \nu \right) = G(1 + Q\nu) = G(1 + j\xi), \quad (10.57)$$

где $Q = 1/\rho G$ – добротность контура, равная отношению характеристической и активной ($G = R/\rho^2$) проводимостей контура. При таком определении условие резонанса в параллельном контуре принимает вид

$$B_{\text{вх}} = 0.$$

Структуры $\dot{Y}_{\text{вх}}$ (10.57) и $\dot{Z}_{\text{вх}}$ (10.53) описываются аналогичными выражениями и одинаково изменяются с расстройкой контуров. Это следствие дуальности рассматриваемых контуров. Представлялось интересным сопоставить и другие характеристики последовательного и параллельного контуров, составленных из одинаковых элементов (табл. 10.1).

Таблица 10.1
Взаимная связь характеристик контуров

Характеристика контура	Последовательный контур	Параллельный контур
Показатель затухания	R/L	G/C'
Входное сопротивление: $\dot{Z}_{\text{вх}}$ на резонансной частоте при расстройке	R $R(1 + j\xi)$	$L/CR = \rho^2/R$ $\frac{\rho^2/R}{1+j\xi}$
Входная проводимость $\dot{Y}_{\text{вх}}$ при расстройке	$1/[R(1 + j\xi)]$	$G(1 + j\xi)$
Добротность	$\sqrt{L/C}/R = \rho/R$	$\sqrt{C'/L}/G = \rho/R$

Резонанс токов. Параллельный колебательный контур на резонансной частоте обладает только резистивным сопротивлением, а комплексная амплитуда напряжения на контуре достигает наибольшей величины. Но более резкое изменение вблизи резонанса испытывают комплексные амплитуды токов в ветвях реактивных элементов. Подставляя напряжение на контуре в выражения для комплексных амплитуд токов, получим:

$$\frac{\dot{I}_{Lm}}{\dot{J}_m} = -j \frac{\omega_0}{\omega} Q \frac{1}{1 + j\xi} \quad \frac{\dot{I}_{Cm}}{\dot{J}_m} = j \frac{\omega}{\omega_0} Q \frac{1}{1 + j\xi}. \quad (10.58)$$

Как и напряжения реактивных элементов последовательных контуров, токи реактивных элементов достигают наибольших значений на частотах, отличных от ω_0 . Токи реактивных элементов при выполнении условий резонанса превышают ток внешнего источника в Q раз, но теперь $|\dot{I}_{Lm}|$ достигает максимума при $\nu < 0$, а $|\dot{I}_{Cm}|$ $\nu > 0$ (сравните с рис. 10.11).

Эти результаты можно получить, используя лишь дуальность контуров. Если в соответствии с таблицей аналогий (см. табл. 7.1) в формулах (10.51) ЭДС E заменить током J , а напряжения на реактивных элементах – токами в дуальных элементах, то получим соотношения (10.58).

- Эффект увеличения токов реактивных элементов параллельного LCR -контура в Q раз по сравнению с током внешнего источника называется *резонансом токов*. Наибольшие значения токов реактивных элементов равны по амплитуде, противоположны по знаку и достигаются на различных частотах.

10.5. Уравнения резонансных кривых. Избирательность контура

Токи в LCR -контурах и все падения напряжений имеют одинаковую зависимость от расстройки. Это позволяет построить обобщенную зависимость модуля одной из переменных, например, тока \dot{I}_m в последовательном контуре от частоты или расстройки, т.е. *амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) LCR -контура*, обычно называемую *резонансной кривой*. На рис. 10.14 изображены резонансные кривые для трех различных значений сопротивления потерь или добротности. Как следует из рис. 10.14, колебательные контуры обладают частотной избирательностью.

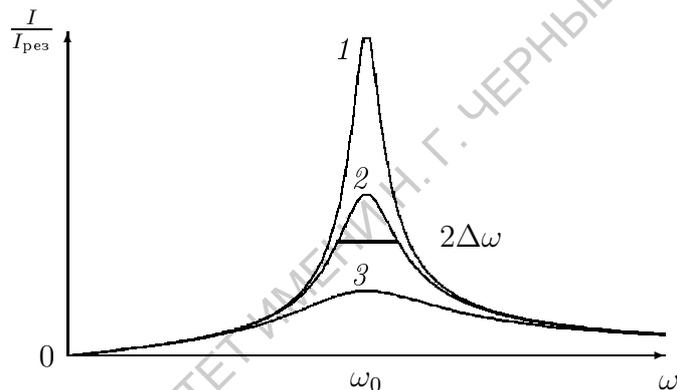


Рис. 10.14. Резонансные кривые LCR -контура: 1 – $Q=10$; 2 – $Q=5$; 3 – $Q=2$

Для количественной оценки избирательности используются величины *полос пропускания на уровне половинной мощности* или особый коэффициент – *избирательность B* .

Полосой пропускания на уровне половинной мощности или просто *полосой пропускания контура* называется область частот, в которой мощность сигнала ослабляется не более чем в два раза, а напряжение или ток в $\sqrt{2}$ раз.

Избирательность B определяется отношением резонансного значения переменной к ее значению на заданной частоте и удовлетворяет соотношению

$$B = \sqrt{1 + \xi^2} = \sqrt{1 + Q^2 \nu^2}.$$

Избирательность LCR -контура обычно выражается в децибелах (дБ).

Для анализа резонансных явлений и расчета полос пропускания и избирательности наиболее удобными оказались нормированные (приведенные) резонансные кривые (рис. 10.15). Они описываются соотношением

$$\frac{|\dot{x}_m|}{|\dot{x}_{m\text{рез}}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad (10.59)$$

где \dot{x}_m – комплексная амплитуда одной из переменных: напряже-

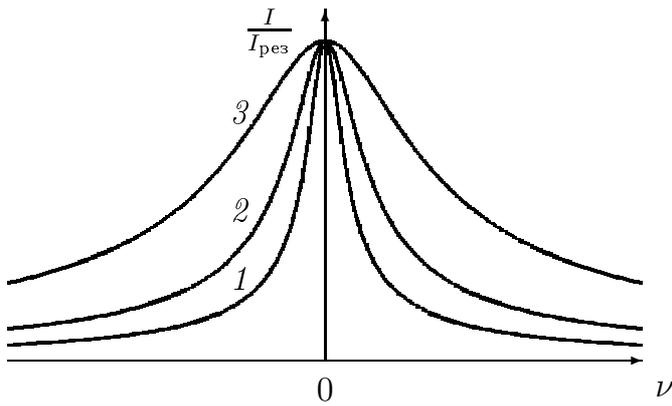


Рис. 10.15. Нормированные резонансные кривые LCR -контура: 1 — $Q = 10$; 2 — $Q = 5$; 3 — $Q = 2$

ния или тока. И ширину полосы пропускания контура, и избирательность, нетрудно определить по нормированной резонансной кривой контура или рассчитать, используя ее аналитическое представление. В этом случае оказывается исключительно полезной аналитическая связь полосы пропускания на уровне половинной мощности и добротности контура.

Связь добротности и полосы пропускания контура. Рассмотрим уравнение нормированной резонансной кривой (10.59). При нулевой расстройке ($\nu = 0$) имеем $|\dot{x}_m| = |\dot{x}_{m\text{рез}}|$. Определим расстройки ν , при которых $|\dot{x}_m|/|\dot{x}_{m\text{рез}}| = 1/\sqrt{2} \cong 0.707$, т.е. мощность ослабляется точно в два раза. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \xi^2 = Q^2 \nu^2 = 1, \quad \nu = \pm \frac{1}{Q}.$$

Подставляя выражение для относительной расстройки в виде (10.49), получим:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\omega} \quad \text{или} \quad 2\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}. \quad (10.60)$$

Величина $2\Delta\omega$ по условиям построения представляет ширину резонансной кривой как раз на уровне половинной мощности (см. рис. 10.14).

Формула (10.60) представляет метод определения добротности колебательной системы по экспериментально снятой резонансной кривой.

Если на экспериментальной кривой $U(f)$ (или $I(f)$) определить резонансную частоту f_0 и отметить частоты f_1 и f_2 , для которых $U(f) = 0.7U_{\text{рез}}$ (или $I(f) = 0.7I_{\text{рез}}$, то $2\Delta f = f_2 - f_1$ является шириной полосы пропускания (см. рис. 10.13), а отношение $f_0/2\Delta f$ соответствует экспериментально измеренному значению добротности Q . Интересно, что полуширина резонансной кривой численно равна показателю затухания контура

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{\omega_0}{2\omega_0 L/R} = \frac{R}{2L} = \alpha.$$

Эффекты частотной избирательности или *частотной селекции* сигналов и резонансные явления в LCR -контурах взаимосвязаны и представляют различные проявления рассмотренных физических процессов.

Глава 11

Физические процессы в многоконтурных связанных колебательных радиосистемах

В радиоэлектронике кроме простых колебательных контуров используются более сложные структуры, состоящие из нескольких связанных резонансных или апериодических систем, – многоконтурные связанные колебательные системы. Достаточно назвать частотные фильтры, элементы связи приемников и передатчиков с антеннами, высокочастотные трансформаторы.

Физические процессы в многоконтурных системах отличаются от рассмотренных явлений в одноконтурных системах. При возникновении даже небольшой связи между контурами изменяется характер их собственных колебаний, утрачивается самостоятельность, выявляется новая динамика колебательных процессов и новые физические закономерности.

В многоконтурных системах, как правило, возникает несколько резонансов, разнесенных по частоте и различающихся по амплитуде. Если на одной из частот резонанс проявляется сильнее, чем на других, можно использовать модель в виде одиночного колебательного контура. Когда же резонансные явления проявляются одновременно на двух частотах, то строится модель из двух связанных контуров, и так далее.

Исследование связанных систем можно было бы начать с рассмотрения двух контуров, а затем увеличивать их число. В настоящем учебном пособии принята другая последовательность: сначала изучаются системы, состоящие из большого числа контуров, а затем в качестве частного случая – двухконтурные колебательные системы.

Задачей главы является создание математических моделей многоконтурных систем в виде систем дифференциальных уравнений и анализ их решений. При этом основное внимание уделяется изучению динамики процессов на простых математических моделях.

11.1. Парциальные подсистемы и матричные модели многоконтурных систем

Анализ физических процессов в многоконтурных связанных системах весьма сложен и характеризуется большим числом независимых переменных¹. Для уп-

¹ В теории колебаний эти независимые переменные называются *степенями свободы*.

рощения анализа многоконтурные системы представляют в виде совокупности *парциальных подсистем* – связанных одноконтурных подсистем, каждая из которых полностью описывается одной переменной. Чтобы найти i -ю парциальную подсистему, достаточно приравнять нулю все переменные кроме i -й, т.е. ”закрепить” остальные подсистемы в состоянии равновесия. Для электрических цепей этим ”закреплениям” соответствуют разрывы ветвей цепи, токи которых приняты за независимые переменные, или закорачивание участков цепи, напряжения которых соответствуют независимым переменным. Таким образом, в многоконтурной колебательной системе можно выделить некоторое число N независимых *парциальных подсистем*, каждая из которых полностью описывается переменной и ее первой производной по времени.

Рассмотрим в качестве многоконтурной колебательной системы электрическую цепь, изображенную на рис. 11.1. Схема выбрана достаточно сложной, чтобы продемонстрировать различные виды связи, и включает пять независимых контуров. Это парциальные колебательные контуры. Первый контур содержит источник переменной ЭДС $E(t)$, остальные состоят только из пассивных элементов. Каждый парциальный контур можно описать дифференциальным уравнением второго порядка относительно контурных токов, которые будем рассматривать в качестве независимых переменных. Выбор независимых контуров, а следовательно, и независимых переменных, не является однозначным: второй контур вместо C_1, C_2, L_2 и R_2 может содержать E, R_1, L_1, L_2, C_2 и R_2 , но с точки зрения теории графов такой выбор менее предпочтителен (усложняется дерево графа и связи).

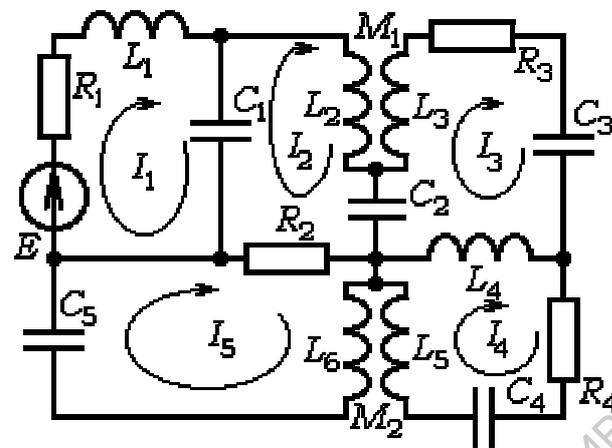


Рис. 11.1. Электрическая схема многоконтурной электрической цепи ($N=5$)

Построим дифференциальные уравнения этой системы методом контурных токов. Чтобы исключить интегральные выражения для падений напряжения на емкостях, будем рассматривать контурные токи как производные от соответствующих зарядов $I_i(t) = dq_i/dt$. Тогда $U_L = LdI/dt = Ld^2q/dt^2$, $U_R = RI = Rdq/dt$, $U_C = q/C$, а контурные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}
 L_1 \frac{d^2 q_1}{dt^2} + R_1 \frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1 - q_2}{C_1} &= E, \\
 L_2 \frac{d^2 q_2}{dt^2} - M_1 \frac{d^2 q_3}{dt^2} + R_2 \frac{d(q_2 - q_5)}{dt} + \frac{q_2 - q_1}{C_1} + \frac{q_2 - q_3}{C_2} &= 0, \\
 L_3 \frac{d^2 q_3}{dt^2} + L_4 \frac{d^2 (q_3 - q_4)}{dt^2} - M_1 \frac{d^2 q_2}{dt^2} + R_3 \frac{dq_3}{dt} + \frac{q_3}{C_3} + \frac{q_3 - q_2}{C_2} &= 0, \\
 L_5 \frac{d^2 q_4}{dt^2} + L_4 \frac{d^2 (q_4 - q_3)}{dt^2} - M_2 \frac{d^2 q_5}{dt^2} + R_4 \frac{dq_4}{dt} + \frac{q_4}{C_4} &= 0, \\
 L_6 \frac{d^2 q_5}{dt^2} - M_2 \frac{d^2 q_4}{dt^2} + R_2 \frac{d(q_5 - q_2)}{dt} + \frac{q_5}{C_5} &= 0.
 \end{aligned} \tag{11.1}$$

электрическую цепь, изображенную на рис. 11.1. Схема выбрана достаточно сложной, чтобы продемонстрировать различные виды связи, и включает пять независимых контуров. Это парциальные колебательные контуры. Первый контур содержит источник переменной ЭДС $E(t)$, остальные состоят только из пассивных элементов. Каждый парциальный контур можно описать дифференциальным уравнением второго порядка относительно контурных токов, которые будем рассматривать в качестве независимых переменных. Выбор независимых контуров, а следовательно, и независимых переменных, не является однозначным: второй контур вместо C_1, C_2, L_2 и R_2 может содержать E, R_1, L_1, L_2, C_2 и R_2 , но с точки зрения теории графов такой выбор менее предпочтителен (усложняется дерево графа и связи).

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & -M_1 & 0 & 0 \\ 0 & -M_1 & L_3+L_4 & -L_4 & 0 \\ 0 & 0 & -L_4 & L_4+L_5 & -M_2 \\ 0 & 0 & 0 & -M_2 & L_6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & -R_2 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 \\ 0 & -R_2 & 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1/C_1 & -1/C_1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/C_1 & 1/C_1+1/C_2 & -1/C_2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/C_2 & 1/C_2+1/C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/C_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/C_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Между первым и вторым контурами существует емкостная связь (C_1), между вторым и пятым – резистивная (R_2), между третьим и четвертым – индуктивная автотрансформаторная (L_4), между четвертым и пятым – индуктивная трансформаторная (M_2), а между вторым и третьим – комбинированная индуктивно-емкостная связь (M_1 и C_2).

Уравнения (11.2) и (11.3) можно изменить так, чтобы собственные частоты парциальных контуров входили в них в явном виде. Для этого каждое из уравнений (11.2) достаточно разделить на L_{ii} . Тогда

$$\mathbf{K}^L \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + 2\mathbf{A} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \mathbf{W}_d \mathbf{K}^C \mathbf{q} = \mathbf{J}'. \quad (11.4)$$

Матрица в правой части (11.4) обозначена через \mathbf{J}' , так как E/L имеет размерность dI/dt . Дифференцируя (11.4) по времени, получаем уравнение для токов

$$\mathbf{K}^L \frac{d^2 \mathbf{I}}{dt^2} + 2\mathbf{A} \frac{d\mathbf{I}}{dt} + \mathbf{W}_d \mathbf{K}^C \mathbf{I} = \frac{d\mathbf{J}'}{dt}, \quad (11.5)$$

где

$$\mathbf{K}^L = \begin{bmatrix} 1 & k_{12}^L & \dots & k_{1j}^L & \dots & k_{1N}^L \\ k_{21}^L & 1 & \dots & k_{2j}^L & \dots & k_{2N}^L \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{i1}^L & k_{i2}^L & \dots & k_{ij}^L & \dots & k_{iN}^L \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1}^L & k_{N2}^L & \dots & k_{Nj}^L & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1N} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{iN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N1} & \alpha_{N2} & \dots & \alpha_{Nj} & \dots & \alpha_{NN} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_i \\ \dots \\ I_N \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W}_d = \begin{bmatrix} \omega_{01}^2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_{02}^2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_{0i}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \omega_{0N}^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^C = \begin{bmatrix} 1 & k_{12}^C & \dots & k_{1j}^C & \dots & k_{1N}^C \\ k_{21}^C & 1 & \dots & k_{2j}^C & \dots & k_{2N}^C \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{i1}^C & k_{i2}^C & \dots & k_{ij}^C & \dots & k_{iN}^C \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1}^C & k_{N2}^C & \dots & k_{Nj}^C & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}' = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{L_1} \\ \frac{E_2}{L_2} \\ \dots \\ \frac{E_i}{L_i} \\ \dots \\ \frac{E_N}{L_N} \end{bmatrix},$$

$$k_{ij}^L = \frac{L_{ij}}{L_{ii}}; \quad \alpha_{ij} = \frac{R_{ij}}{2L_{ii}}; \quad \omega_{0i}^2 = \frac{1}{L_{ii}C_{ii}}; \quad k_{ij}^C = \frac{1/C_{ij}}{1/C_{ii}} = \frac{C_{ii}}{C_{ij}}.$$

Здесь k_{ij}^L и k_{ij}^C – коэффициенты индуктивной и емкостной связи i -го и j -го контуров; α_{ij} – показатель затухания i -й переменной в j -м парциальном контуре; $\omega_{0i} = 1/\sqrt{L_{ii}C_{ii}}$ – частота собственных колебаний в i -й парциальной системе (i -я парциальная частота).

Для электрической схемы, изображенной на рис. 11.1, эти матрицы принимают следующий вид:

$$\mathbf{K}^L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{M_1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{M_1}{L_3+L_4} & 1 & -\frac{L_4}{L_3+L_4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L_4}{L_4+L_5} & 1 & -\frac{M_2}{L_4+L_5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{M_2}{L_6} & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_2}{L_2} & 0 & 0 & -\frac{R_2}{L_2} \\ 0 & 0 & \frac{R_3}{L_3+L_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{R_4}{L_4+L_5} & 0 \\ 0 & -\frac{R_2}{L_6} & 0 & 0 & \frac{R_2}{L_6} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{W}_d = \begin{bmatrix} \omega_{01}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{02}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{03}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_{04}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_{05}^2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K}^C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{C_2}{C_1+C_2} & 1 & -\frac{C_1}{C_1+C_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{C_3}{C_2+C_3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где

$$\omega_{01}^2 = \frac{1}{L_1 C_1}, \quad \omega_{02}^2 = \frac{C_1 + C_2}{L_2 C_1 C_2}, \quad \omega_{03}^2 = \frac{C_2 + C_3}{(L_3 + L_4) C_2 C_3}, \quad \omega_{04}^2 = \frac{1}{(L_4 + L_5) C_4}, \quad \omega_{05}^2 = \frac{1}{L_6 C_5}.$$

Итак, получены матричные модели N -контурных связанных систем. Частным случаем соотношений (11.4) и (11.5) являются уравнения для наиболее распространенных в радиоэлектронике двухконтурных колебательных систем с реактивной – индуктивной, емкостной и комбинированной (индуктивно-емкостной) связями.

11.1.2. Двухконтурные системы с реактивной связью

Реактивная связь между контурами может быть внешней (элемент связи расположен вне контуров) или внутренней (элемент связи входит в состав каждого из парциальных контуров), а сами контуры – последовательными или параллельными.

11.1.2.1. Связанные последовательные контуры

Внешняя индуктивная (трансформаторная) связь. Введем в парциальных контурах (рис. 11.2,а) контурные токи $I_1 = dq_1/dt$, $I_2 = dq_2/dt$ и запишем контурные уравнения в виде

$$\begin{aligned} L_1 \ddot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + \frac{1}{C_1} q_1 - M \ddot{q}_2 &= E, \\ L_2 \ddot{q}_2 + R_2 \dot{q}_2 + \frac{1}{C_2} q_2 - M \ddot{q}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (11.6)$$

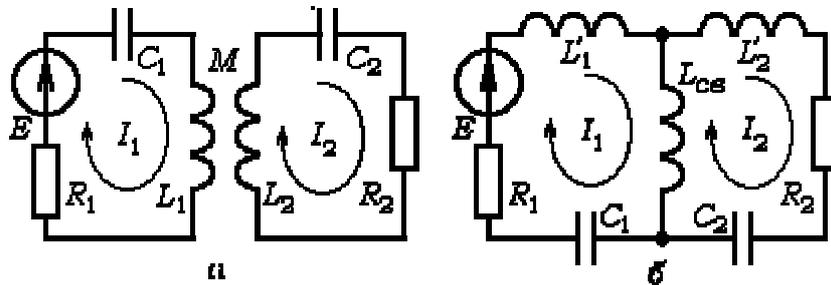


Рис. 11.2. Двухконтурные системы с индуктивной связью:
a – внешняя (трансформаторная) связь, *б* – внутренняя (автотрансформаторная) связь

Систему уравнений (11.6) можно представить в матричной форме (11.3). Если уравнения (11.6) разделить на L_1 и L_2 , то получим канонические уравнения вида (11.4):

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + 2\alpha_1 \dot{q}_1 + \omega_{01}^2 q_1 - k_1^L \ddot{q}_2 &= E/L_1, \\ \ddot{q}_2 + 2\alpha_2 \dot{q}_2 + \omega_{02}^2 q_2 - k_2^L \ddot{q}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (11.7)$$

где $\alpha_1 = R_1/2L_1$ и $\alpha_2 = R_2/2L_2$ – коэффициенты затухания контуров; $\omega_{01} = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ и $\omega_{02} = 1/\sqrt{L_2 C_2}$ – парциальные частоты; $k_1^L = M/L_1$ и $k_2^L = M/L_2$ – коэффициенты связи. Принцип трансформаторной связи можно распространить и на многоконтурные системы. Системы с трансформаторной связью обладают замечательными свойствами: они связаны только общим магнитным потоком, а разложение на парциальные контуры единственно. Это позволяет устанавливать парциальные частоты *независимо* от величины связи.

Внутренняя индуктивная (автотрансформаторная) связь. Для контуров, представленных на рис. 11.2, *б*, дифференциальные уравнения, построенные методом контурных токов имеют вид:

$$\begin{aligned} L_1 \ddot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + \frac{1}{C_1} q_1 - L_{cb} \ddot{q}_2 &= E, \\ L_2 \ddot{q}_2 + R_2 \dot{q}_2 + \frac{1}{C_2} q_2 - L_{cb} \ddot{q}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (11.8)$$

где $L_1 = L'_1 + L_{cb}$, $L_2 = L'_2 + L_{cb}$ – собственные индуктивности парциальных контуров. Если (11.8) разделить на L_1 и L_2 , то получим те же уравнения (11.7), но теперь $k_1^L = L_{cb}/L_1$, $k_2^L = L_{cb}/L_2$. Итак, уравнения (11.8) описывают оба вида индуктивной связи.

Внутренняя емкостная связь. Пусть последовательные колебательные контуры содержат C_{cb} в качестве составной части собственных емкостей $C_{1\Sigma}$ и $C_{2\Sigma}$ (рис. 11.3, *a*). Тогда дифференциальные уравнения системы принимают вид

$$\begin{aligned} L_1 \ddot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + \frac{1}{C_{1\Sigma}} q_1 - \frac{1}{C_{cb}} q_2 &= E, \\ L_2 \ddot{q}_2 + R_2 \dot{q}_2 + \frac{1}{C_{2\Sigma}} q_2 - \frac{1}{C_{cb}} q_1 &= 0, \end{aligned} \quad (11.9)$$

где $1/C_{1\Sigma} = 1/C_1 + 1/C_{\text{св}}$, $1/C_{2\Sigma} = 1/C_2 + 1/C_{\text{св}}$. После деления уравнений на L_1 и L_2 имеем:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + 2\alpha_1 \dot{q}_1 + \omega_{01}^2 q_1 - \omega_{01}^2 k_1^C q_2 &= E/L_1, \\ \ddot{q}_2 + 2\alpha_2 \dot{q}_2 + \omega_{02}^2 q_2 - \omega_{02}^2 k_2^C q_1 &= 0, \end{aligned} \quad (11.10)$$

где $\omega_{01}^2 = 1/L_1 C_{1\Sigma}$ и $\omega_{02}^2 = 1/L_2 C_{2\Sigma}$ – собственные частоты парциальных контуров; $k_1^C = C_1/(C_1 + C_{\text{св}})$ и $k_2^C = C_2/(C_2 + C_{\text{св}})$ – коэффициенты емкостной связи. При записи в матричной форме получаем уравнение (11.4). Двухконтурные системы с внутренней емкостной связью имеют лишь методологическое значение и в радиоэлектронике не используются из-за сложностей настройки.

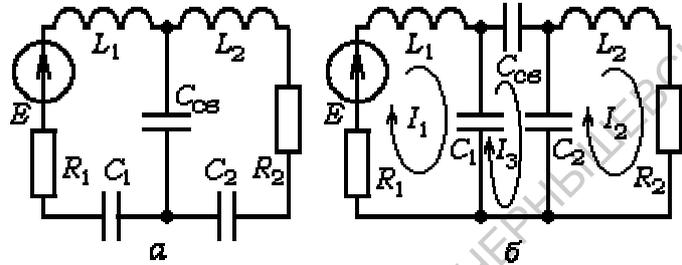


Рис. 11.3. Двухконтурные системы с емкостной связью: *а* – внутренняя связь, *б* – внешняя связь

Внешняя емкостная связь (рис. 11.3,б). При такой связи система из двух последовательных контуров описывается тремя контурными токами. Введем контурные токи $\dot{I}_i = dq_i/dt$ и представим контурные уравнения в виде

$$\begin{aligned} L_1 \ddot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + \frac{1}{C_1} (q_1 - q_3) &= E, \\ L_2 \ddot{q}_2 + R_2 \dot{q}_2 + \frac{1}{C_2} (q_2 - q_3) &= 0, \\ \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_{\text{св}}}\right) q_3 - \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} &= 0. \end{aligned}$$

Исключая из первых двух уравнений q_3 , получим:

$$\begin{aligned} L_1 \ddot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + \frac{1}{C_{1\Sigma}} q_1 - \frac{1}{C'_{\text{св}}} q_2 &= E, \\ L_2 \ddot{q}_2 + R_2 \dot{q}_2 + \frac{1}{C_{2\Sigma}} q_2 - \frac{1}{C'_{\text{св}}} q_1 &= 0, \end{aligned} \quad (11.11)$$

где $C'_{\text{св}} = C_1 + C_2 + \frac{C_1 C_2}{C_{\text{св}}}$, а $C_{1\Sigma} = C_1 + \frac{C_2 C_{\text{св}}}{C_2 + C_{\text{св}}}$ и $C_{2\Sigma} = C_2 + \frac{C_1 C_{\text{св}}}{C_1 + C_{\text{св}}}$ – собственные емкости парциальных контуров. После деления (11.9) на L_1 и L_2 снова получаем каноническое уравнение (11.4).

Итак, связанные системы последовательных контуров при любой реактивной связи описываются единой математической моделью в виде матричных уравнений (11.4) для зарядов или (11.5) для токов. Коэффициенты связи определяются отношениями комплексных сопротивлений элемента связи и соответствующих элементов парциальных контуров.

11.1.2.2. Связанные параллельные контуры

Двухконтурные схемы, представленные на рис. 11.4, отличаются от аналогичных схем на рис. 11.2 и 11.3 только замещением последовательных контуров параллельными, но при этом изменяются описания связанных систем. Модели двухконтурных связанных систем с параллельными контурами будем строить для индуктивной, емкостной и комбинированной (индуктивно-емкостной) связи методом узловых напряжений, а в качестве узловых переменных используем напряжения на контурах (U_1 и U_2).

Индуктивная связь (рис. 11.4,а). Запишем следующие узловые уравнения:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dU_1}{dt} + G_1 U_1 + \frac{1}{L_{1\Sigma}} \int U_1 dt - \frac{1}{L_{\text{св}}} \int U_2 dt &= J, \\ C_2 \frac{dU_2}{dt} + G_2 U_2 + \frac{1}{L_{2\Sigma}} \int U_2 dt - \frac{1}{L_{\text{св}}} \int U_1 dt &= 0, \end{aligned} \quad (11.12)$$

где $1/L_{1\Sigma} = 1/L_1 + 1/L_{\text{св}}$ и $1/L_{2\Sigma} = 1/L_2 + 1/L_{\text{св}}$ – полные узловые индуктивности; $L_{\text{св}}$ – общая (междузловая) индуктивность.

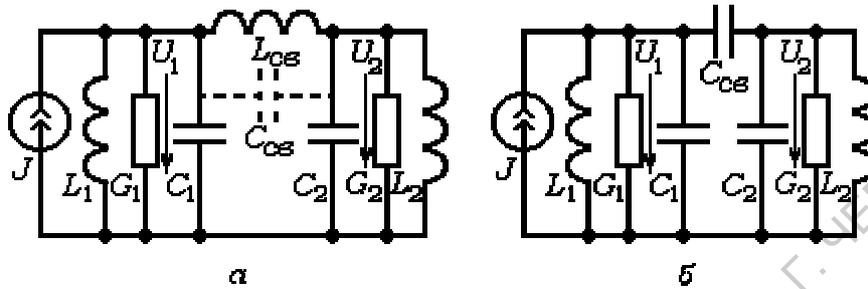


Рис. 11.4. Индуктивно- (а) и емкостно-связанные (б) параллельные контуры (пунктиром изображена комбинация (индуктивно-емкостная связь))

Это интегродифференциальные уравнения рассматриваемой связанной системы. После дифференцирования их по времени и деления на C_i получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{U}_1 + 2\alpha_1 \dot{U}_1 + \omega_{01}^2 U_1 - \omega_{01}^2 k_1^L \ddot{U}_2 &= \dot{J}/C_1, \\ \ddot{U}_2 + 2\alpha_2 \dot{U}_2 + \omega_{02}^2 U_2 - \omega_{02}^2 k_2^L \ddot{U}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (11.13)$$

где $\alpha_1 = G_1/2C_1$ и $\alpha_2 = G_2/2C_2$ – показатели затухания контуров, $\omega_{01} = 1/\sqrt{L_{1\Sigma}C_1}$ и $\omega_{02} = 1/\sqrt{L_{2\Sigma}C_2}$ – их парциальные частоты, $k_1^L = \frac{1/L_{\text{св}}}{1/L_1 + 1/L_{\text{св}}} = L_1/(L_1 + L_{\text{св}})$ и $k_2^L = \frac{1/L_{\text{св}}}{1/L_2 + 1/L_{\text{св}}} = L_2/(L_2 + L_{\text{св}})$ – коэффициенты индуктивной связи.

Уравнения (11.13) можно записать в матричной форме. Тогда

$$\mathbf{K}^C \frac{d^2 \mathbf{U}}{dt^2} + 2\mathbf{A} \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \mathbf{W}_d \mathbf{K}^L \mathbf{U} = \mathbf{V}, \quad (11.14)$$

где $V_i = \dot{J}_i/C_{ii}$. При индуктивной связи параллельных контуров емкостная связь отсутствует и матрица \mathbf{K}^C вырождается в единичную матрицу.

Емкостная связь (рис. 11.4,б). Составляя методом узловых напряжений интегродифференциальные уравнения и используя описанные выше преобразования, получим:

$$\begin{aligned} \ddot{U}_1 + 2\alpha_1 \dot{U}_1 + \omega_{01}^2 U_1 - k_1^C \ddot{U}_2 &= \dot{J}/C_{1\Sigma}, \\ \ddot{U}_2 + 2\alpha_2 \dot{U}_2 + \omega_{02}^2 U_2 - k_2^C \ddot{U}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (11.15)$$

где $\alpha_1 = G_1/2C_{1\Sigma}$ и $\alpha_2 = G_2/2C_{2\Sigma}$ – показатели затухания; $C_{1\Sigma} = C_1 + C_{\text{св}}$ и $C_{2\Sigma} = C_2 + C_{\text{св}}$ – узловые емкости; $C_{\text{св}}$ – общая (междузловая) емкость; $\omega_{01} = 1/\sqrt{L_1 C_{1\Sigma}}$ и $\omega_{02} = 1/\sqrt{L_2 C_{2\Sigma}}$ – парциальные частоты, $k_1^C = C_{\text{св}}/C_{1\Sigma}$ и $k_2^C = C_{\text{св}}/C_{2\Sigma}$ – коэффициенты емкостной связи. Записывая (11.15) в матричной форме, получим уравнение (11.14), где элементы матрицы \mathbf{K}^C имеют вид: $k_{11}^C = k_{22}^C = 1$, $k_{12}^C = k_1^C$, $k_{21}^C = k_2^C$.

Индуктивно-емкостная связь. Пусть связь между параллельными контурами обеспечивает не только индуктивность $L_{\text{св}}$ (рис. 11.4,а), но и емкость $C_{\text{св}}$ (изображена пунктиром). Это наиболее общий случай реактивной связи между параллельными контурами. Узловые уравнения² после стандартных операций принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{U}_1 + 2\alpha_1 \dot{U}_1 - k_1^C \ddot{U}_2 + \omega_{01}^2 U_1 - \omega_{01}^2 k_1^L \ddot{U}_2 &= j/C_{1\Sigma}, \\ \ddot{U}_2 + 2\alpha_2 \dot{U}_2 - k_2^C \ddot{U}_1 + \omega_{02}^2 U_2 - \omega_{02}^2 k_2^L \ddot{U}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (11.16)$$

где $C_{1\Sigma} = C_1 + C_{\text{св}}$, $C_{2\Sigma} = C_2 + C_{\text{св}}$, $1/L_{1\Sigma} = 1/L_1 + 1/L_{\text{св}}$, $1/L_{2\Sigma} = 1/L_2 + 1/L_{\text{св}}$, $\alpha_1 = G_1/2C_{1\Sigma}$, $\alpha_2 = G_2/2C_{2\Sigma}$, $\omega_{01} = 1/\sqrt{L_{1\Sigma}C_{1\Sigma}}$, $\omega_{02} = 1/\sqrt{L_{2\Sigma}C_{2\Sigma}}$, $k_1^L = L_{1\Sigma}/L_{\text{св}}$, $k_2^L = L_{2\Sigma}/L_{\text{св}}$, $k_1^C = C_{\text{св}}/C_{1\Sigma}$, $k_2^C = C_{\text{св}}/C_{2\Sigma}$.

Уравнение (11.16) тоже можно записать в матричной форме (11.14). При этом матрицы \mathbf{K}^C , \mathbf{A} и \mathbf{K}^L принимают вид

$$\mathbf{K}^C = \begin{bmatrix} 1 & k_1^C \\ k_2^C & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K}^L = \begin{bmatrix} 1 & k_1^L \\ k_2^L & 1 \end{bmatrix}.$$

Уравнение (11.14) нетрудно распространить на N -контурные системы.

Таким образом, для различных видов связи колебательных систем получены две матричные модели ((11.4) или (11.5) и (11.14)), содержащие системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Модели являются *дуальными* (см. гл.10) и, по существу, представляют одно и то же уравнение, но записанное в дуальных переменных. В этом нетрудно убедиться, если составить таблицу аналогий и учесть способы соединения составляющих контуры элементов.

Таблица 11.1
Дуальные переменные и параметры связанных систем

Последовательные контуры	$E(t)$	I	U	L	C	R	\mathbf{K}^L	\mathbf{K}^C
Параллельные контуры	$J(t)$	U	I	C	L	G	\mathbf{K}^C	\mathbf{K}^L

Матричная модель многоконтурной связанной колебательной системы должна объяснить, как будет вести себя рассматриваемая система при различных внешних воздействиях. Эта задача решается в той же последовательности, что и для одноконтурных колебательных систем: сначала производится расчет собственных частот связанной системы и анализируется динамика всех парциальных систем на каждой из собственных частот (распределение амплитуд и фаз колебаний), а затем рассматриваются вынужденные колебания.

Будем называть собственные колебания связанных систем *связанными колебаниями*. Исследуем их сначала в предположении полного отсутствия потерь, а затем при наличии малых потерь.

² Узловые уравнения для параллельных контуров с индуктивно-емкостной связью и их трансформацию в систему обыкновенных дифференциальных уравнений предлагается рассмотреть самостоятельно.

11.2. Связанные колебания

11.2.1. N-контурные системы без потерь

Пусть в связанной системе выполняются соотношения $\mathbf{A} \equiv 0$ (потери отсутствуют, система консервативная) и внешние возмущения отсутствуют. Используя (11.4), получим для связанных колебаний зарядов q_j систему однородных линейных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{j=1}^N (k_{ij}^L \ddot{q}_j + \omega_{0i}^2 k_{ij}^C q_j) = 0, \quad i = \overline{1, N} \quad (11.17)$$

или в матричной форме

$$\mathbf{K}^L \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + \mathbf{W}_d \mathbf{K}^C \mathbf{q} = 0. \quad (11.18)$$

Будем искать решение уравнений (11.17) в виде

$$q_j = A_j e^{\lambda t}, \quad (11.19)$$

где A_j и λ – некоторые постоянные. Подставляя (11.19) в (11.17), получим систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^N (\lambda^2 k_{ij}^L + \omega_{0i}^2 k_{ij}^C) A_j = 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (11.20)$$

Система уравнений (11.20) имеет нетривиальное решение для A_j только при обращении в нуль ее определителя:

$$\begin{aligned} \Delta &= \det |\mathbf{K}^L \lambda^2 + \mathbf{W}_d \mathbf{K}^C| = \\ &= \det \begin{bmatrix} \lambda^2 + \omega_{01}^2 & k_{12}^L \lambda^2 + \omega_{01}^2 k_{12}^C & \dots & k_{1N}^L \lambda^2 + \omega_{01}^2 k_{1N}^C \\ k_{21}^L \lambda^2 + \omega_{02}^2 k_{21}^C & \lambda^2 + \omega_{02}^2 & \dots & k_{2N}^L \lambda^2 + \omega_{02}^2 k_{2N}^C \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ k_{N1}^L \lambda^2 + \omega_{0N}^2 k_{N1}^C & k_{N2}^L \lambda^2 + \omega_{0N}^2 k_{N2}^C & \dots & \lambda^2 + \omega_{0N}^2 \end{bmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (11.21)$$

Поскольку коэффициенты матриц \mathbf{K}^L , \mathbf{K}^C и \mathbf{W}_d неотрицательны, $\lambda^2 < 0$. Тогда $\lambda = \pm j\omega$, решения (11.19) становятся гармоническими функциями с частотой ω , а соотношения (11.17) и (11.21) принимают вид

$$\sum_{j=1}^N (-\omega^2 k_{ij}^L + \omega_{0i}^2 k_{ij}^C) A_j = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad (11.22)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \det |-\mathbf{K}^L \omega^2 + \mathbf{W}_d \mathbf{K}^C| = \\ &= \det \begin{bmatrix} -\omega^2 + \omega_{01}^2 & -k_{12}^L \omega^2 + \omega_{01}^2 k_{12}^C & \dots & -k_{1N}^L \omega^2 + \omega_{01}^2 k_{1N}^C \\ -k_{21}^L \omega^2 + \omega_{02}^2 k_{21}^C & -\omega^2 + \omega_{02}^2 & \dots & -k_{2N}^L \omega^2 + \omega_{02}^2 k_{2N}^C \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -k_{N1}^L \omega^2 + \omega_{0N}^2 k_{N1}^C & -k_{N2}^L \omega^2 + \omega_{0N}^2 k_{N2}^C & \dots & -\omega^2 + \omega_{0N}^2 \end{bmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (11.23)$$

Определитель (11.23) представляет многочлен N -го порядка относительно ω^2 и имеет $2N$ попарно сопряженных и не обязательно различных корней $\pm\omega_1, \pm\omega_2, \pm\omega_3, \dots, \pm\omega_N$, а частное решение уравнения (11.18) для колебаний j -й координаты вектора \mathbf{q} на частоте ω_s принимает вид

$$q_{js} = \dot{A}'_{js} e^{j\omega_s t} + \dot{A}'_{js}^* e^{-j\omega_s t} = A_{js} \cos(\omega_s t + \varphi_s), \quad A_{js} = 2|\dot{A}'_{js}|, \quad (11.24)$$

где $\dot{A}'_{js} = A'_{js} e^{j\varphi_s}$ и $\dot{A}'_{js}^* = A'_{js} e^{-j\varphi_s}$ – комплексно-сопряженные (в силу вещественности коэффициентов матриц $\mathbf{K}^L, \mathbf{K}^C$ и \mathbf{W}_d) амплитуды.

Частоты ω_s называются *собственными* или *нормальными частотами* связанной системы³, а колебания с частотами ω_s – *нормальными* или *собственными модами* связанной колебательной системы.

Когда все ω_s найдены, определитель по теореме о разложении многочлена на множители можно представить в виде произведения

$$\det| -\mathbf{K}^L \omega^2 + \mathbf{W}_d \mathbf{K}^C | = \prod_{s=1}^N (\omega^2 - \omega_s^2) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \omega^2 - \omega_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 - \omega_2^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 - \omega_3^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \omega^2 - \omega_{N-1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \omega^2 - \omega_N^2 \end{bmatrix} = 0. \quad (11.25)$$

В (11.25) недиагональные элементы, характеризующие связи между контурами, отсутствуют. Это означает, что дифференциальные уравнения (11.17) трансформируются в уравнения вида

$$\ddot{q}_s + \omega_s^2 q_s = 0, \quad s = \overline{1, N} \quad (11.26)$$

каждое из которых содержит одну переменную и описывает колебания в одноконтурной системе (гармонический осциллятор).

- Нормальные моды связанной колебательной системы являются гармоническими функциями и *взаимно ортогональны*, т.е. возбуждение одной собственной моды не вызывает возбуждения остальных. Отсюда термин "нормальные колебания".
- Каждое нормальное колебание существует одновременно во всех парциальных системах, а результирующие колебания парциальных контуров полигармонические.
- Спектр собственных частот связанной системы *не эквидистантен*, поэтому колебания в парциальных контурах являются *квазипериодическими*.
- N -контурная связанная колебательная система может быть представлена *эквивалентной совокупностью N несвязанных между собой* одиночных колебательных контуров, собственные частоты которых совпадают с нормальными частотами связанной системы.

³ В некоторых монографиях и учебниках их называют частотами связи.

Остается определить амплитуды колебаний A_{js} . Подставляя (11.19) в (11.22), получим для каждой нормальной частоты ω_s систему однородных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^N (-\omega_s^2 k_{ij}^L + \omega_{0i}^2 k_{ij}^C) A_{js} = 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (11.27)$$

Как следует из (11.27), A_{js} линейно зависимы, поэтому одну из них, например A_{1s} , можно выбрать произвольно⁴. Тогда

$$\sum_{j=2}^N (-\omega_s^2 k_{ij} + \omega_{0i}^2 k_{ij}^C) A_{js} = (\omega_s^2 k_{i1}^L - \omega_{0i}^2 k_{i1}^C) A_{1s}, \quad i = \overline{1, N}$$

или

$$\sum_{j=2}^N (-\omega_s^2 k_{ij}^L + \omega_{0i}^2 k_{ij}^C) \frac{A_{js}}{A_{1s}} = (\omega_s^2 k_{i1}^L - \omega_{0i}^2 k_{i1}^C), \quad i = \overline{1, N}.$$

Это система N алгебраических уравнений относительно $N - 1$ коэффициентов $\chi_{js} = \frac{A_{js}}{A_{1s}}$. Уравнения линейно зависимы, и одно из них, например первое, можно исключить. Все коэффициенты χ_{js} вещественны. Если колебания j -й координаты оказываются в противофазе с колебаниями первой координаты, то χ_{js} приписывается отрицательный знак.

Решение уравнений имеет вид вектора, который называется *вектором коэффициентов распределения амплитуд* на частоте ω_s . Разрешая аналогичные системы уравнений для других нормальных частот, получим квадратную матрицу \mathbf{H} из коэффициентов χ_{js} :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} & \dots & \chi_{2,N-1} & \chi_{2N} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} & \dots & \chi_{3,N-1} & \chi_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \chi_{N1} & \chi_{N2} & \chi_{N3} & \dots & \chi_{N,N-1} & \chi_{NN} \end{bmatrix}$$

С помощью матрицы \mathbf{H} решения (11.16) можно представить в виде вещественных гармонических колебаний:

$$q_{js} = A_{1s} \chi_{js} \cos(\omega_s t + \varphi_s), \quad (11.28)$$

где A_{1s} — амплитуда колебаний первой переменной на частоте ω_s ; а φ_s — начальная фаза колебаний. Общее решение системы уравнений (11.17) или матричного уравнения (11.18) принимает вид

$$q_j = \sum_{s=1}^N q_{js} = \sum_{s=1}^N A_{1s} \chi_{js} \cos(\omega_s t + \varphi_s). \quad (11.29)$$

Связанные колебания в i -м парциальном контуре представляют алгебраическую сумму переменных q_j . Число и условные номера суммируемых переменных определяются ненулевыми связями i -го контура с другими парциальными контурами, а параметры связей выступают в

⁴ Это справедливо, когда все собственные частоты связанной системы различны. Если две собственные частоты одинаковы, то произвольно задаются уже две амплитуды (Булгаков Б.В. Колебания. М.: Гостехиздат, 1954. С.575).

качестве масштабных коэффициентов. Координаты вектора \mathbf{q} являются суперпозициями всех нормальных колебаний связанной системы, т.е. колебания в i -м контуре включают все нормальные моды и могут иметь весьма сложную форму.

Решения (11.28) и (11.29) содержат большое число постоянных. Некоторые из них уже были определены. Так, величины N собственных частот и $N * (N - 1)$ коэффициентов распределения амплитуд зависят от структуры и параметров связанной системы, а вот $2N$ величин A_{1s} и φ_s определяются начальными условиями задачи. При этом начальные условия задают амплитуды нормальных колебаний в какой-либо одной парциальной системе, а колебания в остальных – пропорциональны коэффициентам матрицы \mathbf{H} .

Следует заметить, что не существуют начальные условия, при которых колебания в одном контуре имеют частоту ω_1 , в другом – ω_2 , в третьем – ω_3 и т.д., так как колебания на любой из ω_s должны существовать одновременно во всех участках связанной системы, но соотношения амплитуд собственных мод в каждой парциальной системе зависит от своих значений χ_{js} , и формы колебаний в парциальных системах различаются.

Начальные условия можно задать так, чтобы колебания во всех контурах происходили только с одной частотой ω_s . Для этого достаточно выбрать начальное распределение амплитуд колебаний в парциальных системах в соответствии с коэффициентами χ_{js} . Более того, если колебания в контурах происходят по гармоническому закону, то частота колебаний является одной из нормальных частот связанной системы.

11.2.2. N-контурные системы с потерями

Если парциальные системы содержат активные сопротивления, а внешние воздействия отсутствуют, то из уравнений (11.4) получим

$$\sum_{j=1}^N (k_{ij}^L \ddot{q}_j + 2\alpha_{ij} \dot{q}_j + \omega_{0i}^2 k_{ij}^C q_j) = 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Условие их совместности в виде равенства нулю определителя системы приводит к уравнению степени $2N$ относительно коэффициентов λ . Это уравнение в отличие от (11.21) содержит нечетные степени λ и комплексные корни

$$\lambda_s = -\gamma_s \pm j\omega_s.$$

Величины λ_s можно назвать *комплексными собственными частотами*, причем все γ_s положительны. Частное решение уравнения (11.4) для колебаний j -й координаты вектора \mathbf{q} на частоте λ_s имеет вид

$$q_{js} = A_{js} e^{-\gamma_s t} \cos(\omega_s t + \varphi_s), \quad (11.30)$$

Используя теорему о разложении многочлена на множители, определитель системы можно привести к диагональному виду, а N -контурную связанную колебательную систему представить *эквивалентной совокупностью N несвязанных* диссипативных колебательных контуров. При этом исходная система связанных уравнений распадается на N независимых уравнений, каждое из которых содержит одну переменную и описывает колебания в одноконтурной системе:

$$\ddot{q}_s + 2\gamma_s \dot{q}_s + (\omega_s^2 + \gamma_s^2) q_s = 0, \quad s = \overline{1, N}. \quad (11.31)$$

Для определения коэффициентов распределения амплитуд можно использовать те же уравнения (11.4), но коэффициенты χ_{js} становятся комплексными $\dot{\chi}_{js} = \chi_{js} \exp[j\vartheta_{js}]$, так как уравнения (11.4) содержат слагаемые с множителем $j\omega$. Это означает, что фазы колебаний на собственной частоте ω_s в разных парциальных контурах отличаются, а колебания j -й координаты имеют вид

$$q_j = \sum_{s=1}^N A_{1s} \chi_{js} e^{-\gamma_s t} \cos(\omega_s t + \varphi_s + \vartheta_{js}), \quad (11.32)$$

где A_{1s} – амплитуда колебаний первой переменной на частоте ω_s ; φ_s – начальная фаза колебаний.

Связанные колебания в i -м парциальном контуре являются алгебраической суммой затухающих колебаний разных частот, причем фазы гармонических функций одинаковой частоты не совпадают из-за различия ϑ_{js} . Амплитуды A_{1s} и фазы φ_s определяются начальными условиями.

В качестве примеров построенной теории и ее основных выводов рассмотрим связанные колебания в трехконтурной системе с емкостной связью и в двухконтурной системе с трансформаторной связью.

11.2.3. Трехконтурная LC-система с емкостной связью

Электрическая схема трех емкостно связанных контуров представлена на рис. 11.5. Пусть емкости всех конденсаторов одинаковы, индуктивность внутреннего контура вдвое превышает индуктивности крайних, а активные сопротивления в контурах пренебрежимо малы. Введем в рассмотрение контурные токи $I_i = dq_i/dt$ и для каждого контура составим дифференциальное уравнение для зарядов q :

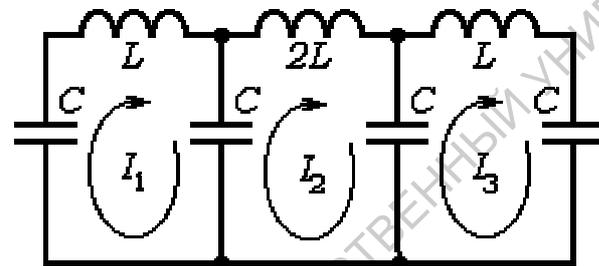


Рис. 11.5. Трехконтурная LC-система с емкостной связью

$$\begin{aligned} L\ddot{q}_1 + q_1/C_{1\Sigma} - q_2/C &= & L\ddot{q}_1 + 2q_1/C - q_2/C &= 0, \\ 2L\ddot{q}_2 + q_2/C_{2\Sigma} - q_1/C - q_3/C &= & 2L\ddot{q}_2 + 2q_2/C - q_1/C - q_3/C &= 0, \\ L\ddot{q}_3 + q_3/C_{3\Sigma} - q_2/C &= & L\ddot{q}_3 + 2q_2/C - q_2/C &= 0, \end{aligned}$$

где $C_{i\Sigma} = 2C$ – собственные емкости контуров. После дифференцирования этих уравнений по времени и деления на L_i получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для токов:

$$\begin{aligned} \ddot{I}_1 + \frac{2}{LC} (I_1 - \frac{1}{2}I_2) &= 0, \\ \ddot{I}_2 + \frac{1}{LC} (-\frac{1}{2}I_1 + I_2 - \frac{1}{2}I_3) &= 0, \\ \ddot{I}_3 + \frac{2}{LC} (-\frac{1}{2}I_2 + I_3) &= 0 \end{aligned} \quad (11.33)$$

или в матричном виде

$$\ddot{\mathbf{I}} + \mathbf{W}_d \mathbf{K}^C \mathbf{I} = 0, \quad (11.34)$$

$$\text{где } \mathbf{W}_d = \begin{bmatrix} \omega_{01}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{02}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{03}^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^C = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad \omega_{01}^2 = \omega_{03}^2 = 2/LC, \quad \omega_{02}^2 = 1/LC.$$

В соответствии с (11.27) будем искать решение уравнения (11.34) в виде

$$I_j = A_j \cos(\omega t + \varphi). \quad (11.35)$$

Подстановка (11.35) в (11.34) дает систему однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (\omega_{01}^2 - \omega^2)I_1 - \frac{1}{2}\omega_{01}^2 I_2 &= 0, \\ -\frac{1}{2}\omega_{02}^2 I_1 + (\omega_{02}^2 - \omega^2)I_2 - \frac{1}{2}\omega_{02}^2 I_3 &= 0, \\ -\frac{1}{2}\omega_{03}^2 I_2 + (\omega_{03}^2 - \omega^2)I_3 &= 0. \end{aligned} \quad (11.36)$$

Приравняв нулю определитель системы уравнений (11.36), получим уравнение для определения нормальных частот системы:

$$\begin{aligned} (\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2)(\omega_{03}^2 - \omega^2) - \frac{1}{4}\omega_{01}^2\omega_{02}^2(\omega_{03}^2 - \omega^2) - \frac{1}{4}(\omega_{01}^2 - \omega^2)\omega_{02}^2\omega_{03}^2 = \\ = (\omega_{01}^2 - \omega^2) \left[\omega^4 - \omega^2(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) + \frac{1}{2}\omega_{01}^2\omega_{02}^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Нормальные частоты, расположенные в порядке возрастания значений, таковы:

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3 - \sqrt{5}}\omega_{01}, \quad \omega_2 = \omega_{01}, \quad \omega_3 = \frac{1}{2}\sqrt{3 + \sqrt{5}}\omega_{01}.$$

(отрицательные значения частот отброшены как не имеющие физического смысла), а выражения для переменных q_j принимают вид:

$$I_j = A_{j1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{j2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + A_{j3} \cos(\omega_3 t + \varphi_3). \quad (11.37)$$

Следующий этап решения заключается в определении коэффициентов χ_{js} распределения амплитуд нормальных колебаний. Подставляя (11.37) в два уравнения (11.36) и используя найденные значения нормальных частот, получим:

$$\begin{aligned} (\omega_{01}^2 - \omega_1^2)A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + (\omega_{01}^2 - \omega_2^2)A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \\ + (\omega_{01}^2 - \omega_3^2)A_{13} \cos(\omega_3 t + \varphi_3) - \\ - \frac{\omega_{01}^2}{2} [A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + A_{23} \cos(\omega_3 t + \varphi_3)] = 0, \\ (\omega_{02}^2 - \omega_1^2)A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + (\omega_{02}^2 - \omega_2^2)A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \\ + (\omega_{02}^2 - \omega_3^2)A_{23} \cos(\omega_3 t + \varphi_3) - \\ - \frac{\omega_{02}^2}{2} [A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + A_{13} \cos(\omega_3 t + \varphi_3)] - \\ - \frac{\omega_{02}^2}{2} [A_{31} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{32} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + A_{33} \cos(\omega_3 t + \varphi_3)] = 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения имеем

$$(\omega_{01}^2 - \omega_1^2)A_{11} = \frac{\omega_{01}^2}{2}A_{21}, \quad (\omega_{01}^2 - \omega_2^2)A_{12} = \frac{\omega_{01}^2}{2}A_{22}, \quad (\omega_{01}^2 - \omega_3^2)A_{13} = \frac{\omega_{01}^2}{2}A_{23}.$$

Отсюда $A_{21} = (1 + \sqrt{5})A_{11}/2$, $A_{22} = 0$, $A_{23} = (1 - \sqrt{5})A_{13}$,

$$\chi_{21} = A_{21}/A_{11} = (1 + \sqrt{5})/2, \quad \chi_{22} = 0, \quad \chi_{23} = A_{23}/A_{13} = (1 - \sqrt{5})/2.$$

Из второго уравнения получаем

$$(\omega_{02}^2 - \omega_1^2)A_{21} - \frac{\omega_{02}^2}{2}A_{11} = \frac{\omega_{02}^2}{2}A_{31}, \quad (\omega_{02}^2 - \omega_2^2)A_{22} - \frac{\omega_{02}^2}{2}A_{12} = \frac{\omega_{02}^2}{2}A_{32},$$

$$(\omega_{02}^2 - \omega_3^2)A_{23} - \frac{\omega_{02}^2}{2}A_{13} = \frac{\omega_{02}^2}{2}A_{33}, \quad \chi_{31} = \frac{A_{31}}{A_{11}} = 1, \quad \chi_{32} = \frac{A_{32}}{A_{12}} = -1, \quad \chi_{33} = \frac{A_{33}}{A_{13}} = 1.$$

Тогда полная матрица коэффициентов распределения амплитуд

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (1 + \sqrt{5})/2 & 0 & (1 - \sqrt{5})/2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Напомним, что номер строки в матрице \mathbf{H} соответствует номеру переменной q_j , а номера столбцов отвечают условным номерам нормальных частот связанной системы. Тогда первый столбец $(1, (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618, 1)$ представляет относительные амплитуды начальных токов в парциальных контурах, обеспечивающих возбуждение низшей собственной моды, а второй $(1, 0, -1)$ и третий $(1, (1 - \sqrt{5})/2 = -0.62, 1)$ столбцы - относительные амплитуды начальных токов, обеспечивающих возбуждение второй и третьей мод соответственно. Это означает, что при возбуждении низшей моды колебания во всех контурах синфазны, при возбуждении второй моды колебания тока в первом и третьем парциальных контурах происходят в противофазе, а второй парциальный контур вообще не возбуждается. Наконец, при возбуждении третьей нормальной моды колебания в первом и третьем парциальных контурах происходят синфазно и в противофазе с колебаниями во втором контуре.

В заключение получим два частных решения данной задачи.

1. Пусть в рассматриваемой трехконтурной системе необходимо возбудить колебания только первой нормальной моды. В соответствии с коэффициентами первого столбца матрицы \mathbf{H} зададим в парциальных контурах токи $I_1(0) = I_3(0) = I_0$, $I_2(0) = \chi_{21}I_0 = 1.618i_0$ и получим следующие уравнения для расчета A_{11} , A_{12} , A_{13} (начальные фазы колебаний произвольны):

$$\begin{aligned} A_{11} + A_{12} + A_{13} &= I_0, \\ 1.618A_{11} - 0.62A_{13} &= 1.618I_0, \\ A_{11} - A_{12} + A_{13} &= I_0. \end{aligned}$$

Отсюда $A_{11} = I_0$, $A_{12} = A_{13} = 0$, а колебания токов в парциальных контурах описываются соотношениями

$$\begin{aligned} I_1(t) &= I_0 \cos 0.437t, \\ I_2(t) &= 1.618I_0 \cos 0.437t, \\ I_3(t) &= I_0 \cos 0.437t, \end{aligned}$$

т.е. во всех парциальных системах возбуждается только первая нормальная мода. Заметим, что даже небольшое изменение одного из начальных токов приводит к возбуждению всех трех мод.

2. Пусть начальные условия в момент времени $t = 0$ имеют вид:

$$I_1(0) = I_0, \quad I_2(0) = I_3(0) = 0, \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \dot{I}_3 = 0.$$

Подставляя начальные условия в (11.37), получим следующую систему уравнений для определения A_{11} , A_{12} , A_{13} (начальные фазы колебаний отсутствуют ($\varphi_j = 0$), так как все $dI_j/dt = 0$):

$$\begin{aligned} I_1(0) &= A_{11} + A_{12} + A_{13} = I_0, \\ I_2(0) &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}A_{21} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}A_{23} = 0, \\ I_3(0) &= A_{31} - A_{32} + A_{33} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда $A_{11} = I_0(\sqrt{5} - 1)/4\sqrt{5}$, $A_{12} = I_0/2$, $A_{13} = (\sqrt{5} + 1)/4\sqrt{5}$, а колебания токов описываются соотношениями

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \frac{I_0}{4} \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cos 0.437t + 2 \cos t + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cos 1.144t \right), \\ I_2(t) &= \frac{I_0}{2\sqrt{5}} (\cos 0.437t - \cos 1.144t), \\ I_3(t) &= \frac{I_0}{4} \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cos 0.437t - 2 \cos t + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cos 1.144t \right). \end{aligned}$$

Рассчитанные по этим формулам колебания представлены на рис. 11.6 и имеют весьма сложную форму. При сопоставлении токов $I_1(t)$ и $I_3(t)$ выявляется следующая закономерность: они сдвинуты по фазе почти на четверть периода колебаний, а максимум амплитуды в первом контуре соответствует минимуму амплитуды в третьем контуре, что можно трактовать как "перекачку энергии" из первого контура в третий и обратно через второй контур.

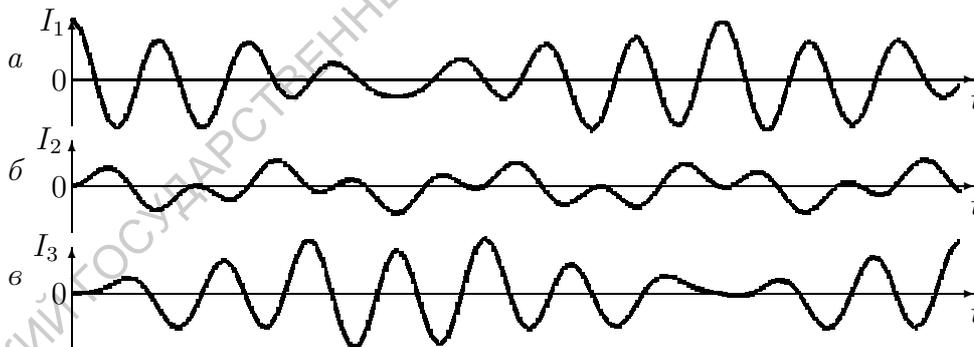


Рис. 11.6. Графики связанных колебаний в первом (а), втором (б) и третьем (в) контурах при возбуждении первого контура

11.2.4. Двухконтурная LC-система с трансформаторной связью

Обратимся к системе двух индуктивно связанных контуров (см. рис. 11.2,а) и рассмотрим уравнения (11.7) при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Пусть внешнее воздействие отсутствует ($E = 0$). Дифференцируя (11.7) по времени и обозначая dq_j/dt через I_j , получим систему однородных дифференциальных уравнений для токов:

$$\begin{aligned} \ddot{I}_1 + \omega_{01}^2 I_1 - k_1 \ddot{I}_2 &= 0, \\ \ddot{I}_2 + \omega_{02}^2 I_2 - k_2 \ddot{I}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (11.38)$$

где $\omega_{01} = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ и $\omega_{02} = 1/\sqrt{L_2 C_2}$ – собственные частоты парциальных контуров; $k_1 = M/L_1$ и $k_2 = M/L_2$ – коэффициенты передачи от L_1 к L_2 и от L_2 к L_1 .

Будем искать решение уравнений (11.38) в виде

$$I_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi), \quad I_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi). \quad (11.39)$$

Подставляя (11.39) в (11.38), получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (\omega_{01}^2 - \omega^2)A_1 + \omega^2 k_1 A_2 &= 0, \\ +\omega^2 k_2 A_1 + (\omega_{02}^2 - \omega^2)A_2 &= 0. \end{aligned} \quad (11.40)$$

Нетривиальное решение этой системы уравнений существует только при обращении в нуль ее детерминанта:

$$(\omega_{01}^2 - \omega^2)(\omega_{02}^2 - \omega^2) - k^2 \omega^4 = (1 - k^2)\omega^4 - (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)\omega^2 + \omega_{01}^2 \omega_{02}^2 = 0,$$

где $k = \sqrt{k_1 k_2}$ – коэффициент связи. Решения этого биквадратного уравнения

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 &= \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)^2 - 4(1 - k^2)\omega_{01}^2 \omega_{02}^2}}{2(1 - k^2)} = \\ &= \frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 + 4k^2 \omega_{01}^2 \omega_{02}^2}}{2(1 - k^2)} \end{aligned} \quad (11.41)$$

представляет две возможные частоты собственных колебаний ω_1 и ω_2 , а общее решение уравнений (11.38) удовлетворяет равенствам:

$$\begin{aligned} I_1(t) &= A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \\ I_2(t) &= A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = \\ &= \chi_{21} A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \chi_{22} A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (11.42)$$

Итак, в каждой парциальной системе одновременно существуют колебания на двух нормальных частотах. Коэффициенты χ_{21} и χ_{22} зависят от степени взаимосвязи контуров и характеризуют форму таких бигармонических колебаний.

Зависимость нормальных частот от расстройки контуров. Связанность. Из формулы (11.41) вытекают очень важные зависимости нормальных частот связанных колебаний от соотношения парциальных частот и коэффициента связи k .

Если ввести в рассмотрение безразмерные нормальные частоты $\Omega_{1,2} = \omega_{1,2}/\omega_{01}$ и расстройку парциальных контуров $\zeta = \omega_{02}/\omega_{01}$, то согласно (11.41) получим (значения $\Omega_{1,2} < 0$ отброшены):

$$\Omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1 + \zeta^2 \pm \sqrt{(1 - \zeta^2)^2 + 4k^2 \zeta^2}}{2(1 - k^2)}}. \quad (11.43)$$

Зависимости $\Omega_1(\zeta)$ и $\Omega_2(\zeta)$ при трех фиксированных значениях k представлены на рис. 11.7. Это графики Вина.

Как следует из рис. 11.7, при всех значениях k одна из собственных частот связанной системы превышает большую парциальную частоту, а другая оказывается меньше меньшей парциальной частоты, т.е. всегда выполняется неравенство

$$\omega_1 \leq \omega_{01} \leq \omega_{02} \leq \omega_2.$$

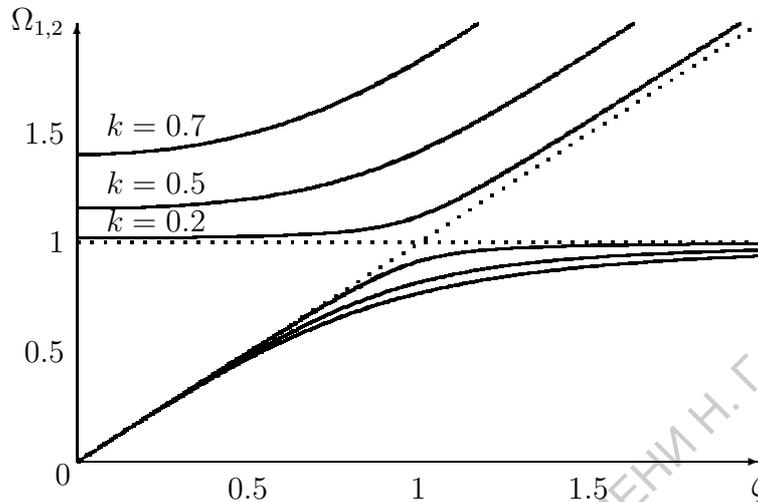


Рис. 11.7. Зависимости нормированных собственных частот Ω_1 и Ω_2 от расстройки контуров ζ

При $\zeta = 0$ имеем $\Omega_1 = 0$, а $\Omega_2 = 1/\sqrt{1-k^2}$. Для пренебрежимо малой связи ($k \rightarrow 0$)

$$\Omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1 + \zeta^2 \pm (1 - \zeta^2)}{2}}.$$

Отсюда $\Omega_1 = \zeta$, $\Omega_2 = 1$ для $\zeta < 1$ и $\Omega_1 = 1$, $\Omega_2 = \zeta$ для $\zeta > 1$. (На рис. 11.7 изображены пунктирными линиями.)

Степень взаимосвязи между парциальными системами наиболее полно описывается специальным коэффициентом, введенным академиком Л.И.Мандельштамом [2] и получившим название *связанности*.

Обратимся к соотношениям (11.41), (11.43) и представим их в виде

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \pm (\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)\sqrt{1 + \sigma^2}}{2(1 - k^2)}},$$

$$\Omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1 + \zeta^2 \pm (1 - \zeta^2)\sqrt{1 + \sigma^2}}{2(1 - k^2)}},$$

где $\sigma = \frac{2k\omega_{01}\omega_{02}}{|\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2|} = \frac{2k\zeta}{|1 - \zeta^2|}$ — *связанность системы*. (11.44)

Связанность двухконтурной системы зависит и от величины коэффициента связи, и от соотношения собственных частот парциальных систем. Если частоты парциальных контуров близки, то даже при малых коэффициентах связи физические процессы в контурах существенно влияют друг на друга. И наоборот, при большой расстройке связанность контуров остается слабой. Отметим, что потери в контурах значительно ослабляют их связанность.

Связанные колебания при совпадении парциальных частот.

Пусть контуры имеют одинаковые парциальные частоты $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$ (индуктивности контуров могут отличаться и $k_1 \neq k_2$). Тогда нормальные частоты удовлетворяют равенствам

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}}, \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}. \quad (11.45)$$

При $k \rightarrow 1$ нормальные частоты "расходятся": $\omega_1 \rightarrow \omega_0/\sqrt{2}$, $\omega_2 \rightarrow \infty$.

Для определения коэффициентов χ_{21} и χ_{22} подставим (11.42) в одно из уравнений (11.38) и, используя (11.45), получим:

$$\begin{aligned} & [(\omega_0^2 - \omega_1^2)A_{11} + \omega_1^2 k_1 A_{21}] \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \\ & + [(\omega_0^2 - \omega_2^2)A_{12} + \omega_2^2 k_1 A_{22}] \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = 0, \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} kA_{11} + k_2 A_{21} = 0, \quad -kA_{12} + k_2 A_{22} = 0, \quad \chi_{21} = \frac{A_{21}}{A_{11}} = -\frac{k}{k_2} = -\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}, \\ \chi_{22} = \frac{A_{22}}{A_{12}} = \frac{k}{k_2} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = -\chi_{21}, \end{aligned}$$

а решение (11.38) принимает вид

$$\begin{aligned} I_1(t) &= A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \\ I_2(t) &= \sqrt{L_2/L_1} (A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) - A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)). \end{aligned} \quad (11.46)$$

Для определения значений амплитуд A_{11} , A_{12} и начальных фаз φ_1 , φ_2 используем начальные условия задачи. Пусть при $t=0$ имеем $I_1(0) = I_0$, $I_2(0) = 0$, $dI_1/dt(0) = dI_2/dt(0) = 0$. Дифференцируя (11.42), получим:

$$\begin{aligned} \frac{dI_1}{dt}(0) &= -A_{11}\omega_1 \sin \varphi_1 - A_{12}\omega_2 \sin \varphi_2 = 0, \\ \frac{dI_2}{dt}(0) &= \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} (-A_{11}\omega_1 \sin \varphi_1 + A_{12}\omega_2 \sin \varphi_2) = 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения совместны только при $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Тогда

$$A_{11} + A_{12} = I_0, \quad A_{11} - A_{12} = 0.$$

Отсюда $A_{11} = A_{12} = I_0/2$,

$$I_1(t) = \frac{I_0}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = I_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t, \quad (11.47)$$

$$I_2(t) = \frac{I_0}{2} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = I_0 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t. \quad (11.48)$$

Итак, связанные колебания в контурах – бигармонические (суммы нормальных мод). В первом контуре колебания первой и второй мод происходят в фазе, а во втором – в противофазе. Разность нормальных частот $\omega_2 - \omega_1 = \omega_0/\sqrt{1-k} - \omega_0/\sqrt{1+k} \cong \omega_0(1+k/2 - (1-k/2)) = \omega_0 k$. При больших значениях k связанные колебания $I_1(t)$ и $I_2(t)$ имеют сложную

форму (рис. 11.8, а, б). С ослаблением связи нормальные частоты сближаются, а связанные колебания в контурах приобретают форму биений⁵ (рис. 11.8, в, г). При этом $I_0 \cos(\omega_2 - \omega_1)t/2$ и $I_0 \sqrt{L_1/L_2} \sin(\omega_2 - \omega_1)t/2$ можно трактовать как медленно изменяющиеся амплитуды колебаний с частотой $(\omega_1 + \omega_2)/2$ в первом и втором контурах соответственно.

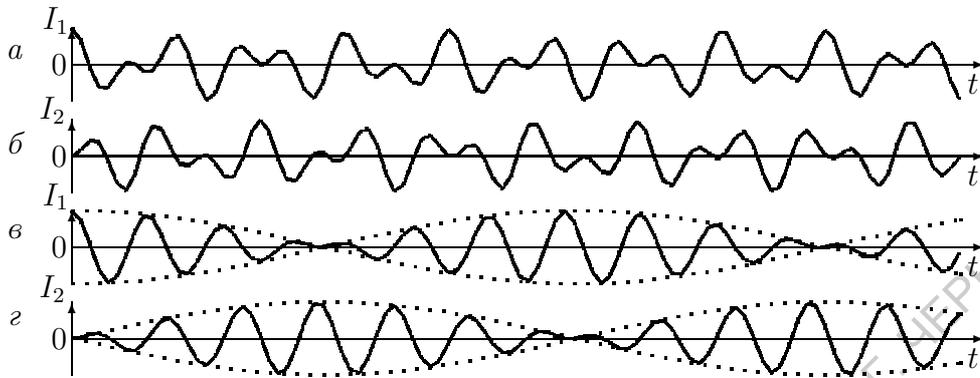


Рис. 11.8. Связанные колебания в первом (а, в) и втором (б, г) контурах двухконтурной системы для $k = 0.5$ (а, б) и $k = 0.15$ (в, г)

Как следует из (11.47) и (11.48), не только огибающие, но и сами колебания в контурах сдвинуты по фазе на 90° , т.е. максимальная величина тока в одном контуре достигается тогда, когда ток в другом контуре отсутствует. Огибающие сдвинуты во времени на четверть периода разностной частоты, т.е. каждую четверть периода

$$\frac{T}{4} = \frac{\pi/2}{(\omega_2 - \omega_1)/2} = \frac{\pi}{\omega_0 k}$$

происходит перекачка энергии из одного контура в другой. Сначала амплитуда колебаний в первом контуре практически не изменяется (рис. 11.8, в), а колебания во втором контуре начинают нарастать по линейному закону: $\sin(\omega_2 - \omega_1)t/2 \cong (\omega_2 - \omega_1)t/2$ (см. рис. 11.8, г). Нарастание колебаний во втором контуре прекращается, когда амплитуда колебаний в первом контуре падает до нуля, т.е. энергия колебаний полностью перетекает из первого контура во второй. Затем наступает обратный процесс.

На первый взгляд полученный результат кажется парадоксальным. Действительно, если связанные общим магнитным потоком колебательные контуры, настроенные на одну и ту же частоту, не изменяя пространственной ориентации катушек индуктивности, удалить на большое расстояние, то связь может стать ничтожно малой, но перекачка энергии не прекратится. Этот результат превосходно иллюстрирует физический смысл понятия "связанности". Согласно определению (11.44) при совпадении парциальных частот связанность контуров будет отлична от нуля даже тогда, когда контуры, по выражению Л.И.Мандельштама, "разнесены в разные комнаты".

⁵ Биения – колебания с периодически изменяющейся амплитудой, возникающие при наложении двух гармонических колебаний с близкими частотами.

11.3. Вынужденные колебания в связанных системах

Вынужденные колебания в связанных системах возникают под воздействием одного или нескольких внешних источников (для упрощения анализа гармонических) и обычно рассматриваются в диссипативных системах, т.е. при наличии конечных потерь.

Характер процессов в диссипативных связанных системах определяется связанными колебаниями с нормальными частотами ω_s и вынужденными колебаниями с частотой внешнего воздействия ω . Поскольку связанные колебания с течением времени полностью затухают, установившиеся колебания всех координат имеют частоту ω .

Если в одиночных контурах резонансное увеличение амплитуды вынужденных колебаний достигалось на одной (резонансной) частоте, то N -контурные связанные системы являются широкополосными и при изменении частоты внешнего воздействия резонансные увеличения амплитуды колебаний происходят в окрестностях всех собственных частот ω_s . В связи с этим основные задачи анализа вынужденных колебаний в связанных системах заключаются в определении резонансных частот и построении передаточных амплитудно-частотных характеристик (АЧХ).

Пусть N -контурная система описывается уравнением (11.5), а i -я координата воздействия – формулой $dU_i/dt = \dot{V}_{im} \exp[j\omega t]$, где \dot{V}_{im} – комплексная амплитуда; ω – частота воздействия.

Будем искать решение в виде

$$I_k(t) = \dot{I}_{km} \exp[j\omega t]. \quad (11.49)$$

Подставляя (11.49) в (11.5), получим систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^N (-\beta_{ik}\omega^2 + 2j\gamma_s\omega + \gamma_s^2 + \omega_s^2) \dot{I}_{km} = \dot{V}_{im}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (11.50)$$

где β_{ik} – коэффициенты, зависящие от вида связей; $-\gamma_s \pm j\omega_s$ – комплексные собственные частоты связанной системы. Отсюда решение для k -й координаты вектора $\mathbf{I}(t)$ описывается соотношением:

$$\dot{I}_{km} = \frac{1}{\dot{\Delta}(\omega)} \sum_{i=1}^N \dot{V}_{im} \dot{\Delta}_{ik}(\omega),$$

где $\dot{\Delta}(\omega)$ – определитель системы в комплексной форме; $\dot{\Delta}_{ik}(\omega)$ – алгебраические дополнения. Если собственные частоты системы различны и имеют единичную кратность, то определитель системы приводится к диагональному виду:

$$\dot{\Delta}(\omega) = \beta \prod_{s=1}^N (\omega - \lambda_s)(\omega - \lambda_s^*) = \beta \prod_{s=1}^N (-\omega^2 + 2j\gamma_s\omega + \gamma_s^2 + \omega_s^2).$$

Введем модули и аргументы сомножителей

$$\dot{\Delta}(\omega) = \beta \prod_{s=1}^N \sqrt{(\omega_s^2 + \gamma_s^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma_s^2\omega^2} e^{j\delta_s}$$

и, представляя \dot{I}_{km} в соответствии с методикой, описанной в 4.3.1 (формула (4.23)), в виде суммы простых дробей, окончательно получим для амплитуд токов установившихся колебаний:

$$\dot{I}_{km} = \sum_{s=1}^N \frac{\dot{R}_{ks}(\omega)}{\sqrt{(\omega_s^2 + \gamma_s^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma_s^2\omega^2}}, \quad (11.51)$$

где \dot{R}_{ks} – многочлены первой степени.

Слагаемые в формуле (11.51) аналогичны составляющим тока вынужденных колебаний в одиночном контуре (см. раздел 10.4 и соотношение (10.42)), т.е. при сближении частоты внешнего воздействия ω с собственными частотами системы ω_s происходит резонансное увеличение амплитуд вынужденных колебаний до некоторых максимальных значений. Точные значения резонансных частот соответствуют экстремумам функций $|\dot{I}_{km}(\omega)|$.

В общем случае внешнее воздействие представляет произвольную функцию времени. Сложное внешнее воздействие можно разложить в ряд или интеграл Фурье и получить искомое решение задачи, используя обратные фурье-преобразования. Еще одна возможность решения подобных задач открывается при использовании импульсных и переходных характеристик линейных, в том числе связанных систем (см. 8.2.2).

В радиоэлектронике чаще других используются двухконтурные связанные системы. При этом выделяются входные контуры, на которые задаются внешние воздействия, и выходные, где фиксируются отклики на них. Входной контур считается первичным, а выходной – вторичным.

Анализ вынужденных колебаний в двухконтурных связанных системах можно провести в общем виде, если рассмотреть систему с индуктивно-емкостной связью, записать уравнения (11.16) и, используя решение в виде (11.51), найти по описанной методике значения резонансных частот и построить АЧХ связанной системы. Отметим, что даже для простой системы с трансформаторной связью определение резонансных частот становится громоздким, так как сопровождается сложными вычислениями.

Вынужденные колебания в двухконтурных связанных системах можно исследовать более простыми средствами, если использовать *метод замещения связанных контуров эквивалентными одиночными контурами*. Важно, что одноконтурные схемы замещения можно построить для любых двухконтурных связанных систем вне зависимости от вида связи между парциальными контурами и получить с их помощью все основные характеристики резонансных явлений.

11.4. Резонансные явления в двухконтурных связанных системах

11.4.1. Замещение двухконтурных систем эквивалентными одиночными контурами

Сущность предлагаемой процедуры замещения заключается во введении таких одиночных контуров, у которых входные токи и напряжения совпадают с входными токами и напряжениями замещаемых связанных систем. Это условие будет выполнено при равенстве комплексных входных сопротивлений или проводимостей замещаемых систем. Для упрощения математических выкладок процедуру замещения целесообразно рассмотреть отдельно для связанных систем из последовательных и параллельных контуров.

1. Связанные последовательные контуры. Пусть в первичном контуре двухконтурной системы с трансформаторной связью (см. рис. 11.2,а) действует гармоническая ЭДС

$$\dot{E}(t) = \dot{E}_m e^{j\omega t}.$$

Запишем уравнения (11.6) для комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned} (j\omega L_1 + R_1 + \frac{1}{j\omega C_1})\dot{I}_{1m} - j\omega M\dot{I}_{2m} &= \dot{Z}_1\dot{I}_{1m} - jX_{\text{св}}\dot{I}_{2m} = \dot{E}_m, \\ -j\omega M\dot{I}_{1m} + (j\omega L_2 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_2})\dot{I}_{2m} &= -jX_{\text{св}}\dot{I}_{1m} + \dot{Z}_2\dot{I}_{2m} = 0, \end{aligned} \quad (11.52)$$

где \dot{E}_m , \dot{I}_{1m} и \dot{I}_{2m} – комплексные амплитуды ЭДС, токов в первичном и вторичном контурах; $\dot{Z}_1 = R_1 + jX_1$,

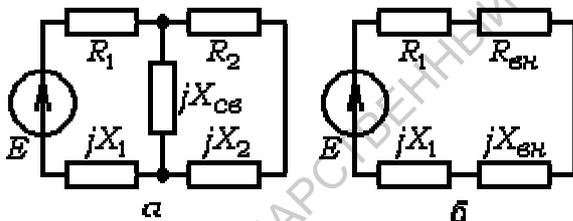


Рис. 11.9. Эквивалентные схемы: *а* – системы последовательных связанных контуров, *б* – контура замещения

$\dot{Z}_2 = R_2 + jX_2$ – комплексные сопротивления первичного и вторичного контуров соответственно; $jX_{\text{св}} = j\omega M$ – реактивное сопротивление связи контуров. Соотношения (11.52) иллюстрирует схема (рис. 11.9,а). Она справедлива для любых видов реактивной связи последовательных контуров.

Разрешая уравнения (11.52) относительно \dot{I}_{1m} и \dot{I}_{2m} , получим:

$$\dot{I}_{1m} = \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 + X_{\text{св}}^2} \dot{E}_m, \quad \dot{I}_{2m} = \frac{jX_{\text{св}}}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 + X_{\text{св}}^2} \dot{E}_m. \quad (11.53)$$

Отсюда входное сопротивление связанной системы

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{\text{вх}} &= \frac{\dot{E}_m}{\dot{I}_{1m}} = R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}} = \dot{Z}_1 + \frac{X_{\text{св}}^2}{\dot{Z}_2} = R_1 + jX_1 + \frac{X_{\text{св}}^2}{R_2 + jX_2} (R_2 - jX_2) = \\ &= R_1 + R_{\text{вх}} + j(X_1 + X_{\text{вх}}) = R_1 + \frac{X_{\text{св}}^2}{R_2 + X_2^2} R_2 + j(X_1 - \frac{X_{\text{св}}^2}{R_2 + X_2^2} X_2), \end{aligned} \quad (11.54)$$

где $R_{\text{вн}}$ и $jX_{\text{вн}}$ – сопротивления, ”вносимые” в первичный контур за счет связи со вторичным контуром. Формула (11.54) представляет входное сопротивление последовательного контура с резистивным сопротивлением $R_1 + R_{\text{вн}}$ и реактивным сопротивлением $j(X_1 + X_{\text{вн}})$ (рис. 11.9,б), т.е. выполняется условие замещения. Важно, что элементы первичного контура не изменяются, а вносимые сопротивления, согласно (11.54), удовлетворяют следующим равенствам: $R_{\text{вн}} < R_2$, т.е. $R_{\text{вх}} < R_1 + R_2$, $|X_{\text{вн}}| < |X_2|$.

2. Связанные параллельные контуры. Пусть в первичном контуре двухконтурной системы (рис. 11.4,б) действует гармонический ток

$$\dot{J}(t) = \dot{J}_m e^{j\omega t}.$$

Запишем уравнения (11.15) для комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned} (G_1 + jB_{1\Sigma})\dot{U}_{1m} - jB_{\text{св}}\dot{U}_{2m} &= \dot{Y}_1\dot{U}_{1m} - jB_{\text{св}}\dot{U}_{2m} = \dot{J}_m, \\ -jB_{\text{св}}\dot{U}_{1m} + (G_2 + jB_{2\Sigma})\dot{U}_{2m} &= -jB_{\text{св}}\dot{U}_{1m} + \dot{Y}_2\dot{U}_{2m} = 0, \end{aligned} \quad (11.55)$$

где \dot{J}_m , \dot{U}_{1m} и \dot{U}_{2m} – комплексные амплитуды тока, напряжений на первичном и на вторичном контурах; $\dot{Y}_1 = G_1 + jB_{1\Sigma}$, $\dot{Y}_2 = G_2 + jB_{2\Sigma}$ – комплексные проводимости первичного и вторичного контуров соответственно (G_1 и G_2 – их резистивные, а $B_{1\Sigma}$ и $B_{2\Sigma}$ – реактивные составляющие); $B_{\text{св}}$ – реактивная проводимость элемента связи.

Разрешая уравнения (11.55) относительно \dot{U}_{1m} и \dot{U}_{2m} , можно ввести эквивалентную проводимость системы (рис. 11.10,а)

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{\text{вх}} &= \frac{\dot{J}_m}{\dot{U}_{1m}} = G_{\text{вх}} + jB_{\text{вх}} = \\ &= \dot{Y}_1 + \frac{B_{\text{св}}^2}{\dot{Y}_2} = G_1 + jB_{1\Sigma} + \frac{B_{\text{св}}^2}{G_2^2 + B_{2\Sigma}^2} (G_2 - jB_{2\Sigma}). \end{aligned} \quad (11.56)$$

Так как (11.56) представляет входную проводимость параллельного контура (рис. 11.10,б), условие замещения выполняется. Комплексная проводимость контура замещения включает вносимые проводимости $G_{\text{вн}} = B_{\text{св}}^2 G_2 / (G_2^2 + B_{2\Sigma}^2)$ и $B_{\text{вн}} = -B_{\text{св}}^2 B_{2\Sigma} / (G_2^2 + B_{2\Sigma}^2)$. Соотношения для других видов реактивной связи параллельных контуров аналогичны.

Итак, связанную систему двух последовательных контуров можно заместить эквивалентным одиночным последовательным контуром, а связанную систему двух параллельных контуров – эквивалентным параллельным контуром. При этом соотношения (11.54) и (11.56) дуальны, в чем нетрудно убедиться, используя табл. 7.1 и 11.1. В связи с этим в дальнейшем можно ограничиться анализом одного из соотношений, например (11.54).

Введение одноконтурных схем замещения является решающим фактором при изучении резонансных явлений, так как позволяет использовать развитую для одиночных контуров методологию.

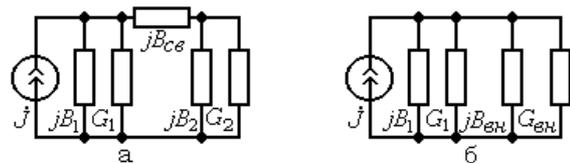


Рис. 11.10. Эквивалентные схемы: параллельных связанных контуров (а), контура замещения (б)

11.4.2. Условия резонанса и резонансные частоты

Представим формулы (11.53) и (11.54) в более удобной для анализа форме. Для этого введем относительные (ν_1, ν_2) и обобщенные (ξ_1, ξ_2) расстройки контуров и новый параметр – *фактор связи диссипативных контуров* A . Записывая реактивные сопротивления парциальных контуров в виде

$$X_1 = \omega_{01}L_1\nu_1 = \rho_1\nu_1, \quad X_2 = \omega_{02}L_2\nu_2 = \rho_2\nu_2,$$

где $\nu_1 = \omega/\omega_{01} - \omega_{01}/\omega$, $\nu_2 = \omega/\omega_{02} - \omega_{02}/\omega$ – относительные расстройки парциальных контуров; ρ_1 и ρ_2 – их характеристические сопротивления, получим:

$$\dot{I}_{1m} = \frac{R_2(1+j\xi_2)}{R_1R_2(1+j\xi_1)(1+j\xi_2)+X_{\text{св}}^2} \dot{E}_m = \frac{\dot{E}_m(1+j\xi_2)}{R_1[(1+j\xi_1)(1+j\xi_2)+A^2]}, \quad (11.57)$$

$$\dot{I}_{2m} = \frac{jX_{\text{св}}}{R_1R_2(1+j\xi_1)(1+j\xi_2)+X_{\text{св}}^2} \dot{E}_m = \frac{jA\dot{E}_m}{\sqrt{R_1R_2}[(1+j\xi_1)(1+j\xi_2)+A^2]}, \quad (11.58)$$

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = R_1 \left[1 + \frac{A^2}{1+\xi_2^2} + j \left(\xi_1 - \frac{A^2}{1+\xi_2^2} \xi_2 \right) \right]. \quad (11.59)$$

Здесь $\xi_1 = \nu_1\rho_1/R_1 = \nu_1Q_1$ и $\xi_2 = \nu_2\rho_2/R_2 = \nu_2Q_2$ – обобщенные расстройки контуров; Q_1 и Q_2 – их добротности; $A = X_{\text{св}}/\sqrt{R_1R_2}$.

Параметр A называется *фактором связи* контуров и представляет отношение модуля реактивного сопротивления связи к среднему сопротивлению потерь контуров.

В аналогичной форме можно записать входную проводимость эквивалентного параллельного контура (рис. 11.10, б):

$$\dot{Y}_{\text{вх}} = G_1 \left[1 + \frac{A^2}{1+\xi_2^2} + j \left(\xi_1 - \frac{A^2}{1+\xi_2^2} \xi_2 \right) \right], \quad (11.60)$$

где $\xi_1 = \nu_1Q_1$ и $\xi_2 = \nu_2Q_2$ – обобщенные расстройки контуров; $Q_1 = \omega_{01}C_{1\Sigma}/G_1$ и $Q_2 = \omega_{02}C_{2\Sigma}/G_2$ – их добротности; $A = B_{\text{св}}/\sqrt{G_1G_2}$ – фактор связи параллельных контуров.

Так как обращение в нуль входного реактивного сопротивления или входной реактивной проводимости цепи, содержащей реактивные элементы, является условием резонанса (см. 10.4.4), соотношение

$$\xi_1 - \frac{A^2}{1+\xi_2^2} \xi_2 = 0 \quad (11.61)$$

можно рассматривать в качестве *условий резонанса в двухконтурных связанных системах*. Здесь возможны два случая: собственные частоты парциальных контуров могут быть одинаковы ($\zeta = \omega_{02}/\omega_{01} = 1$) или различны ($\zeta \neq 1$).

Будем называть связанные системы *согласованными*, когда $\zeta = 1$, и *расстроенными*, если $\zeta \neq 1$. Связанность σ в двухконтурных согласованных системах велика даже при небольших величинах коэффициента связи (см. 11.2.4), а для расстроенных контуров она оказывается существенной только при небольших расстройках. Это накладывает отпечаток на характер резонансных явлений [1].

Анализ резонансных явлений при $\zeta \neq 1$ интересен для практики, так как парциальные контуры не всегда возможно настроить на одну и ту же частоту и даже в тех случаях, когда это возможно, настройка осуществляется с некоторой погрешностью.

1. Пусть связанная система состоит из согласованных контуров ($\zeta=1$) с одинаковыми добротностями $Q_1 \cong Q_2$. Тогда $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ и согласно (11.59) имеем

$$R_{\text{вх}} = R_1 \left(1 + \frac{A^2}{1 + \xi^2}\right), \quad X_{\text{вх}} = R_1 \xi \left(1 - \frac{A^2}{1 + \xi^2}\right) = 0.$$

Зависимости $R_{\text{вх}}(\xi)$ и $X_{\text{вх}}(\xi)$ для трех значений A представлены на рис. 11.11. Они показывают, что резистивная часть входного сопротивления (рис. 11.11,а) увеличивается с ростом A и достигает наибольшего значения при совпадении собственных частот парциальных контуров с частотой воздействия.

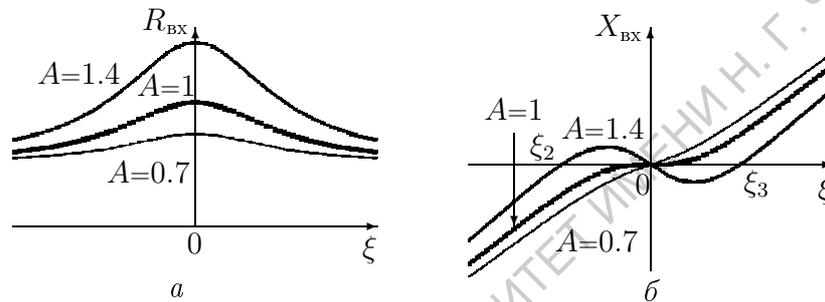


Рис. 11.11. Зависимости резистивной (а) и реактивной (б) составляющих входного сопротивления связанных контуров от ξ при трех значениях фактора связи A

Реактивная часть входного сопротивления (рис. 11.11,б) для малых A изменяется почти линейно и обращается в нуль при $\xi = 0$. Для $A = 1$ можно указать интервал частот в окрестности $\xi = 0$, в котором $X_{\text{вх}}(\xi) \cong 0$. При $A > 1$ появляются еще два значения ξ , для которых $X_{\text{вх}}(\xi) = 0$, т.е. реактивная составляющая входного сопротивления эквивалентного контура при $A > 1$ обращается в нуль на трех различных частотах внешнего воздействия (см. рис. 11.11,б), что свидетельствует о расширении области резонансных частот. Будут ли при этом токи первичного и вторичного контуров достигать максимальных значений, еще предстоит исследовать.

Согласно (11.57) и (11.58) при небольших ξ зависимости $I_{1m}(\xi)$ и $I_{2m}(\xi)$ почти одинаковы. Обобщенным расстройкам ξ_1 , ξ_2 и ξ_3 соответствует резистивное входное сопротивление ($\dot{Z}_{\text{вх}} = R_{\text{вх}}$), и $I_{1m}(\xi)$ имеет вид

$$\dot{I}_{1m} = \frac{\dot{E}_m}{R_{\text{вх}}} = \frac{\dot{E}_m / R_1}{1 + A^2 / (1 + \xi^2)}.$$

Амплитуды токов I_{1m} и I_{2m} при расстройках ξ_2 и ξ_3 достигают больших значений, чем при $\xi_1 = 0$, поэтому функция $|\dot{I}_{1m}(\xi)|$ имеет два максимума при ξ_2 и ξ_3 и локальный минимум при $\xi_1 = 0$.

Для определения точных значений резонансных частот представим $X_{\text{вх}}$ в виде

$$X_{\text{вх}} = \omega L_1 \left(1 - \frac{\omega_{01}^2}{\omega^2}\right) - \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + (\omega L_2)^2 \left(1 - \frac{\omega_{02}^2}{\omega^2}\right)^2} \omega L_2 \left(1 - \frac{\omega_{02}^2}{\omega^2}\right) = 0.$$

После деления на ωL_1 и введения обозначений $k^2 = M^2/L_1L_2$ и $d^2 = R_2^2/(\omega L_2)^2$ получим

$$\left(1 - \frac{\omega_{01}^2}{\omega^2}\right) - \frac{k^2}{d^2 + \left(1 - \frac{\omega_{02}^2}{\omega^2}\right)^2} \left(1 - \frac{\omega_{02}^2}{\omega^2}\right) = 0.$$

Пусть $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$. Тогда

$$\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \left(1 - \frac{k^2}{d^2 + \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2}\right) = 0.$$

Отсюда

$$\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) (d^2 - k^2 + \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2) = 0.$$

Обозначая $x = \omega_0^2/\omega^2$, получим кубическое уравнение:

$$(1 - x)(x^2 - 2x + 1 - k^2 + d^2) = 0.$$

Его решения $x_1 = 1$, $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{k^2 - d^2}$ соответствуют следующим резонансным частотам (отрицательные значения опущены как не имеющие физического смысла):

$$\omega_1 = \omega_0, \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \sqrt{k^2 - d^2}}}, \quad \omega_3 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \sqrt{k^2 - d^2}}}. \quad (11.62)$$

Зависимость резонансных частот от коэффициента связи представлена на рис.

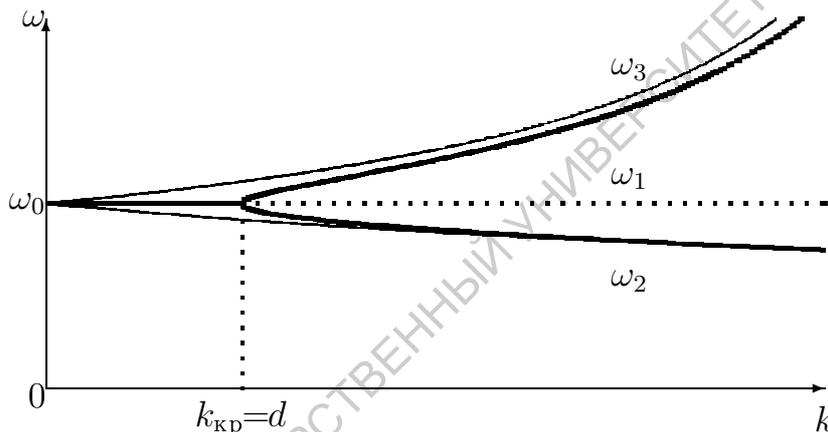


Рис. 11.12. Зависимость резонансных и нормальных (тонкие линии) частот от величины коэффициента связи

11.12 жирной кривой. Видно, что существует некоторое "критическое" значение коэффициента связи $k_{кр} = d$ ($A = 1$), разделяющее области одночастотного и трехчастотного резонансов. Резонансные частоты в общем случае отличаются от нормальных частот связанной системы и совпадают с ними при отсутствии потерь. Зависимости нормальных частот соответствующей системы контуров от k изображены на рис. 11.12 тонкими линиями.

падают с ними при отсутствии потерь. Зависимости нормальных частот соответствующей системы контуров от k изображены на рис. 11.12 тонкими линиями.

2. Пусть $\omega_{02} \neq \omega_{01}$ ($\zeta \neq 1$). Обратимся к формуле (11.55) и представим $R_{вх}(\omega)$ и $X_{вх}(\omega)$ в виде

$$R_{вх}(\omega) = R_1 + \frac{X_{св}^2}{R_2^2 + (\omega L_2 - 1/\omega C_2)^2} R_2,$$

$$X_{вх}(\omega) = X_1 - X_{вн} = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} - \frac{X_{св}^2 (\omega L_2 - 1/\omega C_2)}{R_2^2 + (\omega L_2 - 1/\omega C_2)^2}. \quad (11.63)$$

Рассмотрим $X_{вх}(\omega)$ в окрестностях собственных частот парциальных контуров $\omega_{01} = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ и $\omega_{02} = 1/\sqrt{L_2 C_2}$. Тогда $X_2(\omega_{02}) = X_{вн}(\omega_{02}) = 0$ и $X_1(\omega_{01}) = 0$. Не нарушая общности, допустим, что $\omega_{02} = \text{const}$, а ω_{01}

и величина связи подстраиваются. При этом изменения ζ не влияют на форму частотной зависимости $R_{\text{вх}}(\omega)$, а $X_{\text{вх}}(\omega)$ заметно деформируется.

Зависимости $R_{\text{вх}}(\omega)$ и $X_{\text{вх}}(\omega)$ для расстроенных ($\zeta=0.85$ и $\zeta=2$) контуров при большой связи ($A=2$) показаны на рис. 11.13 кривыми 1, 3, 4. Для сравнения приведена зависимость $X_{\text{вх}}(\omega)$ при $\zeta=1$ (кривая 2).

При расстройках, превышающих полосы пропускания парциальных контуров ($|\omega_{01} - \omega_{02}| > \omega_{01}/Q_1, \omega_{02}/Q_2$) трехчастотный резонанс не удается получить даже путем значительного увеличения фактора связи (кривая 3). Это означает, что полоса пропускания связанных контуров разбивается на две отстоящие друг от друга области и замещение эквивалентным одиночным контуром теряет смысл. Когда расстройка невелика, а частота внешнего сигнала совпадает с парциальной частотой вторичного контура ($\omega=\omega_{02}$), вносимое в первичный контур реактивное сопротивление обращается в нуль, и

$$X_{\text{вх}} = X_1(\omega_{02}) = \omega_{02}L_1 - \frac{1}{\omega_{02}C_1} \neq 0,$$

т.е. оказывается смещенным относительно оси абсцисс на положительную ($\omega_{01} < \omega_{02}$) или отрицательную ($\omega_{01} > \omega_{02}$) величину (кривые 3, 4). Условия резонанса (11.61), как и в случае согласованных контуров, могут выполняться для трех различных частот, а сравнение значений резонансных частот с частотной зависимостью $R_{\text{вх}}(\omega)$ показывает, что АЧХ расстроенных контуров оказывается двугорбой и резонансные частоты с увеличением A "расходятся".

11.4.3. Передаточные функции и амплитудно-частотные характеристики двухконтурных систем

Обратимся к уравнениям (11.57) и (11.58). Они представляют комплексные передаточные функции связанной системы контуров, зависящие от трех параметров: обобщенных расстроек ξ_1, ξ_2 и фактора связи A . Их модули имеют вид

$$|\dot{I}_{1m}(A, \xi_1, \xi_2)| = \frac{\sqrt{1 + \xi_2^2} |\dot{E}_m| / R_1}{\sqrt{(1 + A^2 - \xi_1 \xi_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2}}, \quad (11.64)$$

$$|\dot{I}_{2m}(A, \xi_1, \xi_2)| = \frac{A |\dot{E}_m| / \sqrt{R_1 R_2}}{\sqrt{(1 + A^2 - \xi_1 \xi_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2}}, \quad (11.65)$$

где ξ_1 и ξ_2 – обобщенные расстройки первичного и вторичного контуров.

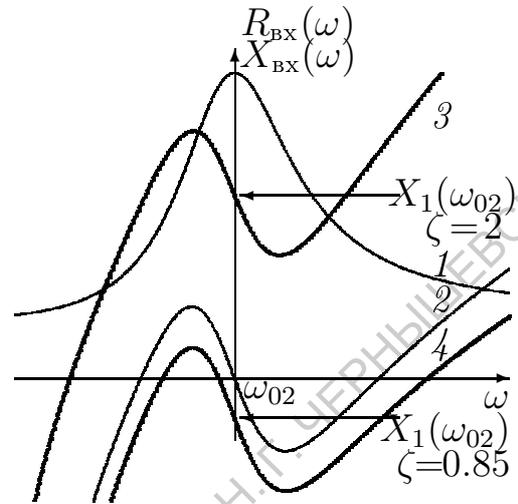


Рис. 11.13. Входные сопротивления согласованных (1–2) и расстроенных (3–4) контуров: 1 – $R_{\text{вх}}$; 2–4 – $X_{\text{вх}}$

Из формул (11.64) и (11.65) можно получить выражения для модулей коэффициентов передачи напряжения $|\dot{K}_U|$ и тока $|\dot{K}_I|$ как отношений комплексных амплитуд напряжения и тока во вторичном контуре к входным воздействиям

$$|\dot{K}_U(A, \xi_1, \xi_2)| = \frac{|\dot{U}_{2m}|}{|\dot{E}_m|} = \frac{|\dot{I}_{2m}|R_2}{|\dot{E}_m|} = \frac{A\sqrt{R_2/R_1}}{\sqrt{(1+A^2 - \xi_1\xi_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2}}, \quad (11.66)$$

$$|\dot{K}_I(A, \xi_2)| = \frac{|\dot{I}_{2m}|}{|\dot{I}_{1m}|} = \frac{A\sqrt{R_1/R_2}}{\sqrt{1 + \xi_2^2}}. \quad (11.67)$$

Обе функции передачи при $A = 1$, $\xi_1 = \xi_2 = 0$ принимают наибольшие значения $|\dot{K}_{U\max}| = \sqrt{R_2/R_1}/2$, а $|\dot{K}_{I\max}| = \sqrt{R_1/R_2}$

Интересно, что коэффициент передачи тока зависит от расстройки только вторичного контура ξ_2 , и АЧХ при любых значениях A имеет вид резонансной кривой, характерный для одиночных контуров.

- При $\omega_{01} = \omega_{02}$, $R_1 = R_2$ и $A = 1$ происходит полная передача тока из первичного контура во вторичный, хотя непосредственная связь между контурами может отсутствовать (трансформаторная связь).

Зависимости $|\dot{I}_{1m}(A, \xi_1, \xi_2)|$ и $|\dot{I}_{2m}(A, \xi_1, \xi_2)|$ трудно интерпретировать графически, поэтому в качестве АЧХ целесообразно представить зависимости $|\dot{I}_{2m}(\omega)|/|\dot{E}_m|$ для фиксированных собственных частот парциальных контуров и дискретных, практически интересных значений фактора связи A (рис. 11.14).

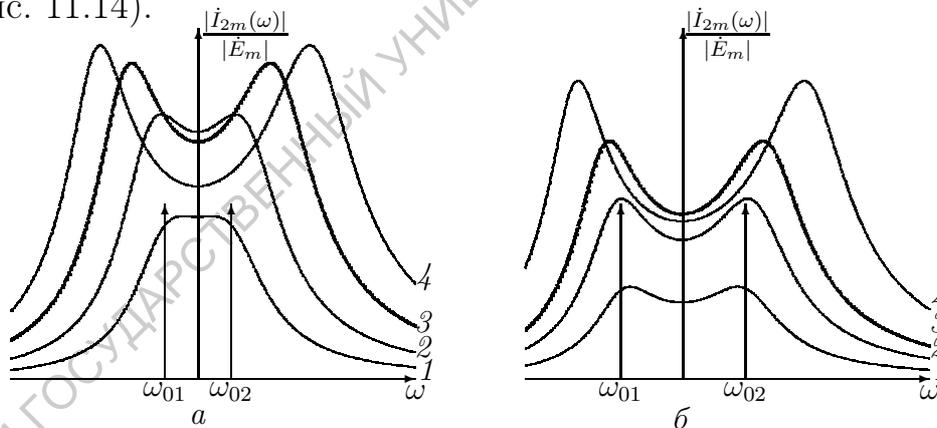


Рис. 11.14. АЧХ расстроенных контуров при $\zeta = 1.1$ (а) и $\zeta = 1.2$ (б):

1 - $A=0.5$; 2 - $A=1.1$; 3,а - $A=1.65$; 3,б - $A=2.28$; 4 - $A=3$

Согласно расчетам, представленным на рис. 11.14,а, при небольших расстройках ($\zeta = 1.1$) и малых A резонансные частоты практически не отличаются от собственных частот парциальных контуров, а форма АЧХ может приближаться к прямоугольной. С увеличением A резонансные частоты "расходятся", а АЧХ становятся двугорбыми. АЧХ связанных контуров в виде П-образных и двугорбых резонансных кривых представляют наибольший интерес, так как позволяют реализовать более широкие полосы частот и одновременно обеспечивают более высокую избирательность, чем в одноконтурных резонансных системах. Как

будет показано ниже, такие же формы АЧХ можно получить в связанных системах, состоящих из согласованных контуров, но при больших значениях связи.

Для согласованных контуров ($\zeta=1$, $\xi_1 = \xi_2 = \xi$) передаточные функции (11.64) и (11.65) зависят от двух переменных, и модули токов $|\dot{I}_{1m}(A, \xi)|$ и $|\dot{I}_{2m}(A, \xi)|$ могут быть изображены в виде двух поверхностей (рис. 11.15), дающих общее представление о закономерностях изменения токов.

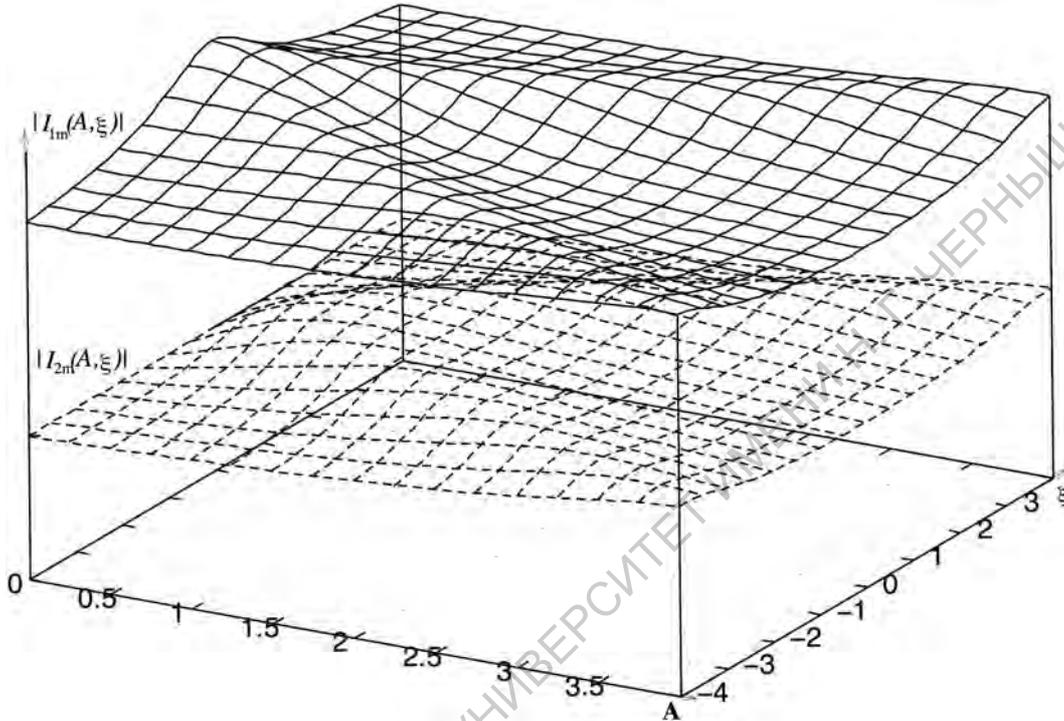


Рис. 11.15. Зависимости модулей первичного и вторичного тока связанных контуров от обобщенной расстройки ξ и фактора связи A . Для большей наглядности функция $|\dot{I}_{1m}(A, \xi)|$ смещена вверх

Количественные оценки АЧХ согласованных контуров удобно проводить на передаточных функциях в безразмерном виде. Пусть $|\dot{I}_{1m}(A=1, \xi=0)| = |\dot{I}_{1\max}|$, $|\dot{I}_{2m}(A=1, \xi=0)| = |\dot{I}_{2\max}|$. Тогда для отношений $|\dot{I}_{1m}(A, \xi)|/|\dot{I}_{1\max}|$ и $|\dot{I}_{2m}(A, \xi)|/|\dot{I}_{2\max}|$ получим следующие выражения:

$$\frac{|\dot{I}_{1m}(A, \xi)|}{|\dot{I}_{1\max}|} = \frac{2\sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{(1+A^2-\xi^2)^2+4\xi^2}}, \quad (11.68)$$

$$\frac{|\dot{I}_{2m}(A, \xi)|}{|\dot{I}_{2\max}|} = \frac{2A}{\sqrt{(1+A^2-\xi^2)^2+4\xi^2}}. \quad (11.69)$$

На рис. 11.16,а представлены сечения функции $|\dot{I}_{1m}(\xi)|/|\dot{I}_{1\max}|$, а на рис. 11.16,б – сечения функции $|\dot{I}_{2m}(\xi)|/|\dot{I}_{2\max}|$ для $A = 0.5, 1, 2, 3, 4$. Это нормированные по частоте и коэффициентам передачи амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) токов в первичном и вторичном контурах. На рис. 11.16,а изображена резонансная кривая при нулевой связи между контурами (пунктир). Как следует из графиков, АЧХ при малых значениях параметра A имеют вид одnogорбых резонансных кривых. При $A > 0.5$ АЧХ первичного тока и при $A > 1$ (после достижения критической связи) АЧХ вторичного тока становятся двугорбыми.

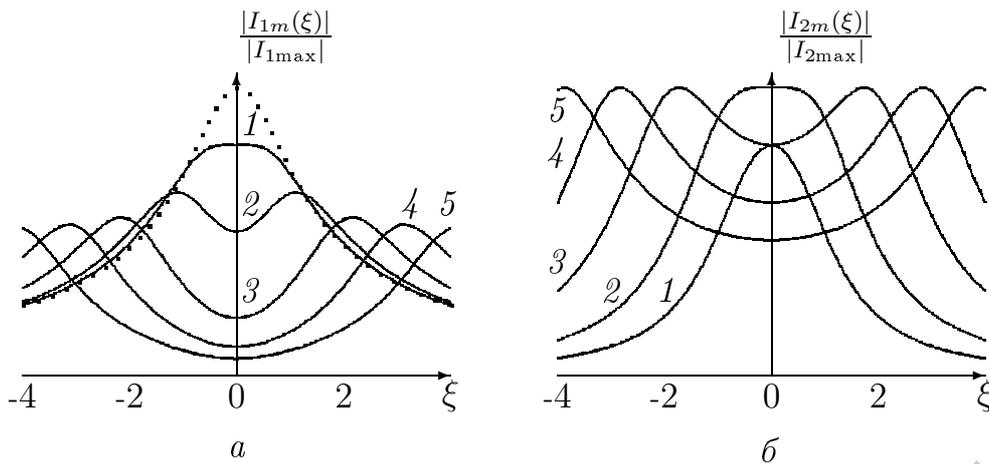


Рис. 11.16. Нормированные АЧХ первичного (а) и вторичного (б) токов согласованных контуров: 1 – $A=0.5$; 2 – $A=1$; 3 – $A=2$; 4 – $A=3$; 5 – $A=4$. Пунктир – АЧХ первичного контура

С ростом связи резонансные частоты удаляются от ω_0 , а локальный минимум на частоте ω_0 углубляется. При этом резонансные амплитуды $|\dot{I}_{1m}|/|I_{1\max}|$ уменьшаются, а $|I_{2\max}|$ сохраняют то же значение, которого он достиг при критической связи ($A=1$). Покажем это.

Когда функция $|\dot{I}_{2m}(A, \xi)|/|I_{2\max}|$ принимает экстремальные значения, ее производная по ξ обращается в нуль. После дифференцирования имеем

$$\xi^3 - (A^2 - 1)\xi = 0 \quad \text{или} \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_{2,3} = \pm\sqrt{A^2 - 1},$$

где $\xi_{2,3}$ соответствуют максимальным значениям $|\dot{I}_{2m}|$. Подставляя $\xi_{2,3}$ в (11.66), получим:

$$|\dot{I}_{2m}(A > 0, \xi = \pm\sqrt{A^2 - 1})|/|I_{2\max}| = 1.$$

Это замечательный результат!

- При закритической связи с ростом A полоса пропускания связанной системы увеличивается, а максимальные значения выходного (вторичного) тока не изменяются.

11.4.4. Индивидуальный, полный и сложные резонансы

Начнем рассмотрение с согласованных контуров. В связанных системах, парциальные контуры которых имеют одинаковые собственные частоты ($\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$, $\zeta = 1$) и обладают одинаковыми добротностями, возможны три разновидности резонансных явлений.

1. **Индивидуальный резонанс** ($\zeta = 1$, $A < 1$). Все реактивные сопротивления связанной системы обращаются в нуль только на частоте ω_0 ($X_1 = X_2 = X_{\text{вн}} = X_{\text{вх}} = 0$). АЧХ имеет единственный максимум, но ширина полосы частот на уровне 0.707 (–3 дБ) зависит от величины A . Принимая амплитуду вторичного тока за единицу, можно ввести функцию $I_2(\xi) = (1+A^2)|E_{2m}(A, \xi)|/A|E_m|$. Графики $I_2(\xi)$ для трех значений A изображены на рис. 11.17,а, а на рис. 11.17,б представлена зависимость относительной полосы частот двухконтурной системы от величины A .

Расчет показывает (рис. 11.17,а), что при малых значениях A (кривая 1) полоса частот связанных контуров оказывается уже, чем у парциальных контуров, входящих в связанную систему, и лишь при $A=0.67$ они совпадают (кривая 2 и пунктирная линия). Этот результат нетрудно объяснить.

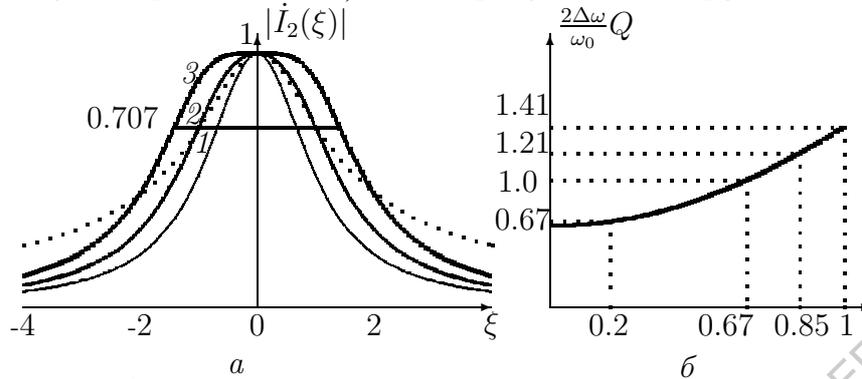


Рис. 11.17. АЧХ (а) и зависимость относительной полосы частот от фактора связи A (б): 1 – $A=0.2$; 2 – $A=0.67$; 3 – $A=1$. Пунктир – АЧХ одиночного контура с такой же добротностью

При слабой связи между контурами вносимые сопротивления малы, и каждый контур можно рассматривать как "независимую" резонансную систему. Поскольку одиночный контур на границах полосы пропускания ослабляет сигнал в $\sqrt{2}$ раз, на выходе системы на той же частоте происходит ослабление в 2 раза. С ростом A взаимное влияние контуров возрастает, вместо двух "независимых" контуров возникает единая двухконтурная система, и полоса частот расширяется.

При увеличении A от 0.67 до 1 полоса частот на уровне -3 дБ (рис. 11.17,а) еще больше расширяется, а форма резонансной кривой приближается к П-образной (кривая 3).

2. Полный резонанс ($\zeta=1, A=1$). Поскольку оба контура настроены на одинаковую частоту и связь между контурами соответствует полной передаче тока из первичного контура во вторичный (см. (11.67)), такой резонанс называется *полным*. Как было показано (рис. 11.11,б, жирная кривая), реактивная часть входного сопротивления связанной системы при $A=1$ обращается в нуль не только на частоте ω_0 , но и в ее окрестности. Вторичный ток в этой области частот достигает максимального значения, а резонансная кривая (рис. 11.17,б, 11.18) принимает П-образную форму. Ее полоса частот на уровне половинной мощности (-3 дБ) оказывается шире, чем у парциальных контуров. Рассчитаем полосу пропускания частот на уровне -3 дБ.

В соответствии с формулой (11.69) при $A=1$ имеем

$$\frac{|I_{2m}(1, \xi)|}{|I_{2\max}|} = \frac{2}{\sqrt{(2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}.$$

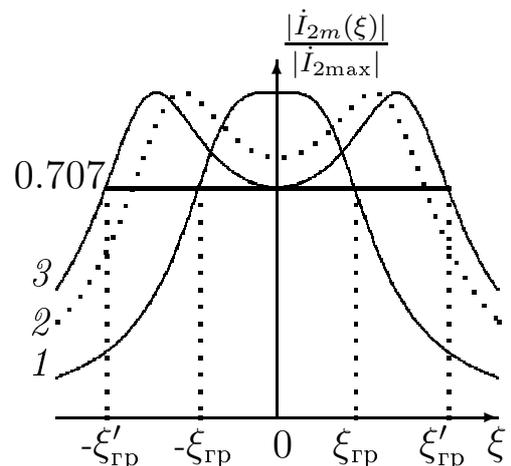


Рис. 11.18. АЧХ контуров ($\zeta=1$): 1 – $A=1$; 2 – $A=2$; 3 – $A=2.41$

На границах полосы пропускания, т.е. при $\xi = \pm \xi_{\text{гр}}$ (рис. 11.18)

$$\left(\frac{|I_{2m}(1, \xi_{\text{гр}})|}{|I_{2\text{max}}|} \right)^2 = \frac{4}{(2 - \xi_{\text{гр}}^2)^2 + 4\xi_{\text{гр}}^2} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда $\xi_{\text{гр}}^4 = 4$, а $\xi_{\text{гр}} = \pm \sqrt{2} \cong 1.41$. Поскольку $\xi_{\text{гр}} = Q\nu$, где Q – добротность контуров; $\nu \cong \frac{2(\omega - \omega_0)}{\omega_0}$, для полосы частот двухконтурной системы при полном резонансе получаем выражение

$$2\Delta\omega = 2(\omega - \omega_0) = \sqrt{2}\omega_0/Q.$$

Избирательность двухконтурной системы на границах полосы частот также возрастает в $\sqrt{2}$ раз. Отметим, что полный резонанс возможен и при $R_1 \neq R_2$, если $X_{\text{св}} = \sqrt{R_1 R_2}$.

- При полном резонансе в двухконтурной системе согласованных контуров АЧХ имеет П-образную форму и принимает максимальное значение в окрестности $\omega = \omega_0$. Полоса частот на уровне -3 дБ в $\sqrt{2}$ раз шире, а избирательность на границах полосы в $\sqrt{2}$ выше, чем у парциальных контуров, образующих связанную систему.

3. Сложный резонанс согласованных контуров ($\zeta = 1, A > 1$).

Напомним, что в соответствии с формулой (11.55) и рис. 11.11,б при закритической связи ($A > 1$) АЧХ связанных контуров становятся двугорбыми. При этом вторичный ток достигает в максимумах одинаковых значений, а на средней частоте ω_0 существует локальный минимум.

Резонанс в связанных контурах при закритической связи называется *сложным*. Частотные характеристики связанных контуров для двух значений закритической связи изображены на рис. 11.18 (кривые 2 и 3).

С увеличением фактора связи A (а следовательно, и коэффициента связи k) резонансные частоты расходятся, ширина АЧХ увеличивается, причем амплитуды вторичного тока в расходящихся максимумах (рис. 11.15,б) имеют величину, которая достигается при полном резонансе ($A = 1$). Чем больше A , тем глубже провал на ω_0 . Наиболее интересен случай, когда провал между горбами опускается до уровня 0.707 (-3 дБ) и полоса частот системы (рис. 11.18) оказывается наибольшей (кривая 3).

Пусть при некотором значении фактора связи A и $\xi = 0$ выполняется соотношение $|I_{2m}(A, 0)|/|I_{2\text{max}}| = 1/\sqrt{2}$. Тогда из (11.69) имеем $A^2 - 2\sqrt{2}A + 1 = 0$ и $A = \sqrt{2} \pm 1$. Так как $A > 1$, выбираем $A \cong 2.41$. С ростом расстройки $|I_{2m}(2.41, \xi)|/|I_{2\text{max}}|$ сначала растет, достигая единичного значения, затем снова убывает. Значения $\xi = \pm \xi'_{\text{гр}}$, при которых $|I_{2m}(2.41, \xi)|/|I_{2\text{max}}| = 1/\sqrt{2}$ (рис. 11.18), удовлетворяют равенству

$$\frac{4.82}{\sqrt{(1 + 2.42^2 - \xi'^2_{\text{гр}})^2 + 4\xi'^2_{\text{гр}}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда $\xi'^4_{\text{гр}} - 9.616\xi'^2_{\text{гр}} - 0.114 = 0$, $\xi'^2_{\text{гр}} = 4.808 \pm \sqrt{4.808^2 + 0.114} \cong 9.628$ (второе значение не имеет физического смысла), а $\xi'_{\text{гр}} = Q\nu \cong 3.103$.

- Двухконтурная связанная система согласованных контуров ($\zeta = 1$) при закритической связи ($A > 1$) обладает двугорбой АЧХ, и полоса пропускаемых на уровне -3 дБ частот при $A \cong 2.41$ может быть расширена в 3.1 раза по сравнению с полосой пропускания парциальных контуров.

4. **Сложный резонанс расстроенных контуров** ($\zeta \neq 1$). В связанных системах, состоящих из расстроенных контуров, резонансные частоты различаются уже в силу различия собственных частот парциальных контуров. С увеличением коэффициента связи разность резонансных частот возрастает, и их АЧХ могут приближаться по форме к АЧХ согласованных контуров при полном и сложном резонансе в последних. В связи с этим резонансные явления в системах расстроенных контуров целесообразно рассматривать как разновидность сложного резонанса.

Расчет $|\dot{I}_{2m}(\omega)|/|\dot{E}_m|$ по формуле (11.65) при фиксированных значениях ω_{01} и ω_{02} позволяет находить АЧХ с полосой пропускания на уровне -3 дБ, $\Delta\omega \cong 1.4\Delta\omega_{\text{пар}}$ ($\Delta\omega_{\text{пар}}$ – полоса пропускания парциальных контуров), что соответствует полному резонансу, и $\Delta\omega \cong 3.1\Delta\omega_{\text{пар}}$, что соответствует сложному резонансу с максимальной полосой пропускания на уровне -3 дБ в системах согласованных контуров. Важно отметить, что широкополосные АЧХ в системах расстроенных контуров реализуются при меньших значениях связи, чем в случае согласованных контуров. Сравнение АЧХ систем с расстроенными и согласованными контурами (рис. 11.19) убедительно подтверждают это заключение (для удобства сопоставления АЧХ систем расстроенных контуров смещены).

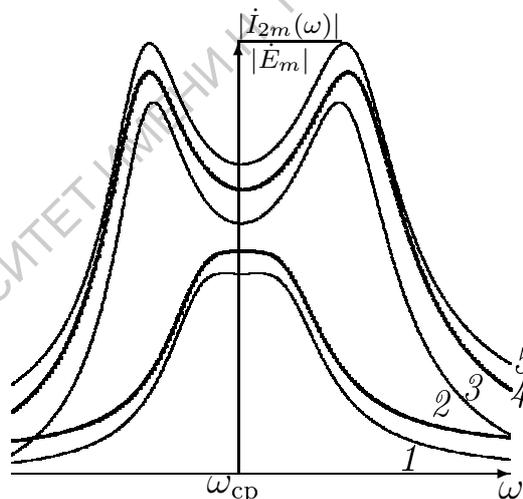


Рис. 11.19. Сравнение АЧХ расстроенных (кривые 1, 3, 5) и согласованных (кривые 2, 4) контуров: 1, 2 – $\Delta\omega = 1.41\Delta\omega_{\text{пар}}$; 3–5 – $\Delta\omega = 3.1\Delta\omega_{\text{пар}}$

Так, АЧХ (рис. 11.19), рассчитанная для $\zeta = 1.1$ (кривая 1), при $A = 0,5$ идентична АЧХ, соответствующей полному резонансу (кривая 2), а кривые 3 и 5, рассчитанные для $\zeta = 1.1$, $A = 2.28$ и $\zeta = 1.2$, $A = 1.65$ идентичны АЧХ сложного резонанса с максимальной полосой пропускания (кривая 4), который достигается при $A = 2.41$. Результатом анализа резонансных явлений в связанных системах является следующий принцип:

- Изменяя связь между контурами или связь и расстройку контуров, можно устанавливать полосу пропускания связанной системы от $\Delta\omega_{\text{пар}}$ до $3.1\Delta\omega_{\text{пар}}$, причем в системах с расстроенными контурами широкие полосы частот реализуются при меньших величинах связи.

Глава 12

Частотная селекция радиосигналов

12.1. Основные понятия и определения

Частотный принцип разделения сигналов является одним из основных в радиоэлектронике и базируется на частотных зависимостях сопротивлений или проводимостей реактивных (индуктивных и емкостных) двухполюсников. В предыдущих главах уже рассматривались устройства, обладающие такими свойствами. Так, в одиночных колебательных контурах осуществлялось выделение отдельных гармонических составляющих периодических и квазипериодических сигналов или узкой области частот из спектров непериодических сигналов, а связанные системы позволяли пропускать сигналы в большой полосе частот и эффективно подавлять колебания за ее пределами. Эти устройства представляют так называемые *полосовые фильтры* – частный случай фильтрующих систем. При частотной селекции сигналов часто возникает необходимость ограничивать область пропускаемых частот только с одного края или пропускать сигналы всех частот, кроме заданной узкой области спектра.

Радиоэлектронные фильтрующие устройства подразделяются на активные и пассивные, а пассивные – на реактивные, состоящие только из индуктивностей и емкостей (*LC*-фильтры), и безындукционные, содержащие емкости и сопротивления (*RC*-фильтры). Введем основные определения.

Электрическим частотным фильтром (или сокращенно – *фильтром*) называется устройство, предназначенное для частотного разделения электрических сигналов и представляющее четырехполюсник, ослабление которого в некоторой полосе частот мало по сравнению с остальными частотами (Рис. 12.1). Частотные свойства фильтра определяются амплитудно-частотной $K(\omega) = |\dot{K}(\omega)|$ и фазо-частотной $\arg \dot{K}(\omega)$ характеристиками (АЧХ и ФЧХ). Вместо АЧХ обычно используется функция ослабления $\alpha(\omega) = -20 \lg K(\omega)$.

Диапазон частот, в котором ослабление меньше заданного значения α_n , называется *полосой пропускания*, а область или области спектра, в которых ослабление больше заданного значения α_z , называется *полосой задерживания*. По расположению полос пропускания и задерживания различают *фильтры нижних* (а не низких!) частот (ФНЧ), *верхних* (а не высоких!) частот (ФВЧ), *полосовые* (ПФ) и *режективные* или *заграждающие* (РФ или ЗФ).

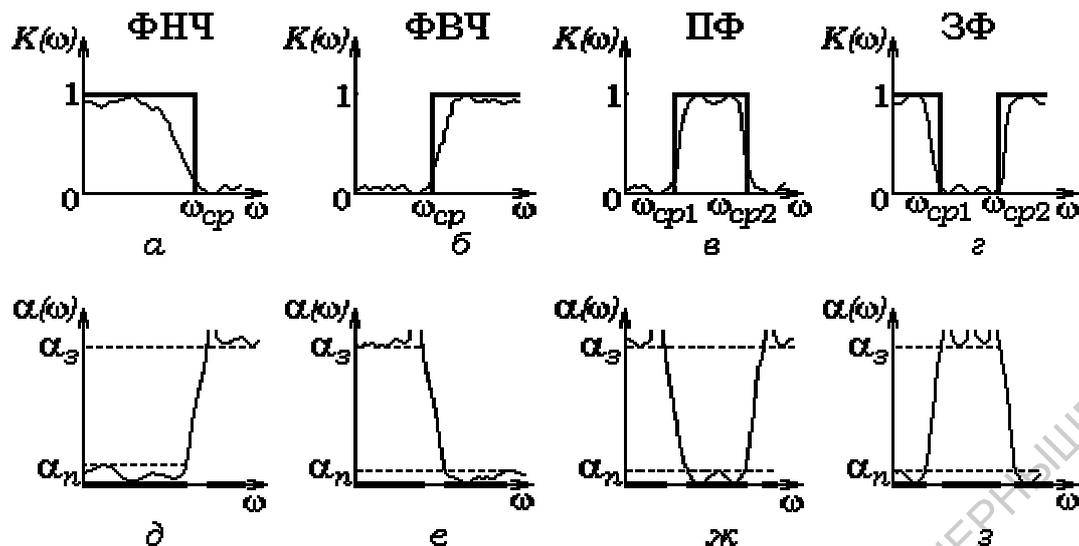


Рис. 12.1. Зависимости $K(\omega)$ и $\alpha(\omega)$ для ФНЧ (а, д), ФВЧ (б, е), ПФ (в, ж) и ЗФ (з, з)

На рис. 12.1, а–г показаны частотные зависимости коэффициентов передачи (жирные линии – для идеальных фильтров, тонкие – для реальных), а на рис. 12.1, д–з – ослабления α различных фильтров. Для идеальных фильтров в полосе пропускания $K=1$ (ослабление $\alpha_n=0$), а в полосе задерживания $K=0$ (ослабление $\alpha_z=\infty$). Частоты, разделяющие полосы пропускания и задерживания, соответствуют точкам разрыва $K(\omega)$ и называются *частотами среза*.

Реальные фильтры (рис. 12.1, а–г) обладают конечными ослаблениями $\alpha_n \neq 0$ в полосе прозрачности и $\alpha_z \neq \infty$ в полосе задерживания, а $K(\omega)$ соединяет α_n и α_z плавной кривой (рис. 12.1, д–з). Поэтому между полосами пропускания и задерживания (подчеркнуты) вводятся *переходные* (не подчеркнуты) *полосы* (или *зоны*).

12.2. Основы теории частотной селекции

В теории частотной селекции изучаются закономерности частотного разделения сигналов, принципы создания и основные свойства частотных электрических фильтров. Главными задачами теории являются:

- 1) определение условий пропускания и задерживания;
- 2) определение границ полос пропускания (частот среза);
- 3) вывод уравнений частотных характеристик;
- 4) исследование условий и методов согласования фильтров с нагрузочными сопротивлениями.

При построении теории фильтров используются методы и основные выводы теории четырехполюсников (см. гл. 8), а сами фильтры представляются эквивалентными схемами четырехполюсников. Эквивалентная схема фильтра по своей конфигурации может быть мостовой или лестничной. Лестничный фильтр (см. рис. 8.12) строится из несимметричных Г-образных или симметричных Т- или П-образных элементарных звеньев. Теоретические модели чаще всего представляются симметричными звеньями, а Г-образные звенья используются для согласования.

12.2.1. Условия пропускания и задерживания LC- и RC-фильтров. Частоты среза

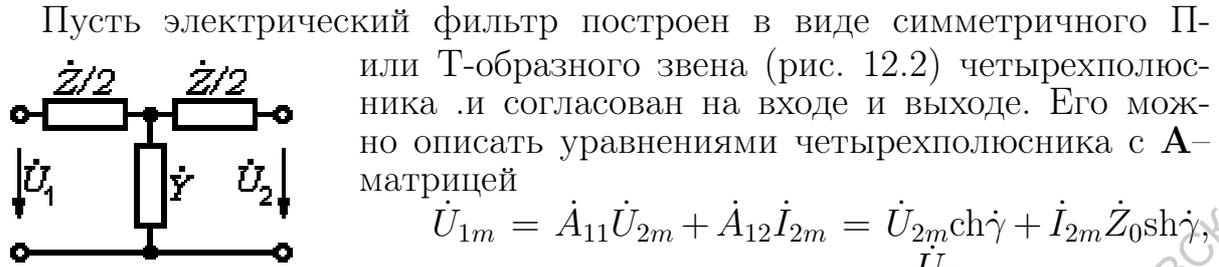


Рис. 12.2. Т-звено фильтра

Пусть электрический фильтр построен в виде симметричного П- или Т-образного звена (рис. 12.2) четырехполюсника и согласован на входе и выходе. Его можно описать уравнениями четырехполюсника с \mathbf{A} -матрицей

$$\begin{aligned} \dot{U}_{1m} &= \dot{A}_{11}\dot{U}_{2m} + \dot{A}_{12}\dot{I}_{2m} = \dot{U}_{2m}\operatorname{ch}\dot{\gamma} + \dot{I}_{2m}\dot{Z}_0\operatorname{sh}\dot{\gamma}, \\ \dot{I}_{1m} &= \dot{A}_{21}\dot{U}_{2m} + \dot{A}_{22}\dot{I}_{2m} = \frac{\dot{U}_{2m}}{\dot{Z}_0}\operatorname{sh}\dot{\gamma} + \dot{I}_{2m}\operatorname{ch}\dot{\gamma}, \end{aligned}$$

и в силу согласованности выразить коэффициенты последней через характеристические параметры: сопротивление \dot{Z}_0 и постоянную передачи $\dot{\gamma} = \alpha + j\beta$. Тогда для Т- или П-звена имеем

$$A_{11} = \operatorname{ch}\dot{\gamma} = \operatorname{ch}(\alpha + j\beta) = \operatorname{ch}\alpha \cos\beta + j\operatorname{sh}\alpha \sin\beta = 1 + \frac{\dot{Y}\dot{Z}}{2}. \quad (12.1)$$

Если $\dot{Z} = jX$, $\dot{Y} = jB$, т.е. лишены потерь и представляют собой одинаковые реактивные элементы (например, $\dot{Z} = j\omega L_1$, $\dot{Y} = 1/j\omega L_2$), то A_{11} не зависит от частоты сигналов, а $\dot{Z}\dot{Y}/4 = L_1/4L_2$ – вещественная положительная величина. Тогда

$$\operatorname{ch}\alpha \cos\beta = 1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{2} > 1, \quad \operatorname{sh}\alpha \sin\beta = 0.$$

Так как $\cos\beta \leq 1$, первое уравнение имеет решение лишь при $\alpha > 0$ и полоса пропускания отсутствует.

Таким образом, только из реактивных элементов с сопротивлениями одного знака *нельзя составить электрический фильтр*. Для частотной фильтрации сигналов \dot{Z} - и \dot{Y} -ветви должны обладать различными сопротивлениями: одна – емкостным, другая – индуктивным (LC-фильтры) или одна – реактивным, другая – резистивным (RC-фильтры).

LC-фильтры. Пусть \dot{Z} и \dot{Y} – дуальные реактивные двухполюсники ($\dot{Z} = jX$, $\dot{Y} = jB$). Тогда $\dot{Z}\dot{Y}/4 = -XB/4$, а коэффициент передачи

$$A_{11} = \operatorname{ch}\alpha \cos\beta + j\operatorname{sh}\alpha \sin\beta = 1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{2} = 1 - \frac{XB}{2}$$

становится вещественной величиной, меньшей единицы. Отсюда следуют два равенства:

$$\operatorname{ch}\alpha \cos\beta = 1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{2} = 1 - \frac{XB}{2} < 1, \quad \operatorname{sh}\alpha \sin\beta = 0.$$

Второе равенство выполняется либо при $\alpha = 0$ (полоса пропускания), либо при $\beta = \pm\pi$ ($\alpha \neq 0$) (полоса задерживания). Тогда в полосе пропускания идеального фильтра ($\alpha_n = 0$) имеем

$$\alpha = 0, \quad \cos\beta = 1 - \frac{XB}{2} \quad \text{или} \quad \beta = \arccos\left(1 - \frac{XB}{2}\right), \quad (12.2)$$

а в полосе задерживания

$$\beta = \pm\pi, \quad \operatorname{ch}\alpha = \frac{XB}{2} - 1 \quad \text{или} \quad \alpha = \operatorname{Arch}\left(\frac{XB}{2} - 1\right), \quad (12.3)$$

где $\operatorname{Arch}(z)$ – обратная $z = \operatorname{ch}\alpha$ гиперболическая функция.

Так как $|\cos\beta| \leq 1$, то $1 + \dot{Z}\dot{Y}/2$ может изменяться от -1 до 1 , а условие прозрачности принимает вид

$$-1 \leq \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{4} \leq 0. \quad (12.4)$$

Итак, в полосе прозрачности фильтра сопротивления продольных элементов \dot{Z} должны быть меньше, чем учетверенные сопротивления поперечных элементов

$$|\dot{Z}| \leq |4/\dot{Y}|. \quad (12.5)$$

Частоты среза LC -фильтра соответствуют предельным значениям сопротивлений, обеспечивающим равенства в (12.4). Это возможно, если $\dot{Z} = 0$ или $\dot{Y} = 0$ на одном краю и $\dot{Z}\dot{Y} = -4$ на другом краю диапазона пропускаемых частот или $\dot{Z}\dot{Y} = -4$ на двух границах диапазона, а $\dot{Z} = 0$ и $\dot{Y} = 0$ где-нибудь внутри области прозрачности.

Все приведенные соотношения справедливы только для идеализированных реактивных элементов (без потерь). Если $\dot{Z} = jX + R$, $\dot{Y} = jB + G$, где R и G – резистивные составляющие, то

$$\operatorname{ch}\alpha \cos\beta = 1 - \frac{XB - RG}{2}, \quad \operatorname{sh}\alpha \sin\beta = \frac{RB + XG}{2}.$$

Из этих уравнений следует, что $\alpha \neq 0$, и полное пропускание отсутствует. Однако резистивные проводимости реальных конденсаторов ничтожно малы, поэтому характеристики реальных и идеализированных LC -звеньев практически совпадают.

RC -фильтры являются безындукционными и содержат реактивные элементы только емкостного типа, а вместо индуктивностей – резисторы.

Коэффициент передачи RC -цепи, согласно (12.1), принимает вид

$$A_{11} = \operatorname{ch}\dot{\gamma} = \operatorname{ch}\alpha \cos\beta + j\operatorname{sh}\alpha \sin\beta = 1 \pm jT/2.$$

Знак (+) соответствует резистивному сопротивлению и реактивной проводимости $jT = j\omega CR$, а знак (–) – реактивному сопротивлению и резистивной проводимости $-jT = 1/(j\omega CR)$. Отсюда

$$\operatorname{ch}\alpha \cos\beta = 1, \quad \operatorname{sh}\alpha \sin\beta = \pm T/2. \quad (12.6)$$

Поскольку гиперболический косинус ($\operatorname{ch}\alpha$) больше или равен единице, не существует такой области частот, в которой $\alpha = 0$, т.е., строго говоря, RC -цепи не обладают свойствами частотной фильтрации. Однако для $\alpha_n \neq 0$ можно указать область частот, в которой $\alpha \leq \alpha_n$ (полоса пропускания), и область частот, в которой $\alpha \geq \alpha_z$ (полоса задерживания). Разделяющая их область частот составляет широкую *переходную зону*. Для сокращения ее протяженности используются многозвенные фильтры, элементарные ячейки которых разделяют активные элементы (транзисторы или операционные усилители).

12.2.2. Уравнения частотных характеристик

LC-фильтры. Для вывода уравнений частотных характеристик обратимся к формулам (12.3) и (12.4), примем во внимание, что \dot{Z} и \dot{Y} зависят от ω , и проанализируем два случая $\alpha = 0$ (полоса пропускания) и $\alpha \neq 0$, $\beta = \pm\pi$ (область задерживания). В полосе пропускания

$$\alpha = 0, \quad \beta(\omega) = \arccos \left(1 - \frac{X(\omega)B(\omega)}{2} \right), \quad (12.7)$$

а в полосе задерживания

$$\alpha(\omega) = \text{Arch} \left| \frac{X(\omega)B(\omega)}{2} - 1 \right|, \quad \beta = \pm\pi. \quad (12.8)$$

RC-фильтры. Для построения функции ослабления фильтра $\alpha(\omega)$ и ФЧХ $\beta(\omega)$ воспользуемся соотношениями (12.6) и примем во внимание, что T зависит от ω . Используя $\text{ch}^2\alpha - \text{sh}^2\alpha = 1$ и $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$, получим:

$$(1 + \text{sh}^2\alpha)(1 - \sin^2\beta) = 1, \quad \sin^2\beta = \left(\frac{T}{2\text{sh}\alpha} \right)^2.$$

Откуда

$$(1 + \text{sh}^2\alpha) \left(1 - \frac{T^2}{4\text{sh}^2\alpha} \right) = 1, \quad \text{где } T = \omega CR \text{ или } T = 1/(\omega CR),$$

или

$$\text{sh}^4\alpha - \frac{T^2}{4}\text{sh}^2\alpha - \frac{T^2}{4} = 0. \quad (12.9)$$

Разрешая это биквадратное относительно $\text{sh}\alpha$ уравнение, получим:

$$\text{sh}\alpha = \sqrt{\frac{T^2}{8} \pm \frac{T}{2} \sqrt{\frac{T^2}{16} + 1}}, \quad \sin\beta = \frac{T}{2} / \sqrt{\frac{T^2}{8} \pm \frac{T}{2} \sqrt{\frac{T^2}{16} + 1}}.$$

Согласно (12.5) в полосе пропускания фильтра $|T| \leq 4$, и физический смысл имеют решения только со знаком (+). Тогда

$$\alpha(\omega) = \text{Arsh} \left(\sqrt{\frac{T^2(\omega)}{8} + \frac{T(\omega)}{2} \sqrt{\frac{T^2(\omega)}{16} + 1}} \right), \quad (12.10)$$

$$\beta(\omega) = \arcsin \left(\frac{T(\omega)}{\sqrt{\frac{T^2(\omega)}{2} + 2T(\omega) \sqrt{\frac{T^2(\omega)}{16} + 1}}} \right). \quad (12.11)$$

Таким образом, функции ослабления $\alpha(\omega)$ и ФЧХ $\beta(\omega)$ для RC-фильтров представляют непрерывные функции, заданные во всем частотном диапазоне от 0 до ∞ , а полосы пропускания и задерживания определяются из условий $\alpha(\omega) \leq \alpha_n$ и $\alpha(\omega) \geq \alpha_z$ соответственно.

12.2.3. Характеристические сопротивления. Проблемы согласования

Сопротивления рассматриваемых фильтров представляют характеристические сопротивления согласованных четырехполюсников - симметричных Т- или П-образных звеньев. Согласно теории (см. гл. 8), они удовлетворяют соотношениям

$$\dot{Z}_0^T = \sqrt{\frac{\dot{Z}}{\dot{Y}}} \sqrt{1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{4}}, \quad \dot{Z}_0^П = \sqrt{\frac{\dot{Z}}{\dot{Y}}} / \sqrt{1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{4}} \quad (12.12)$$

и являются функциями частоты сигналов. Как показано выше, LC-фильтры образуют дуальные реактивные элементы, поэтому сопротивление $K = \sqrt{\dot{Z}/\dot{Y}}$ не зависит от ω .

Электрические фильтры, составленные из дуальных реактивных элементов \dot{Z} , \dot{Y} и обладающие вещественным сопротивлением $K = \sqrt{\dot{Z}/\dot{Y}}$, не зависящим от ω , называются *фильтрами типа k*.

Согласно (12.4) в полосе пропускания $-1 \geq \dot{Z}\dot{Y}/4 \geq 0$, а характеристические сопротивления k -фильтров \dot{Z}_0^T и $\dot{Z}_0^П$ имеют резистивный характер и изменяются с частотой от K до 0 и от K до ∞ соответственно.

Характеристические сопротивления RC-фильтров для любых частот носят комплексный характер. Например, для $\dot{Z} = R$, $\dot{Y} = j\omega C$ имеем $\dot{Z}_0^T = \sqrt{R/j\omega C + R^2}$.

Согласование фильтров с реальными нагрузками представляет сложную задачу, так как невозможно создать такое $\dot{Z}_н$, которое совпадало бы с \dot{Z}_0^T или с $\dot{Z}_0^П$ в полосе пропускания. Если k -фильтр можно согласовать с сопротивлением нагрузки $R_н$ в области частот, где $R_н \cong K$, то согласовать RC-фильтр даже в узкой полосе частот не представляется возможным.

Согласование LC-фильтра в большей части полосы пропускания оказывается возможным при введении между k -звеном и нагрузкой дополнительного Г-образного звена, производного от k -прототипа и получившего название m -звена. Его входное сопротивление \dot{Z}_{01}^m должно совпадать с характеристическим сопротивлением k -звена, а выходное - с сопротивлением нагрузки. Производное m -звено получается из полузвена k -прототипа путем добавления в продольную или поперечную ветвь двухполюсника с дуальной проводимостью. В соответствии с этим различают последовательно- и параллельно-производные звенья типа m .

Последовательно-производное звено типа m . Пусть задано симметричное Т-звено k -фильтра. Его легко согласовать с левым Г-звеном. Пусть продольные сопротивления Г-звена и Т-прототипа отличаются в m раз. Приравняв входное сопротивление Г-звена и характеристическое сопротивление Т-звена, имеем:

$$\sqrt{\frac{\dot{Z}}{\dot{Y}}} \sqrt{1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{4}} = \sqrt{\frac{m\dot{Z}}{\dot{Y}_m}} \sqrt{1 + \frac{m\dot{Z}\dot{Y}_m}{4}}$$

Отсюда для проводимости \dot{Y}_m получаем равенство:

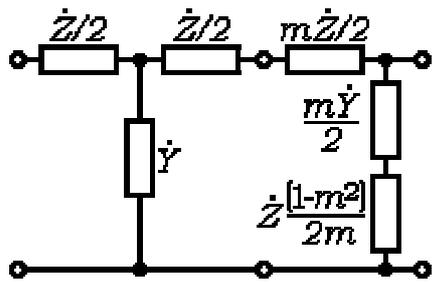


Рис. 12.3. Т-звено фильтра и последовательно-производное Г-звено

$$\frac{1}{\dot{Y}_m} = \frac{1}{m\dot{Y}} + \frac{\dot{Z}(1-m^2)}{4m},$$

т.е. поперечная ветвь дополнительного Г-звена в виде последовательно-производного m -звена (рис. 12.3) состоит из последовательно соединенных взаимно-обратных реактивностей

$$\frac{2}{\dot{Y}_m} = \frac{2}{m\dot{Y}} + \frac{\dot{Z}(1-m^2)}{2m}, \quad (12.13)$$

которые образуют *последовательный колебательный контур*.

Параллельно-производное звено типа m . Пусть задано k -звено фильтра в виде симметричного П-четырёхполюсника. Его удобно согласовать с правым Г-звеном (рис. 12.4).

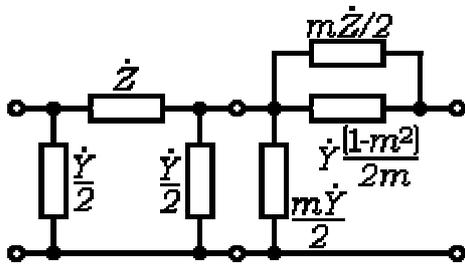


Рис. 12.4. П-звено фильтра и параллельно-производное Г-звено

Пусть поперечные проводимости Г-звена и П-прототипа отличаются в m раз. Приравнивая входное сопротивление Г-звена и характеристическое сопротивление П-звена, получим:

$$\sqrt{\frac{\dot{Z}}{\dot{Y}}} / \sqrt{1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{4}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_m}{m\dot{Y}}} / \sqrt{1 + \frac{\dot{Z}_m m \dot{Y}}{4}}.$$

Отсюда следует условие равенства сопротивлений

$$\frac{1}{\dot{Z}_m} = \frac{1}{m\dot{Z}} + \frac{\dot{Y}(1-m^2)}{4m}.$$

Теперь из параллельно соединенных (отсюда название m -звена) взаимно-обратных реактивностей состоит продольная ветвь Г-звена, представляющая *параллельный колебательный контур*:

$$\frac{2}{\dot{Z}_m} = \frac{2}{m\dot{Z}} + \frac{\dot{Y}(1-m^2)}{2m}. \quad (12.14)$$

Формулы (12.13) и (12.14) имеют одинаковую структуру, и воздействие производных звеньев тоже одинаково. Коэффициент m может принимать значения от 0.1 до 1.

Корректирующее действие последовательно- и параллельно-производных m -звеньев зависит от величины коэффициента m и объясняется введением дополнительных реактивностей и образованием резонансных контуров. При этом ослабляется зависимость выходных сопротивлений фильтров от частоты и увеличивается крутизна функции ослабления вблизи частоты среза. Эти физические эффекты целесообразно проанализировать на конкретном фильтре, например ФНЧ.

12.3. Фильтры нижних частот

Фильтром нижних частот (ФНЧ) называется четырехполюсник, у которого полоса пропускания ($\alpha \leq \alpha_n$) простирается от $\omega = 0$ (постоянный ток) до некоторой частоты среза ω_{cp} , а колебания с более высокими частотами существенно ослабляются ($\alpha \geq \alpha_s$). Идеализированная и реальная АЧХ ФНЧ представлены на рис. 12.1, а, д. Заданную АЧХ можно обеспечить, если в электрической схеме фильтра использовать взаимно-обратные реактивности, а сопротивления \dot{Z} продольных ветвей и проводимости \dot{Y} поперечных ветвей фильтра выбрать такими, чтобы на низких частотах они обладали по возможности малой величиной.

12.3.1. LC-фильтры нижних частот типа k

Электрические схемы Т- и П-звеньев LC-фильтра нижних частот изображены на рис. 12.5. Они составлены из индуктивностей в продольных ветвях ($\dot{Z} = j\omega L$) и емкостей – в поперечных ветвях ($\dot{Y} = j\omega C$), т.е. удовлетворены оба требования: 1) использованы взаимно-обратные реактивности, 2) величины \dot{Z} и \dot{Y} пропорциональны ω и малы при малых значениях частот сигналов.

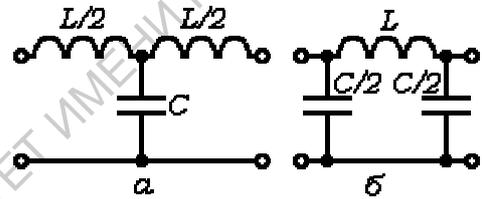


Рис. 12.5. Т-звено (а) и П-звено (б) LC-фильтра нижних частот

Из соотношения (12.4) на частоте среза имеем $j\omega_{cp}L = -4/j\omega_{cp}C$, т.е.

$$\omega_{cp} = 2/\sqrt{LC}. \quad (12.15)$$

Полосу пропускания фильтра можно определить графически, если построить на одном графике $\dot{Z}(\omega) = j\omega L$ и $-4/\dot{Y}(\omega) = 4j/\omega C$ (рис. 12.6) и использовать неравенство (12.5). Из этого графика следует, что неравенство (12.5) выполняется в области частот от 0 до $\omega = 2/\sqrt{LC}$, т.е. теоретически рассчитанные и найденные из графиков (рис. 12.6) значения полосы пропускания совпадают.

Функция ослабления фильтра $\alpha(\omega)$ и ФЧХ $\beta(\omega)$ рассчитываются по формулам (12.7) и (12.8). Тогда в полосе пропускания

$$\alpha = 0, \quad \beta(\omega) = \arccos \left(1 - \frac{2\omega^2}{\omega_{cp}^2} \right), \quad (12.16)$$

а в полосе задерживания

$$\alpha(\omega) = \text{Arch} \left(\frac{2\omega^2}{\omega_{cp}^2} - 1 \right), \quad \beta = \pi.$$

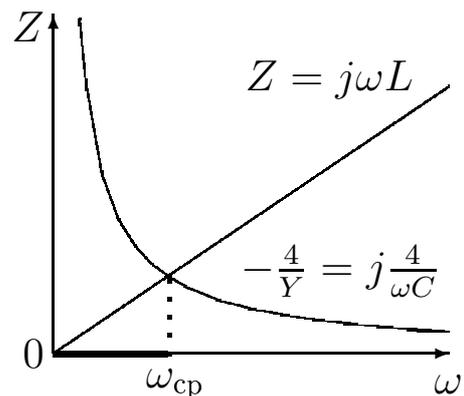


Рис. 12.6. Графическое определение полосы пропускания LC-фильтра нижних частот

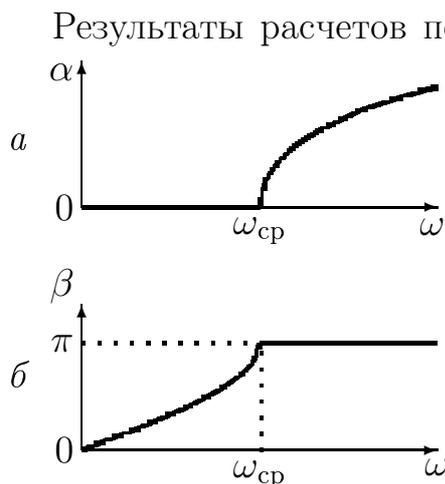


Рис. 12.7. Функция ослабления (а) и ФЧХ (б) ФНЧ

Результаты расчетов по этим формулам представлены на рис. 12.7. Можно показать, что у согласованного с нагрузкой фильтра (сопротивление нагрузки при любой частоте совпадает с характеристическим сопротивлением фильтра) ослабление в полосе пропускания тождественно равно нулю. При неполном согласовании ослабление становится конечным (см. рис. 12.1, а, д), а крутизна функции ослабления вблизи частоты среза мала и часто недостаточна для практических целей.

Характеристические сопротивления ФНЧ, представленных симметричными Т- и П-образными звеньями, имеют вид

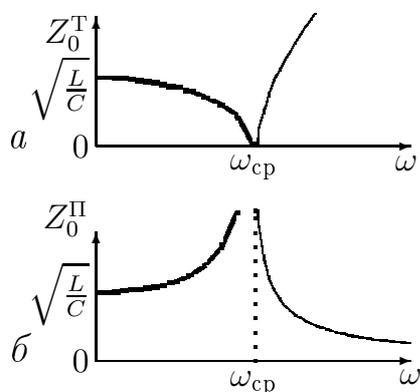


Рис. 12.8. Характеристические сопротивления Т-звена (а) и П-звена (б) ФНЧ

$$\dot{Z}_0^T(\omega) = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{cp}^2}},$$

$$\dot{Z}_0^\Pi(\omega) = \sqrt{\frac{L}{C}} / \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{cp}^2}}.$$

В полосе пропускания (рис. 12.8) \dot{Z}_0^T и \dot{Z}_0^Π имеют резистивный характер (жирные кривые), причем по мере приближения к частоте среза $\dot{Z}_0^T \rightarrow 0$ (рис. 12.8, а), а $\dot{Z}_0^\Pi \rightarrow \infty$ (рис. 12.8, б). В полосе задерживания \dot{Z}_0^T имеет индуктивный характер, а \dot{Z}_0^Π – емкостный (тонкие линии). Значительное изменение характеристического сопротивления в пределах частотного диапазона не позволяет удовлетворительно согласовать его с нагрузкой.

12.3.2. LC-фильтры нижних частот типа *m*

Две ячейки ФНЧ с производными звеньями типа *m* изображены на рис. 12.9.

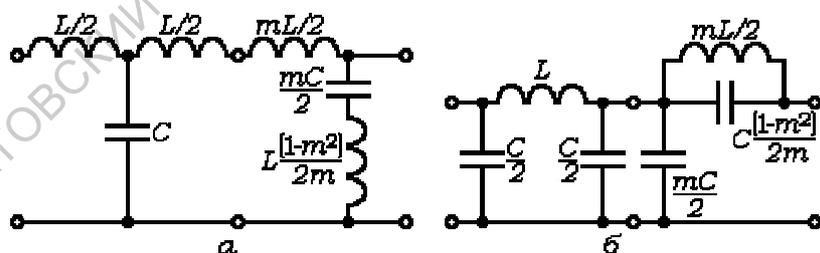


Рис. 12.9. Т-звено ФНЧ с последовательно-производным (а) и П-звено с параллельно-производным (б) *m*-звеньями

Рассмотрим действие последовательно-производного *m*-звена. В соответствии с формулой (12.13) поперечная ветвь содержит индуктивность $L_m = (1 - m^2)L/2m$ и емкость $C_m = mC/2$ (рис. 12.9, а). Они образуют последовательный колебательный контур с резонансной частотой $\omega_m = 2/\sqrt{LC(1 - m^2)} = \omega_{cp}/\sqrt{1 - m^2}$. Поскольку сопротив-

образуют последовательный колебательный контур с резонансной частотой $\omega_m = 2/\sqrt{LC(1 - m^2)} = \omega_{cp}/\sqrt{1 - m^2}$. Поскольку сопротив-

ление последовательного колебательного контура на резонансной частоте мало, а $\omega_m > \omega_{cp}$, ослабление в полосе задерживания, вблизи границы полосы пропускания резко возрастает и крутизна среза увеличивается (рис. 12.10,а). Однако при $\omega > \omega_m$ функция затухания быстро падает, и α становится меньше чем у соответствующего k -звена (рис. 12.10,а).

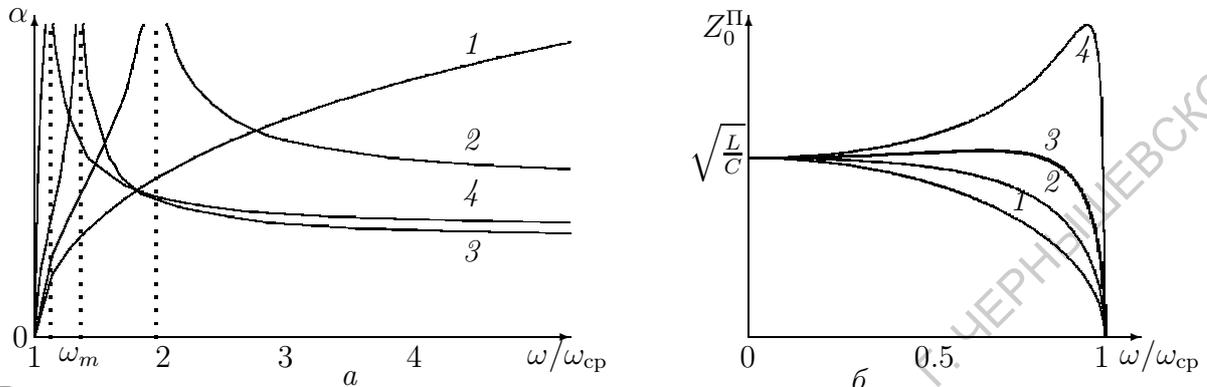


Рис. 12.10. Частотные зависимости функции ослабления (а) и характеристического сопротивления (б) k -звена (линии 1) и m -звена ФНЧ для $m=0.8$ (линии 2), $m=0.6$ (жирные линии 3), $m=0.8$ (линии 4)

Тот же эффект достигается при использовании параллельно-производного звена. В соответствии с формулой (12.14) продольная ветвь правого Γ -звена содержит параллельное соединение индуктивности $L_m = mL/2$ и емкости $C_m = (1 - m^2)C/2m$ (рис. 12.9,б). Они образуют параллельный колебательный контур с той же резонансной частотой $\omega_m = \omega_{cp}/\sqrt{1 - m^2}$ (пунктирные линии на рис. 12.10,а), но теперь контур расположен в продольной ветви фильтра, а его сопротивление на резонансной частоте велико. Таким образом, в полосе задерживания, вблизи границы полосы пропускания, крутизна функции ослабления возрастает.

Введение производных m -звеньев значительно ослабляет зависимости характеристических сопротивлений фильтров от частоты. Как показывают расчеты (рис. 12.10,б), при $m = 0.58 \cong 0.6$ ($\omega_m = 1.25\omega_{cp}$) характеристическое сопротивление ФНЧ остается практически постоянным в диапазоне $0 \div 0.9 \omega_{cp}$ и его легко согласовать с нагрузкой $R_H = \sqrt{L/C}$.

12.3.3. RC-фильтры нижних частот

Электрические схемы Т- и Γ -звеньев RC -фильтра нижних частот изображены на рис. 12.11. Проводимости поперечных ветвей фильтров на низких частотах малы ($|\dot{Y}| = \omega C$) и сигналы ослабляются тем сильнее, чем выше их частоты, а сопротивления продольных ветвей (резисторов) не зависят от частоты ($T = \omega CR$). Полосу пропускания и частоту среза RC -фильтра можно определить графически (рис. 12.12) или по формуле (12.4). Тогда

$$\omega_{cp} = 4/RC.$$

RC -фильтра нижних частот

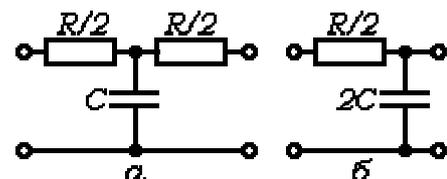


Рис. 12.11. Т-звено (а) и Γ -звено ФНЧ

Функция ослабления фильтра $\alpha(\omega)$ и ФЧХ $\beta(\omega)$ рассчитываются по формулам (12.10) и (12.11) и могут быть представлены в виде функций от $\omega/\omega_{\text{ср}}$:

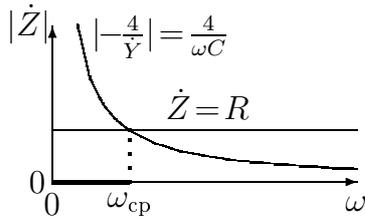


Рис. 12.12. Графическое определение полосы пропускания RC -фильтра

$$\alpha = \text{Arsh} \left(\sqrt{\frac{(\omega CR)^2}{8} + \frac{\omega CR}{2} \sqrt{\frac{(\omega CR)^2}{16} + 1}} \right) =$$

$$= \text{Arsh} \left(\sqrt{2 \frac{\omega^2}{\omega_{\text{ср}}^2} + 2 \frac{\omega}{\omega_{\text{ср}}} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_{\text{ср}}^2} + 1}} \right),$$

$$\beta = \arcsin \left(\frac{\omega CR}{\sqrt{\frac{(\omega CR)^2}{2} + 2\omega CR \sqrt{\frac{(\omega CR)^2}{16} + 1}}} \right) = \arcsin \left(\frac{4\omega/\omega_{\text{ср}}}{\sqrt{2 \frac{\omega^2}{\omega_{\text{ср}}^2} + 2 \frac{\omega}{\omega_{\text{ср}}} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_{\text{ср}}^2} + 1}}} \right).$$

Результаты расчетов по этим формулам представлены на рис. 12.13 в логарифмическом масштабе. По сравнению с аналогичными зависимостями для LC -фильтров (см. рис. 12.7) характеристики RC -фильтров не содержат точек разрыва, а полосы пропускания плавно переходят в полосы задерживания. В области частот от 0 до $\omega_{\text{ср}}$ коэффициент передачи фильтра изменяется в 6 раз, а ослабление на $\omega = \omega_{\text{ср}}$ составляет 12 дБ. Частотой среза ФНЧ в литературе иногда называют $\omega'_{\text{ср}} = 1/RC$,

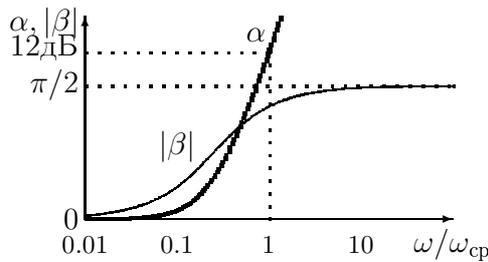


Рис. 12.13. Функция ослабления (а) и ФЧХ (б) RC -фильтра нижних частот

так как в этой полосе частот мощность сигнала ослабляется не более, чем в два раза (-3 дБ). Основным недостатком RC -фильтров по видимому следует считать широкие переходные зоны и как следствие низкую частотную избирательность. Ее удастся увеличить в активных RC -фильтрах (ARCF) на операционных усилителях [13].

12.4. Фильтры верхних частот

Фильтром верхних частот (ФВЧ) называется четырехполюсник, у которого полоса пропускания ($\alpha \leq \alpha_n$) простирается от некоторой частоты среза $\omega_{\text{ср}}$ до сколь угодно больших частот ($\omega \rightarrow \infty$), а колебания более низких частот существенно ослабляются ($\alpha \geq \alpha_3$). Идеализированная и реальная АЧХ ФВЧ представлены на рис. 12.1, б, е. Заданную АЧХ можно получить, если в электрической схеме фильтра использовать взаимно-обратные реактивности, а сопротивления Z продольных ветвей и проводимости Y поперечных ветвей фильтра выбрать такими, чтобы на высоких частотах они обладали по возможности малой величиной.

12.4.1. LC-фильтры верхних частот

Электрические схемы Т- и П-звеньев LC-фильтра верхних частот изображены на рис. 12.14. Они составлены из емкостей в продольных ветвях ($\dot{Z} = 1/j\omega C$) и индуктивностей в поперечных ветвях ($\dot{Y} = 1/j\omega L$). Величины \dot{Z} и \dot{Y} обратно пропорциональны ω и малы при больших значениях частот сигналов, т.е. удовлетворяют требованиям общей теории фильтров.

Из соотношения (12.4) на частоте среза имеем $1/j\omega_{cp}C = -4j\omega_{cp}L$, т.е.

$$\omega_{cp} = 1/2\sqrt{LC}. \quad (12.17)$$

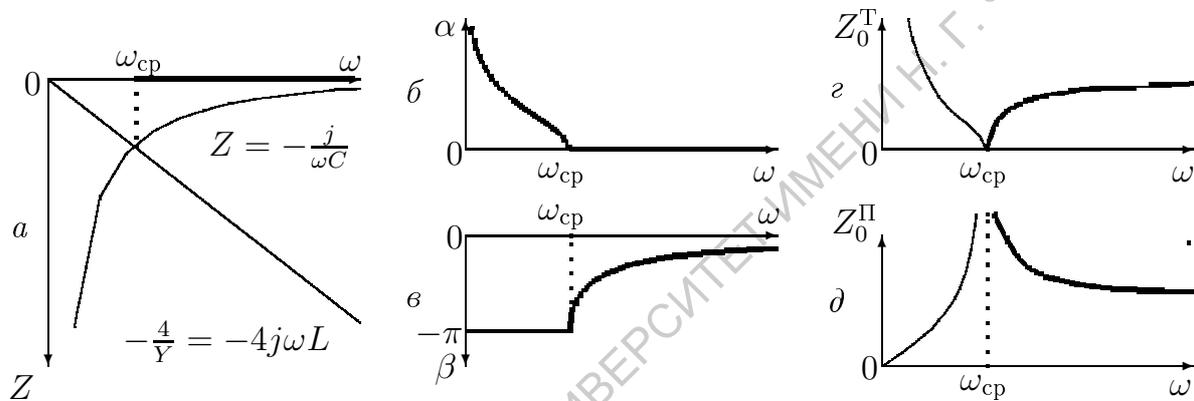


Рис. 12.15. Графическое определение полосы пропускания ФВЧ (а) и частотные характеристики функции ослабления (б), ФЧХ (в), характеристических сопротивлений Т-звена (г) и П-звена (д)

Полосу пропускания ФВЧ можно определить графически, если изобразить на одном графике $\dot{Z}(\omega)$ и $-4/\dot{Y}(\omega)$ (рис. 12.15,а) и использовать неравенство (12.4). Функция ослабления фильтра $\alpha(\omega)$ и его ФЧХ $\beta(\omega)$ рассчитываются по формулам (12.7) и (12.8). Тогда в полосе пропускания

$$\alpha = 0, \quad \beta(\omega) = \arccos \left(1 - \frac{2\omega_{cp}^2}{\omega^2} \right),$$

а в полосе задерживания

$$\alpha(\omega) = \text{Arch} \left(\frac{2\omega_{cp}^2}{\omega^2} - 1 \right), \quad \beta = -\pi.$$

Результаты расчетов функции ослабления и ФЧХ представлены на рис. 12.15,б,в соответственно.

Характеристические сопротивления ФВЧ, представленных симметричными Т- и П-образными звеньями, имеют вид:

$$\dot{Z}_0^T(\omega) = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{\omega_{cp}^2}{\omega^2}}, \quad \dot{Z}_0^{\Pi}(\omega) = \sqrt{\frac{L}{C}} / \sqrt{1 - \frac{\omega_{cp}^2}{\omega^2}}$$

В полосе пропускания характеристические сопротивления имеют резистивный характер, причем \dot{Z}_0^T по мере приближения к частоте среза убывает от $\sqrt{L/C}$ до нуля (рис. 12.15,з), а \dot{Z}_0^H увеличивается от $\sqrt{L/C}$ до ∞ (рис. 12.15,д). В полосе задерживания \dot{Z}_0^T имеет емкостный характер (рис. 12.15,з), а \dot{Z}_0^H – индуктивный (рис. 12.15,д). Согласовать ФВЧ, как и ФНЧ, во всей полосе пропускания не удастся, и для ослабления частотных зависимостей характеристического сопротивления используются последовательно- и параллельно-производные m -звенья фильтра, обеспечивающие оптимальное согласование при $m=0.58$.

12.4.2. RC-фильтры верхних частот

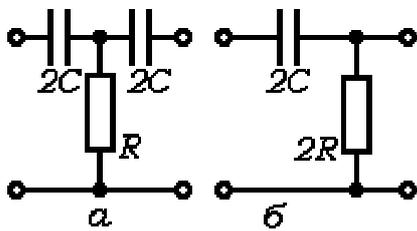


Рис. 12.16. Т-звено (а) и Г-звено ФВЧ

Электрические схемы Т- и Г-звеньев RC-фильтра верхних частот изображены на рис. 12.16. Проводимости поперечных ветвей (резисторов) не зависят от частоты сигналов, а сопротивления продольных ветвей фильтров на низких частотах велики ($|Z| = 1/\omega C$), и выходные сигналы имеют тем меньшую величину, чем ниже их частоты, т.е. нижние частоты ослабляются сильнее, чем верхние и $T = 1/(\omega CR)$. Полосу пропускания и частоту среза RC-фильтра можно определить графически (рис. 12.17,а) или по формуле (12.4). Тогда $\omega_{cp} = 1/4RC$.

Основные частотные характеристики фильтра – функция ослабления $\alpha(\omega)$ и ФЧХ $\beta(\omega)$ рассчитываются по формулам (12.10) и (12.11) для $X = \omega C$. Учитывая полученное выражение для ω_{cp} и рассматривая отношение ω/ω_{cp} в качестве текущей переменной, получим:

$$\alpha = \text{Arsh} \left(\sqrt{\frac{1}{8(\omega CR)^2} + \frac{1}{2\omega CR} \sqrt{\frac{1}{4(\omega CR)^2} + 1}} \right) = \text{Arsh} \left(\sqrt{\frac{2\omega_{cp}^2}{\omega^2} + \frac{2\omega_{cp}}{\omega} \sqrt{\frac{\omega_{cp}^2}{\omega^2} + 1}} \right),$$

$$\beta = \arcsin \left(\frac{1/2\omega CR}{\sqrt{\frac{1}{8(\omega CR)^2} + \frac{1}{2\omega CR} \sqrt{\frac{1}{4(\omega CR)^2} + 1}}} \right) = \arcsin \left(\frac{2\omega_{cp}/\omega}{\sqrt{\frac{2\omega_{cp}^2}{\omega^2} + \frac{2\omega_{cp}}{\omega} \sqrt{\frac{\omega_{cp}^2}{\omega^2} + 1}}} \right).$$

Результаты расчетов по этим формулам представлены на рис. 12.17,б в логарифмическом масштабе. Как и частотные характеристики RC-фильтров низких частот, они не содержат точек, где производные терпят разрывы. В области частот от ω_{cp} до $\omega \rightarrow \infty$ коэффициент передачи

фильтра изменяется в 4.12 раза, а ослабление на $\omega = \omega_{cp}$ составляет $\cong 12$ дБ. Частотой среза ФВЧ в литературе иногда называют $\omega'_{cp} = 1/RC$. RC-фильтры верхних частот, как и ФНЧ, имеют широкие переходные зоны и, как следствие низкую частотную избирательность. Ее удается увеличить в активных RC-фильтрах (ARCF) на операционных усилителях [13].

12.5. Полосовые и заграждающие фильтры

Полосовым фильтром (ПФ) называется четырехполосник, у которого полоса пропускания ($\alpha \leq \alpha_n$) занимает конечную область частот от ω_{cp1} до ω_{cp2} , а колебания всех других частот существенно ослабляются ($\alpha \geq \alpha_3$). Идеализированная и реальная АЧХ ПФ представлены на рис. 12.1, в, жс.

Заграждающим (режективным) фильтром (ЗФ или РФ) называется четырехполосник, у которого ослабление сигналов в диапазоне частот от 0 до ω_{cp1} и от ω_{cp2} до ∞ мало ($\alpha \leq \alpha_n$), а колебания с частотами от ω_{cp1} до ω_{cp2} существенно ослабляются ($\alpha \geq \alpha_3$). Идеализированная и реальная АЧХ ЗФ представлены на рис. 12.1, г, з.

12.5.1. Структура полосовых и заграждающих LC-фильтров

Чтобы обеспечить хорошее пропускание сигналов в диапазоне частот от ω_{cp1} до ω_{cp2} , в этой частотной области модули сопротивлений $\dot{Z}(\omega)$ и проводимостей $\dot{Y}(\omega)$ должны обладать малой величиной. Таким условиям удовлетворяют в качестве $\dot{Z}(\omega)$ продольных ветвей последовательные колебательные LC-контур, настроенные на среднюю частоту диапазона ω_0 , а в качестве $\dot{Y}(\omega)$ поперечных ветвей – параллельные колебательные контуры, настроенные на ту же резонансную частоту (рис. 12.18, а). Как известно, при нулевых потерях сопротивление последовательного контура $\dot{Z}_{вх} = j(\omega L - 1/\omega C)$ вблизи ω_0 мало, а сопротивление параллельного контура удовлетворяет соотношению:

$$\dot{Z}_{вх} = \frac{L/C}{j(\omega L - 1/\omega C)},$$

т.е. вблизи резонанса $\dot{Z}_{вх} \rightarrow \infty$, $\dot{Y}_{вх} \rightarrow 0$.

Отметим, что последовательные и параллельные контуры представляют взаимно-обратные (или дуальные) реактивности.

Для реализации заграждающего фильтра достаточно взаимно-обратные реактивности поменять местами, т.е. составить продольные ветви из параллельных колебательных контуров ($\dot{Z} = \frac{L_1/C_1}{j(\omega L_1 - 1/\omega C_1)}$), а поперечные ветви – из последовательных контуров ($\dot{Y} = \frac{1}{j(\omega L_2 - 1/\omega C_2)}$), настроенных

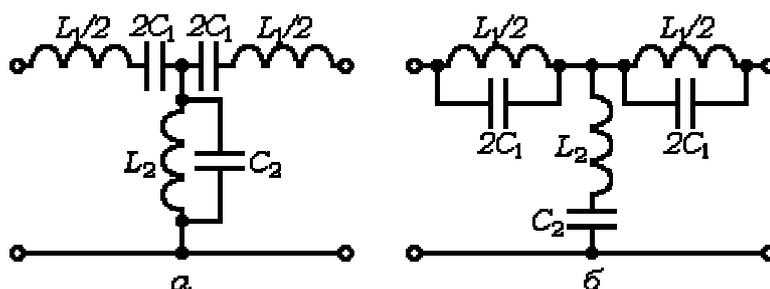


Рис. 12.18. Электрические схемы Т-звена ПФ (а) и Т-звена ЗФ (б)

на среднюю частоту полосы задерживания ω_0 (рис. 12.18,б).

Полосовые и заграждающие фильтры можно рассматривать как комбинации ФНЧ и ФВЧ. Элементы $L_1/2$ и C_2 в ПФ образуют ФНЧ, а элементы $2C_1$ и L_2 – ФВЧ. Для ПФ частоты среза ФВЧ меньше частот среза ФНЧ, а для ЗФ их соотношения противоположны. Элементы полосовых и заграждающих фильтров обычно выбирают так, чтобы выполнялось соотношение

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}. \quad (12.18)$$

Полосы пропускания ПФ и ЗФ можно определить графически (рис.

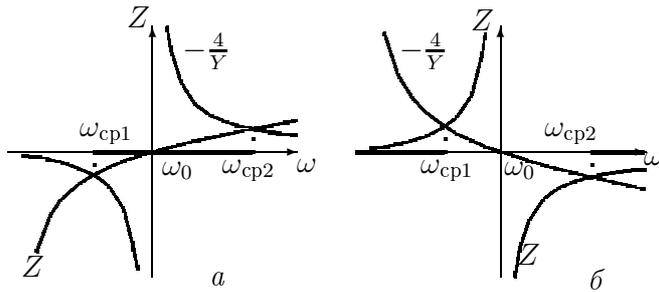


Рис. 12.19. Графическое определение полос пропускания ПФ (а) и ЗФ (б)- подчеркнуты

12.19,а,б), если $-4/\dot{Y}(\omega)$ и $\dot{Z}(\omega)$ изобразить на одном графике и воспользоваться неравенством (12.4). Величина $\dot{Z}\dot{Y}/4$, согласно (12.4), может принимать на краях полосы пропускания одно из двух значений – 0 или -1 , что позволяет рассчитать границы полос пропускания ПФ и ЗФ.

12.5.2. Частотные характеристики полосовых LC-фильтров

Для ПФ $\dot{Z}\dot{Y} = 0$ на частоте $\omega = \omega_0$. Тогда равенство $\dot{Z}(\omega) = -4/\dot{Y}(\omega)$ должно выполняться на границах полосы пропускания, т.е.

$$\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = \frac{4L_2/C_2}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}}. \quad (12.19)$$

Пусть $L_2/L_1 = C_1/C_2 = q$. Используя относительную частоту $\Omega = \omega/\omega_0$, приведем уравнение (12.19) к виду:

$$\Omega^4 - 2(2q + 1)\Omega^2 + 1 = 0.$$

Решения этого биквадратного уравнения

$$\Omega^2 = 2q + 1 \pm \sqrt{(2q + 1)^2 - 1} = 2q + 1 \pm 2\sqrt{q(q + 1)} = [\sqrt{q + 1} \pm \sqrt{q}]^2$$

позволяют определить относительные частоты, соответствующие границам среза ПФ, и сами границы среза:

$$\begin{aligned} \Omega_{cp1} &= \sqrt{q + 1} - \sqrt{q}, & \Omega_{cp2} &= \sqrt{q + 1} + \sqrt{q}, \\ \omega_{cp1} &= \omega_0(\sqrt{q + 1} - \sqrt{q}), & \omega_{cp2} &= \omega_0(\sqrt{q + 1} + \sqrt{q}). \end{aligned} \quad (12.20)$$

Полная полоса пропускания LC-фильтра удовлетворяет равенству

$$\omega_{cp2} - \omega_{cp1} = 2\sqrt{q}\omega_0.$$

Если наряду с Ω ввести в рассмотрение относительную расстройку

$$\nu = \omega/\omega_0 - \omega_0/\omega = \Omega - 1/\Omega,$$

то сопротивления последовательных контуров \dot{Z} и проводимости параллельных контуров \dot{Y} принимают вид

$$\dot{Z} = j(\omega L_1 - 1/\omega C_1) = j\omega_0 L_1 \nu, \quad \dot{Y} = j(\omega C_2 - 1/\omega L_2) = j\omega_0 C_2 \nu.$$

Используя формулы (12.7), (12.8) и (12.12), можно получить аналитические выражения для функции ослабления ПФ $\alpha(\omega)$ в полосах задерживания, ФЧХ $\beta(\omega)$ в полосе пропускания и характеристических сопротивлений Т- и П-звеньев:

$$\alpha(\omega) = \text{Arch} [1 - \nu^2/2q], \quad \beta(\omega) = \arccos [1 - \nu^2/2q], \quad (12.21)$$

$$\dot{Z}_0^T(\omega) = \sqrt{L_1/C_2} \sqrt{1 - \nu^2/4q}, \quad \dot{Z}_0^{\text{II}}(\omega) = \sqrt{L_1/C_2}/\sqrt{1 - \nu^2/4q}. \quad (12.22)$$

Результаты расчетов по этим формулам представлены на рис. 12.20.

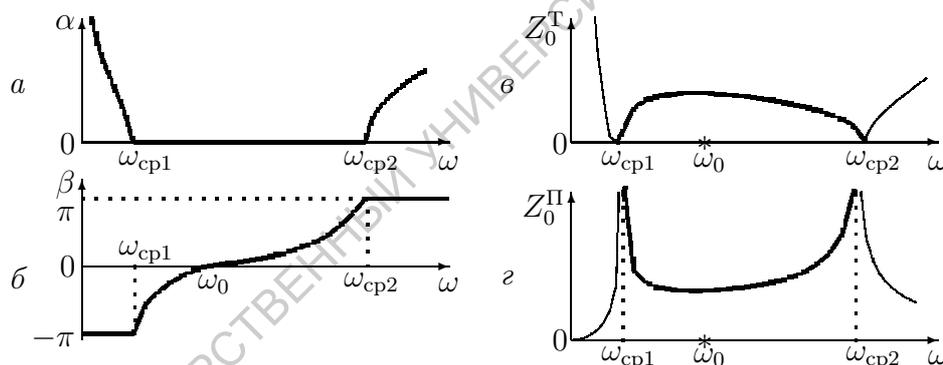


Рис. 12.20. Функции ослабления (*а*), ФЧХ (*б*) и характеристические сопротивления Т-звена (*в*) и П-звена (*г*) ПФ

В соответствии с формулами (12.21) и (12.22) все характеристики ПФ симметричны относительно ν , но частотные зависимости тех же параметров симметрией не обладают. В интервале частот от 0 до ω_0 характеристики ПФ подобны соответствующим зависимостям для ФВЧ (сравните рис. 12.20, *а – г* и 12.15, *б – д* соответственно), а в интервале частот от ω_0 до ∞ – зависимостям для ФНЧ (сравните рис. 12.20, *а, б* и 12.7, *а, б*, рис. 12.20, *в, г* и 12.8, *а, б*).

Характеристические сопротивления ПФ в полосе пропускания имеют резистивный характер, причем $Z_0^T = Z_0^{\text{II}} = \sqrt{L_1/C_2}$ на частоте ω_0 . При смещении частоты к краям полосы пропускания Z_0^T уменьшается до нуля, а $Z_0^{\text{II}} \rightarrow \infty$. За пределами полосы пропускания ($\omega < \omega_{cp1}$ и $\omega > \omega_{cp2}$) характеристические сопротивления имеют реактивный характер.

12.5.3. Частотные характеристики заграждающих LC -фильтров

Продольные ветви ЗФ образуют параллельные колебательные контуры, а поперечные ветви – последовательные контуры, поэтому

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= \frac{L_1/C_1}{j(\omega L_1 - 1/\omega C_1)} = \frac{1}{j\omega_0 C_1 \nu}, \\ \dot{Y} &= \frac{1}{j(\omega L_2 - 1/\omega C_2)} = \frac{1}{j\omega_0 L_2 \nu}, \end{aligned} \quad (12.23)$$

где $\nu = \omega/\omega_0 - \omega_0/\omega$ – относительная расстройка. В соответствии с (12.4) произведение $\dot{Z}\dot{Y}/4$ может обращаться в нуль только при $\omega = 0$ и $\omega \rightarrow \infty$, т.е. условие $\dot{Z}\dot{Y}/4 = 0$ определяет внешние границы полос пропускания ЗФ. Тогда их внутренние границы соответствуют равенству

$$\frac{L_1/C_1}{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}} = 4 \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right). \quad (12.24)$$

Пусть теперь $L_1/L_2 = C_2/C_1 = q'$. Введем относительную частоту $\Omega = \omega/\omega_0$, тогда уравнение (12.24) будет иметь вид

$$\Omega^4 - 2(q'/8 + 1)\Omega^2 + 1 = 0.$$

Решения этого биквадратного уравнения

$$\Omega^2 = \frac{q'}{8} + 1 \pm \sqrt{\left(\frac{q'}{8} + 1\right)^2 - 1} = \frac{q'}{8} + 1 \pm \sqrt{\frac{q'}{4}} \sqrt{\frac{q'}{16} + 1} = \left[\frac{\sqrt{q' + 16}}{4} \pm \frac{\sqrt{q'}}{4} \right]^2$$

позволяют определить относительные частоты, соответствующие внутренним границам полос пропускания ЗФ:

$$\begin{aligned} \Omega_{cp1} &= (\sqrt{q' + 16} - \sqrt{q'})/4, & \Omega_{cp2} &= (\sqrt{q' + 16} + \sqrt{q'})/4, \\ \omega_{cp1} &= \omega_0(\sqrt{q' + 16} - \sqrt{q'})/4, & \omega_{cp2} &= \omega_0(\sqrt{q' + 16} + \sqrt{q'})/4. \end{aligned} \quad (12.25)$$

Полоса задерживания LC -фильтра удовлетворяет равенству

$$\omega_{cp2} - \omega_{cp1} = \sqrt{q'}\omega_0/2.$$

С помощью формул (12.7), (12.8) и (12.12) можно получить аналитические выражения для функции ослабления $\alpha(\omega)$ в полосе задерживания, ФЧХ $\beta(\omega)$ – в полосах пропускания и характеристических сопротивлений Т- и П-звеньев:

$$\alpha(\omega) = \text{Arch} [1 - q'/2\nu^2], \quad \beta(\omega) = \arccos [1 - q'/2\nu^2], \quad (12.26)$$

$$\dot{Z}_0^T(\omega) = \sqrt{L_2/C_1} \sqrt{1 - q'/4\nu^2}, \quad \dot{Z}_0^{\text{II}}(\omega) = \sqrt{L_2/C_1} / \sqrt{1 - q'/4\nu^2}. \quad (12.27)$$

Результаты расчетов по этим формулам представлены на рис. 12.21.

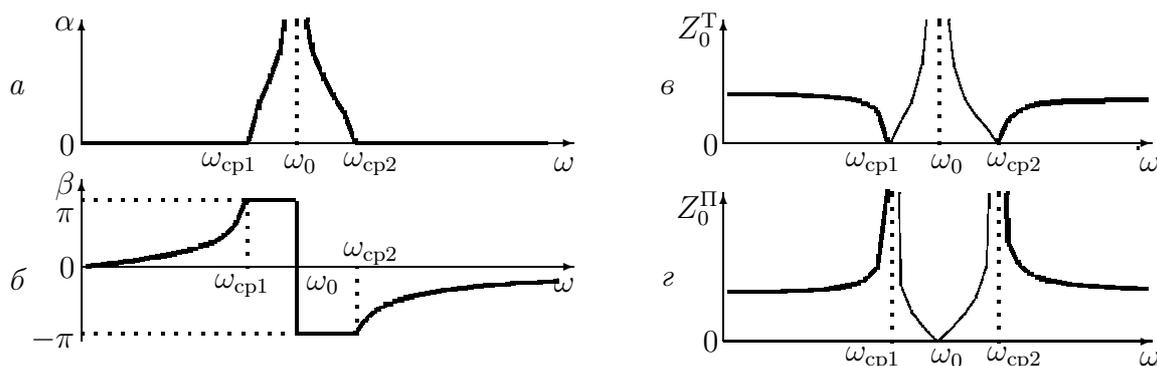


Рис. 12.21. Функции ослабления (а), ФЧХ (б) и характеристические сопротивления Т-звена (в) и П-звена (г) заграждающего LC-фильтра

Частотные характеристики заграждающих фильтров в интервале частот от 0 до ω_0 подобны соответствующим зависимостям ФНЧ (сравните рис. 12.21, а, б и 12.7, а, б, рис. 12.21, в, г и 12.8, а, б), а в интервале частот от ω_0 до ∞ – зависимостям для ФВЧ (сравните рис. 12.21, а–г и 12.15, б–д соответственно). Отметим, что на частоте ω_0 ФЧХ имеет разрыв, а функция ослабления $\alpha \rightarrow \infty$.

Характеристические сопротивления ЗФ в полосах пропускания имеют резистивный характер, и на внешних границах $Z_0^T = Z_0^{\Pi} = \sqrt{L_2/C_1}$. В области задерживания они становятся реактивными.

Для ослабления частотной зависимости характеристических сопротивлений и увеличения крутизны изменения ослабления вблизи частот среза используются последовательно-или параллельно-производные m -звенья. Последовательно-производные m -звенья ПФ и ЗФ изображены на рис. 12.22.

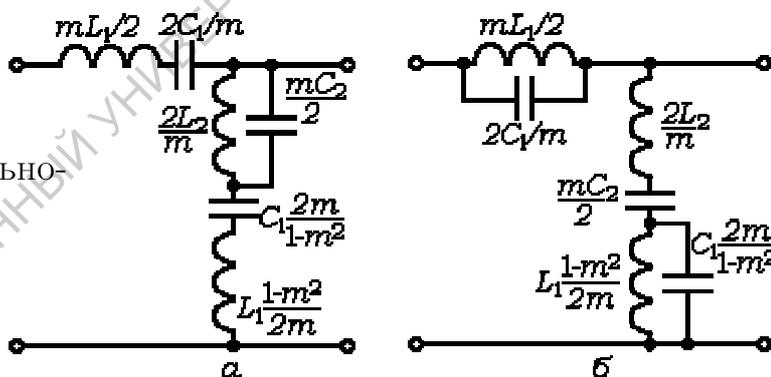


Рис. 12.22. Последовательно-производные m -звенья ПФ (а) и ЗФ (б)

12.5.4. Полосовые и заграждающие RC-фильтры

Полосовые и заграждающие RC-фильтры создаются в виде соединений ФНЧ и ФВЧ.

Полосовые RC-фильтры, как правило, представляют каскадные соединения ФВЧ и ФНЧ, а их частоты среза могут быть одинаковыми или различными. Будем рассматривать в качестве основных характеристик фильтров АЧХ и ФЧХ, т.е. частотные зависимости модуля и аргумента комплексного коэффициента передачи $\dot{K}(j\omega) = \dot{U}_{\text{вых}}/\dot{U}_{\text{вх}}$.

Комплексный коэффициент $K(j\omega)$ можно считать одним из рассмотренных выше методов.

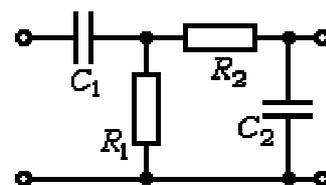


Рис. 12.23. Полосовой RC-фильтр

Тогда

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{j\omega C_1 R_1}{1 - \omega^2 C_1 R_1 C_2 R_2 + j\omega(C_1 R_1 + C_2 R_1 + C_2 R_2)}. \quad (12.28)$$

Если ввести относительную частоту среза ФВЧ $\Omega = \omega / (1/R_1 C_1) = \omega R_1 C_1$ и расстройку частот среза ФНЧ и ФВЧ $q = R_2 C_2 / R_1 C_1$, то уравнение (12.28) принимает вид

$$\dot{K}(j\Omega) = j\Omega / [1 - q\Omega^2 + j\Omega(1+2q)],$$

а модуль и аргумент $\dot{K}(j\Omega)$ удовлетворяют соотношениям

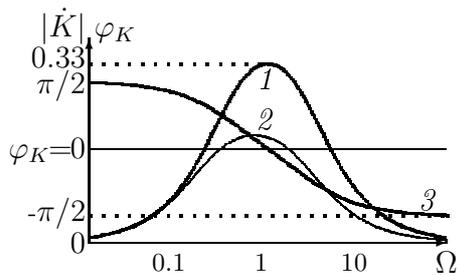


Рис. 12.24. АЧХ полосового RC -фильтра при $q = 1$ (кривая 1) и $q = 2$ (кривая 2) и ФЧХ при $q = 1$ (кривая 3)

$$|\dot{K}(\Omega)| = \frac{\Omega}{\sqrt{(1 - q\Omega^2)^2 + \Omega^2(1 + 2q)^2}},$$

$$\varphi_K(\Omega) = \arg \dot{K}(j\omega) = \frac{1 - q\Omega^2}{\Omega(1 + 2q)}.$$

Графики зависимостей $|\dot{K}(\Omega)|$ и $\varphi_K(\Omega)$ для $q = 1$ и $q = 2$ представлены на рис. 12.24. Как показывает анализ, модуль коэффициента передачи принимает максимальное значение, равное 0.33, при $q = 1$ ($R_1 C_1 = R_2 C_2$) на частоте $\omega = 1/R_1 C_1$ и быстро уменьшается с ростом расстройки (0.29 при $q = 1.2$ и 0.196 при $q = 2$). Полоса пропускания на уровне -3 дБ простирается от 0.3 до 3.3 Ω , а эквивалентная добротность составляет 0.33. Полосовые RC -фильтры по своим параметрам значительно уступают LC -фильтрам и в радиоэлектронике обычно не используются, но в активных фильтрах с помощью таких RC -цепей удается создать резонансные системы с добротностью 25 и выше.

Заграждающие RC -фильтры (рис. 12.25) тоже являются резонансными и представляют двойные T -мосты – параллельные соединения T -образных звеньев ФНЧ и ФВЧ (см. рис. 12.11, а и 12.16, а).

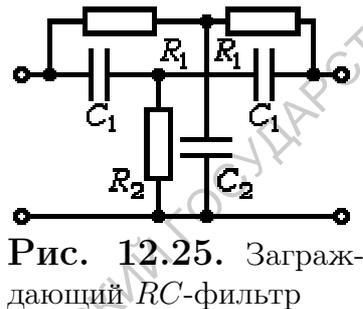


Рис. 12.25. Заграждающий RC -фильтр

и представляют двойные T -мосты – параллельные соединения T -образных звеньев ФНЧ и ФВЧ (см. рис. 12.11, а и 12.16, а). В реальных устройствах принимается $R_2 = R_1/2$, $C_2 = 2C_1$. Комплексный коэффициент передачи \dot{K} проще всего получить методом топологических графов (см. 7.3.2). Для этого будем предполагать, что на фильтр воздействует идеализированный источник гармонического напряжения с частотой ω и комплексной амплитудой $\dot{U}_{вх}$, а на выходе расположен вольтметр, измеряющий $\dot{U}_{вых}$. Коэффициент передачи $\dot{K}(j\omega) = \dot{U}_{вых} / \dot{U}_{вх}$ определяется топологическим законом Мэсона:

$$\dot{K}(j\omega) = \sum \dot{T}_i \dot{\Delta}_i / \dot{\Delta},$$

где \dot{T}_i – величина i -го пути передачи; $\dot{\Delta}_i$ – его алгебраическое дополнение; $\dot{\Delta}$ – определитель цепи (графа). Все величины комплексные.

Двойной T -мост имеет два пути передачи: первый состоит из двух емкостей C_1 ($T_1 = (j\omega C_1)^2$), второй – из двух резисторов R_1 ($T_2 = 1/R_1^2$), т.е. величины путей передачи вещественны. Их алгебраические дополнения

получаются при закорачивании всех элементов путей передачи (в том числе и вольтметра) и потому стягиваются в точку ($\Delta_1 = \Delta_2 = 1$).

При вычислении определителя графа источник напряжения закорачивается, и схема цепи принимает вид, показанный на рис. 12.26. Разлагая граф по узловой паре, образованной выходными зажимами моста, получаем четыре дерева графа. Комплексная величина определителя равна сумме величин деревьев

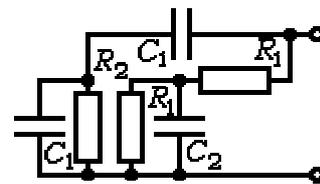


Рис. 12.26. Топологический граф для определения Δ

$$\Delta = (j\omega C_1)^2 + 4j\omega C_1/R_1 + 1/R_1^2.$$

Итак, по формуле Мэсона

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{1 - (\omega C_1 R_1)^2}{1 - (\omega C_1 R_1)^2 + 4j\omega C_1 R_1}.$$

На частоте $\omega_0 = 1/R_1 C_1$ коэффициент передачи фильтра обращается в нуль, т.е. составляющая с этой частотой полностью подавляется (вырезается). Вводя относительную частоту $\Omega = \omega/\omega_0$, получим выражения для модуля и аргумента \dot{K}

$$|\dot{K}(\Omega)| = \frac{1 - \Omega^2}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 16\Omega^2}},$$

$\varphi_K = \arg \dot{K}(\Omega) = -\arctg(4\Omega/(1 - \Omega^2))$.
Результаты расчета АЧХ и ФЧХ заграждающего RC-фильтра представлены на рис. 12.27. Отметим, что, как и в случае заграждающего LC-фильтра, ФЧХ терпит разрыв на частоте ω_0 .

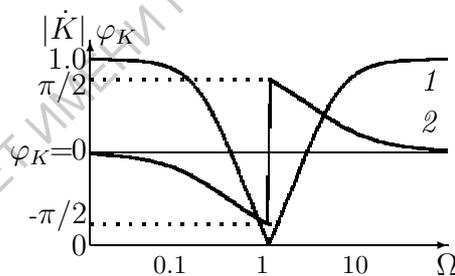


Рис. 12.27. АЧХ (кривая 1) и ФЧХ (кривая 2) заграждающего RC-фильтра

12.6. Многозвенные фильтры

На практике часто используются каскадные соединения Т- или П-образных элементарных звеньев фильтров (рис. 12.28), при которых выходы предыдущих звеньев соединены со входами последующих звеньев. Результирующая матрица $\mathbf{A}_{рез}$ такого соединения равна произведению матриц \mathbf{A} отдельных звеньев:

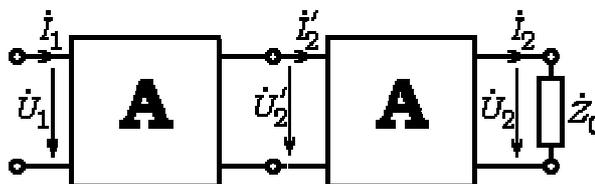


Рис. 12.28. Каскадное соединение звеньев фильтра

$$\mathbf{A}_{рез} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_3 \cdot \dots \cdot \mathbf{A}_N. \tag{12.29}$$

Перемножение матриц \mathbf{A}_i даже при полной идентичности звеньев приводит к сложным вычислениям. Математические выкладки существенно упрощаются, если в уравнениях (12.1) $\text{ch}\gamma$ и $\text{sh}\gamma$ представить в виде суммы и разности экспонент. Тогда

$$\dot{U}_1 = \dot{A}_{11}\dot{U}_2 + \dot{A}_{12}\dot{I}_2 = \frac{1}{2} (\dot{U}_2 + \dot{I}_2\dot{Z}_0) e^{-\gamma} + \frac{1}{2} (\dot{U}_2 - \dot{I}_2\dot{Z}_0) e^{\gamma},$$

$$\dot{I}_1 = \dot{A}_{21}\dot{U}_2 + \dot{A}_{22}\dot{I}_2 = \frac{1}{2} \left(\dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_0} \right) e^{-\gamma} + \frac{1}{2} \left(\dot{I}_2 - \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_0} \right) e^{\gamma}. \quad (12.30)$$

Когда каскадное соединение содержит N идентичных звеньев, описываемых характеристической постоянной передачи γ , уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \frac{1}{2} (\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \dot{Z}_0) e^{-N\gamma} + \frac{1}{2} (\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \dot{Z}_0) e^{N\gamma}, \\ \dot{I}_1 &= \frac{1}{2} \left(\dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_0} \right) e^{-N\gamma} + \frac{1}{2} \left(\dot{I}_2 - \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_0} \right) e^{N\gamma} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{A}_{11\text{рез}} \dot{U}_2 + \dot{A}_{12\text{рез}} \dot{I}_2 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} N\gamma + \dot{I}_2 \dot{Z}_0 \operatorname{sh} N\gamma, \\ \dot{I}_1 &= \dot{A}_{21\text{рез}} \dot{U}_2 + \dot{A}_{22\text{рез}} \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_0} \operatorname{sh} N\gamma + \dot{I}_2 \operatorname{ch} N\gamma. \end{aligned} \quad (12.31)$$

Действительно, для двух идентичных звеньев (рис. 12.28) имеем

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \frac{1}{2} (\dot{U}'_2 + \dot{I}'_2 \dot{Z}_0) e^{-\gamma} + \frac{1}{2} (\dot{U}'_2 - \dot{I}'_2 \dot{Z}_0) e^{\gamma}, \\ \dot{I}_1 &= \frac{1}{2} \left(\dot{I}'_2 + \frac{\dot{U}'_2}{\dot{Z}_0} \right) e^{-\gamma} + \frac{1}{2} \left(\dot{I}'_2 - \frac{\dot{U}'_2}{\dot{Z}_0} \right) e^{\gamma}. \end{aligned} \quad (12.32)$$

Выражая \dot{U}'_2 , \dot{I}'_2 по формулам (12.30) через \dot{U}_2 , \dot{I}_2 и подставляя в (12.31), получим:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \left[(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \dot{Z}_0) e^{-2\gamma} + (\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \dot{Z}_0) + (\dot{I}_2 \dot{Z}_0 + \dot{U}_2) e^{-2\gamma} + (\dot{I}_2 \dot{Z}_0 - \dot{U}_2) \right] / 4 + \\ &+ \left[(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \dot{Z}_0) + (\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \dot{Z}_0) e^{2\gamma} - (\dot{I}_2 \dot{Z}_0 + \dot{U}_2) - (\dot{I}_2 \dot{Z}_0 - \dot{U}_2) e^{2\gamma} \right] / 4 = \\ &= [(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \dot{Z}_0) e^{-2\gamma} + (\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \dot{Z}_0) e^{2\gamma}] / 2, \\ \dot{I}_1 &= \frac{1}{4} \left[\left(\dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_0} \right) e^{-2\gamma} + \left(\dot{I}_2 - \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_0} \right) + \left(\frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_0} + \dot{I}_2 \right) e^{-2\gamma} + \left(\frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_0} - \dot{I}_2 \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{4} \left[\left(\dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_0} \right) + \left(\dot{I}_2 - \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_0} \right) e^{2\gamma} - \left(\frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_0} + \dot{I}_2 \right) - \left(\frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_0} - \dot{I}_2 \right) e^{2\gamma} \right] = \\ &= [(\dot{I}_2 + \dot{U}_2 / \dot{Z}_0) e^{-2\gamma} + (\dot{I}_2 - \dot{U}_2 / \dot{Z}_0) e^{2\gamma}] / 2. \end{aligned} \quad (12.33)$$

Рассматривая \dot{U}_1 и \dot{I}_1 в качестве выходных сигналов для предыдущего звена (\dot{U}'_2 , \dot{I}'_2) и подставляя (12.33) в (12.32), будем последовательно получать для $\dot{U}_{\text{вх}}$ и $\dot{I}_{\text{вх}}$ выражения с $e^{-3\gamma}$ и $e^{3\gamma}$, $e^{-4\gamma}$ и $e^{4\gamma}$ и т.д.

В полосе прозрачности фильтра $\dot{\gamma} = j\beta$, и уравнения (12.33) принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \dot{U}_2 \cos N\beta + j\dot{I}_2 \dot{Z}_0 \sin N\beta, \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 \cos N\beta + j\frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_0} \sin N\beta.\end{aligned}\quad (12.34)$$

Таким образом, при каскадном соединении N звеньев фильтр превращается в длинную цепь, составленную из сосредоточенных элементов. Как будет показано ниже (см. гл. 13), соотношения (12.34) оказываются аналогичными уравнениям, описывающим линии передачи с распределенными параметрами. Продолжая эту аналогию, можно говорить о существовании в цепочках фильтров бегущих и стоячих волн, о фазовой и групповой скорости волн и т.д.

12.7. Электрические фильтры как линии задержки

Устройство, воспроизводящее сигнал с отставанием на заданный интервал времени τ_3 , называется *линией задержки*. В фильтрах, содержащих инерционные элементы L и C , выходной сигнал согласно (12.7) всегда запаздывает по фазе относительно входного ($\varphi = \beta(\omega)$), что для гармонического воздействия эквивалентно задержке по времени. Если сигнал полигармонический, то для сохранения формы его огибающей время запаздывания τ_3 различных гармоник должно быть одинаковым. Это возможно, когда φ_3 пропорциональна ω , а $\tau_3 = d\beta/d\omega = \text{const}$.

Если в качестве линии задержки использовать ФНЧ k -типа и

$$\beta(\omega) = \arccos(1 - 2\omega^2/\omega_{cp}^2),$$

то

$$\tau_3 = \frac{d\beta}{d\omega} = \frac{4\omega/\omega_{cp}^2}{\sqrt{1 - (1 - \frac{2\omega^2}{\omega_{cp}^2})^2}} = \frac{4\omega/\omega_{cp}^2}{\frac{2\omega}{\omega_{cp}} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{cp}^2}}} = \frac{2}{\omega_{cp} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_{cp}^2}}}.$$

Учитывая, что $\omega_{cp} = 2/\sqrt{LC}$, окончательно получим:

$$\tau_3 = \sqrt{LC} / \sqrt{1 - \omega^2/\omega_{cp}^2}. \quad (12.35)$$

Как видно из графика $\beta(\omega)$ (рис. 12.7, б), линейная зависимость $\beta(\omega)$ имеет место только для $\omega \ll \omega_{cp}$. Аналогичный вывод следует и из формулы (12.35): при $\omega \ll \omega_{cp}$ радикал $\sqrt{1 - (\omega/\omega_{cp})^2} \cong 1$, и для одного звена $\tau_3 \cong \sqrt{LC}$, а для N -звенной цепочки ФНЧ $\tau_3 \cong N\sqrt{LC}$.

Таким образом, для задержки широкополосного сигнала следует повышать частоту среза ФНЧ, а необходимую величину задержки обеспечивать соответствующим числом элементарных звеньев. В современной радиоэлектронной аппаратуре используются LC -линии задержки в виде ФНЧ с числом звеньев до 80 и соответствующим числом выводов.

Глава 13

Волновые и колебательные процессы в распределенных радиосистемах

Теория физических процессов в радиоэлектронных цепях и системах с сосредоточенными параметрами охватывает большой класс основополагающих радиофизических эффектов. Критерий сосредоточенности параметров, строго говоря, базируется на теории электромагнитных полей и конечности скорости распространения электромагнитных волн. Когда время распространения волны вдоль всей системы в любых направлениях мало по сравнению с периодом колебаний, то колебания во всех точках системы происходят синфазно и описываются функциями одной переменной – времени. Если продолжительность распространения волны сравнима с периодом сигналов или превышает его, то колебания происходят с запаздыванием по фазе, а токи и напряжения становятся функциями двух переменных – продольной координаты x и времени t . При этом возникает необходимость рассматривать системы с распределенными параметрами, а физические процессы, происходящие в пространстве и во времени, описывать уравнениями в частных производных.

Важный класс распределенных систем составляют устройства, обладающие большой протяженностью только в одном направлении и описываемые распределенными в выбранном направлении параметрами, – направляющие или волноведущие устройства, предназначенные для передачи радиосигналов и получившие название *линий передачи*.

В настоящей главе рассматриваются математические модели линий передачи, исследуются волновые и колебательные процессы в них, а также условия оптимальной передачи сигналов от источников к нагрузкам.

13.1. Понятие о распределенных системах и волновых процессах

13.1.1. Основные виды радиочастотных линий передачи

Радиочастотные линии передачи различаются по конфигурации и устройству, типу распространяющихся волн, а также по назначению. Линия передачи может быть *регулярной (однородной)*, если ее электрические параметры неизменны вдоль направления распространения волны,

или *нерегулярной*, когда электрические параметры являются функциями продольной координаты. В зависимости от материалов, используемых в конструкции, различают металлические, диэлектрические и металлодиэлектрические линии передачи. Наконец, линия передачи может быть *закрытой* (*экранированной*) или *открытой* в зависимости от того, ограничено экраном или не ограничено электромагнитное поле линии передачи в поперечном направлении. К закрытым металлическим линиям относятся прямоугольные (рис.13.1,*а*) и круглые (рис.13.1,*б*) волноводы, а также коаксиальные кабели (рис.13.1,*в*) и двухпроводные экранированные линии (рис.13.1,*г*). Частным случаем последних являются экранированные витые пары. Примером открытой металлической линии передачи является двухпроводная открытая линия (рис.13.1,*д*). Среди диэлектрических линий передачи наиболее распространены *волоконные световоды*, в простейшем варианте представляющие собой гибкую нить из высокопрозрачного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε_1 , окруженную диэлектрической оболочкой с проницаемостью $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ (рис.13.1,*е*), а среди металлодиэлектрических линий передачи – разнообразные симметричные (рис.13.1,*ж*) и несимметричные (рис.13.1,*з*) микрополосковые устройства.

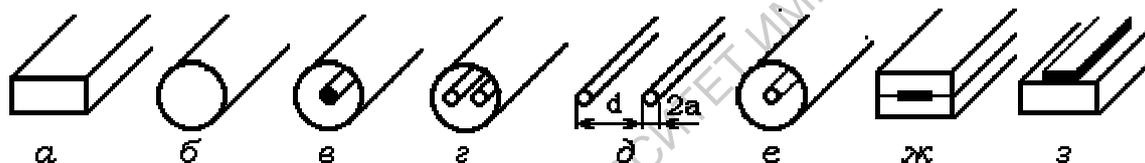


Рис. 13.1. Поперечные сечения линий передачи

Математической моделью линий передачи являются *длинная линия* – электрическая цепь с распределенными параметрами, состоящая из двух параллельных проводников, поперечные размеры которых и расстояние d между ними малы по сравнению с продольными и с длиной волны передаваемых колебаний (отсюда и термин “длинная линия”) [1].

В общем случае физические процессы, протекающие в линиях передачи, описываются уравнениями Максвелла. Однако в условиях, справедливых для длинной линии, оказывается возможным использовать квазистационарное приближение и построить модель, состоящую из сосредоточенных элементов.

13.1.2. Бегущие волны.

Фазовая и групповая скорости. Дисперсия

Пусть некоторая физическая величина Φ является функцией двух переменных – координаты x и времени t и пусть при фиксированном значении x функция $\Phi(t)$ описывает колебательный процесс. Будем предполагать, что $\Phi(t, x) = \Phi(t - ax)$ и рассмотрим значения $\Phi(t, x)$ в двух плоскостях – $x=0$ и $x=x_1$. Тогда

$$\Phi(t, 0) = \Phi(t), \quad \Phi(t, x_1) = \Phi(t - ax_1) = \Phi\left(t - \frac{x_1}{v}\right),$$

где $v = 1/a$ – скорость перемещения колебания $\Phi(t)$. На рис. 13.2 временные изменения $\Phi(t, x)$ в плоскости x_1 (кривая 2) повторяют времен-

ные изменения этой функции в плоскости $x = 0$ (кривая 1) с запаздыванием на время $\tau = x_1/v$, т.е. функция $\Phi(t, x)$ в момент времени t_1 принимает то же значение, что и в момент времени $t = 0$, но в другом сечении, удаленном на расстоянии $x_1 = vt_1$.

Колебание, распространяющееся в пространстве с конечной скоростью будем называть *волной*. Универсальное определение понятия волны отсутствует, и наиболее приемлемым, по-видимому, является определение волны, данное в энциклопедии по физике, изданной в Мак-Гроу-Хилл¹:

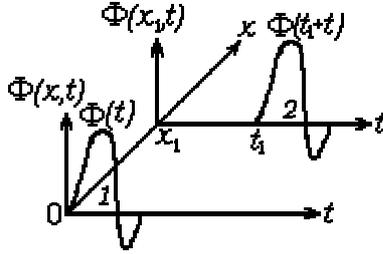


Рис. 13.2. Пространственно-временная диаграмма волны

ет, и наиболее приемлемым, по-видимому, является определение волны, данное в энциклопедии по физике, изданной в Мак-Гроу-Хилл¹: ”Волна (физич.) – возмущение, распространяющееся от одной точки среды к другой без сообщения среде в целом какого-либо постоянного смещения”.

Простейшим и в то же время наиболее представителем волновым движением является скалярная синусоидальная бегущая волна

$$\Phi(t, x) = A \sin(\omega t \pm \beta x), \quad (13.1)$$

где A – амплитуда волны; ω – круговая частота сигнала; β – волновое число. Величина $\omega t \pm \beta x$ называется *фазой волны*. Фаза волны (13.1) одинакова во всех точках плоскостей $x = \text{const}$. Такие волны называются *плоскими*. Если амплитуда волны A не зависит от координат фронта волны, то функция $\Phi(x, t)$ описывает *однородную* волну. Волна (13.1) имеет постоянную амплитуду и поэтому является плоской и однородной.

Минимальное расстояние λ , на котором фаза волны изменяется на 2π , называется *длиной волны*, а волновое число $\beta = 2\pi/\lambda$ характеризует изменение фазы волны на единицу расстояния и поэтому называется еще *фазовой постоянной*. Если представить круговую частоту сигнала по формуле $\omega = 2\pi/T$, где T – период колебания, то уравнение волны (13.1) принимает вид

$$\Phi(x, t) = A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda} \right) \right].$$

Гармоническую бегущую волну можно записать в комплексной форме:

$$\dot{\Phi}(x, t) = \dot{A}_m e^{j(\omega t \pm \beta x)}, \quad (13.2)$$

где \dot{A}_m – комплексная амплитуда волны.

Скорость перемещение фронта волны ($\omega t \pm \beta x = \text{const}$) называется *фазовой скоростью волны*:

$$v_\Phi = \frac{dx}{dt} = \mp \frac{\omega}{\beta}, \quad (13.3)$$

где знак (+) соответствует распространению волны в направлении возрастания координаты x , а знак (–) – в направлении убывания x .

Дисперсия. Зависимость фазовой скорости гармонических волн от частоты называется *дисперсией волн* (от лат. dispersio – рассеяние), а зависимость $\beta = \beta(\omega)$ – *дисперсионным соотношением*.

Реальные среды, в том числе диэлектрическое заполнение линий передачи, в разных областях частот описываются различными дисперсионными соотношениями. Области частот, в которых $dv_\Phi/d\omega < 0$ и $dv_\Phi/d\omega > 0$,

¹ Physik. N.-Y.: McGraw-Hill, 1976. P. 427.

называются областями *нормальной* и *аномальной* дисперсии соответственно. На рис. 13.3 представлены графики, иллюстрирующие два вида

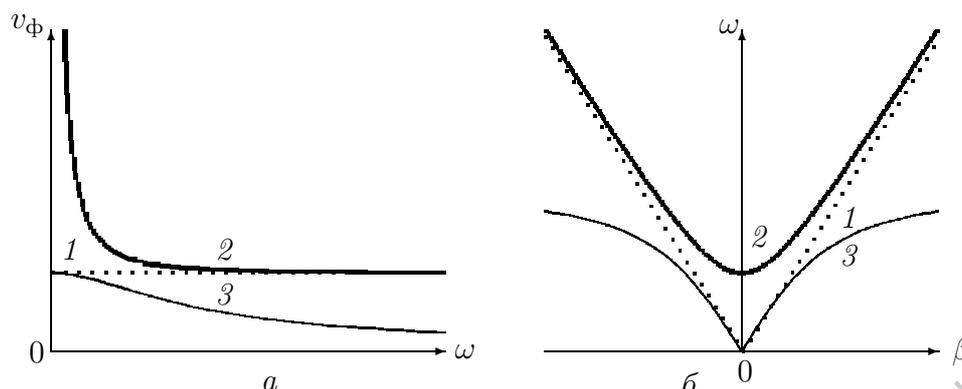


Рис. 13.3. Зависимости $v_\phi(\omega)$ (а) и $\omega(\beta)$ – диаграммы Бриллюэна (б) для двух видов нормальной дисперсии. Пунктирными линиями изображены аналогичные зависимости для бездисперсной среды

нормальной дисперсии: в области низких частот (кривые 2) и в области высоких частот (кривые 3). Из графиков видно, что при нормальной дисперсии в области низких частот v_ϕ конечна, а β отлична от нуля только для частот, превышающих некую критическую частоту ($\omega > \omega_{кр}$). Критические частоты являются важной характеристикой металлических волноводов, причем конкретной геометрии волновода и каждому типу волны соответствует собственная $\omega_{кр}$. Физические среды, в которых v_ϕ не зависит от ω , а β пропорциональна ω , называются *бездисперсными*.

Гармонические волны – это идеализация. Реальная волна содержит группу гармонических волн, составляющих так называемый “волновой пакет”. Так, простейшее однотональное АМ-колебание состоит из трех гармонических составляющих с соответствующими частотами. Если фазовые скорости волн будут одинаковы, что имеет место в бездисперсных средах, то огибающая пакета сохраняет форму и АМ-колебание передается без искажений. В средах, обладающих дисперсией, формы пакетов волн искажаются, а распространение несинусоидальных волн приближенно характеризует *групповая скорость*.

Групповая скорость $v_{гр}$ удовлетворяет соотношению

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{d\beta} \quad (13.4)$$

и описывает скорость переноса энергии группой волн в среде без поглощения. Для бездисперсных сред $v_{гр} = v_\phi$.

13.2. Основы теории длинных линий

13.2.1. Квазистационарная модель линии

Квазистационарное описание переменных электромагнитных полей справедливо для радиофизических систем, в которых характерное время изменения поля (например, период колебаний) значительно превышает время распространения волновых возмущений. При этом пренебрегается эффектами запаздывания и считается, что изменения полей во всей системе или ее части (квазистационарной зоне) происходят синхронно.

Тогда вместо вихревого электрического поля можно рассматривать потенциальное поле электрических зарядов, а вместо вихревого магнитного поля – соленоидальное поле постоянных токов.

Пусть источник гармонического сигнала соединен с нагрузкой (рис.

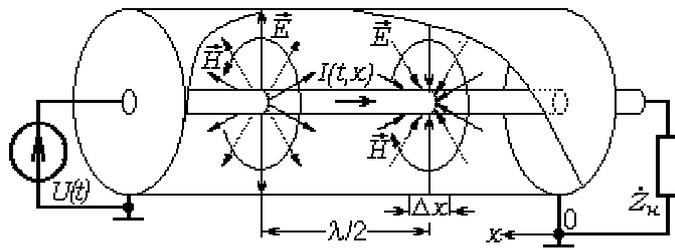


Рис. 13.4. Отрезок коаксиальной линии передачи. (Поперечные размеры для упрощения анализа увеличены.)

13.4) линией передачи, например коаксиальным кабелем. Тогда вдоль линии будет распространяться гармоническая электромагнитная волна. Введем систему координат, направляя ось x от нагрузки в сторону источника сигнала, и рассмотрим некоторый фиксированный момент времени.

Любой небольшой участок линии передачи длиной $\Delta x \ll \lambda$ (рис. 13.4) при условии, что поперечные размеры линии пренебрежимо малы по сравнению с длиной волны, можно считать "квазистационарной зоной". При этом электрические заряды, сосредоточенные на проводящих поверхностях линии создают в пределах Δx электрическое поле, вектор напряженности которого \vec{E} перпендикулярен этим поверхностям, а вдоль поверхностей протекают навстречу друг другу одинаковые по величине токи I , постоянные в пределах участка Δx . В поперечном сечении линии эти токи создают вокруг проводящих поверхностей силовые линии магнитного поля, т.е. вектор напряженности магнитного поля \vec{H} также лежит в поперечной плоскости.

Электромагнитная волна, векторы электрического и магнитного поля которой лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, называется *поперечной электромагнитной волной* или *T-волной* (от англ. transversal – поперечный).

Если в поперечной плоскости системы выбрать на проводниках линии две точки P_1 и P_2 и соединить их произвольной непересекающейся кривой ℓ , то напряжение между проводниками

$$U = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} d\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2} \text{grad} \varphi d\vec{l} = \varphi_2 - \varphi_1,$$

где φ_1 и φ_2 – электрические потенциалы проводников.

Интеграл вдоль любой замкнутой силовой линии магнитного поля ℓ_0 с учетом теоремы Стокса дает

$$\oint_{\ell_0} \vec{H} d\vec{l} = \iint_{S_0} \text{rot} \vec{H} d\vec{S} = I.$$

Таким образом, благодаря квазистационарной структуре полей физические процессы в длинной линии можно описывать напряжениями U и токами I вместо напряженностей \vec{E} и \vec{H} электрического и магнитного полей.

Каждый элемент длинной линии при условии существования в нем квазистационарных электрического и магнитного полей будет обладать

конечными параметрами: $L_1\Delta x$, $C_1\Delta x$, $R_1\Delta x$ и $G_1\Delta x$, где L_1 , C_1 , R_1 и G_1 – погонные параметры, т.е. приходящиеся на единицу длины линии.

Индуктивность $L_1\Delta x$ обусловлена существованием магнитного поля вокруг проводов, емкость $C_1\Delta x$ – накоплением электрических зарядов на проводниках линии, а $R_1\Delta x$ и $G_1\Delta x$ – потерями энергии. При этом $R_1\Delta x$ соответствует активному сопротивлению проводов, а проводимость $G_1\Delta x$ – утечке энергии через изоляторы между проводами. Тогда эквивалентную схему малого элемента длиной линии можно представить электрической цепью, составленной из сосредоточенных элементов (рис. 13.5).

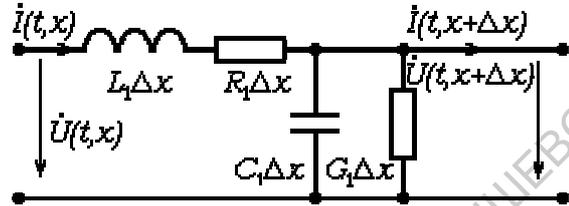


Рис. 13.5. Эквивалентная схема отрезка длиной линии

13.2.2. Дифференциальные уравнения длинной линии и их решение

Обозначим напряжение, возникающее в момент времени t в сечении линии с координатой x , через $U(x, t)$, в сечении $x + \Delta x$ – через $U(t, x + \Delta x)$, а токи, протекающие в тех же сечениях, – через $I(x, t)$ и $I(t, x + \Delta x)$ соответственно. С учетом эквивалентной схемы (рис. 13.5) разности напряжений и токов на концах элемента линии удовлетворяют соотношениям:

$$U(t, x + \Delta x) - U(x, t) = \left(L_1 \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} + R_1 I(x, t) \right) \Delta x,$$

$$I(t, x + \Delta x) - I(x, t) = \left(C_1 \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + G_1 U(x, t) \right) \Delta x.$$

После деления этих уравнений на Δx и перехода к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ получаем систему двух дифференциальных уравнений в частных производных. Эти уравнения впервые введены в конце 30-х гг. для описания физических процессов, сопровождающих передачу сигналов в телеграфии, и потому получили название "телеграфных уравнений":

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = L_1 \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} + R_1 I(x, t), \quad \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = C_1 \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + G_1 U(x, t). \quad (13.5)$$

Для длинной линии без потерь ($R=0$, $G=0$) система уравнений (13.5) путем повторного дифференцирования сводится к одномерным волновым уравнениям относительно функций $U(x, t)$ и $I(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} - L_1 C_1 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial x^2} - L_1 C_1 \frac{\partial^2 I(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (13.6)$$

Это дифференциальные уравнения гиперболического типа. Их общее решение имеет вид

$$\Phi(x, t) = \Phi_1(x - vt) + \Phi_2(x + vt),$$

где $\Phi(x, t)$ соответствует $U(x, t)$ или $I(x, t)$, $v = \sqrt{1/L_1 C_1}$. В зависимости от воздействия функция $\Phi(x \pm vt)$ может быть сложной полигармонической или простой гармонической функцией: $\Phi(x \pm vt) \sim e^{j(x \pm vt)}$ и представляет две волны, бегущие навстречу ($v > 0$ и $v < 0$) вдоль Ox .

При гармоническом воздействии решения уравнений (13.5) можно получить и в более общем случае (при наличии конечных потерь). Воспользуемся методом комплексных амплитуд. Тогда

$$\dot{U}(x, t) = \dot{U}(x)e^{j\omega t}, \quad \dot{I}(x, t) = \dot{I}(x)e^{j\omega t}, \quad (13.7)$$

где $\dot{U}(x)$ и $\dot{I}(x)$ - комплексные амплитуды напряжения и тока в сечении с координатой x . Подставляя (13.7) в (13.5), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{U}(x)}{dx} &= (j\omega L_1 + R_1)\dot{I}(x) = \dot{Z}\dot{I}(x), \\ \frac{d\dot{I}(x)}{dx} &= (j\omega C_1 + G_1)\dot{U}(x) = \dot{Y}\dot{U}(x), \end{aligned} \quad (13.8)$$

где \dot{Z} и \dot{Y} - комплексные погонные сопротивление и проводимость линии:

$$\dot{Z} = j\omega L_1 + R_1, \quad \dot{Y} = j\omega C_1 + G_1. \quad (13.9)$$

Частные производные заменены полными, так как уравнения содержат зависимости напряжений и токов только от координаты x . Дифференцируя уравнения (13.8) по x , получим обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка относительно искомых функций $\dot{U}(x)$ и $\dot{I}(x)$, известные в литературе как *одномерные уравнения Гельмгольца*:

$$\frac{d^2\dot{U}(x)}{dx^2} = \dot{Z}\dot{Y}\dot{U}(x), \quad \frac{d^2\dot{I}(x)}{dx^2} = \dot{Z}\dot{Y}\dot{I}(x). \quad (13.10)$$

Будем искать решение уравнений (13.10) в виде

$$\dot{U}(x) = \dot{A}e^{\dot{\gamma}x}, \quad \dot{I}(x) = \dot{B}e^{\dot{\gamma}x},$$

где \dot{A} и \dot{B} - постоянные интегрирования; $\dot{\gamma}$ - корень характеристического уравнения $\dot{\gamma}^2 = \dot{Z}\dot{Y}$. Это - комплексное волновое число

$$\dot{\gamma} = \pm\sqrt{\dot{Z}\dot{Y}} = \pm\sqrt{(j\omega L_1 + R_1)(j\omega C_1 + G_1)} = \pm(\alpha + j\beta). \quad (13.11)$$

Его вещественная часть α называется *коэффициентом затухания*, а модуль мнимой части β - *постоянной распространения* волны. На высоких и сверхвысоких частотах (СВЧ) $R_1 \ll \omega L_1$, $G_1 \ll \omega C_1$ и $\alpha \rightarrow 0$. Если пренебречь только погонной активной проводимостью линии G_1 , характеризующей утечку между проводниками, то

$$\dot{\gamma}^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta \cong -\omega^2 L_1 C_1 + j\omega C_1 R_1.$$

Полагая $\alpha^2 \ll \beta^2$, получим:

$$\beta = \pm\omega\sqrt{L_1 C_1}, \quad \alpha = \omega C_1 R_1 / 2\beta = R_1 / 2\sqrt{L_1 / C_1} \quad (13.12)$$

Обратимся к общему случаю. Полное решение уравнений (13.10) имеет вид

$$\dot{U}(x) = \dot{A}_1 e^{\dot{\gamma}x} + \dot{A}_2 e^{-\dot{\gamma}x}, \quad \dot{I}(x) = \dot{B}_1 e^{\dot{\gamma}x} + \dot{B}_2 e^{-\dot{\gamma}x}. \quad (13.13)$$

Для определения постоянных интегрирования $\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{B}_1$ и \dot{B}_2 используем граничные условия задачи. Пусть на конце линии ($x=0$) включена комплексная нагрузка \dot{Z}_H и заданы напряжение на нагрузке $\dot{U}(0) = \dot{U}_H$ и ток $\dot{I}(0) = \dot{I}_H$. Еще два граничных условия получим, подставляя решения (13.13) в уравнения (13.8). Тогда

$$\dot{\gamma} \dot{A}_1 e^{\dot{\gamma}x} - \dot{\gamma} \dot{A}_2 e^{-\dot{\gamma}x} = \dot{Z}_1 \dot{I}(x), \quad \dot{\gamma} \dot{B}_1 e^{\dot{\gamma}x} - \dot{\gamma} \dot{B}_2 e^{-\dot{\gamma}x} = \dot{Y}_1 \dot{U}(x). \quad (13.14)$$

При $x=0$ из (13.13) и (13.14) имеем

$$\begin{aligned} \dot{U}_H &= \dot{A}_1 + \dot{A}_2, & \dot{\gamma}(\dot{A}_1 - \dot{A}_2) &= \dot{Z}_1 \dot{I}_H \quad \text{или} \quad \dot{A}_1 - \dot{A}_2 = \sqrt{\dot{Z}_1/\dot{Y}_1} \dot{I}_H, \\ \dot{I}_H &= \dot{B}_1 + \dot{B}_2, & \dot{\gamma}(\dot{B}_1 - \dot{B}_2) &= \dot{Y}_1 \dot{U}_H \quad \text{или} \quad \dot{B}_1 - \dot{B}_2 = \sqrt{\dot{Y}_1/\dot{Z}_1} \dot{U}_H. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \frac{1}{2}(\dot{U}_H + \dot{Z}_0 \dot{I}_H), & \dot{A}_2 &= \frac{1}{2}(\dot{U}_H - \dot{Z}_0 \dot{I}_H), \\ \dot{B}_1 &= \frac{1}{2}(\dot{I}_H + \dot{U}_H/\dot{Z}_0), & \dot{B}_2 &= \frac{1}{2}(\dot{I}_H - \dot{U}_H/\dot{Z}_0), \end{aligned} \quad (13.15)$$

где $\dot{Z}_0 = \sqrt{\dot{Z}_1/\dot{Y}_1}$ называется *характеристическим* или *волновым сопротивлением* длинной линии. На высоких частотах и СВЧ $R_1 \ll |j\omega L_1|$, $G_1 \ll |j\omega C_1|$, и характеристические сопротивления линий вещественны:

$$\dot{Z}_0 = R_0 = \sqrt{L_1/C_1}. \quad (13.16)$$

Подставляя (13.15) в (13.13), получим выражения для комплексных амплитуд $\dot{U}(x)$ и $\dot{I}(x)$ в произвольном сечении линии:

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \frac{1}{2}(\dot{U}_H + R_0 \dot{I}_H) e^{\dot{\gamma}x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_H - R_0 \dot{I}_H) e^{-\dot{\gamma}x}, \\ \dot{I}(x) &= \frac{1}{2}(\dot{I}_H + \frac{\dot{U}_H}{R_0}) e^{\dot{\gamma}x} + \frac{1}{2}(\dot{I}_H - \frac{\dot{U}_H}{R_0}) e^{-\dot{\gamma}x}. \end{aligned} \quad (13.17)$$

Это – полное решение задачи при заданных граничных условиях.

13.2.3. Характеристики волновых процессов

Соотношения (13.17) позволяют проанализировать характер волновых процессов, происходящих в длинной линии при гармоническом воздействии. Общее решение телеграфных уравнений в комплексной форме ($\dot{U}(x, t)$ и $\dot{I}(x, t)$) получим, умножая комплексные амплитуды (13.17) на $\exp(j\omega t)$. Тогда с учетом (13.11) имеем

$$\begin{aligned} \dot{U}(x, t) &= \frac{1}{2}(\dot{U}_H + \dot{I}_H R_0) e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)} + \frac{1}{2}(\dot{U}_H - \dot{I}_H R_0) e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)}, \\ \dot{I}(x, t) &= \frac{1}{2}(\dot{I}_H + \frac{\dot{U}_H}{R_0}) e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x)} + \frac{1}{2}(\dot{I}_H - \frac{\dot{U}_H}{R_0}) e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)}. \end{aligned} \quad (13.18)$$

Таким образом, в линии одновременно существует две бегущие волны. Фазовая скорость волны, определяемой первым слагаемым в выражениях для напряжения или тока, отрицательная, т.е. волна распространяется навстречу оси Ox (от генератора к нагрузке). Это – прямая или ”падающая” (на нагрузку) волна $\dot{U}_{\text{пад}} = (\dot{U}_H + \dot{I}_H R_0)/2$, $\dot{I}_{\text{пад}} = (\dot{I}_H + \dot{U}_H/R_0)/2$. На первый взгляд кажется парадоксальным, что ее амплитуда экспоненциально возрастает по мере увеличения x . На самом деле никакого парадокса нет: волна распространяется навстречу оси Ox , $\exp(\alpha x) = \exp[-\alpha(-x)]$ и амплитуда волны реально убывает по мере удаления от источника сигналов.

Фазовая скорость волны, определяемой вторым слагаемым в выражениях (13.18), положительна, т.е. волна распространяется от нагрузки к источнику сигналов. Это – ”отраженная” от нагрузки волна $\dot{U}_{\text{отр}} = (\dot{U}_H - \dot{I}_H R_0)/2$, $\dot{I}_{\text{отр}} = (\dot{I}_H - \dot{U}_H/R_0)/2$. Если коэффициент затухания α пренебрежимо мал, что практически всегда имеет место для радиочастот, то соотношения (13.18) принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{U}(x, t) &= \frac{1}{2}(\dot{U}_H + R_0 \dot{I}_H) e^{j(\omega t + \beta x)} + \frac{1}{2}(\dot{U}_H - R_0 \dot{I}_H) e^{j(\omega t - \beta x)} = \\ &= \dot{U}_{\text{пад}} e^{j(\omega t + \beta x)} + \dot{U}_{\text{отр}} e^{j(\omega t - \beta x)}, \\ \dot{I}(x, t) &= \frac{1}{2}(\dot{I}_H + \frac{\dot{U}_H}{R_0}) e^{j(\omega t + \beta x)} + \frac{1}{2}(\dot{I}_H - \frac{\dot{U}_H}{R_0}) e^{j(\omega t - \beta x)} = \\ &= \dot{I}_{\text{пад}} e^{j(\omega t + \beta x)} + \dot{I}_{\text{отр}} e^{j(\omega t - \beta x)}.\end{aligned}\quad (13.19)$$

Амплитуды падающих и отраженных волн остаются неизменными на протяжении всей линии. В этом случае волновой процесс можно охарактеризовать такими важными параметрами, как коэффициенты отражения или коэффициент стоячей волны.

Отношение комплексных амплитуд напряжений отраженной и падающей волны называется *комплексным коэффициентом отражения по напряжению* $\dot{\Gamma}_U$, а отношение комплексных амплитуд токов – *комплексным коэффициентом отражения по току* $\dot{\Gamma}_I$:

$$\begin{aligned}\dot{\Gamma}_U &= \frac{\dot{U}_{\text{отр}}}{\dot{U}_{\text{пад}}} = \frac{\dot{U}_H - \dot{I}_H R_0}{\dot{U}_H + \dot{I}_H R_0} = \frac{\dot{Z}_H - R_0}{\dot{Z}_H + R_0} = |\dot{\Gamma}| e^{j\varphi_{\Gamma}}, \\ \dot{\Gamma}_I &= \frac{\dot{I}_{\text{отр}}}{\dot{I}_{\text{пад}}} = \frac{\dot{I}_H - \dot{U}_H/R_0}{\dot{I}_H + \dot{U}_H/R_0} = \frac{R_0 - \dot{Z}_H}{R_0 + \dot{Z}_H} = -\dot{\Gamma}_U = |\dot{\Gamma}| e^{-j\varphi_{\Gamma}}.\end{aligned}\quad (13.20)$$

Из (13.20) видно, что модули коэффициентов отражения по напряжению и току равны и могут принимать любые значения от нуля до единицы. Если $|\dot{\Gamma}| = 0$, отраженная волна отсутствует и в линии передачи существует только прямая волна. Это режим бегущих волн.

Когда $|\dot{\Gamma}| = 1$, амплитуды отраженной и падающей волн равны. Волны, распространяющиеся в противоположных направлениях, интерферируют. В некоторых сечениях линии передачи падающая и отраженная волны оказываются синфазными и, интерферируя, создают колебания

удвоенной амплитуды. Сечения, в которых сумма $\dot{U}_{\text{тпад}}$ и $\dot{U}_{\text{мотр}}$ достигает наибольшего значения, называются *пучностями* напряжения. В других сечениях линии падающая и отраженная волны оказываются противофазными, и их сумма обращается в нуль. Сечения, в которых сумма $\dot{U}_{\text{тпад}}$ и $\dot{U}_{\text{мотр}}$ обращается в нуль, называются *узлами* напряжения. Аналогичным образом формируются пучности и узлы тока. Пучности и узлы следуют друг за другом и в линии передачи возникает так называемая "стоячая волна". Физический смысл этого понятия будет раскрыт позже.

Падающая и отраженная волны могут интерферировать и в тех случаях, когда $0 < |\Gamma| < 1$. При этом в узловых сечениях напряжения и токи не равны нулю, так как амплитуды отраженных волн меньше амплитуд падающих волн. В пучностях амплитуды напряжения или тока, хотя и возрастают, но не удваиваются. Возникающие распределения напряжения и тока представляют суперпозиции стоячих и бегущих волн. Такое взаимодействие волн часто называется режимом смешанных волн, хотя более естественно говорить о едином режиме стоячих волн и различать случаи полного и частичного отражения.

Измерение коэффициента отражения в радиотехнике технически возможно (например, в рефлектометрах с направленными ответвителями), но сопряжено со значительными трудностями, поэтому для оценки степени отражения предложен другой безразмерный параметр – коэффициент стоячей волны s .

Коэффициентом стоячей волны (КСВ или $K_{\text{ст}U}$) называется отношение модулей максимальной и минимальной амплитуд в линии, т.е. отношение суммы модулей падающей и отраженной волн к разности модулей:

$$s = \frac{|U_{\text{макс}}|}{|U_{\text{мин}}|} = \frac{|\dot{U}_{\text{тпад}}| + |\dot{U}_{\text{мотр}}|}{|\dot{U}_{\text{тпад}}| - |\dot{U}_{\text{мотр}}|} = \frac{1 + |\dot{\Gamma}_U|}{1 - |\dot{\Gamma}_U|}. \quad (13.21)$$

Величина КСВ может изменяться в пределах $1 \leq s < \infty$, причем $s = 1$ соответствует режиму бегущих волн, а $s = \infty$ – режиму стоячих волн при полном отражении. Отсюда

$$|\dot{\Gamma}| = \frac{s - 1}{s + 1} = 1 - \frac{2}{s + 1}.$$

В антенной технике вместо КСВ используется параметр $1/s$, называемый *коэффициентом бегущей волны* (КБВ).

В заключение отметим, что соотношения (13.17) можно представить в иной форме, если коэффициенты, содержащие $U_{\text{н}}$, объединить в одну, а коэффициенты, содержащие $I_{\text{н}}$, – в другую группу. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}_{\text{н}} \text{ch} \dot{\gamma} x + \dot{I}_{\text{н}} \dot{Z}_0 \text{sh} \dot{\gamma} x, \\ \dot{I}(x) &= \dot{I}_{\text{н}} \text{ch} \dot{\gamma} x + \frac{\dot{U}_{\text{н}}}{\dot{Z}_0} \text{sh} \dot{\gamma} x. \end{aligned} \quad (13.22)$$

Для линии без потерь ($\alpha = 0$, $\dot{\gamma} = j\beta$, $\text{sh} j\beta x = j \sin \beta x$, $\text{ch} j\beta x = \cos \beta x$)

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}_{\text{н}} \cos \beta x + j \dot{I}_{\text{н}} R_0 \sin \beta x, \\ \dot{I}(x) &= \dot{I}_{\text{н}} \cos \beta x + j \frac{\dot{U}_{\text{н}}}{R_0} \sin \beta x. \end{aligned} \quad (13.23)$$

Такая форма представления комплексных амплитуд напряжения и тока позволяет ввести входное сопротивление отрезка длинной линии, нагруженного комплексным сопротивлением \dot{Z}_H . В сечении с координатой x для $\alpha \neq 0$ и $\alpha = 0$ соответственно имеем

$$\dot{Z}_{\text{вх}}(x) = \frac{\dot{U}(x)}{\dot{I}(x)} = R_0 \frac{\dot{Z}_H + R_0 \operatorname{th} \gamma x}{R_0 + \dot{Z}_H \operatorname{th} \gamma x} \quad \dot{Z}_{\text{вх}}(x) = R_0 \frac{\dot{Z}_H + j R_0 \operatorname{tg} \beta x}{R_0 + j \dot{Z}_H \operatorname{tg} \beta x}. \quad (13.24)$$

В тех случаях, когда рассматривается параллельное соединение отрезков длинных линий, целесообразно использовать не входные сопротивления $\dot{Z}_{\text{вх}}(x)$, а входные проводимости $\dot{Y}_{\text{вх}}(x)$, которые для $\alpha \neq 0$ и $\alpha = 0$ описываются равенствами

$$\dot{Y}_{\text{вх}}(x) = \frac{\dot{I}(x)}{\dot{U}(x)} = G_0 \frac{\dot{Y}_H + G_0 \operatorname{th} \gamma x}{G_0 + \dot{Y}_H \operatorname{th} \gamma x}, \quad \dot{Y}_{\text{вх}}(x) = G_0 \frac{\dot{Y}_H + j G_0 \operatorname{tg} \beta x}{G_0 + j \dot{Y}_H \operatorname{tg} \beta x}, \quad (13.25)$$

где G_0 – характеристическая проводимость длинной линии.

Приведенные соотношения для входных сопротивлений и проводимостей можно наглядно представить на комплексной плоскости в виде так называемых ”круговых диаграмм полных сопротивлений”, введенных А.Р.Вольпертом. Они позволяют находить сопротивления нагрузки по заданному комплексному коэффициенту отражения и приближенно решать многие задачи согласования.

13.3. Круговые диаграммы полных сопротивлений

Согласно формуле (13.20) комплексный коэффициент отражения $\dot{\Gamma}$, характеристическое сопротивление длинной линии R_0 и комплексное сопротивление нагрузки \dot{Z}_H связаны простыми соотношениями:

$$\dot{\Gamma}_U = \frac{\dot{Z}_H - R_0}{\dot{Z}_H + R_0}, \quad \frac{\dot{Z}_H}{R_0} = \frac{1 + \dot{\Gamma}_U}{1 - \dot{\Gamma}_U}.$$

Введем приведенное сопротивление нагрузки $\hat{Z}_H = \dot{Z}_H / R_0$ и представим комплексный коэффициент отражения в алгебраической форме $\dot{\Gamma}_U = u + jv$. Тогда

$$\begin{aligned} \hat{Z}_H = R + jX &= \frac{1 + u + jv}{1 - u - jv} = \frac{(1 + u + jv)(1 - u + jv)}{(1 - u - jv)(1 - u + jv)} = \\ &= \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 - u)^2 + v^2} + j \frac{2v}{(1 - u)^2 + v^2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$R = \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 - u)^2 + v^2} \quad X = \frac{2v}{(1 - u)^2 + v^2}. \quad (13.26)$$

Рассмотрим на комплексной плоскости uOv геометрические образы, соответствующие постоянным значениям R и X . Из (13.26) имеем

$$\left(u - \frac{R}{1+R}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{1+R}\right)^2, \quad (13.27)$$

$$(u-1)^2 + \left(v - \frac{1}{X}\right)^2 = \frac{1}{X^2}. \quad (13.28)$$

Фиксированным значениям R , согласно (13.27), соответствуют окружности с радиусами $1/(1+R)$ и центрами, расположенными в точках $u = R/(1+R)$, $v = 0$ (рис. 13.6,а). Все окружности проходят через точку $u = 1$, $v = 0$. Окружность наибольшего (единичного) радиуса с центром в начале координат соответствует $R = 0$. С ростом R радиус окружности монотонно уменьшаются до нуля. Окружность радиуса $1/2$ проходит через начало координат и соответствует $R = 1$ ($Z_{\text{н}} = R_0$), а точка $u = 1$, $v = 0$ представляет вырожденную окружность нулевого радиуса и соответствует $R \rightarrow \infty$.

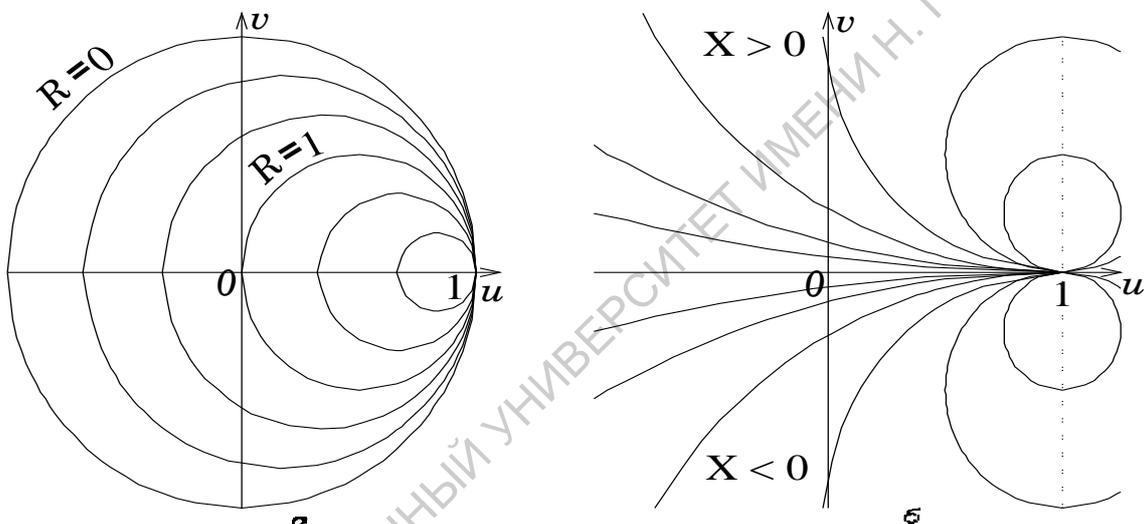


Рис. 13.6. Семейства окружностей $R = \text{const}$ (а) и $X = \text{const}$ (б)

Фиксированным значениям X , согласно (13.28), соответствуют окружности (рис. 13.6,б), также проходящие через точку $u = 1$, $v = 0$, но их центры расположены вдоль прямой $u = 1$, причем положительным значениям X (индуктивный характер реактивности) соответствуют окружности, расположенные в верхней полуплоскости uOv , а отрицательным значениям X (емкостный характер реактивности) – в нижней полуплоскости. Радиусы окружностей ($1/|X|$) при возрастании $|X|$ монотонно уменьшаются до нуля. Та же точка $u = 1$, $v = 0$ представляет вырожденную окружность нулевого радиуса и соответствует $X \rightarrow \infty$. Поскольку точка $u = 1$, $v = 0$ располагается на окружности $R = 0$, ее часто называют точкой пучности. Тогда диаметрально противоположная точка $u = -1$, $v = 0$ соответствует сечению линии с узлом напряжения и называется точкой узла.

Напомним, что u и v являются действительной и мнимой частями комплексного коэффициента отражения по напряжению, модуль которого, т.е. $\sqrt{u^2 + v^2}$ не может превышать единицу. Таким образом, практически необходимы лишь части X -окружностей – дуги, лежащие внутри единичного круга.

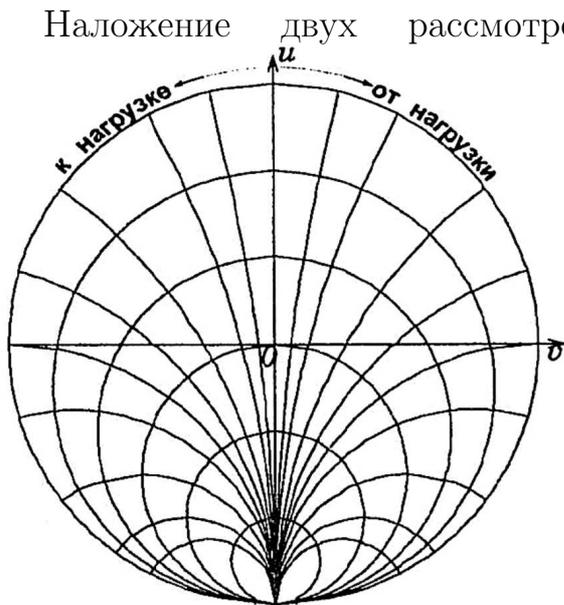


Рис. 13.7 Круговая диаграмма

13.4. Основные режимы работы радиочастотных линий передачи

13.4.1. Режим бегущих волн

Пусть в длинной линии существует только одна бегущая волна, а отраженная волна отсутствует ($\dot{\Gamma}_U = 0, s = 1$). Такое состояние называется *режимом бегущих волн* или *полным согласованием линии передачи с нагрузкой*.

- Условием полного согласования длинной линии с нагрузкой и обращения в нуль комплексных амплитуд отраженных волн напряжения и тока является равенство сопротивления нагрузки характеристическому сопротивлению линии передачи

$$\dot{Z}_H = R_0.$$

Рассмотрим мгновенные значения напряжения и тока бегущей волны в произвольном сечении согласованной длинной линии. Для этого перейдем от комплексных амплитуд к действительным переменным, используя стандартную процедуру:

$$A(x, t) = \operatorname{Re}[\dot{A}(x)e^{j\omega t}].$$

Умножая (13.17) на $e^{j\omega t}$ и ограничиваясь вещественной частью выражения, для согласованной линии получим:

$$\begin{aligned} U(x, t) &= |\dot{I}_H| R_0 e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_H), \\ I(x, t) &= |\dot{I}_H| e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \varphi_H), \end{aligned} \quad (13.29)$$

где φ_H – аргумент комплексной амплитуды падающей волны.

Таким образом, напряжение и ток в линии синфазны, т.е. наиболь-

шие значения напряжения (а значит, и электрического поля) и тока (а значит, и магнитного поля) достигаются одновременно и в одних и тех же сечениях (рис. 13.8,а). При наличии потерь амплитуды напряжения и тока экспоненциально убывают при перемещении от источника сигнала к нагрузке (напомним, что ось Ox направлена навстречу волне), а переносимая волной мощность убывает в соответствии с равенством

$$P(x, t) = \frac{1}{2} I_{\text{H}}^2 R_0 e^{2\alpha x} \cos^2(\omega t + \beta x).$$

Если линия без потерь, то амплитуды напряжения и тока поддерживаются постоянными, и для фиксированного момента времени структура полей принимает вид, изображенный на рис. 13.8,б, где электрические силовые линии показаны стрелками, а магнитные – звездочками, если они направлены к наблюдателю, и кружками, если направлены от него.

13.4.2. Режим стоячих волн при полном отражении

Прямая волна испытывает отражение в линии передачи, когда на ее пути встречается неоднородность. Это может быть локальное изменение погонных параметров, например, ухудшение контакта между отдельными участками линии передачи, или резкое изменение геометрии проводников. Источником отражений на конце линии служит неравенство сопротивления нагрузки характеристическому сопротивлению линии передачи.

Полное отражение прямой волны от нагрузки ($|\Gamma| = 1$) имеет место, когда линия замкнута на конце ($Z_{\text{H}} = 0$), разомкнута на конце ($Z_{\text{H}} = \infty$) или нагружена на реактивное сопротивление ($Z_{\text{H}} = jX_{\text{H}}$). Если в линии существуют потери, то прямая и отраженная волны экспоненциально затухают по мере распространения и полная компенсация их полей может происходить только на конце линии. Когда же $\alpha = 0$, можно получить нулевые значения полей во всех узлах.

Рассмотрим однородную длинную линию без потерь ($\alpha = 0$).

1. Пусть линия замкнута на конце ($U_{\text{H}} = 0$). Для комплексных амплитуд напряжения и тока в сечении x , согласно (13.23),

$$\dot{U}(x) = j\dot{I}_{\text{H}} R_0 \sin \beta x, \quad \dot{I}(x) = \dot{I}_{\text{H}} \cos \beta x.$$

Мгновенные значения напряжения $U(x, t)$ и тока $I(x, t)$ с помощью стандартной процедуры приводятся к виду (рис. 13.9,а)

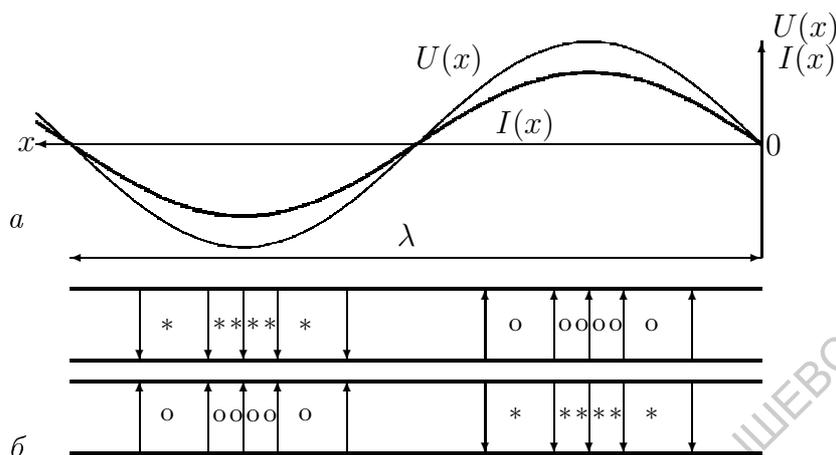


Рис. 13.8. Распределение $|\dot{U}(x)|$ и $|\dot{I}(x)|$ (а) и структура полей (б) в согласованной коаксиальной линии при $t = \text{const}$

$$U(x, t) = -I_H R_0 \sin \beta x \sin \omega t, \quad I(x, t) = I_H \cos \beta x \cos \omega t. \quad (13.30)$$

Соотношения (13.30) описывают колебания в распределенной системе.

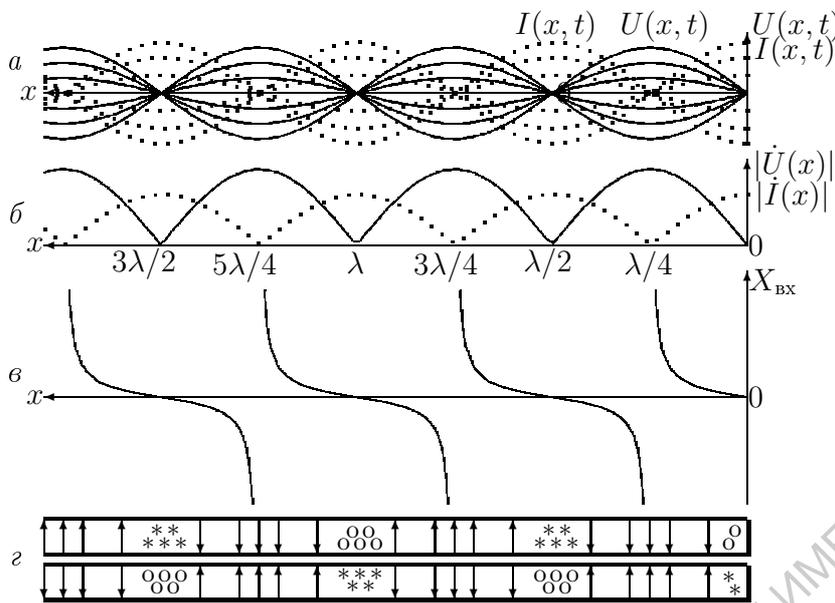


Рис. 13.9. Зависимости мгновенных значений (а), модулей комплексных амплитуд (б) напряжения и тока (пунктир), входного (реактивного) сопротивления (в) замкнутой на конце линии и структура полей в коаксиальной линии (г)

Напряжение и ток являются функциями двух переменных: времени t и координаты x . Однако структура соотношений (13.30) иная, чем у формулы (13.1), описывающей бегущие волны: напряжение и ток в (13.30) представляют произведения двух независимых функций, одна из которых зависит только от времени t , а другая – только от координаты x . Колебания не перемещаются вдоль линии передачи, и

средняя энергия, переносимую через сечение x за период колебаний T удовлетворяет соотношению:

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T U(x, t) I(x, t) dt = -\frac{I_H^2 R_0}{4T} \sin 2\beta x \int_0^T \sin 2\omega t dt = 0. \quad (13.31)$$

Таким образом, волна стоит, и соотношения (13.30) представляют математическую модель стоячей волны.

- Стоячие волны в отличие от бегущих волн не участвуют в распространении колебаний и переносе энергии.
- Напряжения и токи в узлах остаются нулевыми в любые моменты времени, а в пучностях изменяются с течением времени от $-U_{\text{макс}}$ до $U_{\text{макс}}$ или от $-I_{\text{макс}}$ до $I_{\text{макс}}$ (рис. 13.9, а), т.е. волна "дышит".
- Расстояния между пучностями напряжения и тока составляет $\lambda/4$, причем сечения узлов тока совпадают с пучностями напряжения, а узлы напряжения – с пучностями тока (рис. 13.9, б).
- Электрическое и магнитное поля изменяются аналогично $U(x, t)$ и $I(x, t)$ и сдвинуты во времени на четверть периода (рис. 13.9, г), т.е. при максимальной напряженности электрического поля напряженность магнитного поля равна нулю, и наоборот (электрические

силовые линии изображены стрелками, а магнитные силовые линии – звездочками, если они направлены к наблюдателю, и кружками, когда они направлены от него).

Чтобы понять, как распределяется энергия колебаний вдоль линии передачи в режиме стоячих волн, рассмотрим колебательные процессы в пучности напряжения ($\beta x_1 = \pi/2$) и двух соседних (справа $\beta x_2 = \pi/4$ и слева $\beta x_3 = 3\pi/4$) пучностях тока (рис. 13.9, б).

Пусть в момент времени t_1 ($\omega t_1 = \pi/2$) напряжение в сечении x_1 достигает максимума. Согласно (13.30) токи в любых сечениях линии отсутствуют, и вся энергия колебаний сосредоточена в электрическом поле ($W_э$). Для элемента линии длиной Δx имеем

$$\Delta W_э = C_1 \Delta x \frac{U^2(x, t)}{2} = C_1 \Delta x \frac{I_H^2 R_0^2}{2} \sin^2 \beta x \sin^2 \omega t.$$

С течением времени амплитуда напряжения начинает убывать. Это означает, что заряд перемещается в соседние сечения. Согласно (13.30) появляются и начинают расти токи в сечениях x_2 и x_3 . Когда напряжение в сечении x_1 обращается в нуль, токи в сечениях x_2 и x_3 достигают максимальных значений (направления токов противоположны) и вся энергия колебаний сосредоточивается в магнитном поле (W_m). Для элемента линии длиной Δx имеем

$$\Delta W_m = L_1 \Delta x \frac{I^2(x, t)}{2} = L_1 \Delta x \frac{I_H^2}{2} \sin^2 \beta x \sin^2 \omega t.$$

При этом $\Delta W_m = \Delta W_э$, так как $R_0^2 = L_1/C_1$. Итак, в течение четверти периода колебаний произошел полный переход энергии электрического поля в пучности напряжения в энергию магнитного поля в соседних пучностях тока. Перенесенную за четверть периода энергию можно рассчитать в соответствии с (13.31) по формуле

$$P_{cp} = \frac{1}{T/4} \int_0^{T/4} U(x, t) I(x, t) dt = -\frac{I_H^2 R_0}{T} \sin 2\beta x \int_0^{T/4} \sin 2\omega t dt = \frac{I_H^2 R_0}{T}.$$

В последующие моменты времени электрическая емкость в сечении x_1 перезаряжается, а токи в сечениях x_2 и x_3 уменьшаются до нуля. Напряжение в пучности изменяет знак и принимает максимальное значение. На этом цикл превращения электрической энергии в магнитную и обратно завершается. Он длится в течение полупериода волны, т.е. осуществляется с удвоенной частотой.

Входное сопротивление короткозамкнутого отрезка длиной линии, согласно (13.24), описывается соотношением

$$\dot{Z}_{вх}(x) = jR_0 \operatorname{tg} \beta x, \quad (13.32)$$

т.е. является реактивным. Зависимость $\dot{Z}_{вх}$ от x (рис. 13.9, в) показывает, что при длине x от $n\lambda/2$ до $(2n+1)\lambda/4$ входное сопротивление отрезка линии имеет индуктивный характер, а при $(2n+1)\lambda/4 \leq x \leq n+1\lambda/2$ – емкостный. При x кратном $n\lambda/2$ входное сопротивление равно нулю, т.е. закороченный отрезок эквивалентен последовательному LC -контуре.

При $x = (2n + 1)\lambda/4$ его $Z_{\text{вх}} \rightarrow \infty$ и отрезок линии эквивалентен параллельному LC -контуре.

Пусть теперь замкнутый на конце отрезок длиной линии обладает конечными потерями ($\alpha \neq 0$). Согласно (13.22) напряжение и ток в сечении x имеют вид

$$\dot{U}(x) = I_{\text{н}} R_0 \operatorname{sh} \dot{\gamma} x = I_{\text{н}} R_0 (\operatorname{sh} \alpha x \cos \beta x + j \operatorname{ch} \alpha x \sin \beta x),$$

$$\dot{I}(x) = I_{\text{н}} \operatorname{ch} \dot{\gamma} x = I_{\text{н}} (\operatorname{ch} \alpha x \cos \beta x + j \operatorname{sh} \alpha x \sin \beta x).$$

Рассмотрим амплитуды напряжения и тока. Тогда

$$U(x) = I_{\text{н}} R_0 \sqrt{\operatorname{sh}^2 \alpha x \cos^2 \beta x + \operatorname{ch}^2 \alpha x \sin^2 \beta x} = I_{\text{н}} R_0 \sqrt{(\operatorname{ch} 2\alpha x - \cos 2\beta x)/2},$$

$$I(x) = I_{\text{н}} \sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha x \cos^2 \beta x + \operatorname{sh}^2 \alpha x \sin^2 \beta x} = I_{\text{н}} \sqrt{(\operatorname{ch} 2\alpha x + \cos 2\beta x)/2}.$$

На рис. 13.10 изображены зависимости модулей напряжения и тока

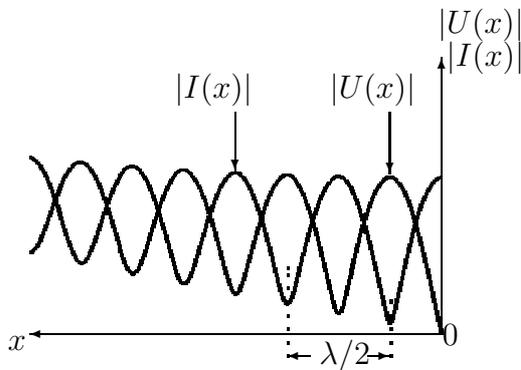


Рис. 13.10. Модули амплитуд напряжения и тока в закороченной на конце линии при $\alpha \neq 0$

стоячей волны в длинной линии при $\alpha \neq 0$. Поскольку прямая волна убывает по мере приближения к концу линии, а отраженная – при удалении от конца линии, модули коэффициентов отражения по напряжению и току (и КСВ) не остаются постоянными по длине линии. Амплитуды стоячих волн напряжения и тока достигают наибольших значений у конца линии, где модули коэффициентов отражения равны единице. Во всех других сечениях линии $|\Gamma| < 1$ и убывает с удалением от конца линии.

Как и в предыдущем случае, сечения максимумов напряжения (тока) и минимумов тока (напряжения) совпадают, причем уровень напряжения и тока в минимумах с удалением от нагрузки возрастает. Таким образом, структура стоячих волн в закороченной линии с потерями оказывается значительно более сложной, чем при отсутствии потерь.

Входное сопротивление отрезка линии зависит от его длины:

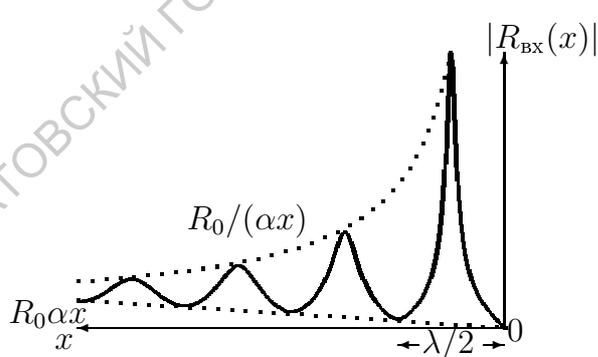


Рис. 13.11. Входное сопротивление закороченного отрезка линии при $\alpha \neq 0$

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = R_0 \operatorname{tg} \dot{\gamma} x = R_0 \frac{\operatorname{th} \alpha x + j \operatorname{tg} \beta x}{1 + j \operatorname{th} \alpha x \operatorname{tg} \beta x}.$$

В сечениях линии $x = n\lambda/2$ и $x = (2n + 1)\lambda/4$ оно имеет резистивный характер и изменяется от $R_{\text{вх}} = R_0 \operatorname{th} \alpha x \cong R_0 \alpha x$ до $R_{\text{вх}} = R_0 / \operatorname{th} \alpha x \cong R_0 / (\alpha x)$. Зависимость модуля входного сопротивления закороченного на конце отрезка линии с конечными потерями от длины x изображена на рис. 13.11.

2. В линии, разомкнутой на конце, $I_H = 0$, комплексные амплитуды напряжения и тока, согласно (13.23), имеют вид

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_H \cos \beta x, \quad \dot{I}(x) = j \frac{\dot{U}_H}{R_0} \sin \beta x,$$

а мгновенные значения напряжения и тока в произвольном сечении длиной линии удовлетворяют соотношениям

$$U(x, t) = U_H \cos \beta x \cos \omega t, \quad I(x, t) = -\frac{U_H}{R_0} \sin \beta x \sin \omega t. \quad (13.33)$$

Как и в предыдущем случае, распределение полей характеризуется наличием узлов и пучностей (рис. 13.12, а, б), т.е. существуют стоячие волны напряжения и тока, но теперь на конце линии располагается узел тока и пучность напряжения. Структура полей изображена на рис. 13.12, г. Входное сопротивление разомкнутого отрезка длиной линии (рис. 13.12, в) описывается соотношением

$$\dot{Z}_{\text{вх}}(x) = -j R_0 \operatorname{ctg} \beta x.$$

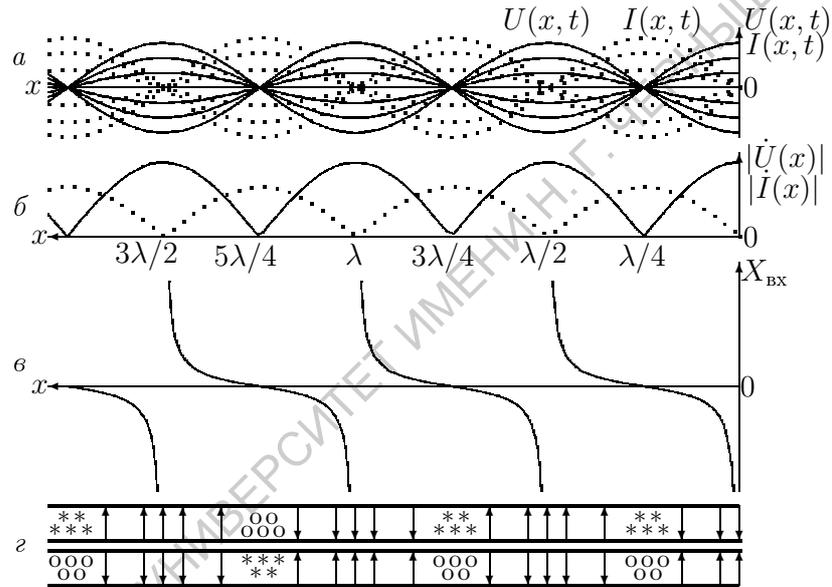


Рис. 13.12. Зависимости мгновенных значений (а), модулей (б) напряжения и тока (пунктир), входного сопротивления (в) и структура полей в разомкнутой коаксиальной линии (г)

3. Если линия нагружена на реактивное сопротивление $Z_H = jX_H$, то коэффициент отражения, согласно (13.20), имеет вид

$$\dot{\Gamma}_U = \frac{jX_H - R_0}{jX_H + R_0} = \frac{X_H^2 - R_0^2 + 2jX_H R_0}{X_H^2 + R_0^2}, \quad |\dot{\Gamma}_U| = \frac{\sqrt{(X_H^2 - R_0^2)^2 + 4X_H^2 R_0^2}}{X_H^2 + R_0^2} = 1.$$

Таким образом, происходит полное отражение прямой волны. Согласно (13.23) для комплексных амплитуд напряжения и тока имеем

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_H \left(\cos \beta x + \frac{R_0}{X_H} \sin \beta x \right), \quad \dot{I}(x) = \dot{I}_H \left(\cos \beta x - \frac{X_H}{R_0} \sin \beta x \right). \quad (13.34)$$

Обозначим $R_0/X_H = \operatorname{tg} \varphi_H$. Тогда $1/\cos \varphi_H = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_H} = \sqrt{1 + R_0^2/X_H^2}$, а комплексные амплитуды напряжения и тока принимают вид

$$\dot{U}(x) = \frac{\dot{U}_H}{\cos \varphi_H} (\cos \beta x \cos \varphi_H + \sin \beta x \sin \varphi_H) = \dot{U}_H \sqrt{1 + \frac{R_0^2}{X_H^2}} \cos(\beta x - \varphi_H),$$

$$\dot{I}(x) = j \frac{\dot{I}_H}{R_0} \sqrt{1 + \frac{R_0^2}{X_H^2}} \sin(\beta x - \varphi_H). \quad (13.35)$$

По сравнению с разомкнутой линией первый узел тока смещается

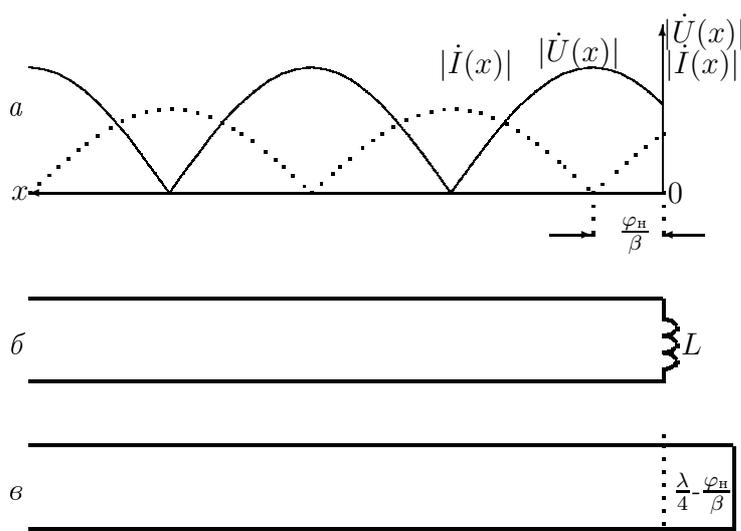


Рис. 13.13. Зависимости $|\dot{U}(x)|$ и $|\dot{I}(x)|$ (а) в линии с индуктивной нагрузкой (б) и замещение L закороченным отрезком линии (в)

от $x = 0$ на расстояние $x = \varphi_n/\beta$ (рис. 13.13, а). Смещение узлов (пучностей) легко проиллюстрировать, если заметить индуктивную нагрузку (рис. 13.13, б) эквивалентным отрезком закороченной линии, а емкостную нагрузку – отрезком разомкнутой линии. При этом на конце линии восстанавливается узел тока и пучность напряжения или наоборот, но линия удлиняется (рис. 13.13, в).

13.4.3. Режим стоячих волн при частичном отражении

Частичное отражение прямой волны происходит в длинной линии, нагруженной на активное сопротивление, отличное от характеристического, или на комплексное сопротивление. Оказывается достаточным всесторонне рассмотреть только первый случай, так как структура полей и свойства линии передачи во втором режиме отличаются от первого лишь смещением узлов и пучностей.

1. Режим стоячих волн в линии, нагруженной на активное сопротивление $R_n \neq R_0$, имеет ряд существенных особенностей. Прежде всего, коэффициенты отражения по напряжению и току (13.20) становятся вещественными. Рассмотрим два случая: $R_n < R_0$ и $R_n > R_0$.

$$\text{При } R_n < R_0 \quad |\Gamma_U| = \frac{R_0 - R_n}{R_0 + R_n}, \quad s = \frac{1 + |\Gamma_U|}{1 - |\Gamma_U|} = \frac{R_0}{R_n}.$$

$$\text{При } R_n > R_0 \quad |\Gamma_U| = \frac{R_n - R_0}{R_n + R_0}, \quad s = \frac{1 + |\Gamma_U|}{1 - |\Gamma_U|} = \frac{R_n}{R_0}.$$

Пусть $R_n < R_0$. Согласно (13.23) для комплексных амплитуд напряжения и тока имеем

$$\dot{U}(x) = U_n(\cos \beta x + j s \sin \beta x), \quad \dot{I}(x) = \frac{U_n}{R_0}(s \cos \beta x + j \sin \beta x), \quad (13.36)$$

а модули комплексных амплитуд $|\dot{U}(x)|$ и $|\dot{I}(x)|$ и входное сопротивление в сечении x удовлетворяют соотношениям

$$|\dot{U}(x)| = U_n \sqrt{\cos^2 \beta x + s^2 \sin^2 \beta x}, \quad |\dot{I}(x)| = \frac{U_n}{R_0} \sqrt{s^2 \cos^2 \beta x + \sin^2 \beta x}, \quad (13.37)$$

$$\dot{Z}_{\text{вх}}(x) = \frac{\dot{U}(x)}{\dot{I}(x)} = R_0 \frac{\cos \beta x + j s \sin \beta x}{s \cos \beta x + j \sin \beta x}. \quad (13.38)$$

Представляя $\dot{Z}_{\text{вх}}$ в виде суммы резистивной и реактивной составляющих, получим:

$$R_{\text{вх}}(x) = \frac{s R_0}{s^2 \cos^2 \beta x + \sin^2 \beta x}, \quad X_{\text{вх}}(x) = \frac{R_0 (s^2 - 1) \sin 2\beta x}{2(s^2 \cos^2 \beta x + \sin^2 \beta x)}. \quad (13.39)$$

Зависимости модулей комплексных амплитуд напряжения и тока от x для $s = 2, 5, 8$ изображены на рис. 13.14, а, б. Напряжение на нагрузке ($x = 0$) принимает минимальное значение $|\dot{U}(0)| = U_{\text{н}}$, а ток – максимальное $|\dot{I}(0)| = s U_{\text{н}} / R_0$. Зависимости $R_{\text{вх}}(x)$ и $X_{\text{вх}}(x)$ для тех же значений КСВ представлены на рис. 13.14, в, г соответственно. Согласно (13.39) резистивная составляющая сопротивления на рис. 13.14, в изменяется вдоль линии в s^2 раз: в сечениях, соответствующих максимумам амплитуды напряжения и минимумам амплитуды тока, $R_{\text{вх}} = s R_0$, а в сечениях, соответствующих минимумам амплитуды напряжения и максимумам амплитуды тока, $R_{\text{вх}} = R_0 / s$. Реактивная составляющая сопротивления в этих сечениях изменяется с емкостной на индуктивную и обратно. Скорость изменения $X_{\text{вх}}$ в сечениях, соответствующих максимумам амплитуды напряжения, в s^2 раз больше, чем в сечениях, соответствующих минимумам.

Если комплексные амплитуды напряжения и тока представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= U_{\text{н}} (\cos \beta x + j \sin \beta x) + j U_{\text{н}} (s - 1) \sin \beta x = U_{\text{н}} e^{j\beta x} + j U_{\text{н}} (s - 1) \sin \beta x, \\ \dot{I}(x) &= \frac{U_{\text{н}}}{R_0} (\cos \beta x + j \sin \beta x) + \frac{U_{\text{н}}}{R_0} (s - 1) \cos \beta x = \frac{U_{\text{н}}}{R_0} e^{j\beta x} + \frac{U_{\text{н}}}{R_0} (s - 1) \cos \beta x \end{aligned}$$

и, используя стандартную процедуру, перейти к вещественным функциям, то получим мгновенные значения напряжения и тока в виде суперпозиции бегущей и стоячей волн (В [16] такой режим называется режимом смешанных волн.):

$$\begin{aligned} U(x, t) &= U_{\text{н}} \cos(\omega t + \beta x) - U_{\text{н}} (s - 1) \sin \omega t \sin \beta x, \\ I(x, t) &= \frac{U_{\text{н}}}{R_0} \cos(\omega t + \beta x) + \frac{U_{\text{н}}}{R_0} (s - 1) \cos \omega t \cos \beta x, \end{aligned} \quad (13.40)$$

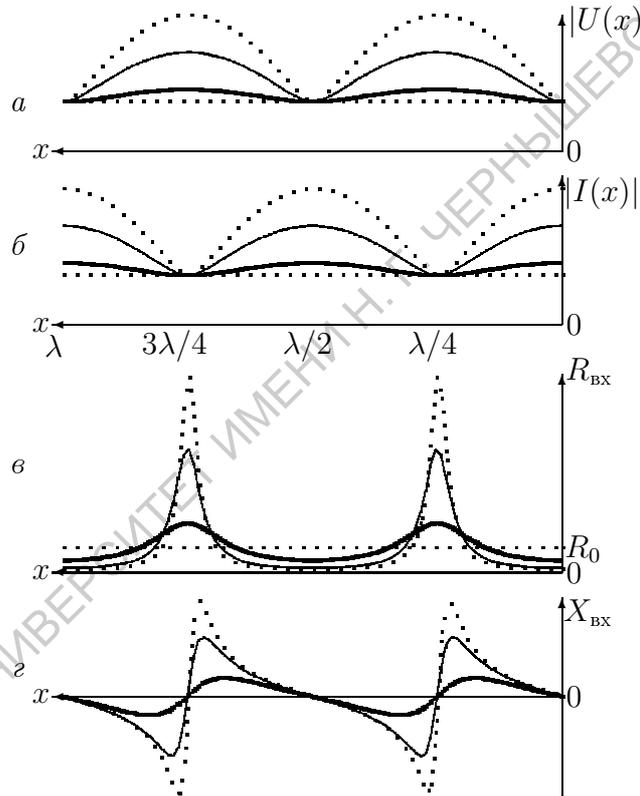


Рис. 13.14. Графики распределений $|\dot{U}(x)|$ (а), $|\dot{I}(x)|$ (б), $R(x)$ (в) и $X(x)$ (г) при $R_{\text{н}} = R_0/2$ (жирные линии), $R_{\text{н}} = R_0/5$ (тонкие линии) и $R_{\text{н}} = R_0/8$ (пунктирные линии). Пунктирные прямые соответствуют $R_{\text{н}} = R_0$

где минимальные значения $|\dot{U}(x)| = U_H$ и $|\dot{I}(x)| = U_H/R_0$ соответствуют амплитудам напряжения и тока бегущей волны.

Если $R_H > R_0$, то вместо (13.36) – (13.39) получим

$$\dot{U}(x) = I_H R_0 (s \cos \beta x + j \sin \beta x), \quad \dot{I}(x) = I_H (\cos \beta x + j s \sin \beta x),$$

$$|\dot{U}(x)| = I_H R_0 \sqrt{s^2 \cos^2 \beta x + \sin^2 \beta x}, \quad |\dot{I}(x)| = I_H \sqrt{\cos^2 \beta x + s^2 \sin^2 \beta x},$$

$$U(x, t) = I_H R_0 \cos(\omega t + \beta x) + I_H R_0 (s - 1) \cos \omega t \cos \beta x,$$

$$I(x, t) = I_H \cos(\omega t + \beta x) - I_H (s - 1) \sin \omega t \sin \beta x,$$

$$R_{\text{вх}}(x) = \frac{s R_0}{\cos^2 \beta x + s^2 \sin^2 \beta x}, \quad X_{\text{вх}}(x) = \frac{R_0 (s^2 - 1) \sin 2\beta x}{2(\cos^2 \beta x + s^2 \sin^2 \beta x)}.$$

Амплитуды напряжения и тока на нагрузке ($x = 0$) принимают соответственно максимальное ($|\dot{U}(0)| = s I_H R_0$) и минимальное ($|\dot{I}(0)| = I_H$) значения, причем минимальные значения $|\dot{U}(x)|$ и $|\dot{I}(x)|$ соответствуют амплитудам напряжения и тока бегущей волны.

Зависимости модулей комплексных амплитуд напряжения и тока от

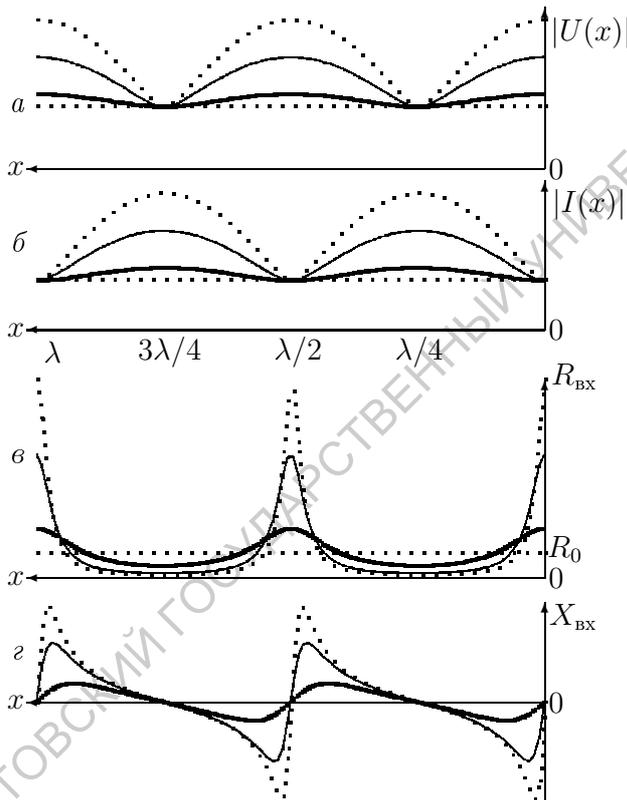


Рис. 13.15. Графики распределений $|\dot{U}(x)|$ (а), $|\dot{I}(x)|$ (б), $R(x)$ (в) и $X(x)$ (г) при $R_H = 2R_0$ (жирные линии), $R_H = 5R_0$ (тонкие линии) и $R_H = 8R_0$ (пунктирные линии). Пунктирные прямые соответствуют R_0 .

Мгновенные значения напряжения и тока в произвольном сечении линии можно найти, если известны КСВ s и напряжение на нагрузке U_H . На

x для $R_H = s R_0$ и $s = 2, 5, 8$ изображены на рис. 13.15, а, б, в, а зависимости $R_{\text{вх}}(x)$ и $X_{\text{вх}}(x)$ для тех же трех значений КСВ представлены на рис. 13.15, в, г соответственно.

Сравнение рис. 13.14 и 13.15 показывает, что существуют одинаковые закономерности в изменении параметров систем. Однако в случае $R_H > R_0$ на нагрузке располагаются максимумы амплитуды напряжения и резистивного входного сопротивления, а при $R_H < R_0$ – минимумы, т.е. зависимости на рис. 13.14 и 13.15 смещены на четверть длины волны. Отметим, что в обоих случаях входное сопротивление линии в максимумах и минимумах напряжения и тока имеют резистивный характер, а в окрестностях максимумов R существуют сечения линии, в которых $R_{\text{вх}} = R_0$.

В тех случаях, когда в линии

практике задается величина ЭДС источника сигнала U_0 , а напряжение на нагрузке следует определить. Если бы источник сигнала был согласован с линией передачи ($R_H = R_0$), в линии существовала бы только прямая волна, $U_H = U_0$, а мощность, рассеиваемая в нагрузке, составляла бы $P_0 = U_0^2/R_0$. Когда же линия согласована только с генератором, амплитуда напряжения в пучностях всегда превышает ЭДС сигнала.

Рассмотрим связь амплитуды напряжения в линии передачи с величиной мощности, поступающей в нагрузку при $R_0 = sR_H$.

Поскольку амплитуда напряжения отраженной волны $|U_{отр}| = |\dot{\Gamma}_U|U_0$, а ее мощность $P_{отр} = P_0|\dot{\Gamma}_U|^2$, в нагрузку поступает мощность $P_H = P_0(1 - |\dot{\Gamma}|^2)$. Величину $\eta = P_H/P_0$ часто называют *КПД линии передачи*.

Итак, для получения в нагрузке мощности P_H , на входе нужно задать мощность $P_0 = P_H/(1 - |\Gamma|^2)$. Отсюда $U_0 = \sqrt{2P_0R_0} = \sqrt{2P_HR_0/(1 - |\Gamma|^2)}$, а максимальная амплитуда напряжения в линии принимает вид

$$U_{\max} = |U_0|(1 + |\Gamma|) = \sqrt{2R_0 \frac{P_H}{1 - |\Gamma|^2}}(1 + |\Gamma|). \quad (13.41)$$

Пример. В линии с характеристическим сопротивлением 50 Ом необходимо передать в активную нагрузку с сопротивлением 150 Ом мощность 1 Вт.

Тогда коэффициент отражения равен $1/2$, КСВ = 3, в нагрузку поступает $3/4$ мощности источника сигнала. Мощность генератора P_0 составляет 1.33 Вт, а напряжение на нагрузке $U_H = \sqrt{2P_HR_H} = \sqrt{300} = 17.3$ В. Согласно (13.40) это наибольшее значение, которого достигает напряжение в пучностях волны. Выходное напряжение генератора составляет $U_0 = \sqrt{2P_0R_0} = \sqrt{133} = 11.53$ В.

2. Режим стоячих волн в линии, нагруженной на комплексное сопротивление $\hat{Z}_H = R_H + jX_H$, целесообразно рассмотреть, используя результаты предыдущего анализа и метод круговых диаграмм. Прежде всего введем приведенное сопротивление нагрузки $\hat{Z}_H = \hat{Z}_H/R_0 = \hat{R}_H + j\hat{X}_H$, используемое в методе круговых диаграмм (см. 13.3). Соответствующая этому приведенному сопротивлению точка на круговой диаграмме определяется пересечением окружностей \hat{R}_H и \hat{X}_H . В полярных координатах этой точке соответствует комплексный коэффициент отражения $|\Gamma_H|e^{j\varphi_\Gamma}$ (рис. 13.16) или КСВ s и фаза φ_Γ .

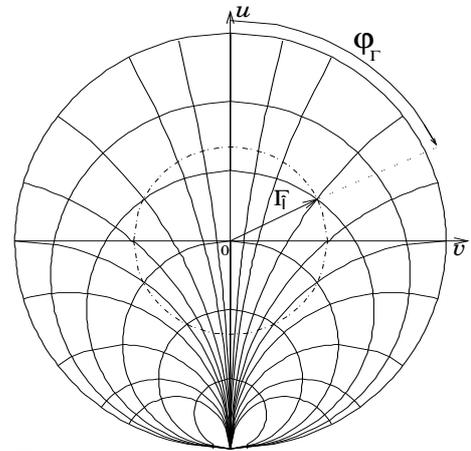


Рис. 13.16. Круговая диаграмма

Движение по окружности найденного КСВ до пересечения с линией нулевого реактивного сопротивления будет соответствовать перемещению в сечении, соответствующее максимуму или минимуму напряжения. Только в этих сечениях реактивная составляющая входного сопротивления обращается в нуль, а активная составляющая равна sR_0 или R_0/s . Если движение происходит по часовой стрелке, т.е. от нагрузки к генератору, то, не нарушая распределения тока и напряжения в остальных частях, отрезок линии длиной φ/β с комплексной нагрузкой \hat{Z}_H на конце можно заменить эквивалентным сопротивлением sR_0 или R_0/s . Когда

же вращение происходит против часовой стрелки, комплексное сопротивление нагрузки замещается дополнительным отрезком линии указанной длины с активным сопротивлением sR_0 или R_0/s на конце. Таким образом, длинную линию с комплексной нагрузкой всегда возможно заместить полностью эквивалентной удлиненной или укороченной (в зависимости от характера нагрузки) линией с тем же характеристическим сопротивлением, но с активным сопротивлением нагрузки (см. 13.4.3, п.1).

13.5. Практическое применение длинных линий

Основное применение длинных линий в современных радиосистемах связано с максимально полной передачей энергии от источника сигнала к нагрузке, поэтому линию передачи часто называют *фидером* (от англ. feed – питать). Основное требование, предъявляемое к фидеру, – высокий КПД. В реальных системах часть передаваемой мощности теряется из-за конечных сопротивлений проводов и утечки диэлектриков, а в открытых линиях передачи – еще и за счет излучения.

В идеальном случае, когда закрытая линия передачи (коаксиального или волноводного типа) лишена потерь, подводимая мощность полностью доходит до нагрузки только при условии согласования нагрузки с характеристическим сопротивлением.

13.5.1. Характеристические сопротивления линий передачи и их свойства

Характеристическое (волновое) сопротивление является основным параметром длинных линий.

- *Характеристическим сопротивлением линии* называется однозначно определяемое отношение напряжения к току в любой точке согласованной линии и представляет сопротивление, которое оказывает линия бегущей волне напряжения.

Характеристическое сопротивление линий тесно связано с волновым сопротивлением R среды, в которой распространяется волна. Как известно [11], волновое сопротивление среды R удовлетворяет соотношению

$$R = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}} = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}},$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1.256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$ и $\varepsilon_0 = 10^{-9}/36\pi \approx 8.86 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ – магнитная и электрическая постоянные; μ и ε – относительные магнитная и диэлектрическая проницаемости среды.

Характеристическое сопротивление линии передачи зависит от ее геометрических параметров, относительной диэлектрической проницаемости заполняющего диэлектрика и структуры полей. Аналитические выражения для характеристических сопротивлений распространенных линий передачи выводятся в ряде работ. Поэтому имеет смысл лишь привести полученные в них соотношения для пяти разновидностей длинных линий (см. рис. 13.1):

а) закрытый коаксиальный кабель (D, a – диаметры наружного и внутреннего цилиндров)

$$R_0 = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \frac{D}{a}, \text{ Ом}$$

(практически используемые коаксиальные кабели имеют характеристические сопротивления от 50 до 100 Ом, наиболее распространены коаксиальные кабели с $R_0 = 50$ Ом и $R_0 = 75$ Ом);

б) открытая и экранированная двухпроводные линии

$$R_0 = \frac{120}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \frac{d}{a}, \text{ Ом}, \quad R_0 = \frac{276}{\sqrt{\varepsilon}} \lg \left[\frac{d}{a} \cdot \frac{D^2 - d^2}{D^2 + d^2} \right], \text{ Ом},$$

где D – диаметр экрана;

в) симметричная полосковая линия ($2b$ – толщина диэлектрика)

$$R_0 \simeq \frac{200}{\sqrt{\varepsilon}(1 + 2\ell/b)} \left(1 - \frac{2\delta}{b}\right), \text{ Ом} \quad \text{при} \quad \frac{2\ell}{b} \leq 2,$$

$$R_0 \simeq \frac{200}{\sqrt{\varepsilon} \left[1 + \frac{2\ell}{b} \left(1 - \frac{2\delta}{b}\right)\right]}, \text{ Ом} \quad \text{при} \quad \frac{2\ell}{b} > 2;$$

г) несимметричная полосковая линия (h – толщина диэлектрика)

$$R_0 \simeq \frac{300}{\sqrt{\varepsilon}(1 + \ell/h)}, \text{ Ом} \quad \text{при} \quad \frac{\delta}{\ell} \leq 0.2,$$

где ℓ – ширина; δ – толщина электродов. Обычно полосковые линии изготавливают с теми же характеристическими сопротивлениями, что и коаксиальные кабели ($R_0 = 50$ Ом и $R_0 = 75$ Ом). Во всех приведенных формулах присутствует волновое сопротивление среды $120\pi/\sqrt{\varepsilon}$ (относительная магнитная проницаемость принята равной единице), но коэффициент 120π объединен с другими числовыми параметрами.

13.5.2. Согласование линий передачи с нагрузкой

Из-за несогласованности с нагрузкой в линии передачи могут возникнуть существенные потери мощности. С ростом коэффициента отражения или КСВ не только уменьшается КПД, но и растет напряжение в максимумах поля. Последнее в s раз превышает напряжение в минимумах, соответствующее режиму бегущей волны, что может привести к "пробою" изоляции между проводниками линии. Кроме того, увеличение амплитуд напряжения и тока приводит к возрастанию потерь. Для уменьшения амплитуды отраженных волн или полного их устранения разработаны разнообразные методы согласования.

- *Согласованием линии передачи* будем называть установление режима бегущих волн в результате преобразования комплексного сопротивления нагрузки в активное характеристическое сопротивление.

Преобразование сопротивлений достигается включением между нагрузкой и линией передачи дополнительного (согласующего) устройства. Это может быть четырехполюсник (*трансформатор сопротивлений*) или двухполюсник, обладающий реактивным сопротивлением, (*параллельный реактивный шлейф*).

Различают *узкополосное* (относительная полоса частот не более 1%) и *широкополосное* согласование (полоса частот составляет 10% и более). Задача согласования наиболее просто решается для одной определенной частоты с использованием резонансных согласующих устройств. Рассмотрим резонансные согласующие устройства подробнее.

1. Четвертьволновые трансформаторы. Пусть необходимо согласовать активную нагрузку R_H и линию передачи с характеристическим сопротивлением R_0 . Будем использовать для согласования отрезок линии длиной $\ell = (2n + 1)\lambda/4$ (четвертьволновый трансформатор) с характеристическим сопротивлением $R_{\text{ТР}}$. Длина трансформатора зафиксирована, поэтому можно варьировать только $R_{\text{ТР}}$. Согласно формуле (13.24) при условии $\dot{Z}_{\text{вх}} = R_0$ имеем

$$R_0 = R_{\text{ТР}} \frac{R_H + jR_{\text{ТР}} \operatorname{tg} \beta \lambda / 4}{R_{\text{ТР}} + jR_H \operatorname{tg} \beta \lambda / 4} = R_{\text{ТР}} \frac{\frac{R_H}{\operatorname{tg} \beta \lambda / 4} + jR_{\text{ТР}}}{\frac{R_{\text{ТР}}}{\operatorname{tg} \beta \lambda / 4} + jR_H} = \frac{R_{\text{ТР}}^2}{R_H}.$$

Отсюда характеристическое сопротивление четвертьволнового трансформатора $R_{\text{ТР}}$ принимает вид

$$R_{\text{ТР}} = \sqrt{R_0 R_H}. \quad (13.42)$$



Рис. 13.17. Согласование резистивной (а) и комплексной (б) нагрузок с помощью $\lambda/4$ -трансформатора

Согласование комплексной нагрузки и линии с помощью $\lambda/4$ -трансформатора оказывается более сложным. Как было показано, в линии передачи, нагруженной на сопротивление \dot{Z}_H , в сечениях, соответствующих максимальным и минимальным амплитудам напряжения и тока, реактивная составляющая входного сопротивления обращается в нуль и входное сопротивление является резистивным. Разрывая линию передачи в одном из таких сечений (рис.13.17,б) и включая в разрыв четвертьволновый трансформатор² с характеристическим сопротивлением, рассчитанным по формуле (13.42), можно обеспечить согласование комплексной нагрузки с линией передачи.

Четвертьволновые трансформаторы часто используются при соединении одностипных линий передачи с различными характеристическими сопротивлениями.

² Согласующие устройства желательно располагать вблизи нагрузки, чтобы большая часть линии передачи работала в режиме бегущей волны.

2. Полуволновые трансформаторы. Отрезок линии с произвольным характеристическим сопротивлением длиной $\ell = n\lambda/2$ ($\beta\ell = n\pi$), согласно (13.24), обеспечивает $\dot{Z}_{\text{вх}} = \dot{Z}_{\text{н}}$, т.е. является трансформатором сопротивлений с единичным коэффициентом трансформации на частоте $\omega = \frac{2\pi}{\lambda}v_{\text{ф}}$. Полуволновые трансформаторы незаменимы в тех случаях, когда комплексное сопротивление необходимо "перенести" из одного сечения системы в другое без изменения его величины, например при согласовании вибраторов.

2.1. Согласование полуволновых вибраторов с коаксиальным кабелем. Простейший вибратор может быть выполнен в виде двух расположенных по одной прямой проводников одинаковой длины и формы, к смежным концам которых подводится фидер. Если электрическая длина вибратора равняется половине длины волны, то вибратор называется *симметричным полуволновым электрическим вибратором* или просто *симметричным вибратором* (рис. 13.18, а). Вибратор, имеющий форму рамки, концы которой подключаются к фидеру называется *магнитным вибратором*. Если рамка образована близко расположенными (на малом по сравнению с длиной волны расстоянии) полуволновыми вибраторами (рис. 13.18, б), то вибратор называется *петлеобразным полуволновым вибратором* или *вибратором Пистелькорса* [14].



Рис. 13.18. Согласование электрического (а) и магнитного (б) полуволновых вибраторов

Согласование симметричного электрического вибратора. Анализ поля излучения симметричного вибратора показывает, что его входное сопротивление составляет $R_{\text{вибр}} = 73.1$ Ом. На ранних стадиях развития радиосвязи симметричные полуволновые вибраторы запитывались двухпроводными линиями с близким к этой величине характеристическим сопротивлением. При этом возбуждение полувибраторов симметрируется и согласующие устройства необязательны. Описанное возбуждение имело массу недостатков. Во-первых, открытые линии излучают энергию. Когда длина волны значительно больше расстояния между проводами, излучение мало, но все же существует. При передаче большой мощности возникали дополнительные потери, связанные с короной вокруг проводов, и КПД системы еще понижался.

Использование коаксиальных линий передачи позволило преодолеть большинство описанных трудностей, но вместе с тем вызвало новые проблемы. Дело в том, что провода коаксиального кабеля неравноправны, так как наружная оплетка его всегда заземляется. Это вызывает несимметричное возбуждение вибратора, ухудшающее КПД антенной системы и значительно искажающее распределение поля.

Полное симметрирование вибратора при питании от коаксиального кабеля возможно при использовании четвертьволновых трансформаторов (см. рис. 13.18, а). Введем плоскость симметрии вибратора. Сопротивления каждого полувибратора относительно плоскости симметрии равно $R_{\text{вибр}}/2 = 36.5$ Ом. Если полувибраторы (нагрузки) соединять с общим фидером с характеристическим сопротивлением $R_0 = 75$ Ом через четвертьволновые трансформаторы, представляющие отрезки кабеля с тем же R_0 , то их входные сопротивления будут равны $R_{\text{вх}} = R_0^2 / (R_{\text{вибр}}/2) = 154.1$ Ом, а параллельное сопротивление, нагружающее коаксиальную линию передачи, составит 77 Ом, что соответствует КСВ в кабеле $s = R_{\text{вх}}/2R_0 = 1.027$. Чтобы оба полувибратора запитывались от потенциального провода в противофазе электрические длины

трансформаторов должны отличаться на $\lambda/2$, т.е. $\lambda/4$ и $3\lambda/4$.

Согласование петлеобразного магнитного вибратора. Анализ поля излучения петлеобразного вибратора показывает, что его входное сопротивление составляет $R_{\text{петл}} = 292 \text{ Ом}$. Вводя плоскость симметрии вибратора (рис. 13.26,б), можно получить для каждого полувибратора сопротивление относительно плоскости симметрии $R_{\text{петл}}/2 = 146 \text{ Ом}$. Если один из полувибраторов соединить с коаксиальной линией передачи с $R_0 = 75 \text{ Ом}$ непосредственно, а другой - через полуволновый трансформатор, то будет обеспечено противофазное запитывание полувибраторов, а параллельное соединение сопротивлений, нагружающее фидер, составит 73 Ом , что соответствует КСВ $s = 2R_0/2R_{\text{петл}} = 1.027$.

3. Параллельные реактивные шлейфы. Метод согласования, основанный на использовании реактивных двухполюсников, включаемых параллельно в линию передачи на некотором расстоянии от нагрузки, был предложен в 1929г. российским ученым В.В.Татариновым [15].

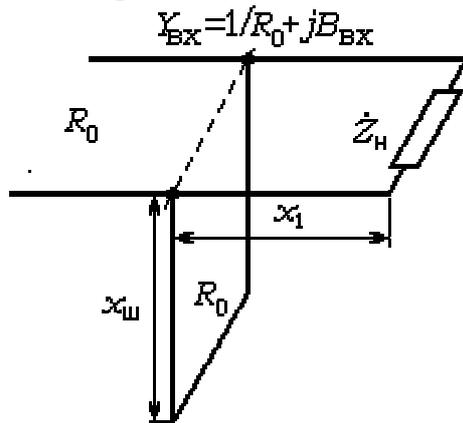


Рис. 13.19. Согласование с помощью шлейфа

Идея метода состоит в определении такого сечения линии передачи x , в котором резистивная составляющая входного сопротивления $Z_{\text{вх}}$ равна характеристическому сопротивлению линии, и подключения в этом сечении двухполюсника, компенсирующего реактивную составляющую $Z_{\text{вх}}$ (рис. 13.19). В качестве такого двухполюсника целесообразно использовать короткозамкнутый или разомкнутый на конце отрезок линии передачи, обладающий реактивным сопротивлением и называемый *шлейфом*. На практике чаще всего используются короткозамкнутые шлейфы.

Условие согласования комплексной нагрузки с активным характеристическим сопротивлением линии с помощью параллельного реактивного шлейфа имеет вид

$$Y_{\text{вх}} + jB_{\text{ш}} = G_0 \quad \text{или}$$

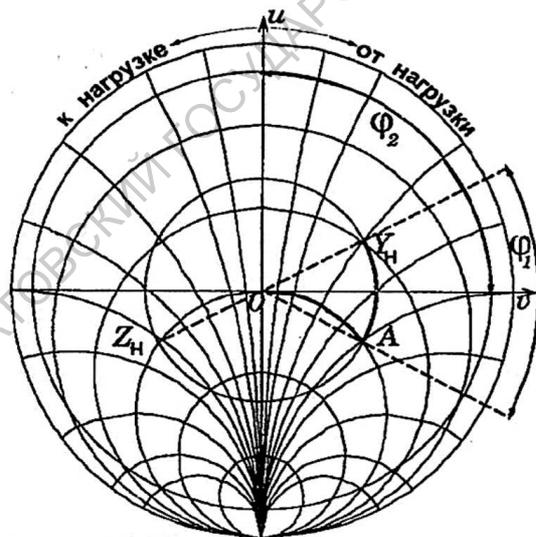
$$\frac{1}{R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}}} + \frac{1}{jX_{\text{ш}}} = \frac{1}{R_0}, \quad (13.43)$$

где $R_{\text{вх}} + jX_{\text{вх}} = Z_{\text{вх}}$ определяется по формуле (13.24), а входное сопротивление короткозамкнутого шлейфа длиной $x_{\text{ш}}$ - по формуле (13.32):

$$jX_{\text{ш}} = jR_0 \text{tg} \beta x_{\text{ш}}.$$

Записывая (13.43) для действительных и мнимых составляющих, получаем два уравнения относительно двух неизвестных: расстояния x от нагрузки до сечения, в котором включается шлейф (см.рис. 13.19), и длины шлейфа $x_{\text{ш}}$. Параметры согласующего шлейфа можно также определить с помощью круговых диаграмм. Для этого на круговой диаграмме (рис. 13.20) из точки, соответствующей приведенной нагрузке Z_n строится диаметрально противоположная точка, отвечающая приведенной проводимости нагрузки \hat{Y}_n .

Рис. 13.20. Круговая диаграмма для определения x и $x_{\text{ш}}$



Окружность с центром в точке $u=0, v=0$, проходящая через эти точки, соответствует $|\Gamma_U| = \text{const}$. Поворот радиуса-вектора точки \hat{Y}_H на угол φ_1 до пересечения (точка А) с окружностью $R = 1$ (или $G = 1$), соответствует перемещению вдоль линии на расстояние $x = \lambda\varphi_1/4\pi$ от нагрузки до сечения линии, где $\hat{Y}_{вх} = 1 + jB$. Получаем координаты места включения шлейфа, а точка пересечения линии $jB = \text{const}$ с внешней окружностью диаграммы позволяет определить длину шлейфа $x_{ш} = \lambda\varphi_2/4\pi$.

Необходимость находить оптимальное для согласования место включения шлейфа создает серьезные конструктивные трудности. Более удобной оказалась согласующая система из двух неподвижных шлейфов переменной длины. Первый шлейф подключается вблизи нагрузки, а второй на расстоянии $3\lambda/8$. Какова бы не была приведенная проводимость нагрузки \hat{Y}_H , ее реактивную составляющую можно так изменить с помощью первого шлейфа, чтобы $G = 1$ в сечении, где включен второй шлейф. Изменяя длину второго шлейфа, можно компенсировать существующую в этом сечении реактивную проводимость и тем самым обеспечить режим согласования.

4. Принципы широкополосного согласования. К широкополосным согласующим устройствам относятся плавные переходы (рис. 13.21, а) и ступенчатые трансформаторы (рис. 13.21, б) в виде каскадного соединения отрезков линий передачи.

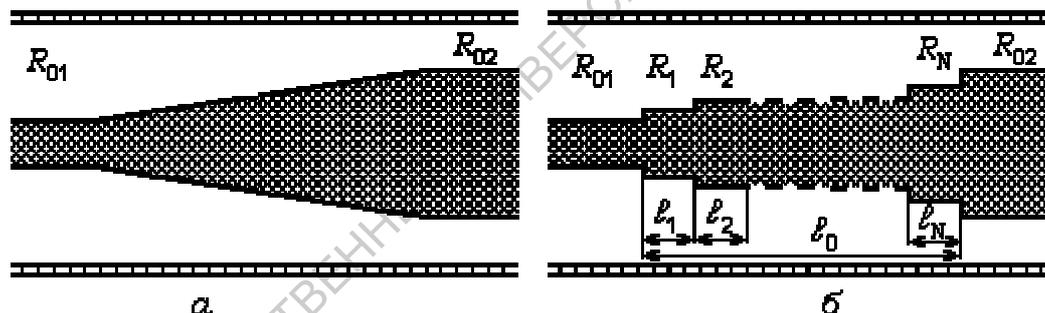


Рис. 13.21. Широкополосные согласующие переходы: а – плавный; б – в виде ступенчатого трансформатора

Каждый отрезок линии выступает в роли четвертьволнового трансформатора, а их каскадное соединение расширяет частотный диапазон, в котором происходит согласование. При этом полное согласование в полосе частот получить не удастся и оно достигается лишь на отдельных частотах диапазона. Коэффициент отражения в диапазоне частот можно существенно уменьшить, варьируя длины и характеристические сопротивления отдельных элементов. В ряде случаев для качественного согласования в стыки отрезков длинных линий помещаются дополнительные реактивные шлейфы.

13.5.3. Длинные линии в качестве линий задержки и формирователей импульсов

Устройства, предназначенные для временной задержки сигналов при малых искажениях их формы, называются *линиями задержки*. Чаще всего осуществляется задержка на постоянное время. Для реализации

пикосекундных или наносекундных интервалов задержки целесообразно использовать отрезки согласованных линий передачи (обычно коаксиальных). Типичная коаксиальная линия с диэлектрическим заполнением ($\sqrt{\epsilon} = 1.5$) обеспечивает задержку $t_3 = l/v_\phi = 5$ нс/м. Для увеличения t_3 используются специальные линии передачи с большими значениями относительных проницаемостей ϵ и μ среды заполнения или акустические (ультра- или гиперзвуковые) линии задержки.

В тех случаях, когда вносимая задержка должна быть регулируемой, создаются так называемые *механические фазовращатели* в виде соединения двух отрезков коаксиального кабеля, один из которых может перемещаться относительно другого.

Линии задержки являются основным элементом формирователей сверхкоротких прямоугольных импульсов.

Пусть отрезок линии длиной l (рис. 13.22) лишен запасов энергии

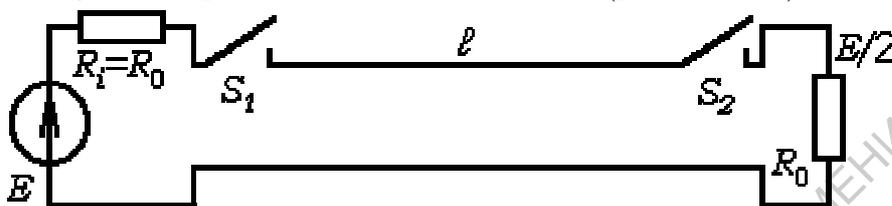


Рис. 13.22. Отрезок линии в схеме формирования прямоугольных импульсов

и может подключаться с помощью ключа S_1 к источнику постоянного напряжения E с внутренним сопротивлением $R_i = R_0$,

а с помощью ключа S_2 – к согласованной нагрузке $R_n = R_0$. При замыкании ключа S_1 на входе линии возникает возбуждение в виде функции Хевисайда $\sigma(t)$ (рис. 13.23, а), которое распространяется со скоростью v_ϕ в сторону нагрузки.

В линии возникает волна тока с амплитудой $I_m = E/(R_i + R_0) = E/2R_0$ и волна напряжения с амплитудой $U_m = E/2$. За время $\tau/2 = l/v_\phi$ они достигают разомкнутого конца (рис. 13.23, б) и отражаются ($\Gamma_U = 1$, $\Gamma_I = -1$). По мере распространения отраженной волны напряжение в линии принимает величину E , а ток становится равным нулю. По истечении времени $\tau = 2l/v_\phi$ линия заряжается до напряжения E и волновой процесс заканчивается. Размыкание ключа S_1 и замыкание ключа S_2 вызывает появление на согласованной нагрузке скачка напряжения $U_n = ER_n/(R_0 + R_n) = E/2$ (рис. 13.23, в), который в виде волн напряжения

и тока направляется к разомкнутому входу линии. Происходит процесс, аналогичный уже рассмотренному, т.е. на нагрузке формируется импульс с амплитудой $E/2$ и длительностью $\tau = 2l/v_\phi$ (рис. 13.23, г).

Таким образом, рассмотренную систему принципиально возможно использовать в качестве формирователя нано- или пикосекундных прямоугольных импульсов, если ее относительно медленно зарядить через резистор с большим сопротивлением, а затем с помощью радиоэлектронной схемы, например тиристорной, сформировать короткий видеоимпульс.

Таким образом, рассмотренную систему принципиально возможно использовать в качестве формирователя нано- или пикосекундных прямоугольных импульсов, если ее относительно медленно зарядить через резистор с большим сопротивлением, а затем с помощью радиоэлектронной схемы, например тиристорной, сформировать короткий видеоимпульс.

Таким образом, рассмотренную систему принципиально возможно использовать в качестве формирователя нано- или пикосекундных прямоугольных импульсов, если ее относительно медленно зарядить через резистор с большим сопротивлением, а затем с помощью радиоэлектронной схемы, например тиристорной, сформировать короткий видеоимпульс.

Таким образом, рассмотренную систему принципиально возможно использовать в качестве формирователя нано- или пикосекундных прямоугольных импульсов, если ее относительно медленно зарядить через резистор с большим сопротивлением, а затем с помощью радиоэлектронной схемы, например тиристорной, сформировать короткий видеоимпульс.

Таким образом, рассмотренную систему принципиально возможно использовать в качестве формирователя нано- или пикосекундных прямоугольных импульсов, если ее относительно медленно зарядить через резистор с большим сопротивлением, а затем с помощью радиоэлектронной схемы, например тиристорной, сформировать короткий видеоимпульс.

Таким образом, рассмотренную систему принципиально возможно использовать в качестве формирователя нано- или пикосекундных прямоугольных импульсов, если ее относительно медленно зарядить через резистор с большим сопротивлением, а затем с помощью радиоэлектронной схемы, например тиристорной, сформировать короткий видеоимпульс.

Таким образом, рассмотренную систему принципиально возможно использовать в качестве формирователя нано- или пикосекундных прямоугольных импульсов, если ее относительно медленно зарядить через резистор с большим сопротивлением, а затем с помощью радиоэлектронной схемы, например тиристорной, сформировать короткий видеоимпульс.

Таким образом, рассмотренную систему принципиально возможно использовать в качестве формирователя нано- или пикосекундных прямоугольных импульсов, если ее относительно медленно зарядить через резистор с большим сопротивлением, а затем с помощью радиоэлектронной схемы, например тиристорной, сформировать короткий видеоимпульс.

Таким образом, рассмотренную систему принципиально возможно использовать в качестве формирователя нано- или пикосекундных прямоугольных импульсов, если ее относительно медленно зарядить через резистор с большим сопротивлением, а затем с помощью радиоэлектронной схемы, например тиристорной, сформировать короткий видеоимпульс.

Основной недостаток такого формирователя – ограниченная мощность импульсов. Малая погонная индуктивность линий передачи не позволяет накапливать большие мощности. Отсюда и мощность формируемого импульса чрезвычайно мала.

13.5.4. Длинные линии в качестве колебательных систем

На высоких и сверхвысоких частотах создание колебательных контуров из элементов с сосредоточенными параметрами становится затруднительным (трудно создать катушки индуктивности с малыми L и конденсаторы малой емкости), а подчас и просто невыполнимым. На таких частотах в качестве колебательных систем целесообразно использовать отрезки длинных линий.

Как было показано, в длинных линиях в режиме стоячих волн происходит периодический переход энергии электрического поля в энергию магнитного поля и обратно, т.е. отрезок длинной линии в режиме стоячих волн ведет себя как резонансная колебательная система.

Резонансными свойствами обладают любые короткозамкнутые на концах (рис. 13.24, *а*), закороченные на одном конце (рис. 13.24, *б*) или разомкнутые (рис. 13.24, *в*) отрезки длинной линии. Длина закороченного на

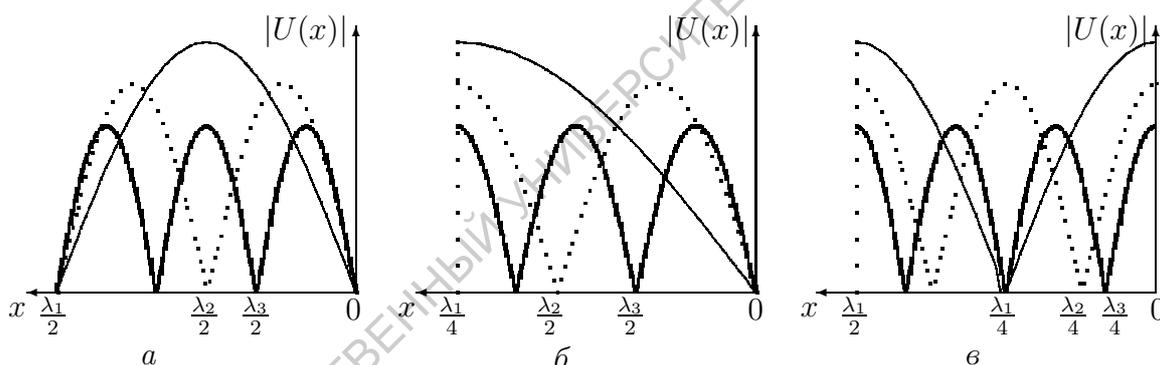


Рис. 13.24. Распределение полей в закороченном на концах (*а*), замкнутом на одном конце (*б*) и разомкнутом на концах (*в*) отрезке длинной линии: $n=1$ (нижний тип колебаний) – тонкие линии; $n=2$ – пунктирные линии, $n=3$ – жирные линии

концах или разомкнутого отрезка ℓ (например, диэлектрического волновода) должна быть кратной целому числу полуволн $\lambda/2$:

$$\ell = n\lambda/2 = n\pi v_{\Phi}/\omega_{0n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

а замкнутого на одном конце – нечетному числу $\lambda/4$:

$$\ell = (2n - 1)\lambda/4 = (2n - 1)\pi v_{\Phi}/2\omega_{0n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Таким образом, отрезок длинной линии как резонансная система обладает бесконечным числом *собственных волн*, соответствующих различным значениям n . Каждая собственная волна возбуждается колебанием с определенной частотой ω_{0n} , которую в дальнейшем будем называть *резонансной*:

$$\omega_{0n} = n\pi v_{\Phi}/\ell, \quad \omega_{0n} = (2n - 1)\pi v_{\Phi}/2\ell. \quad (13.44)$$

Важнейшим параметром колебательной системы является ее добротность. Определяя добротность как отношение полного запаса энергии в колебательной системе к мощности потерь за период, получим для n -й собственной частоты резонатора:

$$Q_n = \omega_{0n} \frac{W_n}{P_{\text{пот}}}, \quad \text{где} \quad W_n = \frac{L_1}{2} \int_0^\ell I_n^2(x) dx, \quad P_{\text{пот}} = \frac{R_1}{2} \int_0^\ell I_n^2(x) dx,$$

L_1 и R_1 – погонные индуктивность и сопротивление линии. Тогда с учетом (13.44) для закороченной или разомкнутой на концах линии имеем

$$Q_n = \frac{n\pi v_\phi L_1}{\ell R_1} = \frac{n\pi L_1}{\ell R_1 \sqrt{L_1 C_1}} = \frac{n\pi R_0}{\ell R_1}, \quad (13.45)$$

для закороченной на одном конце линии

$$Q_n = \frac{(2n-1)\pi v_\phi L_1}{2\ell R_1} = \frac{(2n-1)\pi L_1}{2\ell R_1 \sqrt{L_1 C_1}} = \frac{(2n-1)\pi R_0}{2\ell R_1}.$$

Можно провести аналогию между распределенными колебательными системами и колебательными контурами с сосредоточенными параметрами. Короткозамкнутый на одном конце отрезок линии обладает входным сопротивлением $R_{\text{вх}} = R_0 \alpha n \lambda / 2$, т.е. эквивалентен последовательному колебательному контуру, когда $\ell = n\lambda/2$, и $R_{\text{вх}} = R_0 / (\alpha(2n-1)\lambda/4)$, т.е. эквивалентен параллельному контуру, когда $\ell = (2n-1)\lambda/4$.

Резонаторы в виде линий, замкнутых (разомкнутых) на концах, трудно вводить в реальные схемы. Более удобны коаксиальные резонаторы с емкостным зазором на конце (рис. 13.25). Поскольку короткозамкнутая линия длиной $\ell < \lambda/4$ обладает индуктивным сопротивлением, то будучи нагруженной на емкость зазора, она образует колебательный контур. Коаксиальный резонатор с емкостным зазором на конце в отличие от обычного LC -контра имеет бесконечное число различных резонансных частот.

Запишем условия резонанса в коаксиальном резонаторе с емкостным

зазором для проводимостей

$$\frac{1}{jR_0 \operatorname{tg} \beta \ell} + j\omega C_{\text{заяз}} = 0.$$

Обозначая $\beta \ell$ через ξ и учитывая, что $\omega R_0 = \omega \sqrt{L_1/C_1} = \beta/C_1$, где L_1 и C_1 – погонные параметры, получим:

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{A}{\xi} = \frac{\ell C_1 / C_{\text{заяз}}}{\xi}.$$

Это – трансцендентное уравнение, которое можно приближенно решить численным или графическим методом. На рис. 13.26 жирными кривыми изображена функция $\operatorname{tg} \xi$, а тонкой линией – функция A/ξ .

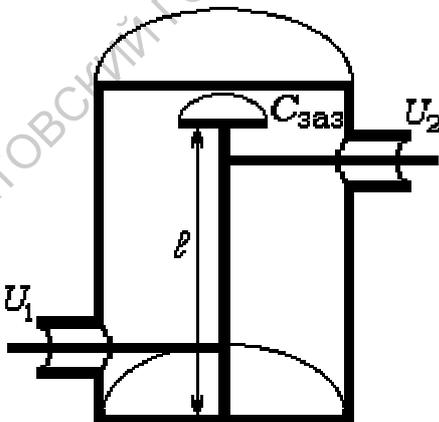


Рис. 13.25. Коаксиальный резонатор с емкостным зазором

Резонансные частоты, соответствующие точкам пересечения кривых, удовлетворяют равенству

$$\omega_{0n} = \frac{\xi_n}{\ell \sqrt{L_1 C_1}},$$

и в соответствии с рис. 13.26 реальные длины резонаторов оказываются короче $(2n - 1)\lambda/4$. Действительно, резонатор в виде закороченного на концах отрезка линии должен обладать длиной $n\lambda/2$. Поскольку емкости эквивалентны закороченный отрезок линии протяженностью от $\lambda/4$ до $\lambda/2$, длина резонатора оказывается меньше $(2n - 1)\lambda/4$ и при $n = 1$ приближается к $\lambda/8$. В связи с этим емкость $C_{\text{зав}}$ называют укорачивающей. Обычно коаксиальный резонатор имеет два вывода (см. рис. 13.25) для подключения источника сигнала и съема выходного напряжения.

Коаксиальную линию можно превратить в резонатор, не только закорачиванием на концах, но и сворачивая линию в кольцо. Условием резонанса в этом случае будет равенство электрической длины кольца целому числу полуволн, а добротность резонатора будет определяться формулой (13.45).

* * *

При написании книги автор стремился включать только апробированные модели, математические описания которых хорошо разработаны и имеют заверченный характер. По этим соображениям представлялось нецелесообразным рассматривать дискретные преобразования Фурье и Лапласа, импульсную модуляцию сигналов, а также популярные в настоящее время методы вейвлетного и фрактального описания сигналов.

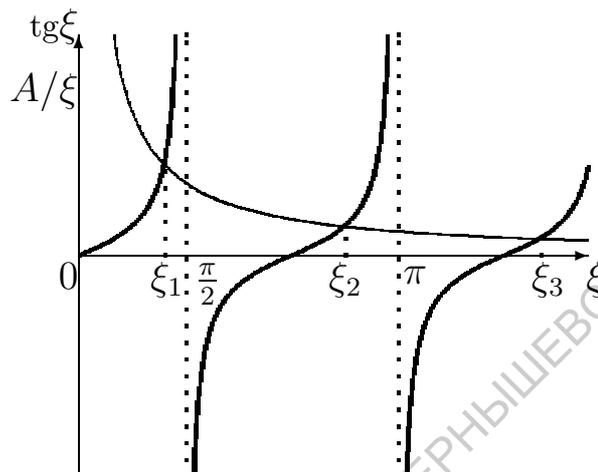


Рис. 13.26. Графическое решение трансцендентного уравнения

Список литературы

1. *Калинин В.И., Герштейн Г.М.* Введение в радиофизику: Учеб.пособие/ Под ред. В.И.Калинина. М.: Гостехиздат, 1957.
2. *Мандельштам Л.И.* Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972.
3. *Справочник по теоретическим основам радиоэлектроники/* Под ред. Б.Х.Кривицкого: В 2 т. М.: Энергия, 1977.
4. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах: Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах. М.: Наука, 1990.
5. *Основы радиофизики/* Г.В.Белокопытов, К.С.Ржевкин, А.А.Белов и др./ Под ред. Ф.С.Логгинова. М.: Изд-во УРСС, 1966.
6. *Френкс Л.* Теория сигналов/ Пер. с англ. М.: Сов.радио, 1974
7. *Сиберт У.М.* Цепи, сигналы, системы: В 2 ч./ Пер. с англ. М.: Мир, 1988.
8. *Харкевич А.А.* Спектры и анализ. 4-е изд. М.: Физматгиз, 1962.
9. *Мэзон С., Циммерман Г.* Электронные цепи, сигналы и системы/ Пер. с англ. М.: Изд-во иностр.лит., 1963.
10. *Теоретические основы электротехники.* В 3 т.: Учебник для вузов. 4-е изд./ К.С.Демирчян, Л.Р.Нейман, Н.В.Коровкин, В.Л.Чечерин. СПб.: Питер, 2003.
11. *Матханов П.Н.* Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. М.: Высш.шк., 1990.
12. *Демирчян К.С.* Аналитическое решение уравнений состояния электрических цепей. М.: Изд-во ИВТАН, 1983.
13. *Фолькенберри Л.* Применение операционных усилителей и линейных ИС/ Пер. с англ.; Под ред. М.В.Гальперина. М.: Мир, 1985.
14. *Марков Г.Е., Сазонов Д.М.* Антенны: Учебник для вузов. 2-е изд. М.: Энергия, 1975.
15. *Татаринов В.В.* Антенные резонанс-трансформаторы// Вестн. электротехники. 1930. N.4.
16. *Каяцкас А.А.* Основы радиоэлектроники. М.: Высш. шк., 1988

Оглавление

Введение	3
----------------	---

I РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ **8**

1 Информация, сообщения, сигналы	9
1.1. Общие сведения о радиотехнических сигналах	9
1.2. Классификация сигналов	10
1.2.1. Детерминированные и случайные сигналы	10
1.2.2. Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы	12
1.2.3. Импульсные сигналы	13
1.2.4. Функция включения Хевисайда и дельта-функция Дирака	14
1.3. Интегральные представления сигналов	16
1.3.1. Разложение сигналов по функциям Хевисайда	17
1.3.2. Разложение сигналов по функциям Дирака	18
1.4. Гармонические колебания	19
1.4.1. Вещественное представление гармонических колебаний	19
1.4.2. Энергетические характеристики гармонических колебаний	21
1.4.3. Комплексное представление гармонических колебаний	22
1.4.4. Энергетические характеристики комплексных гармонических колебаний	23
2 Спектральное представление периодических колебаний	26
2.1. Математическая постановка проблемы	26
2.2. Спектральное разложение в базисе гармонических функций	28
2.2.1. Разложение в тригонометрические ряды Фурье	28
2.2.2. Амплитудно-фазовая формулировка ряда Фурье	29
2.2.3. Представление ряда Фурье в комплексной форме	30
2.2.4. Спектр последовательности прямоугольных видеоимпульсов	32
3 Спектральное представление непериодических сигналов	36
3.1. Интегральное преобразование Фурье	36
3.1.1. Переход от ряда Фурье к интегралу Фурье. Спектральная функ- ция	36
3.1.2. Прямое и обратное преобразования Фурье	38
3.2. Спектральные плотности интегрируемых сигналов	40
3.2.1. Спектральная плотность экспоненциального видеоимпульса	40
3.2.2. Спектральная плотность гауссова импульса	40
3.2.3. Спектральная плотность δ -функции Дирака	42

3.2.4.	Спектральная плотность прямоугольного видеоимпульса	43
3.2.5.	"Иерархия" спектральных функций видеоимпульсов	44
3.2.6.	Связь длительности сигнала и ширины его спектра	46
3.3.	Основные свойства спектров и теоремы о спектрах	47
3.3.1.	Корреляционный анализ сигналов и энергетические спектры	51
3.4.	Спектральные плотности неинтегрируемых сигналов	54
3.4.1.	Спектральные плотности функций Хевисайда, $1/\pi t$ и постоянного сигнала	54
3.4.2.	Спектральные плотности периодических сигналов и суперпозиций периодических и непериодических сигналов	56
3.4.3.	Спектральная плотность последовательности δ -импульсов	58
3.5.	Спектральные плотности радиоимпульсов	59
3.5.1.	Спектральные плотности одиночных радиоимпульсов	59
3.5.2.	Спектры периодических последовательностей радиоимпульсов	61
3.5.3.	Ширина спектра однотональных колебаний конечной длительности	63
4	Преобразование Лапласа	64
4.1.	Прямое и обратное преобразование Лапласа	64
4.2.	Основные свойства преобразований Лапласа	66
4.3.	Определение оригиналов по изображениям	68
4.3.1.	Восстановление оригиналов L-изображений с простыми полюсами	70
4.3.2.	Восстановление оригиналов L-изображений с кратными полюсами	71
5	Модулированные колебания и их спектры	75
5.1.	Амплитудно-модулированные сигналы	76
5.1.1.	Однотональное АМ-колебание и его свойства	77
5.1.2.	Многотональные АМ-колебания	79
5.2.	Фазо- и частотно-модулированные сигналы	82
5.2.1.	Однотональные ФМ- и ЧМ-сигналы	83
5.2.2.	Спектральное представление УМ-сигналов с малым индексом модуляции	84
5.2.3.	Спектральное представление УМ-сигналов с произвольным индексом модуляции	86
5.2.4.	Структура спектров УМ-сигналов при негармонической модуляции	89
5.2.5.	Радиоимпульсы с линейной частотной модуляцией и их спектры	90
5.3.	Телевизионные сигналы и их спектры	93
5.3.1.	Пространственные спектры изображений и временные спектры телевизионных сигналов	93
5.3.2.	Принципы формирования сигналов изображения и полосы частот телевизионных сигналов	97
5.3.3.	Передача телевизионных сигналов по радиоканалам	100
6	Узкополосные сигналы и их спектры	101
6.1.	Вещественные модели узкополосных сигналов	101
6.2.	Комплексное представление узкополосных сигналов	104
6.2.1.	Физическая огибающая узкополосного сигнала и ее свойства	105

6.2.2.	Взаимная связь спектральных плотностей узкополосного сигнала и его комплексной огибающей	106
6.3.	Аналитический сигнал	107
6.3.1.	Свойства преобразований Гильберта	107
6.3.2.	Спектральная плотность аналитического сигнала	108
6.3.3.	Аналитические сигналы и низкочастотное представление узкополосных колебаний	109

II ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ И СИСТЕМ 111

7	Методы описания и расчета радиочепей	112
7.1.	Общие сведения о радиоэлектронных цепях и системах	112
7.2.	Элементы радиоэлектронных цепей	116
7.2.1.	Сопротивления и резисторы	116
7.2.2.	Электрические емкости и конденсаторы	118
7.2.3.	Индуктивности и катушки индуктивности. Связанные индуктивности	120
7.2.4.	Независимые источники напряжения и тока	122
7.2.5.	Зависимые (управляемые) источники напряжения и тока	123
7.2.6.	Идеализированные операционные усилители как управляемые источники напряжения	124
7.2.7.	Дуальная эквивалентность радиоэлектронных элементов	125
7.3.	Методы расчета линейных цепей	126
7.3.1.	Топология цепей	126
7.3.2.	Метод топологических графов	127
7.3.3.	Метод направленных сигнальных графов	129
7.3.4.	Метод контурных токов	131
7.3.5.	Метод узловых напряжений	134
7.3.6.	Особенности применения методов контурных токов и узловых напряжений	138
7.4.	Описание цепей методом переменных состояния	139
8	Методы описания линейных радиосистем	142
8.1.	Временные характеристики линейных систем	142
8.1.1.	Переходные характеристики	143
8.1.2.	Импульсные характеристики	144
8.2.	Анализ линейных систем в частотной области	146
8.2.1.	Собственные функции оператора линейной системы	146
8.2.2.	Частотные характеристики цепей и систем	147
8.2.3.	Логарифмические единицы отношений и логарифмические частотные характеристики	149
8.2.4.	Системные функции цепей	151
8.2.5.	Определение откликов линейных систем на произвольные воздействия через комплексные и операторные функции	153
8.3.	Основы теории четырехполосников	154
8.3.1.	Матричные уравнения линейных четырехполосников. Первичные параметры	154
8.3.2.	Вторичные параметры четырехполосников	157
8.3.3.	Согласование четырехполосников. Характеристические параметры	158

8.3.4. Эквивалентные схемы линейных пассивных четырехполюсников	161
III ФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ И СИСТЕМАХ	164
9 Дифференцирование и интегрирование радиосигналов	165
9.1. Дифференциальные уравнения инерционных цепей	165
9.2. Фазосдвигающие RC -цепи и активные системы	169
9.3. Дифференцирующие и интегрирующие устройства	170
10 Колебания в одноконтурных резонансных цепях	173
10.1. Дифференциальное уравнение LCR -контура и его решение	174
10.2. Собственные колебания в LCR -контуре	175
10.2.1. Собственные колебания в контуре без потерь	175
10.2.2. Собственные колебания в контуре с малым затуханием	176
10.2.3. Аперiodические процессы при критическом и закритическом затухании	178
10.2.4. Основные параметры колебательных систем	179
10.2.5. Дифференциальное уравнение LCR -контура в безразмерном виде	180
10.3. Графическое представление колебаний на фазовой плоскости	181
10.3.1. Структура фазового пространства	181
10.3.2. Фазовые портреты консервативных LC -контуров	182
10.3.3. Фазовые портреты диссипативных LCR -контуров	183
10.4. Вынужденные колебания в LCR -контурах	185
10.4.1. Последовательные и параллельные контуры. Дуальные колебательные системы	186
10.4.2. Колебания тока и напряжения на емкости при импульсных воздействиях	187
10.4.3. Вынужденные колебания в LCR -контуре при гармонических воздействиях	190
10.4.4. Резонансные явления в последовательном LCR -контуре. Резонанс напряжений	193
10.4.5. Резонансные явления в параллельном LCR -контуре. Резонанс токов	196
10.5. Уравнения резонансных кривых. Избирательность контура	199
11 Физические процессы в многоконтурных радиосистемах	201
11.1. Парциальные подсистемы и матричные модели	201
11.1.1. N -контурные связанные системы	203
11.1.2. Двухконтурные системы с реактивной связью	205
11.2. Связанные колебания	210
11.2.1. N -контурные системы без потерь	210
11.2.2. N -контурные системы с потерями	213
11.2.3. Трехконтурная LC -система с емкостной связью	214
11.2.4. Двухконтурная LC -система с трансформаторной связью	217
11.3. Вынужденные колебания в связанных системах	222
11.4. Резонансные явления в двухконтурных системах	224
11.4.1. Замещение двухконтурных систем эквивалентными одиночными контурами	224
11.4.2. Условия резонанса и резонансные частоты	226

11.4.3. Передаточные функции и амплитудно-частотные характеристики двухконтурных систем	229
11.4.4. Индивидуальный, полный и сложные резонансы	232
12 Частотная селекция радиосигналов	236
12.1. Основные понятия и определения	236
12.2. Основы теории частотной селекции	237
12.2.1. Условия пропускания и задерживания <i>LC</i> - и <i>RC</i> -фильтров. Частоты среза	238
12.2.2. Уравнения частотных характеристик	240
12.2.3. Характеристические сопротивления. Проблемы согласования	241
12.3. Фильтры нижних частот	243
12.3.1. <i>LC</i> -фильтры нижних частот типа <i>k</i>	243
12.3.2. <i>LC</i> -фильтры нижних частот типа <i>m</i>	244
12.3.3. <i>RC</i> -фильтры нижних частот	245
12.4. Фильтры верхних частот	246
12.4.1. <i>LC</i> -фильтры верхних частот	247
12.4.2. <i>RC</i> -фильтры верхних частот	248
12.5. Полосовые и заграждающие фильтры	249
12.5.1. Структура полосовых и заграждающих <i>LC</i> -фильтров	249
12.5.2. Частотные характеристики полосовых <i>LC</i> -фильтров	250
12.5.3. Частотные характеристики заграждающих <i>LC</i> -фильтров	252
12.5.4. Полосовые и заграждающие <i>RC</i> -фильтры	253
12.6. Многозвенные фильтры	255
12.7. Электрические фильтры как линии задержки	257
13 Волновые и колебательные процессы	258
13.1. Распределенные системы и волновые процессы	258
13.1.1. Основные виды радиочастотных линий передачи	258
13.1.2. Бегущие волны. Фазовая и групповая скорости. Дисперсия	259
13.2. Основы теории длинных линий	261
13.2.1. Квazистационарная модель линии	261
13.2.2. Дифференциальные уравнения длинной линии и их решение	263
13.2.3. Характеристики волновых процессов	265
13.3. Круговые диаграммы полных сопротивлений	268
13.4. Основные режимы работы радиочастотных линий передачи	270
13.4.1. Режим бегущих волн	270
13.4.2. Режим стоячих волн при полном отражении	271
13.4.3. Режим стоячих волн при частичном отражении	276
13.5. Практическое применение длинных линий	280
13.5.1. Характеристические сопротивления линий передачи и их свойства	280
13.5.2. Согласование линий передачи с нагрузкой	281
13.5.3. Длинные линии в качестве линий задержки и формирователей импульсов	285
13.5.4. Длинные линии в качестве колебательных систем	287
Список литературы	290